Cálculo IV - Poli - 2020

Gláucio Terra
glaucio@ime.usp.br
https://www.ime.usp.br/∼glaucio

Departamento de Matemática
IME - USP

18 de setembro de 2023

Sequências de Funções Reais a Valores Reais

Uma sequência de funções reais a valores reais é uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a valores no conjunto $A := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

- Ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
- Dada uma tal sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, para cada $x \in \mathbb{R}$, $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência a valores reais.
- Queremos investigar o conjunto dos pontos em que a tal sequência converge, i.e. o conjunto $A := \{x \in \mathbb{R} \mid \big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ convergente}\}$.
- No tal conjunto, fica bem definida a função $f : A \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) := \lim f_n(x)$$

a qual é chamada de limite pontual da sequência $(f_n)_n$.

Notação

$$f_n \xrightarrow{p.} f \text{ em } A.$$

Exemplo

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a sequência de funções definida por, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n$.
Então $(f_n)_n$ converge pontualmente em $(-1, 1]$ para a função $f : (-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Note que, embora todas as f_n's sejam C^∞, f não é sequer contínua!

Definição (série de potências centrada em x_0)

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Uma série de potências centrada em x_0 é uma série de funções da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

onde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência em $\mathbb{R}$.

Exemplo

Tome $x_0 = 0$ e $(a_n)_{n\geq 0}$ dada por, $\forall n \geq 0$:

$$a_n = \frac{(-1)^n 2^n}{n3^n}$$

- A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge se $x \in (-3/2, 3/2]$ e diverge fora desse intervalo.
- Se $x \in (-3/2, 3/2)$, a convergência é absoluta.

Exemplo

Tome $x_0 = 0$ e $(a_n)_{n \geq 0}$ dada por, $\forall n \geq 0$:

$$a_n = \frac{1}{n!}$$

- A série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Raio e Intervalo de Convergência

Teorema

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *uma série de potências centrada em* $x_0 \in \mathbb{R}$. *Defina* $R \in [0,\infty]$ *por*

$$R := \sup\{r \in [0,\infty) \mid \sum |a_n| r^n < \infty\}.$$

Tem-se:

i) *A série converge absolutamente em* $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| < R\}$ *e diverge em* $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-x_0| > R\}$.

ii) *Se existir*

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} \quad ou \quad \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|},$$

então $1/R$ *coincide com esses limites.*

Raio e Intervalo de Convergência

Observação

Com a notação anterior, o raio de convergência satisfaz:

$$R = \sup\{r \in [0, \infty) \mid \left(|a_n| r^n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ limitada}\}$$

Raio e Intervalo de Convergência

Observação

- Em $x = x_0 \pm R$, a série pode convergir ou não.
- De qualquer modo, sempre teremos um intervalo de convergência, i.e. a série converge num intervalo centrado em x_0 com extremos $x_0 \pm R$ e diverge fora dele.

Definição (raio de convergência)

Com a notação acima, R chama-se raio de convergência da série de potências $\sum a_n(x - x_0)^n$.

Raio e Intervalo de Convergência

Exemplo

- A série de potências
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}\,(n!)^2}$$
tem raio de convergência $R = \infty$ (e, portanto intervalo de convergência $\mathbb{R}$).
- A série de potências
$$\sum_{n=0}^{\infty} n(x-2)^n$$
tem raio de convergência $R = 1$ e intervalo de convergência $(1, 3)$.

Derivação e Integração Termo a Termo

Teorema (derivação e integração termo a termo de séries de potências)

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *tiver raio de convergência* $R>0$, *então* $f:(x_0-R,x_0+R)\to\mathbb{R}$ *dada pela soma da série é de classe* C^∞ *e a série pode ser derivada e integrada termo a termo, no sentido de que:*

i) $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ *se* $x\in(x_0-R,x_0+R)$. *Além disso, a série derivada* $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1}$ *tem o mesmo raio de convergência* R.

ii) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_a^b a_n(x-x_0)^n\,\mathrm{d}x$ *se* $[a,b]\subset(x_0-R,x_0+R)$, *e*

$$F(x):=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}+C$$

é primitiva de f *no intervalo* (x_0-R,x_0+R).

Derivação e Integração Termo a Termo

Observação

Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ tiver raio de convergência $R > 0$ e for convergente em $x_0 + R$ (respectivamente, em $x_0 - R$), então $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ dada pela soma da série se estende continuamente a $x_0 + R$ (respectivamente, a $x_0 - R$) pela soma da série nesse ponto. Nesse caso, no teorema de integração termo a termo podemos tomar $b = x_0 + R$ (respectivamente, $a = x_0 - R$).

Exemplo

Para todo $x \in [-1, 1]$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Série de Taylor centrada em x_0 de uma Função Real

Definição

Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$ e f uma função de classe C^∞ numa vizinhança de x_0. A série de Taylor de f centrada em x_0 é a série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Se $x_0 = 0$, tal série também é chamada de série de Maclaurin de f.

Proposição

Seja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *uma série de potências com raio de convergência* $R > 0$ *e* $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ *a soma da série. Então, para todo* $k \in \mathbb{N}$ *e todo* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$*,*

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(k+n)!}{n!} a_{k+n}(x - x_0)^n$$

Corolário

Com a mesma hipótese e notação, para todo $k \in \mathbb{N}$*,*

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}.$$

Noutras palavras:

Se f for a soma de uma série de potências centrada em x_0 com raio de convergência $R > 0$, então a referida série coincide com a série de Taylor de f centrada em x_0, de modo que, para todo $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Quando uma função real se representa numa vizinhança de $x_0 \in \mathbb{R}$ pela soma de uma série de potências centrada em x_0?

- Necessariamente, f deve ser de classe C^∞.
- Se a resposta afirmativa, necessariamente a referida série deve ser a série de Taylor de f centrada em x_0.
- Refraseando: quando uma função C^∞ numa vizinhança de x_0 é a soma da sua série de Taylor centrada em x_0?

Funções Analíticas

Definição

Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um aberto e $f : A \to \mathbb{R}$. Diz-se que f é analítica se, para cada $x_0 \in A$, existir um intervalo aberto $I \subset A$ centrado em x_0 e uma série de potências centrada em x_0 que convirja em I para f.

Exemplo

1. Funções polinomiais $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são analíticas.
2. Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ for uma série de potências centrada em $x_0 \in \mathbb{R}$ com raio de convergência $R > 0$, a soma da série $f : (x_0 - R, x_0 + R) \to \mathbb{R}$ é analítica.

Fórmula de Taylor de ordem n, com resto de Lagrange

Teorema

Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo, $x_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$, $f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n} com $f^{(n)}$ derivável no interior de I. Então, para todo $x \in I \setminus \{x_0\}$, existe c no intervalo aberto com extremos x_0 e x tal que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Exemplo

A função $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a soma da sua série de Maclaurin, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Exercício

Use a série de Taylor para escrever $\int_0^1 e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ *como soma de uma série numérica e aproxime a referida integral com erro menor que* 10^{-10}.