

PME3483 Controle Digital

Raul Gonzalez Lima

7 de dezembro de 2021

Sumário

1	Introdução	9
2	Notas sobre Processamento de Sinais	11
2.1	Introdução	11
2.2	Ruído de Quantização	12
2.3	Circuito Sample and Hold	12
2.4	Conversão de Digital para Analógico	13
2.5	Conversão de Analógico para Digital	15
2.6	Teorema da Amostragem	16
2.7	Transformada Discreta de Fourier DFT	19

3	Representação no espaço de estados	23
3.1	Introdução	24
3.2	De tempo contínuo para discreto C2D	24
3.2.1	Fator de integração	25
3.2.2	Definição de e^{At}	26
3.2.3	Integral do sistema de kT a $(k + 1)T$	27
3.3	Determinação de e^{At} a partir de A	30
3.4	Algumas representações canônicas	31
3.4.1	Forma canônica controlável	32
3.4.2	Forma canônica observável	33
3.4.3	Forma canônica diagonal	33
3.4.4	Forma canônica de Jordan	34
3.5	Solução de equações no espaço de estados discreto	35
3.5.1	Matriz de transição	36
3.5.2	Solução do sistema discreto via Transformada z	37
3.5.3	Método para calcular $(zI - G)^{-1}$	38
3.6	Estabilidade de Lyapunov	40
3.7	Teorema de Estabilidade de Lyapunov	40
3.7.1	Função positiva definida	44
3.7.2	Critério de Sylvester para determinar se uma matriz é positiva	44

3.7.3	A Função de Lyapunov	45
3.7.4	Estabilidade segundo Lyapunov	45
3.7.5	Estabilidade assintótica	45
3.7.6	Instabilidade	47
3.7.7	Teorema sobre estabilidade assintótica	47
3.7.8	Teorema sobre estabilidade no tempo discreto	48
3.7.9	Estabilidade de um sistema discreto invariante no tempo	49
3.8	Teorema de Cayley-Hamilton	51
3.9	Controlabilidade de sistema discreto	52
3.10	Observabilidade de sistema discreto	54
3.11	Equações Polinomiais para Síntese de Controlador	59
3.12	Controle por locação de polos	62
3.13	Observador de estado completo	64
3.14	Fórmula de Ackermann para a matriz de ganho do con- trolador	66
3.15	Fórmula de Ackermann para a matriz de ganho do ob- servador	68
3.16	Controle Ótimo Quadrático	69
3.17	Exercícios Recomendados	77
3.17.1	Formas canônicas	77

3.17.2	Solução de Equações de Diferenças	78
3.17.3	Estabilidade de Lyapunov	78
3.17.4	Alocação de Polos e Observadores	79
3.17.5	Controle Ótimo Quadrático	79
4	A Transformada de Laplace e a Transformada Z	81
4.1	A Transformada de Laplace	82
4.1.1	Introdução	82
4.1.2	Definição	83
4.1.3	Condições de existência da transformada	83
4.1.4	A transformada de algumas funções	84
4.1.5	Superposição	90
4.1.6	Translação de uma função	90
4.1.7	Multiplicação por $e^{-\alpha t}$	91
4.1.8	Limite inferior da transformada de Laplace	92
4.1.9	Teorema da Diferenciação	92
4.1.10	Teorema do valor final	93
4.1.11	Teorema do valor inicial	96
4.1.12	Teorema da Integral	97
4.1.13	Teorema da Convolução	98
4.1.14	Transformada Inversa de Laplace	99

4.1.15	Solução de Equações Lineares Invariantes no Tempo	100
4.2	A Transformada Z	101
4.2.1	Propriedade da filtragem	102
4.2.2	A transformada z bilateral	102
4.2.3	Transformada z lateral	106
4.2.4	Propriedades da transformada z	107
4.2.5	Teorema do valor inicial	110
4.2.6	Teorema do valor final	110
4.2.7	A transformada z inversa	112
5	Planta contínua com controlador discreto	121
5.1	Transformada de Laplace do segurador	122
5.2	Transformada de Laplace Estrela	128
5.3	Regra geral para obter funções de transferência pulsadas	129
6	Propriedades básicas da realimentação	135
6.1	Tipos de sistemas e erro de seguimento em regime permanente	135
7	Projeto de Controladores de Forma Analítica	141
7.1	Exercícios Recomendados	142

7.1.1	Projeto de controladores <i>Deadbeat</i>	142
-------	--	-----

8	Teste Seus Conhecimentos	143
----------	---------------------------------	------------

Capítulo 1

Introdução

Na Teoria de Controle há conceitos fundamentais como *Estabilidade* de um sistema, *Observabilidade* do estado de um sistema e *Controlabilidade* do estado de um sistema. Embora existam sistemas genuinamente no tempo discreto, muitos sistemas que serão controlados por controladores no tempo discreto são sistemas no tempo contínuo. Como podem ser analisados estes sistemas que são parcialmente no tempo discreto e parcialmente no tempo contínuo? Como podemos avaliar a estabilidade destes sistemas? O intervalo de amostragem no tempo altera a observabilidade ou a controlabilidade do sistema parcialmente discreto

no tempo?

Este texto tem como objetivo abordar estas perguntas e descrever as técnicas e conceitos fundamentais no controle destes sistemas parcialmente no tempo discreto. Veremos ao longo do texto que a introdução de uma transformada, chamada Transformada Z, permitirá a análise e o projeto destes sistemas.

Capítulo 2

Notas sobre Processamento de Sinais

2.1 Introdução

Frequentemente a planta opera em tempo contínuo. O controlador digital requer sinais amostrados e em forma digital. O processo de amostragem e de conversão de sinal analógico em digital pode causar perda de informação através do fenômeno chamado 'aliasing' ou fal-

seamento e necessariamente introduz ruído ao considerar quantizada uma grandeza que é contínua em amplitude.

2.2 Ruído de Quantização

O conversor de sinal analógico para sinal digital de n bits restringe necessariamente qualquer sinal amostrado analógico a um valor entre 2^n valores. Portanto, a resolução do sinal codificado em binário é de uma parte em 2^n partes. Ao arredondar o sinal amostrado analógico para um dos valores codificáveis em representação binária, introduz-se um ruído chamado de ruído de quantização.

2.3 Circuito Sample and Hold

Um circuito utilizado para transformar um sinal digital em um sinal analógico consiste de um interruptor e um capacitor. Quando o interruptor abre, o valor de voltagem armazenado no capacitor permanece por um tempo se a impedância do circuito for elevada, ver fig. 2.1

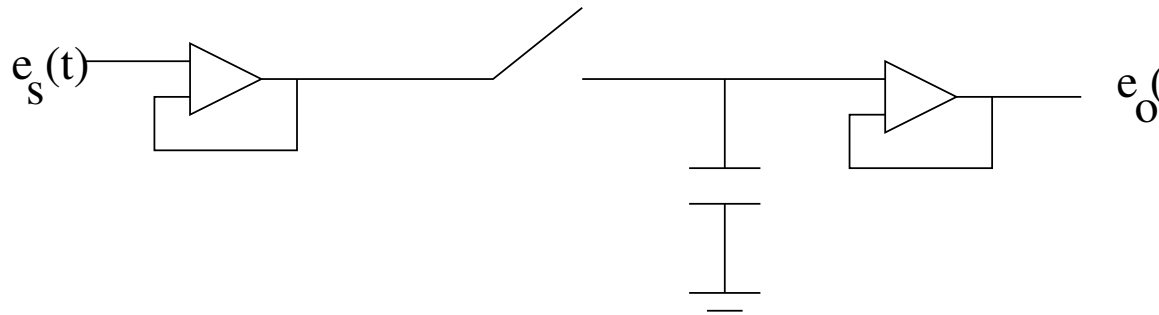


Figura 2.1: Circuito sample and hold

2.4 Conversão de Digital para Analógico

A decodificação de um sinal digital em um sinal analógico pode ser implementada através de um amplificador operacional na configuração de somador. A voltagem de saída depende da soma das correntes i_1 , i_2 e i_3 , conforme a figura 2.2.

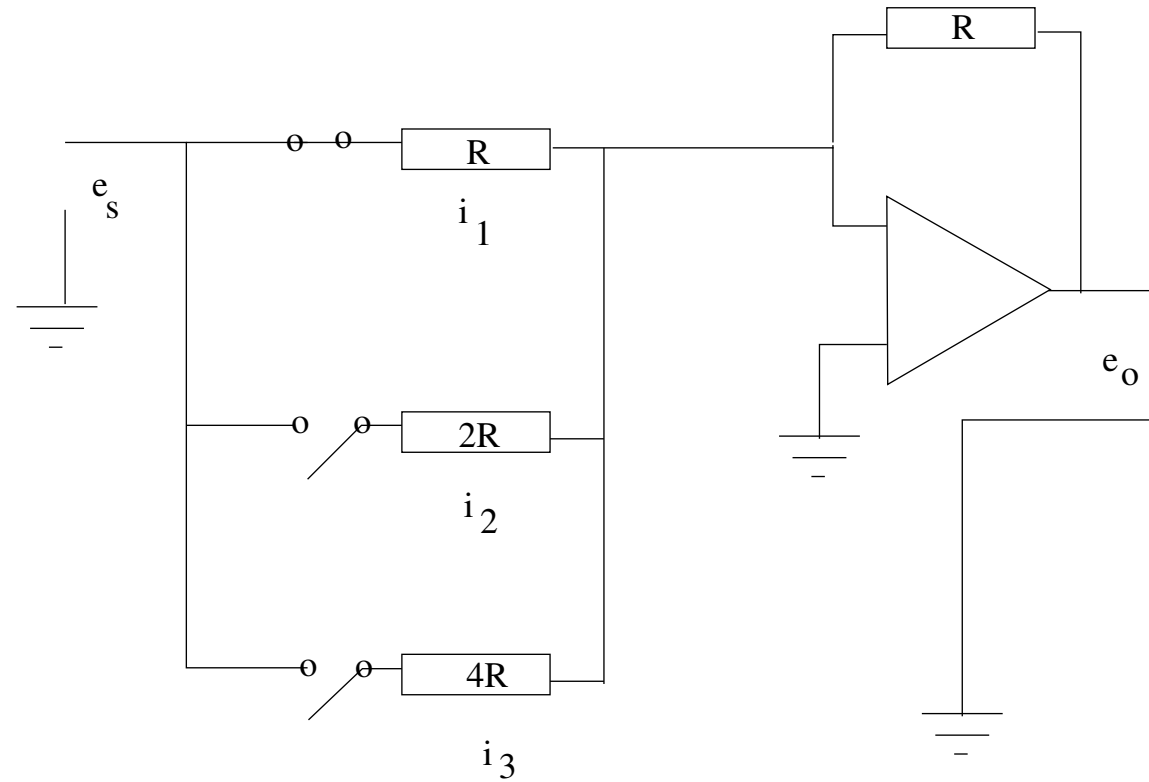


Figura 2.2: Conversor de sinal digital para analógico

2.5 Conversão de Analógico para Digital

A conversão de um sinal analógico para digital é feita em três etapas, a primeira é de sample and hold, a segunda é de quantização, e a terceira é de codificar em binário. Vamos descrever apenas um tipo de conversor A/D que realiza a quantização através de sucessivas aproximações.

Inicialmente todos o bits de um conversor D/A interno são zeados. O bit mais significativo é então elevado para 1. Ocorre uma comparação entre o sinal amostrado e o sinal sintetizado, proveniente de um conversor D/A. Se o sinal amostrado for menor que o sinal sintetizado, o bit mais significativo é definido como 0. Se o sinal amostrado for maior que o sinal sintetizado, o bit mais significativo é mantido no valor 1.

O próximo bit mais significativo é então elevado para 1. O novo sinal sintetizado é comparado com o sinal amostrado. Se o sinal amostrado for menor que o sinal sintetizado, o segundo bit mais significativo é definido como 0. Caso contrário, o segundo bit mais significativo é mantido igual a 1. Este processo se repete até que o bit menos significativo é comparado e definido.

2.6 Teorema da Amostragem

Se um sinal senoidal contínuo no tempo,

$$x_c(t) = A \cos(2\pi F_o t + \theta) \quad (2.1)$$

é amostrado com taxa de amostragem $F_s = 1/\Delta t$ resulta,

$$x(n) = A \cos(2\pi F_o \Delta t n + \theta) \quad (2.2)$$

A grandeza $F_o \Delta t = f$ é chamada de frequência relativa, pois pode ser expressa por $f = F_o/F_s$ e tem dimensões de ciclos por amostra. Em termos de frequência relativa o sinal amostrado é representado por

$$x(n) = A \cos(2\pi f n + \theta) \quad (2.3)$$

onde θ é uma fase inicial em radianos.

Proposição 1: *A maior frequência de oscilação de uma sequência discreta ocorre quando $f = 1/2$.*

De fato, a maior frequência de oscilação de uma sequência discreta ocorre quando um sinal alterna seu valor entre positivo e negativo a cada incremento de n , conforme a fig. 2.3.

