Simulado 1 SMA304 - Gabarito

Questão 1. Considere os polinômios:

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= 1 + x + 3x^2 + x^3,\\
p_2(x) &= 1 + 2x^2 + x^3,\\
p_3(x) &= 4 + x + 9x^2 + 4x^3,\\
p_4(x) &= 2 + 2x + 8x^2 + 2x^3
\end{aligned}$$

e seja S o subespaço vetorial de $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ gerado por $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$. Pode-se afirmar que:

( ) Existem dois vetores de S linearmente independentes que geram S.

(x) Existe um $q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $\{q, p_2, p_3, p_4\}$ é LI.

( ) $S = \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

( ) Existe um $q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ tal que $\{p_1, p_2, p_3, q\}$ é LI.

( ) O conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ gera S.

( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Solução: Analisemos a depedência linear dos vetores: p_1, p_2, p_3, p_4. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(1 + x + 3x^2 + x^3) + \beta(1 + 2x^2 + x^3) + \gamma(4 + x + 9x^2 + 4x^3) + \delta(2 + 2x + 8x^2 + 2x^3) = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$(\alpha + \beta + 4\gamma + 2\delta) + (\alpha + \gamma + 2\delta)x + (3\alpha + 2\beta + 9\gamma + 8\delta)x^2 + (\alpha + \beta + 4\gamma + 2\delta)x^3 = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

e isso implica que $\begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma + 2\delta = 0 \\ \alpha + \gamma + 2\delta = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + 9\gamma + 8\delta = 0 \\ \alpha + \beta + 4\gamma + 2\delta = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma + 2\delta = 0 \\ -\beta - 3\gamma = 0 \\ -\beta - 3\gamma + 2\delta = 0 \\ 0 = 0. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \beta = -3\gamma \\ \delta = 0, \\ \text{com } \gamma \in \mathbb{R}. \end{cases}$

Logo, p_1, p_2, p_3, p_4 são vetores LD.

Notemos que

$$p_3(x) = 4 + x + 9x^2 + 4x^3 = 1(1 + x + 3x^2 + x^3) + 3(1 + 2x^2 + x^3) = 1 \cdot p_1(x) + 3 \cdot p_2(x).$$

Logo, o conjunto $\{p_1, p_2, p_3\}$ não gera S e $S = [\{p_1, p_2, p_3, p_4\}] = [\{p_1, p_2, p_4\}]$.

Analisemos a depedência linear dos vetores: p_1, p_2, p_4. Sejam $\alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(1 + x + 3x^2 + x^3) + \beta(1 + 2x^2 + x^3) + \delta(2 + 2x + 8x^2 + 2x^3) = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$(\alpha + \beta + 2\delta) + (\alpha + 2\delta)x + (3\alpha + 2\beta + 8\delta)x^2 + (\alpha + \beta + 2\delta)x^3 = 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

e isso implica que $\begin{cases} \alpha+\beta+2\delta=0 \\ \alpha+2\delta=0 \\ 3\alpha+2\beta+8\delta=0 \\ \alpha+\beta+2\delta=0. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta+2\delta=0 \\ -\beta=0 \\ -\beta+2\delta=0 \\ 0=0. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \delta=0. \end{cases}$

Logo, p_1, p_2, p_4 são vetores LI e isso implica que não existem dois vetores de S linearmente independentes que geram S.

Defina $q(x) = x^3$. Analisemos a depedência linear dos vetores q, p_2, p_3, p_4. Sejam α, β, γ, $\delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(x^3) + \beta(1+2x^2+x^3) + \gamma(4+x+9x^2+4x^3) + \delta(2+2x+8x^2+2x^3) = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Portanto,

$$(\beta+4\gamma+2\delta) + (\gamma+2\delta)x + (2\beta+9\gamma+8\delta)x^2 + (\alpha+\beta+4\gamma+2\delta)x^3 = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}$$

e isso implica que $\begin{cases} \beta+4\gamma+2\delta=0 \\ \gamma+2\delta=0 \\ 2\beta+9\gamma+8\delta=0 \\ \alpha+\beta+4\gamma+2\delta=0. \end{cases} \iff \begin{cases} \beta+4\gamma+2\delta=0 \\ \gamma+2\delta=0 \\ \gamma+4\delta=0 \\ \alpha=0. \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \\ \gamma=0 \\ \delta=0. \end{cases}$

