Simulado 2 (SMA304)

Questão 1. Considere o subespaço V de $\mathbb{R}^4$ formado pelas quádruplas $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ que satisfazem as equações

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \quad \text{e} \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

É correto afirmar que:

a ( ) $\{(-2, 1, 0, 0), (3, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base de V;

b ( ) o vetor $(-1, 1, 0, 0)$ pode pertencer a uma base de V.

c ( ) pode ocorrer $\dim V \geq \dim \mathbb{R}^4$

d ( ) $\{(-2, 1, 0, 1), (3, 0, 1, -5)\}$ é uma base de V.

e ( ) o vetor $(1, 0, 2, 0)$ pode pertencer a uma base de V.

Questão 2. Sejam $v_1 = (1, 2, 3, 4), v_2 = (4, 3, 2, 1), v_3 = (-5, 0, 5, 10)$ vetores de $\mathbb{R}^4$. É correto afirmar que:

a ( ) Não existe uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo v_1, v_2 e v_3.

b ( ) $B = \{(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (-5, 0, 5, 10), (1, 0, 0, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo v_1, v_2 e v_3.

c ( ) $B = \{(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (-5, 0, 5, 10), (0, 1, 0, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo v_1, v_2 e v_3.

d ( ) $B = \{(1, 2, 3, 4), (4, 3, 2, 1), (-5, 0, 5, 10), (0, 0, 1, 0)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ contendo v_1, v_2 e v_3.

Questão 3. Considere as seguintes afirmações:

(I) Os polinômios $(1 - t)^3$, $(1 - t)^2$, $1 - t$ e 1 geram $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$.

(II) Se $p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ são dois polinômios não nulos tais que $\alpha p + \beta q = \lambda p + \mu q$, então $\alpha = \lambda$ e $\beta = \mu$.

(III) Seja V um espaço vetorial de dimensão n e $W = [\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}]$ e $W \neq V$. Então $m < n$.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a ( ) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

b ( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

c ( ) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

d ( ) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

e ( ) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

f ( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

g ( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

h ( ) (I), (II) e (III) são falsas.

Questão 4. Sejam

$$\begin{aligned} W_1 &= \{(x, 2x+y, 2y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \\ W_2 &= \{(x+z, 2x+y+2z, 2y+3z, 4z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

subespaços de $\mathbb{R}^4$. Então é correto afirmar que:

a ( ) $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_2) = 2$, $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$ e essa soma de subespaços é direta.

b ( ) $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_2) = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ e $W_1 + W_2 = \mathbb{R}^4$.

c ( ) $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_2) = 2$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$ e $\dim(W_1 + W_2) = 3$.

d ( ) $\dim(W_1) = 2$, $\dim(W_2) = 3$, $\dim(W_1 \cap W_2) = 2$ e $\dim(W_1 + W_2) = 3$.

Questão 5. Considere os subespaços U, V de $\mathbb{R}^4$ tais que

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \colon x_1 = x_2 \text{ e } x_3 = -2x_4\}$$
$$V = [(1,0,1,0), (0,2,1,1), (1,-2,0,-1)].$$

Considere as afirmações:

(I) $\dim V = 3$ e $\{(1,1,0,0), (0,0,-2,1)\}$ é base de U;

(II) $\dim(U \cap V) = 0$ e $\{(1,0,0,0), (0,1,0,1), (0,0,1,0), (0,0,0,\pi)\}$ é base de $U + V$;

(III) $\dim(U + V) = 4$ e $\{(1,1,0,0), (0,0,2,1), (1,0,1,0), (0,2,1,1)\}$ é base de $U + V$;

(IV) $\dim(U \cap V) = 0$ e $U + V$ é soma direta;

(V) $\dim(U \cap V) = 1$ e $\{(1,0,1,0), (0,2,1,1)\}$ é base de V.

Então é correto afirmar que:

a ( ) Somente (I) é verdadeira.

b ( ) Somente (I) e (II) são verdadeiras.

c ( ) Somente (II) e (III) são verdadeiras.

d ( ) Somente (II) é verdadeira.

e ( ) Somente (III) é verdadeira.

f ( ) Somente (III) e (IV) são verdadeiras.

g ( ) Somente (III) e (V) são verdadeiras.

h ( ) Somente (II) e (IV) são verdadeiras.

i ( ) Nenhuma das demais alternativas está correta.

j ( ) Somente (IV) é verdadeira.

k ( ) Somente (V) é verdadeira.

Questão 6. Sejam U e W dois subespaços vetoriais do espaço vetorial $\mathcal{P}_8(\mathbb{R})$. Suponha que

$$U + W = \mathcal{P}_8(\mathbb{R}) \qquad \text{e} \qquad \dim(U) = \dim(W) + 1.$$

Considere as seguintes afirmações

(I) A soma $U + W$ não é direta.

(II) As possíveis dimensões de $U \cap W$ são 7, 5, 3, 1.

(III) $\dim(U \cap W) \neq 5$.

Assinale a alternativa correta. Na sua resolução, justifique claramente sua escolha.

a ( ) (I) é verdadeira e (II) e (III) são falsas.

b ( ) (II) é verdadeira e (I) e (III) são falsas.

c ( ) (III) é verdadeira e (I) e (II) são falsas.

d ( ) (I) e (II) são verdadeiras e (III) é falsa.

e ( ) (I) e (III) são verdadeiras e (II) é falsa.

f ( ) (II) e (III) são verdadeiras e (I) é falsa.

g ( ) (I), (II) e (III) são verdadeiras.

h ( ) (I), (II) e (III) são falsas.