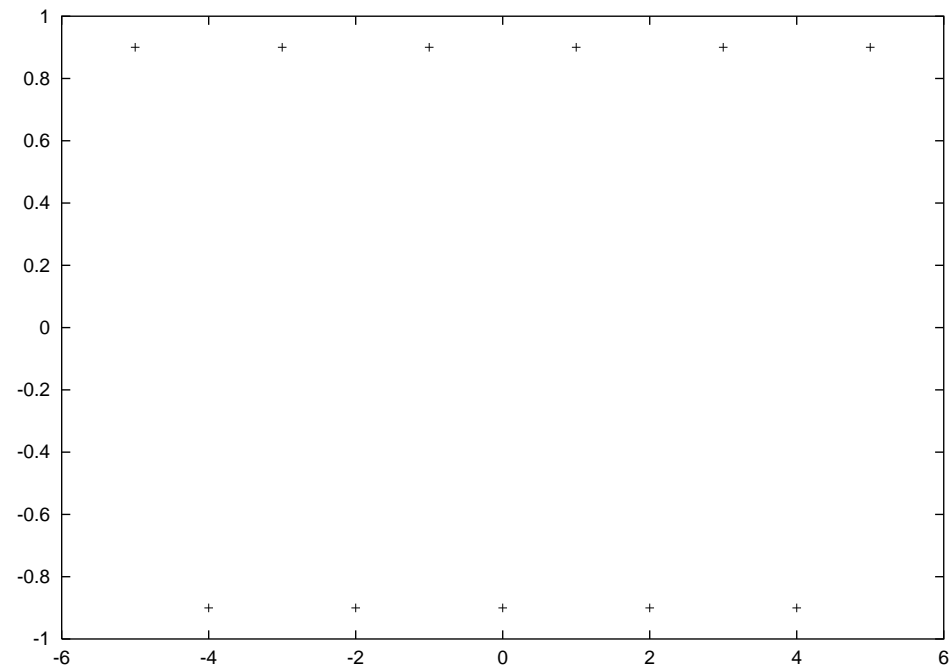


Figura 2.3: Maior frequência de oscilação de um sinal discreto

18CAPÍTULO 2. NOTAS SOBRE PROCESSAMENTO DE SINAIS

Isto ocorre quando o sinal é expresso por

$$x(n) = A \cos(\pi n + \theta) = A \cos\left(2\pi \frac{1}{2}n + \theta\right) \quad (2.4)$$

e portanto $f_{max} = 1/2$.

Proposição 2: *Qualquer sequência senoidal discreta com frequência relativa $|f| > 1/2$ é idêntica a uma sequência obtida a partir de uma sequência senoidal com frequência relativa em módulo menor que meio, $|f| < 1/2$.*

De fato, seja $1/2 < f_1 < 1$ e $f_2 = 1 - f_1$. O sinal discreto com frequência relativa f_1 será

$$x_1(n) = \cos(2\pi f_1 n) = \cos(2\pi(1 - f_2)n) \quad (2.5)$$

Porém a função cosseno é periódica e pode-se adicionar ou subtrair $2\pi n$ ao seu argumento sem alterar o resultado

$$x_1(n) = \cos(2\pi n - 2\pi f_2 n) = \cos(-2\pi f_2 n) = \cos(2\pi f_2 n) \quad (2.6)$$

Portanto, não há distinção entre o sinal discreto gerado por f_1 e o sinal discreto gerado por f_2 . Ainda mais, a frequência relativa f_2

pode ser obtida a partir de $f = 1/2$ e f_1 segundo $f_2 = 1 - f_1 = 1/2 - (f_1 - 1/2)$. Graficamente tudo ocorre como se o excesso de f_1 sobre $f = 1/2$ fosse subtraído de $f = 1/2$, ou seja, dobra-se o gráfico em torno de um eixo vertical onde $f = 1/2$. Este fenômeno recebe o nome de dobramento ou 'folding'.

A frequência f_2 é chamada de 'alias' da frequência f_1 sinal com $|f| < 1/2$. Para evitar o fenômeno de 'aliasing', a taxa de amostragem F_s deve ser maior que o dobro da frequência do sinal F_o . Este critério para escolher uma taxa de amostragem é conhecido por critério de Nyquist.

2.7 Transformada Discreta de Fourier DFT

Considere uma sequência discreta $x_p(n)$ com período N . Esta sequência pode ser representada por uma série de Fourier,

$$x_p(n) = \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j2\pi nk/N}, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \quad (2.7)$$

onde os coeficientes de Fourier podem ser determinados pela expressão

20CAPÍTULO 2. NOTAS SOBRE PROCESSAMENTO DE SINAIS

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_p(n) e^{-j2\pi nk/N}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

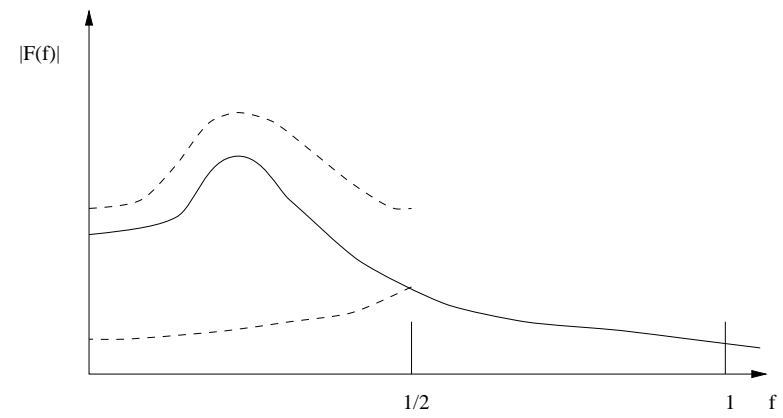
A transformada discreta de Fourier de $x(n)$, onde

$$x(n) = x_p(n), \quad n = 0, \dots, N - 1 \quad (2.9)$$

é a sequência

$$X(K) = Nc_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N - 1 \quad (2.10)$$

A transformada discreta de Fourier (DFT) é uma função periódica na frequência. O maior intervalo em frequência representável pela DFT é $-1/2 < f < 1/2$. Sinais senoidais com $|f| > 1/2$ tem sua amplitude somada a amplitude de sinais senoidais de frequência no intervalo $|f| < 1/2$, conforme a figura 2.4.



22 *CAPÍTULO 2. NOTAS SOBRE PROCESSAMENTO DE SINAIS*

Capítulo 3

Representação no espaço de estados

Referência

Ogata, K. *Discrete-Time Control Systems*, Prentice Hall, 2. ed., 1995, cap. 5 e 6.

3.1 Introdução

Os métodos convencionais, como lugar-das-raízes e métodos no domínio da frequência, são úteis quando estamos tratando de sistemas *siso*. São métodos para sistemas invariantes no tempo.

O método no espaço de estados descreve o sistema através n equações diferenciais de primeira ordem. Permite o projeto de controladores que minimizam um índice de performance, permitem o projeto para uma classe de sinais de entrada e permitem a inclusão de condições iniciais no projeto do controlador.

O estado é definido como o menor conjunto de variáveis tais que o conhecimento destas variáveis em $t = t_0$, junto com o conhecimento do sinal de entrada de $t = t_0$ até $t > t_0$, determina completamente o comportamento do sistema em qualquer $t > t_0$

3.2 De tempo contínuo para discreto C2D

No controle digital de plantas que são contínuas no tempo é necessário converter modelos de tempo contínuo em modelos de tempo discreto. Do ponto de vista físico admite-se a existência de um amostrador e de

um segurador de ordem zero no sistema. Do ponto de vista matemático trata-se de uma operação de integração de t a $t + T$, onde T denota o intervalo de amostragem.

Ogata
section 5-5

3.2.1 Fator de integração

Para integrar um sistema do tipo $\dot{x} = Ax + Bu$ é conveniente agrupar os termos \dot{x} e Ax no diferencial de um único termo. Multiplica-se a equação do sistema por um fator de integração M

$$M\dot{x} = MAx + MBu \quad (3.1)$$

ou ainda

$$M\dot{x} - MAx = MBu \quad (3.2)$$

Deseja-se determinar M tal que

$$\frac{dMx}{dt} = M\dot{x} - MAx \quad (3.3)$$

pois neste caso os sistema

$$d(Mx) = MBudt \quad (3.4)$$

pode ser integrado

$$M(t+T)x(t+T) - M(t)x(t) = \int_t^{t+T} M(\tau)Bu(\tau)d\tau \quad (3.5)$$

3.2.2 Definição de e^{At}

Na busca do fator de integração convém lembrar da definição de e^{At}

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots \quad (3.6)$$

Esta série é convergente e pode ser diferenciada termo a termo

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = A + A^2t + \frac{1}{2!}A^3t^2 + \dots + \frac{1}{(k-1)!}A^k t^{k-1} + \dots \quad (3.7)$$

e pela propriedade associativa

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = [I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}A^k t^k + \dots]A \quad (3.8)$$

que resulta

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = e^{At}A \quad (3.9)$$

Esta propriedade de e^{At} é a propriedade necessária para o fator de integração.

3.2.3 Integral do sistema de kT a $(k+1)T$

Vamos utilizar $M = e^{-At}$ como fator de integração. Decorre da eq. 3.5,

$$e^{-A(k+1)T}x((k+1)T) - e^{-A(kT)}x(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (3.10)$$

Pré-multiplicando por $e^{A(k+1)T}$,

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = e^{A(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \quad (3.11)$$

28CAPÍTULO 3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

ou

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A((k+1)T-\tau)}Bu(\tau)d\tau \quad (3.12)$$

Uma mudança de variável de integração simplifica o integrando. Seja $\lambda = \tau - kT$,

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = \int_0^T e^{A(T-\lambda)}Bu(\lambda+kT)d\lambda \quad (3.13)$$

Ao considerar a excitação $u(\lambda+kT)$ constante no intervalo $kT \rightarrow (k+1)T$, resulta

$$x((k+1)T) - e^{AT}x(kT) = u(kT)\left(\int_0^T e^{A(T-\lambda)}Bd\lambda\right) \quad (3.14)$$

Tomando a liberdade de retirar da notação o intervalo de discretização T e isolando $x(k+1)$,

$$x(k+1) = (e^{AT})x(k) + \left(\int_0^T e^{A(T-\lambda)} B d\lambda \right) u(k) \quad (3.15)$$

E, finalmente, da eq. 3.15, observa-se claramente a expressão que relaciona a matriz do sistema no tempo contínuo A com a matriz do sistema no tempo discreto G ,

$$G = e^{AT} \quad (3.16)$$

decorre também a expressão que relaciona a matriz de atuação no tempo contínuo B com a matriz de atuação no tempo discreto H ,

$$H = \left(\int_0^T e^{A(T-\lambda)} B d\lambda \right) \quad (3.17)$$

Desta forma, o sistema representado no tempo discreto torna-se,

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.18)$$

No Scilab o comando que calcula G e H em função de A , B e T é *dscr*. No Octave o comando que calcula G e H em função de A , B e T é *c2d*.

3.3 Determinação de e^{At} a partir de A

Já foi demonstrado que

$$\frac{d(e^{At})}{dt} = Ae^{At}. \quad (3.19)$$

e decorre da expansão em série de e^{At} que

$$e^{A0} = I \quad (3.20)$$

Seja $F(t) = e^{At}$. Desta forma $F(t)$ satisfaz $\dot{F} = AF$ e podemos aplicar a transformada de Laplace nos dois lados da equação,

$$sF(s) - F(0) = AF(s) \quad (3.21)$$

onde $F(0) = e^{A0} = I$. Rearranjando a eq. 3.21, resulta,

$$(sI - A)F(s) = I \quad (3.22)$$

ou seja,

$$F(s) = (sI - A)^{-1} \quad (3.23)$$

E, finalmente, podemos dizer que,

$$F(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \quad (3.24)$$

3.4 Algumas representações canônicas

Considere uma sistema *siso* descrito por

$$y(k) + a_1y(k-1) + \dots + a_ny(k-n) = b_0u(k) + b_1u(k-1) + \dots + b_nu(k-n) \quad (3.25)$$

Em termos de função de transferência pulsada,

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + \dots + b_nz^{-n}}{1 + a_1z^{-1} + \dots + a_nz^{-n}} \quad (3.26)$$

3.4.1 Forma canônica controlável

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.27)$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 : b_{n-1} - a_{n-1} b_0 : \dots : b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.28)$$

3.4.2 Forma canônica observável

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_2 - a_2 b_0 \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.29)$$

$$y(k) = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.30)$$

3.4.3 Forma canônica diagonal

Se os polos da função de transferência pulsada são todos distintos, é possível diagonalizar a matriz A do sistema

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.31)$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.32)$$

3.4.4 Forma canônica de Jordan

Se a função de transferência tem polo múltiplo de ordem m em $z = p_1$ então é possível representar o sistema na forma canônica de Jordan

3.5. SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NO ESPAÇO DE ESTADOS DISCRETO 35

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_m(k+1) \\ x_{m+1}(k+1) \\ \vdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p_1 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p_{m-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_m(k) \\ x_{m+1}(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (3.33)$$

$$y(k) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (3.34)$$

3.5 Solução de equações no espaço de estados discreto

Considere o sistema no tempo discreto

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\y(k) &= Cx(k) + Du(k)\end{aligned}\tag{3.35}$$

A solução pode ser obtida por recursão

$$\begin{aligned}x(1) &= Gx(0) + Hu(0) \\x(2) &= Gx(1) + Hu(1) = G^2x(0) + GHu(0) + Hu(1) \\x(3) &= Gx(2) + Hu(2) = G^3x(0) + G^2Hu(0) + GHu(1) + Hu(2) \\&\vdots\end{aligned}\tag{3.36}$$

que pode ser escrito sinteticamente

$$x(k) = G^kx(0) + \sum_{j=0}^{k-1} G^{k-j-1}Hu(j)\tag{3.37}$$

3.5.1 Matriz de transição

A solução do sistema homogêneo $x(k+1) = Gx(k)$ pode ser escrita

$$x(k) = \Psi(k)x(0)\tag{3.38}$$

3.5. SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NO ESPAÇO DE ESTADOS DISCRETO 37

Ao comparar a eq. 3.37 e a eq. 3.38 resulta,

$$\Psi(k) = G^k \quad (3.39)$$

3.5.2 Solução do sistema discreto via Transformada

z

Considere o sistema no tempo discreto

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.40)$$

Aplicando a transformada z na eq. 3.40

$$zX(z) - zx(0) = GX(z) + HU(z) \quad (3.41)$$

então

$$(zI - G)X(z) = zx(0) + HU(z) \quad (3.42)$$

Multiplica-se a eq. 3.42 por $(zI - G)^{-1}$

$$X(z) = (zI - G)^{-1}zx(0) + (zI - G)^{-1}HU(z) \quad (3.43)$$

e aplica-se a transformada inversa

$$x(k) = Z^{-1}[(zI - G)^{-1}z]x(0) + Z^{-1}[(zI - G)^{-1}HU(z)] \quad (3.44)$$

3.5.3 Método para calcular $(zI - G)^{-1}$

A inversa de $(zI - G)$ pode ser calculada em termos da matriz adjunta

$$(zI - G)^{-1} = \frac{adj(zI - G)}{|zI - G|} \quad (3.45)$$

Note que o determinante $|zI - G|$ é o polinômio característico

$$|zI - G| = z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_n \quad (3.46)$$

Demonstra-se que a matriz adjunta tem uma representação expandida

$$adj(zI - G) = Iz^{n-1} + H_1z^{n-2} + \dots + H_{n-1} \quad (3.47)$$

onde as matrizes H_i dependem dos coeficientes do polinômio característico

3.5. SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES NO ESPAÇO DE ESTADOS DISCRETO 39

$$\begin{aligned}
 H_1 &= G + a_1 I \\
 H_2 &= GH_1 + a_2 I \\
 &\vdots \\
 H_{n-1} &= GH_{n-2} + a_{n-1} I \\
 H_n &= GH_{n-1} + a_n I = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.48}$$

Os coeficientes do polinômio característico eq. 3.46 podem ser calculados alternativamente por

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -trG \\
 a_2 &= -\frac{1}{2}trGH_1 \\
 &\vdots \\
 a_n &= -\frac{1}{n}trGH_{n-1}
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

Exemplo: Determine a inversa da matriz $(zI - G)$ quando G vale,

$$\begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.0 \\ 0.3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.0 & 0.0 & -0.3 \end{bmatrix}
 \tag{3.50}$$

3.6 Estabilidade de Lyapunov

O segundo método de Lyapunov para analisar a estabilidade de sistemas não se restringe a sistemas lineares invariantes no tempo, aplica-se também a sistemas variantes no tempo e sistemas não lineares.