Assim, q, p_2, p_3, p_4 são vetores LI. Em particular $q \notin [\{p_2, p_3, p_4\}] = [\{p_1, p_2, p_4\}]$, ou seja $S \neq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

Questão 2. Considerando o espaço vetorial $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ munido com as operações

$$\begin{aligned} (x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 y_2) \\ a \odot (x, y) &= (ax, y^a), \end{aligned}$$

em que $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ e $a \in \mathbb{R}$, fazemos as seguintes afirmações:

(a) $(1,4), (1,2), (3,16)$ são vetores linearmente dependentes.

(b) $\{(0,1)\}$ é um conjunto linearmente independente.

Podemos afirmar que:

( ) As afirmações (a) e (b) são verdadeiras.

(x) Somente a afirmação (a) é verdadeira.

( ) Somente a afirmação (b) é verdadeira.

( ) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

Solução: Com relação ao item (a), vejamos por exemplo que

$$\begin{aligned} (1,4) \oplus [2 \odot (1,2)] &= (1,4) \oplus [(2 \cdot 1, 2^2)] = (1,4) \oplus (2,4)] \\ &= (1+2, 4 \cdot 4) = (3,16), \end{aligned}$$

o que mostra que $(1,4), (1,2), (3,16)$ são vetores linearmente dependentes.

Com relação ao item (b), vejamos que

$$a \odot (0,1) = (a \cdot 0, 1^a) = (0,1)$$

para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Portanto, $\{(0,1)\}$ é um conjunto linearmente dependente.

Questão 3. Considerando $v_1 = (1,3,5)$, $v_2 = (2,m,n)$ e $v_3 = (m+n, 2, m-2)$ vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ (munido com as operações usuais de soma e produto por escalar), fazemos as seguintes afirmações:

(a) v_1 e v_2 são vetores linearmente independentes se, e somente se, $m \neq 6$ ou $n \neq 10$.

(b) v_2 e v_3 são vetores linearmente dependentes se, e somente se, $m = 2$ e $n = 0$.

Podemos afirmar que:

(x) As afirmações (a) e (b) são verdadeiras.

( ) Somente a afirmação (a) é verdadeira.

( ) Somente a afirmação (b) é verdadeira.

( ) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

Solução: Vejamos que v_1 e v_2 serão linearmente dependentes se, e somente se, existir $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $v_1 = a \cdot v_2$. Assim,

$$(1,3,5) = a \cdot (2,m,n) = (2a, ma, na)$$

de modo que $a = 1/2$ e com isso $m = 6$ e $n = 10$.

Ainda, vejamos que v_2 e v_3 serão linearmente dependentes se, e somente se, existir $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $v_3 = b \cdot v_2$. Assim, v_2 e v_3 são linearmente dependentes se, e somente se,

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad \exists\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } (m+n, 2, m-2) = b \cdot (2,m,n) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } (m+n, 2, m-2) = (2b, mb, nb) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } m+n = 2b, 2 = mb \text{ e } m-2 = nb \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } mb+nb = 2b^2, 2 = mb \text{ e } m-2 = nb \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } m = mb+nb = 2b^2, m = 2/b \text{ e } n = (m-2)/b \\
&\Leftrightarrow \quad \exists\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ tal que } 2b^2 = 2/b, m = 2b^2, m = 2/b \text{ e } n = (m-2)/b \\
&\Leftrightarrow \quad b = 1, m = 2 \text{ e } n = 0.
\end{aligned}$$

Questão 4. Consideremos as seguintes afirmações:

(a) $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) \,|\, x, y \in \mathbb{R}\}$ munido com as operações

$$\begin{aligned}
(x_1, y_1) \oplus (x_2, y_2) &= (x_1 + x_2, y_1 + 2y_2) \\
a \odot (x,y) &= (ax, ay)
\end{aligned}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

(b) $W = \{(x, 2y, 3z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ quando consideramos este último munido com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar.

Podemos afirmar que:

( ) As afirmações (a) e (b) são verdadeiras.

( ) Somente a afirmação (a) é verdadeira.

(x) Somente a afirmação (b) é verdadeira.

( ) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

Solução: Com relação ao item (a), vejamos que, por exemplo, a operação de soma apresentada não satisfaz a propriedade comutativa para todos os elementos de $\mathbb{R}^2$. Com efeito,

$$(0,1) \oplus (0,2) = (0+0, 1+2\cdot 2) = (0,5) \neq (0,4) = (0+0, 2+2\cdot 1) = (0,2) \oplus (0,1).$$

Portanto, $\mathbb{R}^2$ munido com as operações dadas não é um espaço vetorial.

Já com relação ao item (b), vejamos que

- $(0,0,0) = (0, 2\cdot 0, 3\cdot 0) \in W$;
- Dados $(x_1, 2y_1, 3z_1), (x_2, 2y_2, 3z_2) \in W$ e $a \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} a\cdot(x_1, 2y_1, 3z_1) + (x_2, 2y_2, 3z_2) &= (a\cdot x_1, a\cdot 2y_1, a\cdot 3z_1) + (x_2, 2y_2, 3z_2) \\ &= (a\cdot x_1, 2\cdot ay_1, 3\cdot az_1) + (x_2, 2y_2, 3z_2) \\ &= (a\cdot x_1 + x_2, 2ay_1 + 2y_2, 3az_1 + 3z_2) \\ &= (a\cdot x_1 + x_2, 2(ay_1 + y_2), 3(az_1 + z_2)) \in W. \end{aligned}$$

Dos itens acima, temos que W é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Questão 5. Considere em $\mathbb{R}^3$ as seguintes operações:

$$(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3),$$
$$\alpha \cdot (x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, x_3),$$

onde $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

É correto afirmar que:

( ) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ é um espaço vetorial pois a soma é igual à soma usual em $\mathbb{R}^3$.

( ) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ não é um espaço vetorial pois $u + (v + w) \neq (u + v) + w$ para algum $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

( ) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ não é um espaço vetorial pois $\alpha \cdot (\beta \cdot u) \neq (\alpha\beta) \cdot u$ para algum $u \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(x) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ não é um espaço vetorial pois $(\alpha + \beta) \cdot u \neq \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ para algum $u \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

( ) $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ não é um espaço vetorial pois $\alpha \cdot (u + v) \neq \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ para algum $u, v \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Solução: Como $+$ é a soma usual de $\mathbb{R}^3$, então, para quaisquer $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, valem

(A0) $u + v \in \mathbb{R}^3$;

(A1) $u + v = v + u$;

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$;

(A3) $0 = (0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ tal que $u + 0 = u$;

(A4) Para todo $u \in \mathbb{R}^3$ existe um $\widetilde{u} \in \mathbb{R}^3$ tal que $u + \widetilde{u} = 0$.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Temos

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (\beta \cdot u) &= \alpha \cdot (\beta x_1, \beta x_2, x_3) = (\alpha(\beta x_1), \alpha(\beta x_2), x_3)\\ &= ((\alpha\beta)x_1), (\alpha\beta)x_2, x_3) = (\alpha\beta) \cdot u\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\alpha \cdot (u + v) &= \alpha \cdot (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3) = (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), x_3 + y_3)\\ &= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, x_3 + y_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, x_3) + (\alpha y_1, \alpha y_2, y_3)\alpha \cdot u + \alpha \cdot v.\end{aligned}$$

Sejam $\alpha = 3$, $\beta = 2$ e $u = (0, 0, 1)$. Temos

$$\begin{aligned}(\alpha + \beta) \cdot u &= 5 \cdot (0, 0, 1) = (0, 0, 1)\\ \alpha \cdot u + \beta \cdot u &= 3 \cdot u + 2 \cdot u = (0, 0, 1) + (0, 0, 1) = (0, 0, 2).\end{aligned}$$

Logo, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathbb{R}^3$ tais que $(\alpha + \beta) \cdot u \neq \alpha \cdot u + \beta \cdot u$.

Notemos que isso implica que $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ não é um espaço vetorial.

Questão 6. Considerando $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$ vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ (munido com as operações usuais de soma e produto por escalar), fazemos as seguintes afirmações:

(a) $(x, y, 0) \in [v_1, v_2]$ e $(x, y, z) \in [v_1, v_3]$ para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$.

