Lista de Exercício II

1. Considere as matrizes 2×2 dadas por

$$T_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \; T_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \; T_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que elas satisfazem as relações de comutação da álgebra do momento angular, ou seja

$$[T_i \, , \, T_j] = i\epsilon_{ijk} T_k \tag{0.1}$$

   (b) Mostre que a matriz $C = \sum_{i=1}^{3} T_i^2$, comuta com todas as matrizes T_i. Calcule a matriz C (2×2).

   (c) Considere um espaço vetorial complexo de dimensão 2, onde as matrizes T_i atuam. Calcule os autovetores e autovalores da matriz T_3

   (d) Considere uma exponenciação de uma combinação linear das matrizes T_i

$$g = e^{i \, \sum_{i=1}^{3} \theta_i \, T_i} \tag{0.2}$$

   Calcule a matriz g (2×2) em termos dos parâmetros θ_i. Mostre que tal matriz é unitária e tem determinante 1.

2. Considere as matrizes 3×3 dadas por

$$d(T_1) = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad d(T_2) = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$d(T_3) \;=\; i \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Mostre que elas satisfazem as relações de comutação da álgebra do momento angular, ou seja

$$[d(T_i) \, , \, d(T_j)] = i\epsilon_{ijk} d(T_k) \tag{0.3}$$

   (b) Mostre que a matriz $d(C) = \sum_{i=1}^{3} d(T_i)^2$, comuta com todas as matrizes $d(T_i)$. Calcule a matriz $d(C)$ (3×3).

   (c) Considere um espaço vetorial real de dimensão 3, onde as matrizes $d(T_i)$ atuam. Calcule os autovetores e autovalores da matriz $d(T_3)$.

   (d) Considere uma exponenciação de uma combinação linear das matrizes $d(T_i)$

$$d(g) = e^{i \, \sum_{i=1}^{3} \theta_i \, d(T_i)} \tag{0.4}$$

   Calcule a matriz $d(g)$ (3×3) em termos dos parâmetros θ_i. Mostre que tal matriz é unitária e tem determinante 1.

3. Vimos em classe que os geradores do grupo de Lorentz são dados pelas rotações $\Lambda\left(J_a\right)$ e boosts $\Lambda\left(K_a\right)$, e são dados pelas matrizes 4×4

$$\Lambda\left(J_1\right) = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \Lambda\left(J_2\right) = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \Lambda\left(J_3\right) = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\Lambda\left(K_1\right) = i \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \Lambda\left(K_2\right) = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; ; \; \Lambda\left(K_3\right) = i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Considere as matrizes

$$N_a = \frac{1}{2}\left(\Lambda(J_a) + i\,\Lambda(K_a)\right) \; ; \qquad \bar{N}_a = \frac{1}{2}\left(\Lambda(J_a) - i\,\Lambda(K_a)\right) \tag{0.5}$$

(a) Mostre que tais matrizes satisfazem as relações de comutação

$$\begin{aligned} \left[\, N_a \,,\, N_b \,\right] &= i\,\varepsilon_{abc}\, N_c \\ \left[\, N_a \,,\, \bar{N}_b \,\right] &= 0 \\ \left[\, \bar{N}_a \,,\, \bar{N}_b \,\right] &= i\,\varepsilon_{abc}\, \bar{N}_c \end{aligned} \tag{0.6}$$

(b) Mostre que as matrizes

$$C = \sum_{a=1}^{3} N_a^2 \qquad \text{e} \qquad \bar{C} = \sum_{a=1}^{3} \bar{N}_a^2 \tag{0.7}$$

comutam com todos os geradores da álgebra de Lorentz.

(c) Calcule as matrizes C e $\bar{C}$.

(d) Estes geradores atuam em um espaço vetorial de dimensão 4, onde, em particular, estão os intervalos $d\,x^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$. Calcule os autovetores e autovalores das matrizes N_3 e $\bar{N}_3$, neste espaço vetorial.

4. Calcule a transformação de Lorentz que corresponde à composição de uma rotação espacial por um ângulo θ no plano $x\,y$, seguida de um boost de velocidade v na direção positiva do eixo-x. Calcule como os intervalos $d\,x^\mu$ se transformam. Faça a mesma coisa, mas agora com a composição daquelas transformações na ordem inversa. Calcule as transformações inversas nestes dois casos.