Sabe-se que um sistema vibratório é estável se sua energia total é decrescente. O método de Lyapunov baseia-se numa generalização deste fato. Se o sistema tem um estado assintoticamente estável, então a energia armazenada decai no tempo. Para tratar sistemas mais abstratos, onde o conceito de energia potencial tem pouco significado, Lyapunov introduziu uma função de energia fictícia, a Função de Lyapunov.

Vamos inicialmente analisar o teorema da estabilidade de Lyapunov na sua forma abrangente.

3.7 Teorema de Estabilidade de Lyapunov

Esta seção baseia-se no Problema A-5-18 do livro de K. Ogata [2]. Considere um sistema não linear definido por

$$\dot{x} = f(x). \quad (3.51)$$

Suponha que

$$f(t, 0) = 0, \text{ paratodot} > 0, \quad (3.52)$$

e suponha ainda que existe uma função escalar $V(\mathbf{x}, t)$ que tem derivadas parciais primeiras contínuas. Se $V(\mathbf{x}, t)$ satisfies the conditions

1. $V(\mathbf{x}, t)$ é positiva definida. Isto é, $V(0, t) = 0$ e $V(\mathbf{x}, t) \geq \alpha(\|\mathbf{x}\|) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq 0$ e qualquer t , sendo α uma função escalar contínua não decrescente tal que $\alpha(0) = 0$;
2. A derivada $\dot{V}(\mathbf{x}, t)$ é negativa para todo $x > 0$ and all t , ou seja, $\dot{V}(\mathbf{x}, t) \leq -\gamma(\|\mathbf{x}\|) < 0$, para todo $x \neq 0$ e todo t , sendo γ uma função escalar contínua não decrescente tal que $\gamma(0) = 0$;
3. Existe uma função escalar contínua não decrescente β tal que $\beta(0) = 0$ e, para todo t , $V(\mathbf{x}, t) \leq \beta(\|\mathbf{x}\|)$;
4. $\alpha(\|\mathbf{x}\|)$ tende a infinito enquanto $\|\mathbf{x}\|$ cresce indefinidamente, ou $\alpha(\|\mathbf{x}\|) \rightarrow \infty$ enquanto $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$;

42 *CAPÍTULO 3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS*

Então a origem do sistema, $x = 0$, é assintoticamente uniformemente estável no tempo longo.

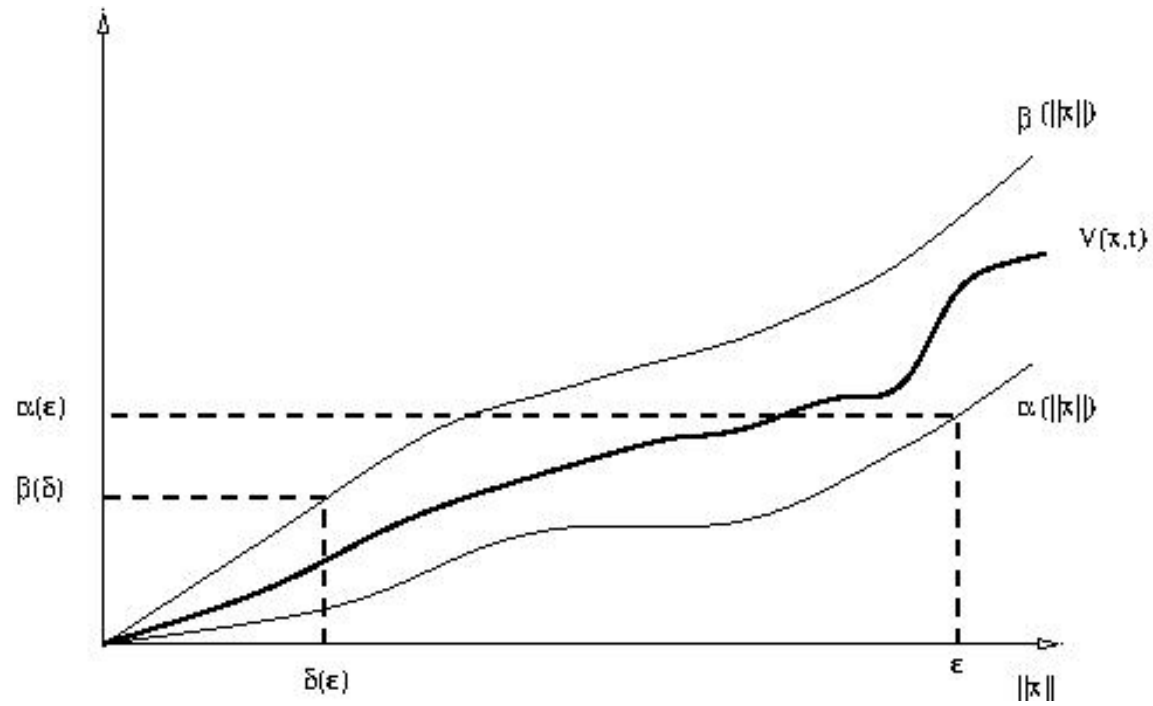


Figura 3.1: Função de Lyapunov em função da norma do estado \mathbf{x} , $\|\mathbf{x}\|$

3.7.1 Função positiva definida

Uma função , $V(x)$, é dita positivo definida se $V(x) > 0$ para qualquer estado x e se $V(0) = 0$. Uma função variável no tempo, $V(x, t)$, é dita positivo definida se for limitada por baixo por uma função positivo definida $V(x, t) > V(x) > 0$, para qualquer estado x , e se $V(0, t) = 0$.

3.7.2 Critério de Sylvester para determinar se uma matriz é positiva

O determinante da matriz deve ser positivo e os determinantes dos *minors* principais sucessivos também são positivos. Por exemplo, para que uma matriz 3×3 seja positiva definida é necessário

$$a_{1,1} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} > 0 \quad (3.53)$$

Exemplo : Mostre que a função $V(x) = 10x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 4x_1x_3$ é positivo definida usando o critério de Sylvester.

3.7.3 A Função de Lyapunov

A Função de Lyapunov é uma função positivo definida, contínua, com primeiras derivadas parciais contínuas e tem derivada temporal negativa definida.

3.7.4 Estabilidade segundo Lyapunov

Seja uma região esférica tal que $\|x - x_e\| < \delta$ denotada por $S(\delta)$. Um estado de equilíbrio x_e é dito estável se existe $S(\delta)$ tal que as trajetórias que começam em $S(\delta)$ não saem de $S(\epsilon)$ enquanto o tempo aumenta indefinidamente, ver fig. 3.2.

3.7.5 Estabilidade assintótica

Um estado x_e é dito assintoticamente estável se qualquer solução que tem início em $S(\delta)$ converge, sem sair de $S(\epsilon)$, para x_e a medida que o tempo aumenta indefinidamente, ver fig. 3.2.

Se δ não depende de do instante inicial t_0 então o estado de equilíbrio é dito uniformemente assintoticamente estável.

46 *CAPÍTULO 3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS*

3.7.6 Instabilidade

Um estado de equilíbrio x_e é dito instável se para um número real $\epsilon > 0$ e outro número $\delta > 0$, não importa quão pequeno, existe sempre um estado x_0 em $S(\delta)$ tal que a trajetória sai de $S(\epsilon)$, ver fig. 3.2

3.7.7 Teorema sobre estabilidade assintótica

Seja um sistema descrito por $\dot{x} = f(x, t)$, onde $f(0, t) = 0$ para qualquer t . Se existe uma função escalar $V(x, t)$, com derivadas parciais contínuas satisfazendo

- $V(x)$ é positivo definida
- $\dot{V}(x, t)$ é negativo definida

então, o estado de equilíbrio na origem é uniformemente assintoticamente estável.

3.7.8 Teorema sobre estabilidade no tempo discreto

Seja um sistema descrito por $x((k+1)T) = f(x(kT))$, onde $f(0, k) = 0$ para qualquer k . Se existe uma função escalar $V(x)$, contínua em x satisfazendo

- $V(x)$ é positivo definida
- $\Delta V = V(x((k+1)T)) - V(x(kT)) < 0$
- $V(x) \rightarrow \infty$ enquanto $\|x\| \rightarrow \infty$

então, o estado de equilíbrio na origem é assintoticamente estável e $V(x)$ é uma função de Lyapunov.

Observação: a demonstração deste teorema encontra-se no problema resolvido A-5-18 do livro Ogata 1994. Este teorema é utilizado amplamente em tecnologias atuais.

3.7.9 Estabilidade de um sistema discreto invariante no tempo

Teorema: Considere um sistema discreto invariante no tempo $x(k+1) = Gx(k)$, onde origem é estado de equilíbrio $x_e = 0$. Uma possível função de Lyapunov é

$$V(x(k)) = x^*(k)Px(k) \quad (3.54)$$

onde P é Hermitiana, $P^* = P$. O símbolo $*$ denota conjugado transposto.

Então

$$\Delta V(x(k)) = V(x(k+1)) - V(x(k)) = x^*(k+1)Px(k+1) - x^*(k)Px(k) \quad (3.55)$$

ou seja,

$$\Delta V(x(k)) = [Gx(k)]^*PGx(k) - x^*(k)Px(k) = x^*(k)(G^*PG - P)x(k) \quad (3.56)$$

Convém chamar $G^*PG - P = -Q$ e neste caso

$$\Delta V(x(k)) = -x^*(k)Qx(k) \quad (3.57)$$

A condição necessária e suficiente para que $x = 0$ seja assintoticamente estável é que dada uma matriz Q , positiva definida real simétrica, existe uma matriz P , positivo definida Hermitiana.

Observação: a demonstração deste teorema encontra-se no problema resolvido A-5-19, Ogata, 1994. Nesta demonstração fica claro que esta condição é de fato necessária e suficiente.

Exemplo: Determine a estabilidade na origem do sistema

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.5 & -1 \end{bmatrix} x(k) \quad (3.58)$$

Solução: Seja $Q = I$, se P que satisfaz $G^t P G - P = -Q$ for hermitiana, positivo definida, então o sistema será estável na origem. A determinação de P pode ser obtida por álgebra ou numericamente, por exemplo pelo comando *Lyap*. Para verificar se P é positivo definida, utiliza-se o critério de Sylvester.

3.8 Teorema de Cayley-Hamilton

Seja A uma matriz $n \times n$ com polinômio característico

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (3.59)$$

então a matriz A satisfaz seu polinômio característico

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + I a_n = 0 \quad (3.60)$$

Vamos demonstrar este teorema para o caso particular em que A é diagonalizável, ou seja, A tem autovalores distintos. Matriz de autovetores M reduz a matriz A a uma matriz diagonal

$$A = M \Lambda M^{-1} \rightarrow A^k = M \Lambda^k M^{-1} \quad (3.61)$$

Ao substituir λ no polinômio característico resulta

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + I a_n \quad (3.62)$$

Substituindo a eq. 3.61 na eq. 3.62

$$M[\Lambda^n + a_1 \Lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \Lambda + a_n] M^{-1} = 0 \quad (3.63)$$

Tudo que está dentro dos colchetes precisa ser a matriz nula, uma vez que a matriz M é não-singular. E para $n = 2$, verifica-se que,

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{bmatrix} + a_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0 \quad (3.64)$$

Cada linha do termo entre colchetes é precisamente o polinômio característico com $\lambda = \text{autovalor}$ e portanto cada linha é necessariamente nula. Desta forma a matriz A satisfaz seu próprio polinômio característico.

As consequências deste fato são vastas. **Observem que A^n é linearmente dependente de A^{n-1}, \dots, A e I .** A n -ésima potência de A não traz informação nova sobre o sistema. Ou seja, A^n é linearmente dependente de

$$A^n = -a_1 A^{n-1} - \dots + a_{n-1} A - a_n I, \quad (3.65)$$

não altero o posto do termo entre colchetes introduzindo A^n .

3.9 Controlabilidade de sistema discreto

Um sistema é dito controlável se for possível transferir o sis-

tema de um estado arbitrário para outro estado desejado e arbitrário em período de tempo finito.

Considere o sistema descrito por

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.66)$$

onde assume-se que o controle é constante por trechos.

O sistema acima é considerado controlável se existe uma história de controle $u(k)$ com um número finito de intervalos tal que o estado inicial $x(0)$ pode ser transferido para o estado final desejado x_f em no máximo n períodos.

No n -ésimo instante de tempo

$$x(n) - G^n x(0) = [H \ GH \ \dots \ G^{n-1}H] \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-1) \\ \vdots \\ u(0) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton não adianta aumentar o número de intervalos de tempo além de n pois G^n não irá aumentar o posto da

matriz entre colchetes, doravante denominada matriz de controlabilidade.