(b) $(x, x, y) \in [v_2, v_3]$ e $(x, y, z) \in [v_1, v_2, v_3]$ para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Podemos afirmar que:

( ) As afirmações (a) e (b) são verdadeiras.

( ) Somente a afirmação (a) é verdadeira.

(x) Somente a afirmação (b) é verdadeira.

( ) Nenhuma das afirmações é verdadeira.

Solução: Com relação ao item (a), vejamos por exemplo que $(0, 0, 1) \notin [v_1, v_3]$. Com efeito, não existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0, 0, 1) = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 1)$$

pois o sistema

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ b = 0 \\ b = 1 \end{cases}$$

não possui solução.

Já com relação ao item (b), vejamos que dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, existem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, y, z) = a(1, 0, 0) + b(1, 1, 0) + c(1, 1, 1) \ (*)$$

o que mostra que $(x, y, z) \in [v_1, v_2, v_3]$. Com efeito, vejamos que a afirmação $(*)$ é equivalente a termos uma solução para o sistema

$$\begin{cases} a + b + c = x \\ b + c = y \\ c = z \end{cases}.$$

Ainda, vejamos que dados $x, y \in \mathbb{R}$, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, x, y) = a(1, 1, 0) + b(1, 1, 1)$$

pois o sistema

$$\begin{cases} a + b = x \\ a + b = x \\ b = y \end{cases}$$

possui solução.

Questão 7. Considere as seguintes afirmações:

(I) Sejam $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a + d = b + c \right\}$ e $T = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \right]$ subespaços vetoriais do espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então $T \subset S$ e $T \neq S$.

(II) Sejam $A = \{1, \mathrm{sen}^2 t, \cos^2 t, \mathrm{sen} t \cos t\}$ e $B = \{1, \mathrm{sen} 2t, \cos 2t\}$ dois subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Então $[B] \subset [A]$, mas $[A] \neq [B]$.

(III) $(x, y, z, w) \in [\{(1, -1, -2, 1), (-1, 0, 2, 2)\}]$ se, e somente se $2x + z = 0$ e $2x + 3y + w = 0$.

Então

( ) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

( ) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

( ) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

(x) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

( ) (I), (II) e (III) são falsas.

Solução:

(I) Sejam $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid a+d = b+c \right\}$ e $T = \left[\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} \right]$ subespaços vetoriais do espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então $T \subset S$ e $T \neq S$.

Defina $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. É fácil ver que $A \in S$ e $B \in S$. Como S é um subespaço vetorial, segue que $\alpha A + \beta B \in S$ para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Logo, $T \subset S$.

Por outro lado, defina $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. É claro que $C \in S$. Determinemos se existe ou não $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $C = \alpha A + \beta B$, ou seja, determinemos se existe ou não $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Isto ocorre se, e somente se, $\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\beta = 1 \\ 3\beta = -1 \\ -\alpha + 4\beta = 0. \end{cases}$ e este sistema linear é impossível. Logo, $C \notin T$ e a afirmativa (I) é verdadeira.

(II) Sejam $A = \{1, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t, \operatorname{sen} t \cos t\}$ e $B = \{1, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t\}$ dois subconjuntos de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Então $[B] \subset [A]$, mas $[A] \neq [B]$.

Recordemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2t &= 2 \operatorname{sen} t \cos t, \quad t \in \mathbb{R} \\ \cos 2t &= \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, $B \subset [A]$. Como $[A]$ é um subespaço vetorial, segue que $\alpha f + \beta g \gamma h \in [A]$ para todos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, onde

$$f(t) = 1, \quad g(t) = \operatorname{sen} 2t, \quad h(t) = \cos 2t, \quad t \in \mathbb{R}$$

Logo, $[B] \subset [A]$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} t \cos t &= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ \cos^2 t &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ \operatorname{sen}^2 t &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, $A \subset [B]$. Como $[B]$ é um subespaço vetorial, segue que $[A] \subset [B]$. Logo, $[A] = [B]$ e a afirmativa (II) é falsa.

(III) $(x, y, z, w) \in [\{(1, -1, -2, 1), (-1, 0, 2, 2)\}]$ se, e somente se $2x + z = 0$ e $2x + 3y + w = 0$.