Se o posto da matriz de controlabilidade for completo, então o sistema é dito controlável. Existem outros critérios para verificar a controlabilidade de um sistema.

3.10 Observabilidade de sistema discreto

Considere um sistema não forçado descrito por

$$\begin{aligned}x(k+1) &= Gx(k) \\ y(k) &= Cx(k)\end{aligned}\tag{3.68}$$

O sistema é dito observável se o estado inicial $x(0)$ for determinável a partir da observação de $y(k)$ em tempo finito de intervalos. Vamos observar os primeiros n valores de $y(k)$

$$\begin{aligned}
 y(0) &= Cx(0) \\
 y(1) &= Cx(1) \\
 y(2) &= CX(2) \\
 \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\
 y(n-1) &= CG^{n-1}x(0)
 \end{aligned}
 \tag{3.69}$$

Substituindo $x(1)$ por $Gx(0)$ e assim por diante,

$$\begin{aligned}
 y(0) &= Cx(0) \\
 y(1) &= CGx(0) \\
 y(2) &= CG^2x(0) \\
 \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\
 y(n-1) &= CG^{n-1}x(0)
 \end{aligned}
 \tag{3.70}$$

Podemos criar um vetor com a história das observações,

$$\bar{y} = \left\{ \begin{array}{c} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n-1) \end{array} \right\}
 \tag{3.71}$$

$$\bar{y} = \left\{ \begin{array}{c} C \\ CG \\ CG^2 \\ \vdots \\ CG^{(n-1)} \end{array} \right\} x(0) \quad (3.72)$$

Para que o estado inicial seja determinável, é necessário que a matriz

$$O = \left[\begin{array}{c} C \\ CG \\ \vdots \\ CG^{m-1} \end{array} \right] \quad (3.73)$$

tenha posto completo. Pelo teorema de Cayley-Hamilton não adianta estender o número de observações por que G^m não irá alterar o posto da matriz de observabilidade. Define-se a matriz da eq. 3.73 como matriz de observabilidade e o sistema será observável se ela for de posto completo.

Exemplo 6-5 Ogata: Considere o sistema no tempo contínuo

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad (3.74)$$

e

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

1. o sistema é controlável?
2. o sistema é observável?
3. determine os autovalores de A ;
4. mostre que o sistema discreto com intervalo de amostragem T tem

$$G = \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

e

$$H = \begin{bmatrix} (1 - \cos T) \\ \sin T \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

5. mostre que para $T = n\pi$ com $n = 1, 2, \dots$, $G = I$ ou $G = -I$;

58CAPÍTULO 3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

6. mostre que nestas condições o sistema não é controlável.

Solução a partir do quarto item

A matriz G pode ser calculada por

$$G = e^{AT} = \mathcal{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \mathcal{L}^{-1} \left(\left[\begin{array}{cc} s & -1 \\ 1 & s \end{array} \right]^{-1} \right) \quad (3.78)$$

calculando a matriz inversa entre colchetes

$$G = \exp(AT) = \mathcal{L}^{-1} \left(\left[\begin{array}{cc} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{array} \right] \right) \quad (3.79)$$

e finalmente,

$$G = \left[\begin{array}{cc} \cos(T) & \text{sen}(T) \\ -\text{sen}(T) & \cos(T) \end{array} \right] \quad (3.80)$$

3.11 Equações Polinomiais para Síntese de Controlador

Considere um sistema cuja função de transferência é

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{B(z)}{A(z)} \quad (3.81)$$

onde $A(z)$ tem ordem n e coeficiente de potencia mais elevada igual a 1, $B(z)$ tem ordem n . Considere ainda polinômios $D(z)$, $\alpha(z)$ e $\beta(z)$ de ordens $2n - 1$, $n - 1$ e $n - 1$, respectivamente.

Existem polinômios $\alpha(z)$ e $\beta(z)$ únicos tais que

$$\alpha(z)A(z) + \beta(z)B(z) = D(z) \quad (3.82)$$

Supondo, para facilitar a notação, que $n = 4$, podemos definir dois vetores, D e M , e uma matriz E ,

60CAPÍTULO 3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

$$D = \begin{bmatrix} d_7 \\ d_6 \\ \vdots \\ d_1 \\ d_0 \end{bmatrix} \quad (3.83)$$

ainda,

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_0 \\ \beta_3 \\ \beta_2 \\ \beta_1 \\ \beta_0 \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

e ainda,

3.11. EQUAÇÕES POLINOMIAIS PARA SÍNTESE DE CONTROLADOR 61

$$E = \begin{bmatrix} a_4 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & a_4 & 0 & 0 & b_3 & b_4 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 0 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 1 & a_1 & a_2 & a_3 & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 1 & a_1 & a_2 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 & 0 & 0 & b_0 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

Desta forma, os coeficientes representados pelo vetor M podem ser calculados, por

$$M = E^{-1}D \quad (3.86)$$

O vetor M representa os coeficientes de $\alpha(z)$ e $\beta(z)$ que definem um controlador do sistema, conforme a figura 3.11

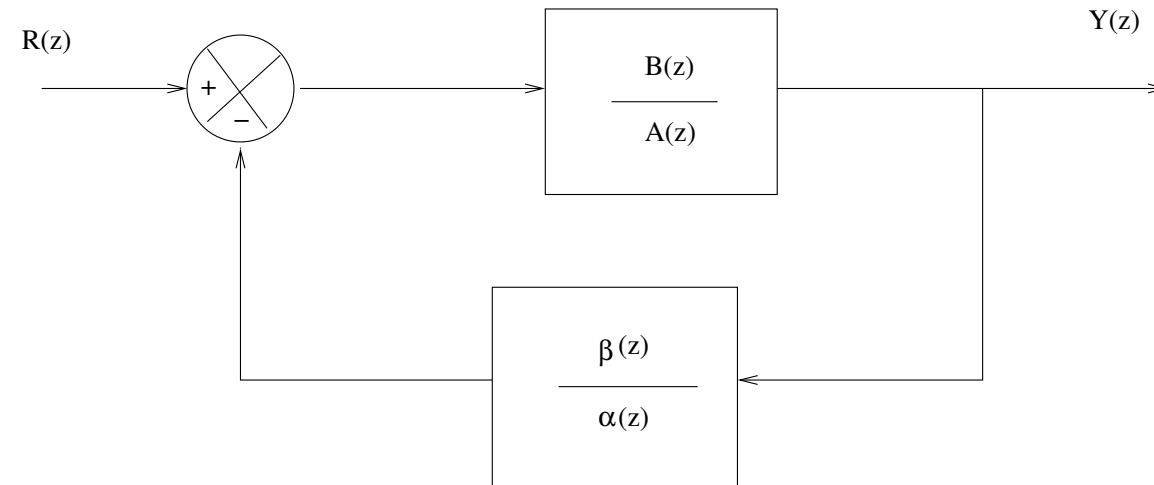


Figura 3.3: Diagram de blocos para projeto de controlador usando equações polinomiais

3.12 Controle por locação de polos

Considere o sistema discreto

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.87)$$

se a dinâmica do sistema não é satisfatória pode-se realimentar o estado através de uma matriz de ganho

O sinal de controle, admitindo um sinal de referência $r(k)$

$$u(k) = r(k) - Kx(k) \quad (3.88)$$

consequentemente,

$$x(k+1) = Gx(k) + H(r(k) - Kx(k)) \quad (3.89)$$

ou seja,

$$x(k+1) = (G - HK)x(k) + Hr(k) \quad (3.90)$$

Se o sistema da eq. 3.87 for controlável então existe uma matriz K tal que os autovalores da matriz $G - HK$ podem ser arbitrariamente alocados.

Na prática, este tipo de controle enfrenta um desafio, normalmente o estado $x(k)$ não é observado, apenas um vetor de dimensão menor $y(k) = Cx(k)$ é observado. Este problema é contornado através do

emprego de um observador de estado completo. Um observador de estado completo estima o estado completo a partir da história das observações $y(k)$, das história de controle $u(k)$ e informação a priori como, por exemplo, um modelo da planta.

3.13 Observador de estado completo

Luenberger propôs um observador na forma de um sistema dinâmico linear nas observações $y(k)$ e linear na história de controle $u(k)$.

$$\hat{x}(k+1) = G_O \hat{x}(k) + Ly(k) + Mu(k) \quad (3.91)$$

Convém definir o vetor erro de observação

$$e(k) = x(k) - \hat{x}(k) \quad (3.92)$$

e conseqüentemente,

$$e(k+1) = x(k+1) - \hat{x}(k+1) \quad (3.93)$$

A partir desta última equação,

$$e(k+1) = Gx(k) + Hu(k) - (G_O\hat{x}(k) + Ly(k) + Mu(k)) \quad (3.94)$$

Reagrupando e substituindo $Ly(k)$ por $LCx(k)$ resulta

$$e(k+1) = Gx(k) + Hu(k) - G_O\hat{x}(k) - LCx(k) - Mu(k) \quad (3.95)$$

Adota-se por conveniência, $M = H$, e neste caso,

$$e(k+1) = Gx(k) - G_O\hat{x}(k) - LCx(k) \quad (3.96)$$

Reagrupando os termos em $x(k)$

$$e(k+1) = (G - LC)x(k) - G_O\hat{x}(k) \quad (3.97)$$

E finalmente, se $G_O = G - LC$, a dinâmica do erro passa a depender apenas dos autovalores de $G - LC$,

$$e(k+1) = (G - LC)e(k) \quad (3.98)$$

Se o sistema original for observável, pode-se alocar arbitrariamente os autovalores de $G - LC$ através da escolha da matriz L .

3.14 Fórmula de Ackermann para a matriz de ganho do controlador

Considere o sistema

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.99)$$

utilizando realimentação de estado do tipo $u(k) = -Kx(k)$, deseja-se que o sistema de malha fechada tenha polos em $z = \nu_1, z = \nu_2, \dots, z = \nu_n$. Deseja-se portanto que a equação característica seja

$$|zI - G + HK| = (z - \nu_1)(z - \nu_2) \dots (z - \nu_n) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} z^1 + \alpha_n = 0 \quad (3.100)$$

Define-se por conveniência $\bar{G} = G - HK$. Do teorema de Cayley-Hamilton, \bar{G} satisfaz sua equação característica

$$\bar{G}^n + \alpha_1 \bar{G}^{n-1} + \dots + \alpha_{n-1} \bar{G}^1 + \alpha_n I = \Phi(\bar{G}) = 0 \quad (3.101)$$

Considere a expansão de \bar{G}^n

3.14. FÓRMULA DE ACKERMANN PARA A MATRIZ DE GANHO DO CONTROLADOR 67

$$\begin{aligned}
 I &= I \\
 \bar{G} &= G - HK \\
 \bar{G}^2 &= G^2 - GHK - HK\bar{G} \\
 &\vdots \\
 \bar{G}^n &= G^n - G^{n-1}HK - \dots - HK\bar{G}^{n-1}
 \end{aligned} \tag{3.102}$$

Multiplicando as equações por $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ e somando,

$$\Phi(\bar{G}) = \alpha_n I + \alpha_{n-1} G + \dots + \alpha_1 G^{n-1} + G^n - \alpha_{n-1} HK - \alpha_{n-2} GHK - \alpha_{n-2} HK\bar{G} - \dots \tag{3.103}$$

que pode ser reescrito em forma matricial

$$\Phi(\bar{G}) = \Phi(G) - [H \quad GH \quad \dots \quad G^{n-1}H] \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = 0 \tag{3.104}$$

Multiplicando pela inversa da matriz de controlabilidade,

$$\begin{bmatrix} \alpha_{n-1}K + \alpha_{n-2}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-1} \\ \alpha_{n-2}K + \alpha_{n-3}K\bar{G} + \dots + K\bar{G}^{n-2} \\ \vdots \\ K \end{bmatrix} = [H \ GH \ \dots \ G^{n-1}H]^{-1}\Phi(G) \quad (3.105)$$

Finalmente, pré-multiplica-se por $[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$ e resulta

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1][H \ GH \ \dots \ G^{n-1}H]^{-1}\Phi(G) \quad (3.106)$$

Esta equação, eq. 3.106, é chamada de *fórmula de Ackermann*. Ver exemplo resolvido 6-6 do livro texto e analisar as soluções no método 2 e no método 4.

3.15 Fórmula de Ackermann para a matriz de ganho do observador

Para determinar a matriz de ganho do observador, também conhecida por matriz de Luenberger, podemos escrever,

$$L = \Phi(G) \begin{bmatrix} C \\ CG \\ CG^2 \\ \vdots \\ CG^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.107)$$

Esta expressão de L é chamada de *fórmula de Ackermann* para determinar o ganho do observador. Ver exemplo resolvido 6-10 do livro texto e analisar as soluções no método 2 e no método 4.

3.16 Controle Ótimo Quadrático

Considere um sistema invariante no tempo do tipo,

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.108)$$

e um índice de desempenho quadrático

$$J = \frac{1}{2}x^*(N)Sx(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^*(k)Qx(k) + u^*(k)Ru(k)] \quad (3.109)$$

70CAPÍTULO 3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

Vamos demonstrar que a lei de controle que minimiza J tem a forma

$$u(k+1) = -K(k)x(k) \quad (3.110)$$

e caso o estado não puder ser todo medido, devemos utilizar um observador de estado.

Deseja-se minimizar J sujeito a restrições de como o estado evolui, eq. 3.108, e considerando o estado inicial especificado,

$$x(0) = c \quad (3.111)$$

Através do uso de multiplicadores de Lagrange, define-se um índice de desempenho aumentado, L ,

$$\begin{aligned} L = & \frac{1}{2}x^t(N)Sx(N) \\ & + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N-1} x^t(k)Qx(k) + u^t(k)Ru(k) \\ & + \lambda^t(k+1)[Gx(k) + Hu(k) - x(k+1)] \\ & + [Gx(k) + Hu(k) - x(k+1)]^t\lambda(k+1) \end{aligned} \quad (3.112)$$

onde cada $\lambda(k)$ é um vetor.

Para minimizar o índice aumentado L devemos impor derivada parcial com respeito a cada componente dos vetores λ , \mathbf{u} e \mathbf{x} igual a zero. Para $i = 1, 2, \dots, n$ e $k = 1, 2, \dots, N$ resulta,

$$\frac{\partial L}{\partial x_i(k)} = \mathbf{0} \quad (3.113)$$

e

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i(k)} = \mathbf{0}. \quad (3.114)$$

E para cada um dos índices $i = 1, 2, \dots, r$ e $k = 0, 1, \dots, N-1$, decorre

$$\frac{\partial L}{\partial u_i(k)} = \mathbf{0}. \quad (3.115)$$

Invocam-se agora regras da derivada parcial de formas bilineares quadráticas,

$$\frac{\partial}{\partial x} x^t A y = A y \quad (3.116)$$

e adicionalmente,

72CAPÍTULO 3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

$$\frac{\partial}{\partial y} x^t A y = A^t x \quad (3.117)$$

para facilitar o desenvolvimento. Obtém-se um conjunto de equações que formam um *Two point boundary value problem*, TPBVP.

$$\frac{\partial L}{\partial x(k)} = 0 \rightarrow Qx(k) + G^t \lambda(k+1) - \lambda(k) = 0 \quad (3.118)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x(N)} = 0 \rightarrow Sx(N) - \lambda(N) = 0, \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u(k)} = 0 \rightarrow Ru(k) + H^t \lambda(k+1) = 0, \quad (3.120)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda(k)} = 0 \rightarrow Gx(k-1) + Hu(k-1) - x(k) = 0 \quad (3.121)$$

Estas equações admitem simplificações,

$$\lambda(k) = Qx(k) + G^t \lambda(k+1), \quad (3.122)$$

$$\lambda(N) = Sx(N) , \quad (3.123)$$

$$u(k) = -R^{-1}H^t\lambda(k+1) , \quad (3.124)$$

e, levando em conta a eq. 3.121 e a eq. 3.124, resulta

$$x(k+1) = Gx(k) - HR^{-1}H^t\lambda(k+1) \quad (3.125)$$

com a condição inicial $x(0) = c$.

Convém eliminar λ destas equações através da seguinte substituição,

$$\lambda(k) = P(k)x(k). \quad (3.126)$$

Ao substituir a eq. 3.126 na eq. 3.122 resulta,

$$P(k)x(k) = Qx(k) + G^tP(k+1)x(k+1) \quad (3.127)$$

Ainda mais, ao substituir a eq. 3.126 na eq. 3.125 resulta,

$$x(k+1) = Gx(k) - HR^{-1}H^tP(k+1)x(k+1) \quad (3.128)$$

74CAPÍTULO 3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

Nestas duas equações, eq. 3.127 e eq. 3.128, λ foi eliminada. Esta transformação é chamada de transformação de Riccati. Da eq. 3.128 resulta

$$[I + HR^{-1}H^tP(k+1)]x(k+1) = Gx(k) \quad (3.129)$$

onde, para sistemas controláveis, demonstra-se que a inversa do termo entre colchetes existe. E portanto,

$$x(k+1) = [I + HR^{-1}H^tP(k+1)]^{-1}Gx(k) \quad (3.130)$$

Substitui-se a eq. 3.130 na eq. 3.127 e obtém-se

$$P(k)x(k) = Qx(k) + G^tP(k+1)[I + HR^{-1}H^tP(k+1)]^{-1}Gx(k) \quad (3.131)$$

que rearranja-se

$$[P(k) - Q - G^tP(k+1)[I + HR^{-1}H^tP(k+1)]^{-1}G]x(k) = 0 \quad (3.132)$$

Entretanto, esta última equação deve valer para todo $x(k)$ e isto implica que

$$P(k) = Q + G^t P(k+1) [I + HR^{-1} H^t P(k+1)]^{-1} G \quad (3.133)$$

Há um lema de inversão de matrizes,

$$(A + BD)^{-1} = A^{-1} - A^{-1} B (I + DA^{-1} B)^{-1} DA^{-1} \quad (3.134)$$

que pode ser usado para rearranjar a eq. 3.133 com $A = I$, $B = HR^{-1}$ e $D = H^t P(k+1)$,

$$P(k) = Q + G^t P(k+1) G - G^t P(k+1) H [R + H^t P(k+1)]^{-1} H^t P(k+1) G \quad (3.135)$$

esta é a equação de Riccati.

Note que decorre da eq. 3.119 e da eq. 3.126 que para $k = N$

$$P(N) = S \quad (3.136)$$

A equação de Riccati pode ser resolvida de trás para frente, determinando $P(N)$, $P(N-1)$, \dots , $P(0)$.

76CAPÍTULO 3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS

Para determinar a história de controle parte-se da eq. 3.124 e da eq. 3.122 que resulta,

$$u(k) = -R^{-1}H^t(G^t)^{-1}[\lambda(k) - Qx(k)] , \quad (3.137)$$

que, eliminando λ torna-se

$$u(k) = -R^{-1}H^t(G^t)^{-1}[P(k) - Q]x(k) = -K(k)x(k) \quad (3.138)$$

e evidencia o ganho ótimo $K(k)$,

$$K(k) = -R^{-1}H^t(G^t)^{-1}[P(k) - Q] \quad (3.139)$$

Exemplo 8-1 Ogata Considere o sistema no tempo discreto definido por,

$$x(k+1) = 0.3679x(k) + 0.6321u(k) \quad (3.140)$$

onde $x(0) = 1$.

Determine a lei de controle ótimo que minimiza

$$J = \frac{1}{2}[x(0)]^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^9 [x^2(k) + u^2(k)] \quad (3.141)$$

Observe que neste exemplo $S = 1$, $Q = 1$ e $R = 1$.

3.17 Exercícios Recomendados

3.17.1 Formas canônicas

Problemas resolvidos

: A-5-1, A-5-2, A-5-3

Exemplos resolvidos

: 5-1

Problemas propostos

: B-5-1, B-5-2, B-5-3, B-5-4

3.17.2 Solução de Equações de Diferenças

Exemplos resolvidos

: 5-3

Exemplos resolvidos

: A-5-14, A-5-16

3.17.3 Estabilidade de Lyapunov

Exemplos resolvidos

:5-9

Problemas resolvidos

:A-5-17, A-5-22

Problemas propostos

: B-5-21, B-5-22, B-5-23, B-5-24

3.17.4 Alocação de Polos e Observadores

Exemplos resolvidos

:6-2,6-4, 6-5, 6-6 (método 2 e método 4), 6-8, 6-9, 6-10 (método 2 e método 4).

Problemas resolvidos

:A-6-3, A-6-10, A-6-16

Problemas propostos

: B-6-6, B-6-7, B-6-9, B-6-11, B-6-16.

3.17.5 Controle Ótimo Quadrático

Exemplos Resolvidos

: 8-1.

80 *CAPÍTULO 3. REPRESENTAÇÃO NO ESPAÇO DE ESTADOS*

Capítulo 4

A Transformada de Laplace e a Transformada Z

4.1 A Transformada de Laplace

4.1.1 Introdução

Através da transformada de Laplace derivadas temporais correspondem a uma multiplicação pela variável s e, desta forma, equações di-

ferenciais ordinárias tornam-se equações algébricas. A transformada de Laplace é utilizada na solução de equações diferenciais ordinárias, equações de diferenças, equações integrais, e equações diferenciais parciais. Alguns critérios de estabilidade de sistemas lineares são formulados e visualizados no plano complexo s .

4.1.2 Definição

Seja $f(t) = 0$ para $t < 0$ e s uma variável complexa. A transformada de Laplace lateral da função $f(t)$ é

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (4.1)$$

4.1.3 Condições de existência da transformada

A transformada de Laplace existe se a integral de Laplace converge. A integral converge se $f(t)$ for contínua por trechos e se for de ordem exponencial quando t tende a infinito. Uma função é dita de ordem exponencial se existe um real σ positivo tal que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} |f(t)| = 0 \quad (4.2)$$

Por exemplo, a função e^{t^2} com $0 < t < \infty$ não possui transformada de Laplace pois não é de ordem exponencial. Entretanto, a função

$$f(t) = e^{t^2} \text{ for } 0 < t < T \quad (4.3)$$

$$= 0 \text{ for } t \leq 0 \text{ e } t > T \quad (4.4)$$

possui transformada de Laplace. Sinais fisicamente gerados sempre possuem transformada de Laplace.

4.1.4 A transformada de algumas funções

Função exponencial

Considere a função exponencial

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (4.5)$$

$$= Ae^{-\alpha t} \text{ for } t \geq 0 \quad (4.6)$$

sua transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} Ae^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} Ae^{-(\alpha+s)t} dt = \frac{A}{s + \alpha} \quad (4.7)$$

Função degrau

Considere a função degrau

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (4.8)$$

$$= A \text{ for } t > 0 \quad (4.9)$$

sua transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}[A] = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \frac{A}{s} \quad (4.10)$$

Função rampa

Considere a função rampa

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (4.11)$$

$$= At \text{ for } t \geq 0 \quad (4.12)$$

sua transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}[At] = \int_0^{\infty} Ate^{-st} dt \quad (4.13)$$

que pode ser integrada por partes

$$\mathcal{L}[At] = A \left(t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt \right) = \frac{A}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{A}{s^2} \quad (4.14)$$

Função senoidal

Considere a função senoidal

$$f(t) = 0 \text{ for } t < 0 \quad (4.15)$$

$$= A \sin(\omega t) \text{ for } t \geq 0 \quad (4.16)$$

sua transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}[A \sin(\omega t)] = \int_0^{\infty} \frac{A}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \quad (4.17)$$

$$= \frac{A}{2j} \frac{1}{(s - j\omega)} - \frac{A}{2j} \frac{1}{(s + j\omega)} \quad (4.18)$$

$$= \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (4.19)$$

Função pulso

Considere a função pulso

$$f(t) = \frac{A}{t_0} \text{ for } 0 < t < t_0 \quad (4.20)$$

$$= 0 \text{ for } t < 0 \text{ e } t > t_0 \quad (4.21)$$

que pode ser definida em termos da função degrau

$$f(t) = \frac{A}{t_0} 1(t) - \frac{A}{t_0} 1(t - t_0) \quad (4.22)$$

A transformada de Laplace torna-se

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}1(t)\right] - \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}1(t-t_0)\right] \quad (4.23)$$

Vamos desenvolver a integral do degrau atrasado de t_0 , porque a outra integral, do degrau que dispara em 0, já conhecemos.

$$\int_0^\infty \frac{A}{t_0}1(t-t_0)e^{-st}dt = \frac{A}{t_0} \int_{t_0}^\infty 1(t-t_0)e^{-st}dt \quad (4.24)$$

Mudança de variáveis, $\eta = t - t_0$, e portanto, $d\eta = dt$

$$\frac{A}{t_0} \int_{t_0}^\infty 1(t-t_0)e^{-st}dt = \frac{A}{t_0} \int_0^\infty 1(\eta)e^{-s(\eta+t_0)}d\eta \quad (4.25)$$

Observe que

$$\frac{A}{t_0} \int_0^\infty 1(\eta)e^{-s(\eta+t_0)}d\eta = \frac{A}{t_0} \int_0^\infty 1(\eta)e^{-s\eta}e^{-st_0}d\eta \quad (4.26)$$

$$\frac{A}{t_0} \int_0^\infty 1(\eta)e^{-s\eta}e^{-st_0}d\eta = \frac{A}{t_0}e^{-st_0} \int_0^\infty 1(\eta)e^{-s\eta}d\eta \quad (4.27)$$

Desta forma, podemos escrever,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}1(t)\right] - \mathcal{L}\left[\frac{A}{t_0}1(t-t_0)\right] \quad (4.28)$$

$$= \frac{A}{t_0s} - \frac{A}{t_0s}e^{-st_0} \quad (4.29)$$

$$= \frac{A}{t_0s}(1 - e^{-st_0}) \quad (4.30)$$

Função impulso

Considere a função impulso

$$f(t) = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A}{t_0} \text{ for } 0 < t < t_0 \quad (4.31)$$

$$= 0 \text{ for } t < 0 \text{ e } t > t_0 \quad (4.32)$$

sua transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}[f(t)] = \lim_{t_0 \rightarrow 0} \left[\frac{A}{t_0s}(1 - e^{-st_0}) \right] \quad (4.33)$$

$$= \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dt_0}[A(1 - e^{-st_0})]}{\frac{d}{dt_0}(st_0)} \quad (4.34)$$

$$= \frac{As}{s} = A \quad (4.35)$$

A transformada de Laplace de uma função impulso é a intensidade (área) deste impulso.

4.1.5 Superposição

A transformada de Laplace é um operador linear, ou seja,

$$\mathcal{L}[f_1(t) + f_2(t)] = \mathcal{L}[f_1(t)] + \mathcal{L}[f_2(t)] \quad (4.36)$$

4.1.6 Translação de uma função

Considere a função $f(t - \alpha)1(t - \alpha)$ com $\alpha > 0$. Observe que o degrau unitário impõe valores nulos para $t < \alpha$. Por definição a transformada de Laplace é

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)1(t - \alpha)] = \int_0^{\infty} f(t - \alpha)1(t - \alpha)e^{-st} dt \quad (4.37)$$

Mudando a variável de integração de t para τ onde $\tau = t - \alpha$

$$\mathcal{L}[f(t - \alpha)1(t - \alpha)] = \int_{-\alpha}^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} d\tau \quad (4.38)$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s(\tau+\alpha)} d\tau \quad (4.39)$$

$$= \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s\tau}e^{-s\alpha} d\tau \quad (4.40)$$

$$= e^{-s\alpha} \int_0^{\infty} f(\tau)1(\tau)e^{-s\tau} d\tau \quad (4.41)$$

$$= e^{-s\alpha} F(s) \quad (4.42)$$

4.1.7 Multiplicação por $e^{-\alpha t}$

A transformada de Laplace de uma função $f(t)$ amortecida por $e^{-\alpha t}$ resulta em

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t} f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t) e^{-st} dt = F(s + \alpha) \quad (4.43)$$

Ou seja, multiplicar por uma exponencial provoca um deslocamento da função no plano s .