$(x, y, z, w) \in [\{(1, -1, -2, 1), (-1, 0, 2, 2)\}]$

$\iff$ existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $(x, y, z, w) = \alpha(1, -1, -2, 1) + \beta(-1, 0, 2, 2)$

$\iff$ existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\begin{cases} \alpha - \beta = x \\ -\alpha = y \\ -2\alpha + 2\beta = z \\ \alpha + 2\beta = w \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ -\alpha = y \\ -2\alpha + 2\beta = z \\ \alpha + 2\beta = w \end{cases}$ possui solução

$\iff \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ -\beta = x + y \\ 0 = 2x + z \\ 3\beta = w - x \end{cases}$ possui solução $\iff \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ -\beta = x + y \\ 0 = 2x + z \\ 0 = w - x + 3x + 3y \end{cases}$ possui solução

$\iff \begin{cases} 0 = 2x + z \\ 0 = 2x + 3y + w. \end{cases}$

Logo, a afirmativa (III) é verdadeira.

Questão 8. Assinale a alternativa correta a respeito do seguinte subconjunto W do espaço vetorial $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$:

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid ab - cd = 0 \right\}.$$

( ) W não é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, pois não contém o vetor nulo de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(x) Existem dois elementos de W cuja soma não pertence a W.

( ) W é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e um conjunto de geradores de W é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

( ) W é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e um conjunto de geradores de W é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

( ) W é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e um conjunto de geradores de W é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Solução: É claro que a matriz nula $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ pertence a W. Considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É claro que $A \in W$ e $B \in W$. Porém

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \notin W.$$

Logo, existem dois elementos de W cuja soma não pertence a W e W não é um subespaço vetorial de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

Questão 9. Considere as afirmações abaixo. Se a afirmação for verdadeira, prove. Se a afirmação for falsa, dê um contra-exemplo. Assinale, também, a alternativa correta.

(I) O espaço gerado pelo conjunto vazio é o conjunto vazio.

(II) $\mathbb{R}^2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(III) Se V for um conjunto que contém o vetor nulo e tal que

$$u, v \in V \;\Rightarrow\; u + v \in V,$$

então V é um espaço vetorial.

É correto afirmar que:

( ) Somente (II) e (III) são verdadeiras.

( ) Somente (I) é verdadeira;

(x) Nenhuma afirmação é verdadeira.

( ) Somente (III) é verdadeira.

( ) Somente (II) é verdadeira.

( ) Somente (I) e (II) são verdadeiras.

( ) Somente (I) e (III) são verdadeiras.

Solução:

(I) O espaço gerado pelo conjunto vazio é o conjunto vazio.

FALSO. Por definição, o espaço $[S]$ gerado pelos vetores de $S = \{v_1, v_2 \ldots, v_p\}$ é o espaço de todas as combinações lineares dos vetores $v_1, v_2 \ldots, v_p$, ou seja,

$$[S] = [v_1, v_2 \ldots, v_p] = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots a_pv_p \colon a_1, a_2, \ldots a_p \in \mathbb{R}\}.$$

Esta definição deixa de fora o caso em que $S = \emptyset$, já que $\emptyset$ não contém elementos. Então, definimos $[\emptyset] = \{0\}$, pois o espaço gerado por qualquer conjunto é, necessariamente, um subespaço vetorial do espaço todo e, portanto, precisa conter o vetor nulo. Assim, não podemos ter $[\emptyset] = \emptyset$.

(II) $\mathbb{R}^2$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

FALSO. Para ser subespaço, o conjunto precisa estar contido no espaço vetorial considerado e $\mathbb{R}^2$ não é um subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Portanto, $\mathbb{R}^2$ não é um subespaço de $\mathbb{R}^3$

(III) Se V for um conjunto que contém o vetor nulo e tal que

$$u, v \in V \ \Rightarrow \ u + v \in V,$$

então V é um espaço vetorial.

FALSO. Considere $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0,\ y \geq 0\}$. Então $(0, 0) \in V$ e vale

$$u, v \in V \ \Rightarrow \ u + v \in V,$$

pois a soma de 2 números reais não negativos é um número real não negativo. Entretanto, $(1, 1) \in V$, mas $-1(1, 1) = (-1, -1)$ não pertence a V, ou seja, $\lambda(x, y)$ não necessariamente está em V, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Questão 10. Considere as afirmações abaixo. Se a afirmação for verdadeira, prove. Se a afirmação for falsa, dê um contra-exemplo. Assinale, também, a alternativa correta.