4.1.8 Limite inferior da transformada de Laplace

Se a função $f(t)$ contém um impulso em $t = 0$ convém distinguir dois tipos de transformada de Laplace

$$\mathcal{L}_+[f(t)] = \int_{0+}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4.44)$$

$$\mathcal{L}_-[f(t)] = \int_{0-}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (4.45)$$

4.1.9 Teorema da Diferenciação

Integra-se a transformada de Laplace por partes

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = f(t) \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] \frac{e^{-st}}{-s} dt \quad (4.46)$$

ou seja,

$$F(s) = \frac{f(0)}{s} + \frac{1}{s} \mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] \quad (4.47)$$

rearranjando,

$$\mathcal{L} \left[\frac{d}{dt} f(t) \right] = sF(s) - f(0) \quad (4.48)$$

Analogamente,

$$\mathcal{L} \left[\frac{d^2}{dt^2} f(t) \right] = s^2 F(s) - sf(0) - \dot{f}(0) \quad (4.49)$$

4.1.10 Teorema do valor final

Uma propriedade importante da Transformada de Laplace é o Teorema do valor final, ela permite calcular o limite de uma função quando e

tempo tende a infinito, ou seja, o valor de regime permanente, quando este limite existe.

Existem três possibilidades para o limite de uma função quando o tempo tende a infinito, o limite é constante, o limite é indefinido ou a função é ilimitada. Se a Transformada de Laplace, $Y(s)$, tiver algum polo no semiplano direito, $y(t)$ será ilimitada. Se $Y(s)$ tiver um par de polos no eixo imaginário, então $y(t)$ contém uma função seno que persiste para sempre e o valor final não é definido. Se todos os polos estiverem no semiplano esquerdo de s e apenas um polo estiver em $s = 0$, então todos os termos de $y(t)$ decaem para zero exceto um termo que é constante no tempo.

Teorema: Se todos os polos de $Y(s)$ pertencem ao semiplano esquerdo, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) \quad (4.50)$$

De fato, a transformada de Laplace da derivada de uma função é

$$L \left[\frac{df}{dt} \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt \quad (4.51)$$

Mostra-se conveniente investigar o limite da eq. 4.51 quando $s \rightarrow 0$,

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt \quad (4.52)$$

observa-se que,

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt \quad (4.53)$$

que pode ser visto como,

$$\int_0^{\infty} \frac{df}{dt} dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P \frac{df}{dt} dt \quad (4.54)$$

e finalmente,

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P \frac{df}{dt} dt = \lim_{P \rightarrow \infty} (f(P) - f(0)) = \lim_{P \rightarrow \infty} f(P) - f(0) \quad (4.55)$$

Desta forma,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{P \rightarrow \infty} f(P) \quad (4.56)$$

e, portanto,

$$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) \quad (4.57)$$

4.1.11 Teorema do valor inicial

Outro teorema permite calcular o valor inicial de uma função quando se conhece a sua transformada de Laplace.

Teorema: Para qualquer par, $F(s)$ e $f(t)$, associado pela transformada de Laplace,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0^+) \quad (4.58)$$

De fato, a transformada de Laplace da derivada de uma função é

$$L \left[\frac{df}{dt} \right] = \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt \quad (4.59)$$

Mostra-se conveniente investigar o limite de $s \rightarrow \infty$ da eq. 4.59, admitindo que df/dt é uma função de ordem exponencial e contínua por trechos,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} \frac{df}{dt} dt = 0 \quad (4.60)$$

O primeiro termo da eq. 4.59 é igual a $sF(s) - f(0)$, pela propriedade da transformada de Laplace da derivada de uma função, desta forma,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s) - f(0)] = 0 \quad (4.61)$$

ou seja, admitindo que df/dt é contínua em $t \rightarrow 0$,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) \quad (4.62)$$

4.1.12 Teorema da Integral

Deseja-se agora determinar a transformada de Laplace da integral no tempo de uma função,

$$F_1(s) = L \left[\int_0^t f(\zeta) d\zeta \right] = \int_0^{\infty} \left[\int_0^t f(\zeta) d\zeta \right] e^{-st} dt \quad (4.63)$$

Integrando por partes, onde

$$u = \int_0^t f(\zeta) d\zeta \quad (4.64)$$

e

$$dv = e^{-st} dt \quad (4.65)$$

Resulta,

$$F_1(s) = \left[-\frac{e^{-st}}{s} \int_0^t f(\zeta) d\zeta \right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{s} e^{-st} f(t) dt = \frac{1}{s} F(s) \quad (4.66)$$

4.1.13 Teorema da Convolução

Teorema a convolução de duas funções no tempo, $g(t)$ e $f(t)$, transforma-se no produto de $G(s)$ e $F(s)$,

$$\int_0^t g(\tau - t) f(\tau) d\tau = \mathcal{L}^{-1} [G(s)F(s)] \quad (4.67)$$

4.1.14 Transformada Inversa de Laplace

A maneira mais simples de determinar a transformada inversa de Laplace é através da consulta de tabelas de transformadas de Laplace. Outra maneira consiste em expandir a função $F(s)$ em frações parciais.

Expansão em frações parciais

Vamos considerar inicialmente $F(s)$ que envolve polos distintos. A função $F(s)$ pode sempre ser expandida em uma soma de frações parciais.

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \dots + \frac{a_n}{s + p_n} \quad (4.68)$$

Os valores dos resíduos a_k podem ser determinados por,

$$a_k = \left[(s + p_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k} \quad (4.69)$$

Uma vez que,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a_k}{s + p_k} \right] = a_k e^{-p_k t} \quad (4.70)$$

$F(t)$ resulta,

$$f(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{-p_k t} \quad (4.71)$$

4.1.15 Solução de Equações Lineares Invariantes no Tempo

Vamos abordar a técnica de solução de equações lineares invariantes no tempo usando a Transformada de Laplace através de um exemplo.

Exemplo: Determine a solução de

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 4y(t) = 3 \quad (4.72)$$

onde $y(0) = \alpha$, $\dot{y}(0) = \beta$. Determina-se a Transformada de Laplace dos dois lados da eq. 4.72

$$s^2 Y(s) - s\alpha - \beta + 5[sY(s) - \alpha] + 4Y(s) = \frac{3}{s} \quad (4.73)$$

Isola-se $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{s(s\alpha + \beta + 5\alpha) + 3}{s(s+1)(s+4)} \quad (4.74)$$

Convém reescrever $Y(s)$ na forma de frações parciais

$$Y(s) = \frac{3}{s} - \frac{3-\beta-4\alpha}{s+1} + \frac{3-4\alpha-4\beta}{s+4} \quad (4.75)$$

Utilizando a transformada inversa de Laplace de uma fração parcial

$$y(t) = \frac{3}{4} - \frac{3-\beta-4\alpha}{3}e^{-t} + \frac{3-4\alpha-4\beta}{12}e^{-4t} \quad (4.76)$$

4.2 A Transformada Z

A transformada z tem o mesmo papel na análise de sistemas discretos lineares e invariantes no tempo que a transformada de Laplace tem na análise de sistemas lineares, invariantes e contínuos no tempo. A convolução no tempo torna-se um produto de funções no domínio da transformada z .

4.2.1 Propriedade da filtragem

Antes iniciar o estudo das propriedades da Transformada de Z , considere o que ocorre em uma integral em que o integrando está multiplicado por uma função impulso que dispara em Δt , $\delta(\Delta t)$,

$$\int f(t)e^{-st}(\delta(t - \Delta t))dt = f(\Delta t)e^{-s\Delta t} \quad (4.77)$$

Se, ao invés de termos uma única função impulso, tivermos um trem de impulsos,

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}(\delta(t) + \delta(t - a) + \delta(t - 2a) + \dots)dt = f(0)e^{-s0} + f(a)e^{-sa} + f(2a)e^{-s2a} + \dots \quad (4.78)$$

4.2.2 A transformada z bilateral

A transformada z de uma sequência discreta é definida pela soma

$$X(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (4.79)$$

onde z é uma variável complexa.

Uma vez que a transformada z é definida por uma série infinita, ela existe apenas para os valores de z em que a série converge. A região de convergência (ROC) é o conjunto de valores de z em que a série $X(z)$ assume um valor finito. A ROC de um sinal causal é a região externa de um círculo. A ROC de um sinal anti-causal é a região interna de um círculo.

Exemplo: Indique o ROC da sequência

$$x(n) = 1, 2, 5, 7, 0, 1 \quad (4.80)$$

↑

onde a seta vertical denota o instante $n = 0$

A partir da definição da transformada z

$$X(z) = z^2 + 2z + 5 + 7z^{-1} + z^{-3} \quad (4.81)$$

e portanto, a região de convergência é o plano z completo com exceção do do ponto $z = 0$ e do ponto $z = \infty$

Uma série finita ou infinita pode ser representada em forma fechada no domínio z .

Exemplo: Determine a transformada z da sequência

$$x(n) = 1, \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots \quad (4.82)$$

↑

solução: da definição de transformada z

$$X(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 z^{-2} + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n z^{-n} + \dots \quad (4.83)$$

ou melhor,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z^{-1}\right)^n \quad (4.84)$$

Esta expressão é uma série geométrica infinita

$$1 + A + A^2 + \dots = \frac{1}{1 - A} \quad \text{se } |A| < 1 \quad (4.85)$$

Desta forma, a transformada z de $x(n)$ torna-se

$$X(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad (4.86)$$

com ROC tal que

$$\left|\frac{1}{2}z^{-1}\right| < 1 \rightarrow |z| > \frac{1}{2} \quad (4.87)$$

Uma sequência discreta é univocamente determinada através de sua transformada z se a região de convergência for especificada.

Exemplo: Determine a ROC da sequência

$$x(n) = \alpha^n 1(n) + \beta^n 1(-n - 1) \quad (4.88)$$

solução: A partir da definição da transformada z ,

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^{-n} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \beta^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n + \sum_{m=1}^{\infty} (\beta^{-1} z)^m \quad (4.89)$$

portanto a ROC é tal que

$$|\alpha z^{-1}| < 1 \rightarrow |z| > |\alpha| \quad (4.90)$$

e

$$|\beta^{-1}z| < 1 \rightarrow |z| < |\beta| \quad (4.91)$$

4.2.3 Transformada z lateral

A transformada z bilateral requer que os sinais estejam definidos na faixa de tempo de $-\infty < n < \infty$. A transformada z lateral permite resolver equações de diferenças com condições iniciais especificadas. Por definição a transformada z lateral é

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (4.92)$$

Não é necessário informar a ROC da transformada z uma vez que os sinais são todos causais. A transformada z lateral não contém informação a respeito sobre o sinal quando $n < 0$).

Exemplo: Determine a transformada z lateral da sequência

$$x(n) = 1, 2, 5, 7, 0, 1 \quad (4.93)$$

↑

A partir da definição da transformada z lateral

$$X(z) = +5 + 7z^{-1} + z^{-3} \quad (4.94)$$

e portanto a transformada z lateral é diferente da transformada z bilateral neste caso.

4.2.4 Propriedades da transformada z

Multiplicação por constante

$$Z^+[ax(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} ax(k)z^{-k} \quad (4.95)$$

ou seja,

$$Z^+[ax(k)] = a \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} = aX^+(z) \quad (4.96)$$

Linearidade

$$Z^+[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha \sum_{k=0}^{\infty} f(k)z^{-k} + \beta \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} \quad (4.97)$$

ou seja,

$$Z^+[\alpha f(k) + \beta g(k)] = \alpha F(z) + \beta G(z) \quad (4.98)$$

Multiplicação por a^k

$$Z^+[a^k x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k x(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)(a^{-1}z)^{-k} = X^+(a^{-1}z) \quad (4.99)$$

Teorema do deslocamento no tempo

Vamos investigar o deslocamento no tempo, um atraso de n intervalos,

$$Z^+[x(k-n)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-n)z^{-k} \quad (4.100)$$

não altero a equação anterior multiplicando por $z^n z^{-n}$,

$$Z^+[x(k-n)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-n)z^{-k}z^n z^{-n} \quad (4.101)$$

ou seja,

$$Z^+[x(k-n)] = z^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} x(k-n)z^{-(k-n)} \quad (4.102)$$

admitindo $x(n)$ causal, e $m = k - n$

$$Z^+[x(k-n)] = z^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} x(m)z^{-m} = z^{-n}X^+(z) \quad (4.103)$$

Teorema da translação complexa

$$Z^+[e^{akT}x(kT)] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{akT}x(kT)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{aT})^{-k} = X^+(ze^{aT}) \quad (4.104)$$

4.2.5 Teorema do valor inicial

$$X^+(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} = x(0) + x(1)z^{-1} + x(2)z^{-2} + \dots \quad (4.105)$$

Vamos investigar o valor que $X(z)$ assume quando $z \rightarrow \infty$,

$$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z) = x(0) \quad (4.106)$$

Este teorema é útil para avaliar $x(0)$ quando uma expressão compacta de $X(z)$ é disponível.

4.2.6 Teorema do valor final

Considere uma sequência $x(k)$, causal, e com todos os polos dentro do círculo unitário, com uma única possível exceção, a existência de um polo em $z = 1$. Nestas condições a sequência $x(k)$ é dita estável. Da definição de transformada z

$$Z^+[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (4.107)$$

e

$$Z^+[x(k-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} = z^{-1}X(z) \quad (4.108)$$

Subtraindo a última equação da penúltima equação

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} = X(z) - z^{-1}X(z) \quad (4.109)$$

Aplicando o limite,

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1)z^{-k} \right) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})X(z)] \quad (4.110)$$

O lado esquerdo da eq. 4.110 é

$$[x(0) - x(-1)] + [x(1) - x(0)] + [x(2) - x(1)] + \dots = x(\infty) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \quad (4.111)$$

Portanto, da eq. 4.110 e da eq. 4.111, obtém-se

$$\lim_{z \rightarrow 1} (X(z) - z^{-1}X(z)) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \quad (4.112)$$

e, simplificando,

$$\lim_{z \rightarrow 1} ((1 - z^{-1})X(z)) = \lim_{k \rightarrow \infty} x(k) \quad (4.113)$$

4.2.7 A transformada z inversa

É necessário conhecer a inversa da transformada z para que ela seja útil na análise de sistemas lineares. A seguir são apresentados quatro métodos de calcular a transformada inversa z .