(I) Se U e W são subespaços vetoriais de um espaço vetorial V, então $U \cup W$ é um subespaço vetorial de V.

(II) O conjunto das matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ é um subespaço de $M_2(\mathbb{R})$.

(III) $Z = \{\ (x_1\,, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n\ ;\ x_1$ é irracional$\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$.

É correto afirmar que:

( ) Somente (II) e (III) são verdadeiras.

( ) Somente (I) é verdadeira;

( ) Nenhuma afirmação é verdadeira.

( ) Somente (III) é verdadeira.

(x) Somente (II) é verdadeira.

( ) Somente (I) e (II) são verdadeiras.

( ) Somente (I) e (III) são verdadeiras.

Solução: A afirmativa (I) é falsa. Considere os subespaços

$$U = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \text{ e } W = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Notemos que $u_1 = (1, 0) \in U$ e $w_1 = (0, 1) \in W$. Portanto, $u_1, w_1 \in U \cup W$, mas $u_1 + w_1 = (1, 1) \notin U \cup W$.

A afirmativa (II) é verdadeira. Seja W o conjunto das matrizes da forma $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$. Notemos que

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right],$$

ou seja, W é o subespaço gerado pelos vetores

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, W é um subespaço de $M_2(\mathbb{R})$.

A afirmativa (III) é falsa. Basta notar que o vetor nulo $0 = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ não é um elemento do conjunto Z.

Questão 11. No espaço vetorial V das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, considere

$$\begin{aligned} S_1 &= \{f \in V : f(2) = f(5) + 1\} \\ S_2 &= \{f \in V : f(-3) + f(4) = 0\} \\ S_3 &= \{f \in V : f(2) = f(-2) + f(1)\}. \end{aligned}$$

Então são subespaços vetoriais de V:

( ) S_1, S_2 e S_3;

(x) S_2 e S_3 somente;

( ) S_3 somente;

( ) S_1 e S_2 somente;

( ) S_2 somente.

Solução: Notemos que a função nula, $O(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, não é um elemento do conjunto S_1. Logo, S_1 não é um subespaço vetorial de V.

Afirmamaos que a a função nula, $O(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é um elemento do conjunto S_2. De fato,

$$O(-3) + O(4) = 0 + 0 = 0.$$

Sejam $f, g \in S_2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned} (f+g)(-3) + (f+g)(4) &= (f(-3) + g(-3)) + (f(4) + g(4)) \\ &= (f(-3) + f(4)) + (g(-3) + g(4)) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

$$\text{e} \quad (\lambda f)(-3) + (\lambda f)(4) = \lambda(f(-3)) + \lambda(f(4)) = \lambda(f(-3) + f(4)) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Isso implica que $f + g \in S_2$ e $\lambda f \in S_2$. Logo, S_2 é um subespaço vetorial de V.

Afirmamaos que a a função nula, $O(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, é um elemento do conjunto S_3. De fato,

$$O(2) = 0 \text{ e } O(-2) + O(1) = 0 + 0 = 0.$$

Sejam $f, g \in S_3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Temos

$$\begin{aligned}(f+g)(2) &= f(2) + g(2) = (f(-2) + f(1)) + (g(-2) + g(1)) \\ &= (f(-2) + g(-2)) + (f(1) + g(1)) = (f+g)(-2) + (f+g)(1)\end{aligned}$$

$$\text{e} \quad (\lambda f)(2) = \lambda(f(2)) = \lambda(f(-2) + f(1)) = \lambda(f(-2)) + \lambda(f(1)) = (\lambda f)(-2) + (\lambda f)(1).$$

Isso implica que $f + g \in S_3$ e $\lambda f \in S_3$. Logo, S_3 é um subespaço vetorial de V.

Questão 12. Em cada um dos itens abaixo, determine os subespaços $U \cap W$ e $U + W$ do espaço vetorial real $V = \mathbb{R}^3$ com as operações usuais.

(I) $U = [(0\,,1\,,0)\,,(1\,,1\,,1)], W = [(2\,,0\,,0)\,,(1\,,0\,,1)]$.

(II) $U = \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x - z = 0\}, W = [(1\,,3\,,0)\,,(0\,,-2\,,1)]$.