Método da divisão direta

Este método é utilizado quando é difícil a obtenção de uma expressão em forma fechada para a transformada inversa $Z^{-1}[X(z)]$ ou estamos interessados apenas em alguns valores iniciais de $x(k)$.

A transformada $X(z)$ precisa estar na forma de racional, isto é, como a razão entre dois polinômios e tanto numerador quanto denomi-

nador devem ser representados como uma série de potências crescentes de z^{-1}

Exemplo: Determine $x(k)$ quando

$$X(z) = \frac{10z + 5}{(z - 1)(z - 0.2)} \quad (4.114)$$

solução:

Inicialmente, numerador e denominador devem ser escritos como séries de potências crescentes de z^{-1}

$$X(z) = \frac{10z^{-1} + 5z^{-2}}{1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2}} \quad (4.115)$$

A divisão do numerador pelo denominador resulta

$$1 - 1.2z^{-1} + 0.2z^{-2} \begin{array}{l} 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18z^{-3} + \dots \\ \underline{10z^{-1} + 5z^{-2}} \\ 10z^{-1} - 12z^{-2} + 2z^{-3} \\ \underline{17z^{-2} - 2z^{-3}} \\ 17z^{-2} - 20.4z^{-3} + 3.4z^{-4} \\ \underline{18.4z^{-3} - 3.4z^{-4}} \end{array} \quad (4.116)$$

Portanto, a sequência $x(k)$ é

$$X(z) = 10z^{-1} + 17z^{-2} + 18z^{-3} + \dots \quad (4.117)$$

Método por equação de diferenças

A resposta de um sistema linear $y(k)$ é igual à convolução discreta entre sua função de transferência $g(k)$ e sua excitação $x(k)$.

$$Y(z) = G(z)X(z) \quad (4.118)$$

Exemplo: Considere um sistema linear com

$$G(z) = \frac{0.4673z - 0.3393}{z^2 - 1.5327z + 0.6607} \quad (4.119)$$

Forma-se a equação de diferenças a partir de

$$(z^2 - 1.5327z + 0.6607)Y(z) = (0.4673z - 0.3393)X(z) \quad (4.120)$$

ou seja,

$$y(k+2) - 1.5327y(k+1) + 0.6607y(k) = 0.4673x(k+1) - 0.339x(k) \quad (4.121)$$

Queremos calcular a sequência $g(k)$. Para tanto, vamos calcular a sequência $y(k)$, quando a excitação $x(k)$ é um pulso retangular que dispara no instante inicial $k = 0$. A sequência $g(k)$ chama-se resposta ao pulso retangular. E neste caso, $y(k)$ também é a resposta ao pulso retangular unitário. Admitindo que $g(k) = 0$ para $k < 0$, e substituindo $k = -2$ e depois $k = -1$ determina-se $y(0)$ e $y(1)$ na equação anterior. Basta incrementar k para obter $y(2)$, $y(3)$, e assim por diante.

Método da expansão em frações parciais

Este método é muito útil quando $X(z)$ é uma função na forma

$$X(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + \dots + b_Mz^{-M}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + \dots + a_Nz^{-N}} \quad (4.122)$$

Se a_N for diferente de zero e $M < N$ a função racional é dita própria. Se a função $X(z)$ for imprópria, ela sempre pode ser escrita na forma de um polinômio mais uma função racional própria.

Eliminam-se as potências negativas em z ,

$$X(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + b_2 z^{N-2} + \dots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + a_3 z^{N-3} + \dots + a_N} \quad (4.123)$$

A função $X(z)/z$ é sempre própria

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{b_0 z^{N-1} + b_1 z^{N-2} + b_2 z^{N-3} + \dots + b_M z^{N-M-1}}{z^N + a_1 z^{N-1} + a_2 z^{N-2} + a_3 z^{N-3} + \dots + a_N} \quad (4.124)$$

Os valores de z que zeram o denominador da eq. 4.123 são chamados de polos da função.

Polos distintos

Quando os polos são todos distintos, procura-se uma expansão do tipo

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{z - p_1} + \frac{A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{A_N}{z - p_N} \quad (4.125)$$

Para determinar cada um dos A_k , multiplica-se $X(z)/z$ por $(z - p_k)$

$$\frac{(z - p_k)X(z)}{z} = \frac{(z - p_k)A_1}{z - p_1} + \frac{(z - p_k)A_2}{z - p_2} + \dots + \frac{(z - p_k)A_N}{z - p_N} \quad (4.126)$$

e finalmente, no limite em que $z \rightarrow z_k$ resulta A_k .

Polos Múltiplos

Considere o caso em que o k -ésimo polo tem multiplicidade l . A expansão em frações parciais deve conter os termos

$$\frac{A_{1k}}{z - p_k} + \frac{A_{2k}}{(z - p_k)^2} + \dots + \frac{A_{lk}}{(z - p_k)^l} \quad (4.127)$$

Multiplica-se toda a expansão em frações parciais por $(z - p_k)^l$. A expressão resultante e suas derivadas com respeito a z são avaliadas em $z = z_k$ para determinar os coeficientes A_k .

Exemplo: Determine a expansão em frações parciais de

$$X(z) = \frac{1}{(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})^2} \quad (4.128)$$

Eliminam-se potências negativas de z

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2} \quad (4.129)$$

A expansão em frações parciais deve ter a forma

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{A_1}{(z+1)} + \frac{A_2}{(z-1)} + \frac{A_3}{(z-1)^2} \quad (4.130)$$

Multiplica-se a eq. 4.130 por $(z+1)$ e resulta

$$\frac{(z+1)X(z)}{z} = \frac{(z+1)A_1}{(z+1)} + \frac{(z+1)A_2}{(z-1)} + \frac{(z+1)A_3}{(z-1)^2} \quad (4.131)$$

Ao avaliar eq. 4.131 quando $z = -1$

$$A_1 = \frac{(z+1)X(z)}{z} = \frac{1}{4} \quad (4.132)$$

Multiplica-se a eq. 4.130 por $(z-1)^2$ e resulta

$$\frac{(z-1)^2 X(z)}{z} = \frac{(z-1)^2 A_1}{(z+1)} + \frac{(z-1)^2 A_2}{(z-1)} + \frac{(z-1)^2 A_3}{(z-1)^2} \quad (4.133)$$

e resulta

$$\frac{(z-1)^2 X(z)}{z} = \frac{(z-1)^2 A_1}{(z+1)} + (z-1)A_2 + A_3 \quad (4.134)$$

Ao avaliar eq. 4.133 quando $z = 1$

$$A_3 = \frac{(z+1)X(z)}{z} = \frac{1}{2} \quad (4.135)$$

Deriva-se os dois lados da eq. 4.134 com respeito a z

$$\frac{d}{dz} \left[\frac{(z-1)^2 X(z)}{z} \right] = \frac{2(z-1)(z+1)A_1}{(z+1)^2} + \frac{-(z-1)^2 A_1}{(z+1)^2} + A_2 \quad (4.136)$$

E avalia-se a eq. 4.136 em $z = 1$

$$A_2 = \frac{d}{dz} \left[\frac{(z-1)^2 X(z)}{z} \right] = \frac{3}{4} \quad (4.137)$$

Consultando uma tabela de transformadas z determina-se a transformada inversa de cada fração parcial.

Capítulo 5

Planta contínua com controlador discreto

Para analisar sistemas de controle que são parcialmente contínuos no tempo e parcialmente discretos, imagina-se um amostrador que modula um trem de impulsos, equi-espaçados no tempo, de tal forma que a área de cada impulso é igual ao valor do sinal convertido de analógico para digital. Este trem de impulsos não existe fisicamente no sistema de controle, trata-se de uma abstração que permite analisar via Trans-

formada de Laplace e via Transformada Z o sistema completo.

5.1 Transformada de Laplace do segurador

Vamos considerar um amostrador fictício, chamado *amostrador por impulsos*. O sinal amostrado desta forma é um trem de impulsos, conforme eq. 5.1 e a fig. 5.1

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t - kT) \quad (5.1)$$

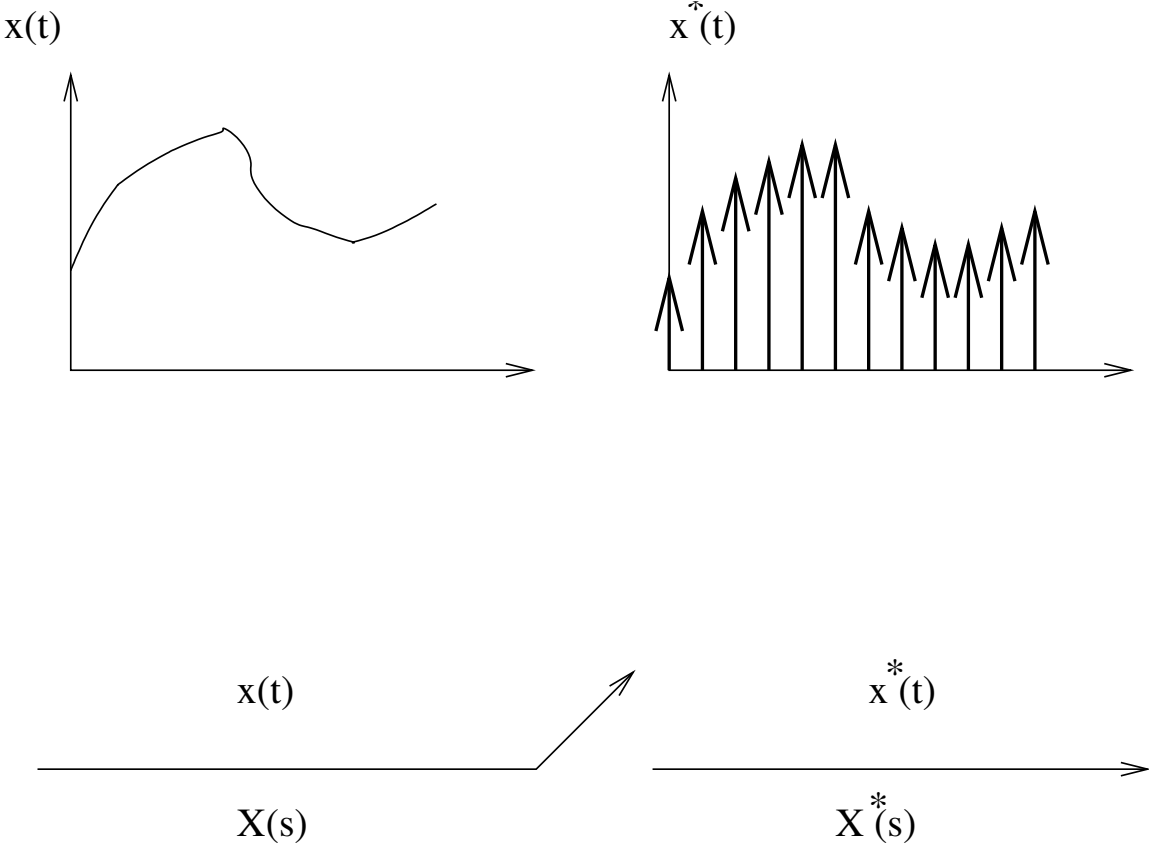


Figura 5.1: Associativa da Convolução

A Transformada de Laplace do sinal amostrado por impulsos é

$$X^*(s) = \mathcal{L}[x^*(t)] = x(0)\mathcal{L}[\delta(t)] + x(1)\mathcal{L}[\delta(t-T)] + x(2)\mathcal{L}[\delta(t-2T)] + \dots \quad (5.2)$$

Entretanto, a Transformada de Laplace da função impulso é a intensidade do impulso. Lembrando da propriedade da translação no tempo

$$X^*(s) = x(0) + x(1)e^{-Ts} + x(2)e^{-2Ts} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs} \quad (5.3)$$

A semelhança entre $X^*(s)$ de um sinal amostrado por impulsos com $X(z)$ de uma sequência discreta é enorme. Em particular, se definimos $z = e^{Ts}$ as duas transformadas se tornam iguais

$$X^*(s)|_{s=(1/T)\ln(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k} = X(z) \quad (5.4)$$

Portanto, a operação fictícia chamada 'amostragem por impulsos' é facilmente descrita no plano s e seu resultado é facilmente descrito no plano z .

As consequências da semelhança entre $X^*(s)$ e $X(z)$ são importantes. É possível mapear o plano s no plano z , e traduzir critérios de estabilidade desenvolvidos no plano s para gerar critérios de estabilidade no plano z .

As atenções voltam-se agora para uma representação em Transformada de Laplace para o processo fictício chamado *data-hold*. *Data-hold* é o processo que gera um sinal contínuo $h(t)$ a partir de uma sequência discreta $x(kT)$. Durante o intervalo $kT < t < (k+1)T$, o sinal contínuo pode ser aproximado por um polinômio

$$h(kT - \tau) = a_n \tau^n + a_{n-1} \tau^{n-1} + \dots + a_1 \tau + a_0 \quad (5.5)$$

Quando $\tau = 0$, $h(kT - \tau)$ deve concordar com $x(kT)$, portanto, a_0 deve ser igual a $h(kT)$,

$$h(kT - \tau)|_0 = a_n \tau^n + a_{n-1} \tau^{n-1} + \dots + a_1 \tau + h(kT) = h(kT) \quad (5.6)$$

O *data-hold* mais simples utiliza $n = 0$ e é chamado de *data-hold* de ordem zero. O resultado pode ser visto na fig. 5.2 e a representação matemática está na eq. 5.7.