Assinale a alternativa incorreta:

( ) No item (I), $U + W = [(0\,,1\,,0)\,,(2\,,0\,,0)\,,(1\,,0\,,1)]$.

( ) No item (II), $U + W = [(1\,,0\,,-1)\,,(1\,,3\,,0)\,,(0\,,-2\,,1)]$.

( ) No item (I), $U \cap W = [(1, 0, 1)]$.

(x) No item (II), $U \cap W = [(1, 5, 1)]$.

Solução: Sejam U e W como em (I). De acordo com a teoria temos

$$U + W = [(0\,,1\,,0)\,,(1\,,1\,,1)\,,(2\,,0\,,0)\,,(1\,,0\,,1)].$$

Como $(1\,,1\,,1) = (0\,,1\,,0) + (1\,,0\,,1)$ segue que

$$U + W = [(0\,,1\,,0)\,,(2\,,0\,,0)\,,(1\,,0\,,1)].$$

Sejam U e W como em (II).

$$\begin{aligned}U &= \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x - z = 0\} = \{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x = z\} \\ &= \{(x\,,y\,,x) \in \mathbb{R}^3\,;\, x, y \in \mathbb{R}\} = [\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}].\end{aligned}$$

De acordo com a teoria temos

$$U + W = [(1, 0, 1), (0, 1, 0), (1\,,3\,,0)\,,(0\,,-2\,,1)].$$

Como $(0\,,1\,,0) = -(1\,,0\,,1) + (1\,,3\,,0) + (0\,,-2\,,1)$ segue que

$$U + W = [(1,0,1)\,,(1\,,3\,,0)\,,(0\,,-2\,,1)].$$

Como $(1,0,-1) = 5(1\,,0\,,1) + (-4)(1\,,3\,,0) + (-6)(0\,,-2\,,1)$ segue que

$$U + W = [(1,0,-1)\,,(1\,,3\,,0)\,,(0\,,-2\,,1)].$$

Sejam U e W como em (I).

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in U \cap W \iff & \text{ existem } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R} \text{ tais que} \\ & (x,y,z) = \alpha(0\,,1\,,0) + \beta(1\,,1\,,1) \text{ e } (x,y,z) = \gamma(2\,,0\,,0) + \delta(1\,,0\,,1) \\ \iff & \begin{cases} \beta = 2\gamma + \delta \\ \alpha + \beta = 0 \\ \beta = \delta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\alpha \\ \gamma = 0 \\ \text{com } \alpha, \gamma \in \mathbb{R} \end{cases}\end{aligned}$$

Logo, $U \cap W = [(1,0,1)]$.

Sejam U e W como em (II).

$$\begin{aligned}(x,y,z) \in U \cap W \iff & x - z = 0 \text{ e existem } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ tais que } (x,y,z) = \alpha(1\,,3\,,0) + \beta(0\,,-2\,,1) \\ \iff & \begin{cases} x = z \\ x = \alpha \\ y = 3\alpha - 2\beta \\ z = \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = \beta \\ \text{com } \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}\end{aligned}$$

Logo, $(x,y,z) \in U \cap W$ se, e somente se, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(x,y,z) = \alpha(1\,,3\,,0) + \alpha(0\,,-2\,,1) = \alpha(1,1,1)$. Logo, $U \cap W = [(1,1,1)]$.

Questão 13. Consideremos os subespaços W_1 e W_2 do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ (munido com as operações usuais de soma e produto por escalar):

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x+y,y,0,0) \,|\, x,y \in \mathbb{R}\} \\ W_2 &= \{(z+w,z+w,z+w,w) \,|\, z,w \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Podemos afirmar que:

(x) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ e essa soma de subespaços é direta.

( ) $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ e essa soma de subespaços não é direta.

( ) $W_1 + W_2 = \{(x+y,x,y,z) \,|\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$ e essa soma de subespaços é direta.

( ) $W_1 + W_2 = \{(x+y,x,y,z) \,|\, x,y,z \in \mathbb{R}\}$ e essa soma de subespaços não é direta.

Solução: Basta notar que $W_1 = [(1,0,0,0),(1,1,0,0)]$ e $W_2 = [(1,1,1,0),(1,1,1,1)]$. Assim, dado $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, existem únicos $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z,w) = \underbrace{a(1,0,0,0)+b(1,1,0,0))}_{\in W_1} + \underbrace{c(1,1,1,0)+d(1,1,1,1)}_{\in W_2}, \quad (*)$$

o que mostra que $(x,y,z,w) \in W_1 + W_2$ e que essa soma é direta. Com efeito, vejamos que a afirmação $(*)$ é equivalente a termos uma solução única para o sistema

$$\begin{cases} a + b + c + d = x \\ \quad\; b + c + d = y \\ \qquad\;\; c + d = z \\ \qquad\qquad\; d = w \end{cases}.$$

Questão 14. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^5$:

$$U = \{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5 \mid x+y+z+w+t = 0\},$$
$$W = \{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5 \mid y+w+t = 0 \text{ e } y+z+w+t = 0\}.$$

Então

( ) $U \cap W = [\{(0,-1,0,1,0),(0,-2,0,1,1),(0,-1,0,0,1)\}]$.

( ) $U \cap W = [\{(0,-1,0,1,0),(0,-2,0,1,-1),(0,1,0,0,1)\}]$.

( ) $U \cap W = [\{(0,-1,0,1,0)\}]$.

( ) $U \cap W = [\{(0,-1,0,1,0),(0,-1,0,0,-1)\}]$.

(x) $U \cap W = [\{(0,-1,0,1,0),(0,-1,0,0,1)\}]$.

( ) Nenhuma das alternativas anteriores.

Solução:

$$\begin{aligned}(x,y,z,w,t) \in U \cap W &\iff (x,y,z,w,t) \in U \text{ e } (x,y,z,w,t) \in W \\ &\iff \begin{cases} x+y+z+w+t=0 \\ y+w+t=0 \\ y+z+w+t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z+w+t=0 \\ y+w+t=0 \\ z=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x=0 \\ y=-w-t \text{ com } w,t \in \mathbb{R}. \\ z=0 \end{cases}\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} U \cap W &= \{(x,y,z,w,t) \in \mathbb{R}^5 \mid x = 0, y = -w - t \text{ e } z = 0\} \\ &= \{(0, -w-t, 0, w, t) \mid w, t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{w(0,-1,0,1,0) + t(0,-1,0,0,1) \mid w, t \in \mathbb{R}\} \\ &= [\{(0,-1,0,1,0), (0,-1,0,0,1)\}]. \end{aligned}$$

Questão 15. Considere os seguintes conjuntos:

$F = \{(1,1,0,3), (0,0,1,0)\}$

$G = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y - 2w = 0 \text{ e } y + z + w = 0\}$

$H = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$

$J = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \colon x - y - z + t = 0\}.$

$U = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \colon A^t = A\}.$

$W = \{B \in M_n(\mathbb{R}) \colon B^t = -B\}.$

$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0\}.$

$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon y = 0\}.$

Assinale a alternativa **CORRETA**:

( ) $F + G$ é soma direta.

( ) $H + J$ é soma direta.

( ) $U + W$ não é soma direta.

( ) $K + B$ é soma direta.

(x) Nenhuma das demais alternativas está correta.

Solução: Note que F possui dois elementos distintos. Logo, F não é um subespaço de $\mathbb{R}^4$ e, portanto, o conjunto $F + G$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$. Assim, a afirmativa "$F + G$ é soma direta" é incorreta.

A afirmativa "$H + J$ é soma direta" é incorreta, pois

$$\begin{aligned} (x,y,z,t) \in H \cap J &\iff (x,y,z,t) \in H \text{ e } (x,y,z,t) \in J \\ &\iff \begin{cases} x + y = 0 \\ z - t = 0 \\ x - y - z + t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = t \\ y = x - z + t \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \text{ com } t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $H + J$ não é soma direta.

A afirmativa "$U + W$ não é soma direta" é incorreta, pois

$$A \in U + W \iff A \in U \text{ e } A \in W \iff A^t = A \text{ e } A^t = -A \iff A = -A \iff A = 0.$$

Portanto, $H + J$ é soma direta.

A afirmativa "$K + B$ é soma direta" é incorreta, pois

$$(x, y, z) \in K \cap B \iff (x, y, z) \in K \text{ e } (x, y, z) \in B \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Portanto, $K + B$ não é soma direta.