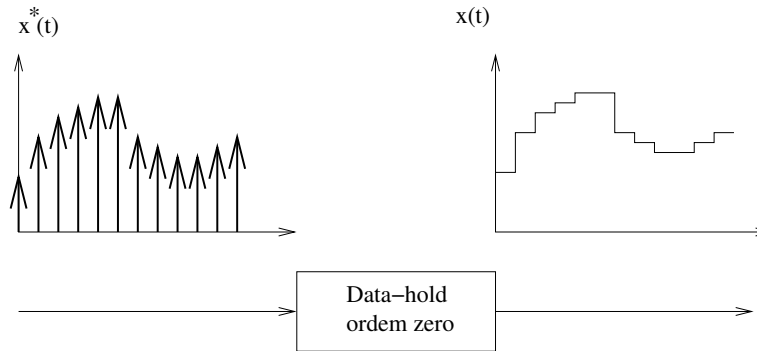


Figura 5.2: Processo *data-hold* de ordem zero

$$\begin{aligned}
 x_h(t) &= x(0)[u(t) - u(t - T)] + x(1)[u(t - T) - u(t - 2T)] + \dots \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[u(t - kT) - u(t - (k + 1)T)]
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

Lembrando que a Transformada de Laplace da função degrau é $1/s$ e a propriedade da translação no tempo,

$$\mathcal{L}[u[t - kT]] = \frac{e^{-kTs}}{s},
 \tag{5.8}$$

a Transformada de Laplace do sinal tornado contínuo por um segurador de ordem zero, eq. 5.7, torna-se

$$X_h(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \quad (5.9)$$

ou seja,

$$X_h(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} X^*(s) \quad (5.10)$$

Portanto, o modelo do *data-hold* de ordem zero é simplesmente,

$$G_{h0}(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} \quad (5.11)$$

Com estes dois modelos, o modelo de amostrador e o modelo de segurador, é possível representar um sistema misto, parcialmente no tempo contínuo, parcialmente no tempo discreto, no plano z . Adicionalmente, a região de estabilidade no plano s , o semi-plano esquerdo, é mapeado para a região interna de um círculo unitário no plano z através de $z = e^{sT}$.

5.2 Transformada de Laplace Estrela

Considere um sistema formado por um amostrador por impulsos seguido por um elemento cuja função de transferência é $G(s)$, conforme a fig. 5.2. Adote-se ainda que as condições iniciais são nulas. Desta forma, a resposta do sistema é

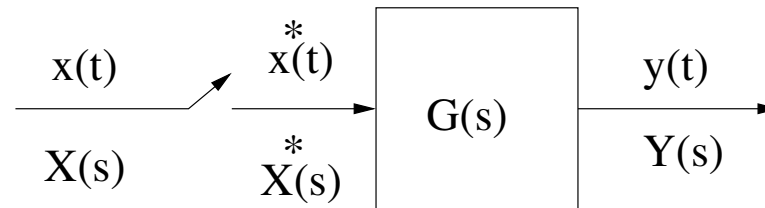


Figura 5.3: Sistema amostrado por impulsos

$$Y(s) = G(s)X^*(s) \quad (5.12)$$

onde o sinal $X^*(s)$ é um sinal periódico, visto que,

$$X^*(s) = X^*(s \pm j\omega_s k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

5.3. REGRA GERAL PARA OBTENÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA PULSADAS 129

Investiga-se agora a Transformada de Laplace Estrela da eq. 5.12,

$$\begin{aligned}y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[G(s)X^*(s)] \\ &= \int_0^t g(t-\tau)x^*(\tau)d\tau \\ &= \int_0^t g(t-\tau)\sum_{k=0}^{\infty}x(\tau)\delta(\tau-kT)d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t g(t-\tau)x(\tau)\delta(\tau-kT)d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}g(t-kT)x(kT)\end{aligned}\quad (5.14)$$

Em termos da Transformada Z,

$$Y(z) = G(z)X(z) \quad (5.15)$$

que é equivalente a

$$Y^*(s) = G^*(s)X^*(s) \quad (5.16)$$

5.3 Regra geral para obter funções de transferência pulsadas

A presença ou ausência de um amostrador por impulsos determina a forma da função de transferência pulsada. Considere o sistema da

fig. 5.3 que é precedido por um amostrador por impulsos. Este sistema tem resposta amostrada conforme,

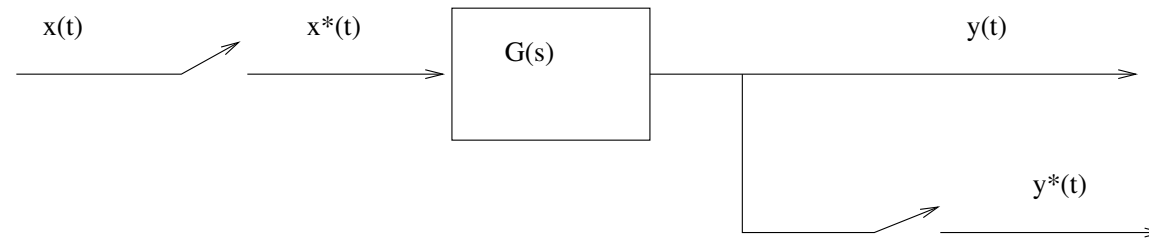


Figura 5.4: Sistema amostrado por impulsos

$$Y^*(s) = G^*(s)X^*(s), \quad (5.17)$$

por conta dos argumentos da seção anterior.

Entretanto, se não houver um amostrador por impulsos antes do elemento $G(s)$, conforme a fig. 5.3, a resposta pulsada do sistema é

5.3. REGRA GERAL PARA OBTER FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA PULSADAS¹³¹

$$Y^*(s) = [GX(s)]^* \quad (5.18)$$

e em termos da Transformada Z,

$$Y(z) = Z[G(s)X(s)] = Z[GX(s)] = GX(z) \neq G(z)X(z) \quad (5.19)$$

Ver exemplos 3-4, 3-5, 3-6 do Ogata.

Exemplo Determine a transformada z do diagrama de malha fechada da fig. 5.3.

5.3. REGRA GERAL PARA OBTENÇÃO DE FUNÇÕES DE TRANSFERÊNCIA PULSADAS 133

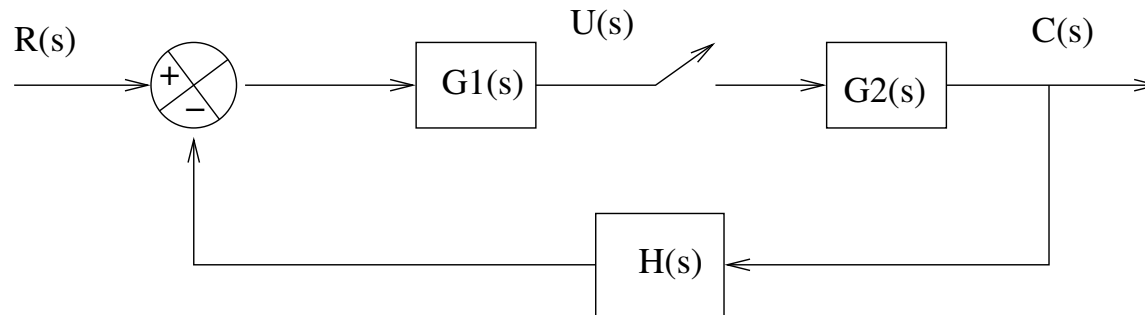


Figura 5.6: Malha fechada com amostrador por impulsos

Inicia-se o equacionamento colocando em evidência um sinal que será amostrado.

$$U(s) = G1(s)(R(s) - H(s)G2(s)U(s)) \quad (5.20)$$

Isolando $U(s)$, temos

$$(1 + G1(s)H(s)G2(s))U(s) = G1(s)R(s) \quad (5.21)$$

Aplicando a Transformada de Laplace Estrela,

$$(1 + [G_1HG_2(s)]^*)U^*(s) = [G_1R(s)]^* \quad (5.22)$$

ou seja,

$$U^*(s) = \frac{[G_1R(s)]^*}{(1 + [G_1HG_2(s)]^*)} \quad (5.23)$$

E, finalmente, da equação

$$C(s) = G_2(s)U^*(s) \quad (5.24)$$

aplicando o operador estrela,

$$C^*(s) = \frac{G_2^*(s)[G_1R(s)]^*}{(1 + [G_1HG_2(s)]^*)} \quad (5.25)$$

Capítulo 6

Propriedades básicas da realimentação

6.1 Tipos de sistemas e erro de seguimento em regime permanente

Os sistemas podem ser classificados pelo grau do polinômio que representa o sinal de excitação para o qual o erro de seguimento em regime

permanente é constante.

Ainda que o sistema seja estável, o sinal de erro pode ser considerável. É preciso verificar o erro em regime permanente resultante de uma excitação tipo degrau, rampa ou parábola, para conhecer a habilidade do sistema para seguir sinais de excitação.

Um sistema discreto pode ser classificado de acordo com o número de polos em $z = 1$ na função de transferência de malha aberta. O sistema é classificado como tipo 0, 1 ou 2, se a função de transferência de malha aberta tiver 0, 1 ou 2 polos em $z = 1$.

Considere o sistema da fig. 6.1. Do diagrama sabe-se que

$$e(t) = r(t) - b(t) \quad (6.1)$$

O teorema do valor final informa que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} [(1 - z^{-1})E(z)] \quad (6.2)$$

Ainda, a partir do diagrama,

$$G(z) = (1 - z^{-1})Z[G_p(s)/s] \quad (6.3)$$

e

6.1. TIPOS DE SISTEMAS E ERRO DE SEGUIMENTO EM REGIME PERMANENTE137

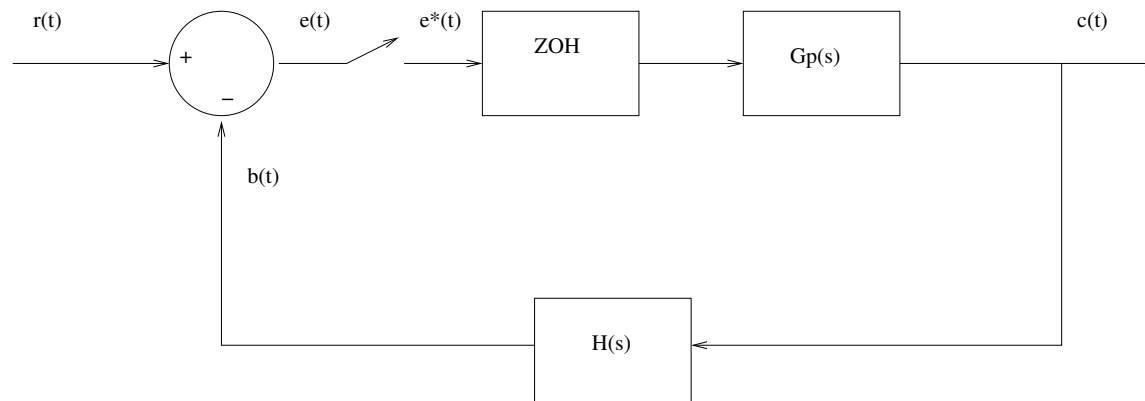


Figura 6.1: Sistema de controle digital

$$GH(z) = (1 - z^{-1})Z[(G_p(s)H(s))/s] \quad (6.4)$$

Portanto o erro,

$$E(z) = R(z) - GH(z)E(z) \quad (6.5)$$

que pode ser reescrito como

$$E(z) = \frac{1}{1 + GH(z)}R(z) \quad (6.6)$$

Finalmente, o erro em regime permanente,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \quad (6.7)$$

Quando a excitação é um degrau, $r(t) = 1(t)$,

$$R(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (6.8)$$

e

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (6.9)$$

6.1. TIPOS DE SISTEMAS E ERRO DE SEGUIMENTO EM REGIME PERMANENTE 139

simplificando,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{1 + GH(z)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (6.10)$$

Quando a excitação é uma rampa, $r(t) = t1(t)$,

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad (6.11)$$

e

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \quad (6.12)$$

simplificando,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})GH(z)} = \frac{1}{K_v} \quad (6.13)$$

Quando a excitação é uma parábola, $r(t) = t^21(t)/2$,

$$R(z) = \frac{T^2(1 - z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3} \quad (6.14)$$

e

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \frac{T^2(1 - z^{-1})z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^3} \quad (6.15)$$

simplificando,

$$e_{ss} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{T^2}{(1 - z^{-1})^2 GH(z)} = \frac{1}{K_a} \quad (6.16)$$

Capítulo 7

Projeto de Controladores de Forma Analítica

Recomenda-se nesta parte da disciplina a leitura atenta da seção 4-7 do livro texto, como realizada em sala.

7.1 Exercícios Recomendados

7.1.1 Projeto de controladores *Deadbeat*

Problemas resolvidos

: A-4-13, A-4-14

Exemplos resolvidos

: 4-13, 4-14

Problemas propostos

: B-4-18

Capítulo 8

Teste Seus Conhecimentos

Questão 1 (2.0 pontos) Dada a transformada z de um sinal $x(n)$

$$X(z) = \frac{1}{(1 + z^{-1})(1 - z^{-1})} \quad (8.1)$$

- a) Determine uma expansão em frações parciais de $X(z)$
- b) Determine o sinal causal $x(n)$, transformada inversa de $X(z)$

Questão 2 (2.0 pontos) Determine a resposta ao degrau unitário do sistema descrito pela equação de diferenças. A função degrau se altera de zero para um no instante $n = 1$.

$$y(n + 1) = \alpha y(n) + x(n) \quad (8.2)$$

sabendo que $y(0) = 1$ e $-1 < \alpha < 1$.

Questão 3 (2.0 pontos) Considere o sistema definido pelas equações

$$x_1(k + 1) = x_1(k) + 1.2x_2(k) + 0.6 \quad (8.3)$$

e

$$x_2(k + 1) = 0.2x_1(k) - 0.2 \quad (8.4)$$

determine a estabilidade do estado de equilíbrio.

Questão 4 (2.0 pontos) Considere o sistema representado na fig. 8.1. Utilizando, por exemplo, as equações de Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i . \quad (8.5)$$

Determine as equações do movimento do sistema, sabendo que as massas em translação tem massa m e M , as molas tem constante de rigidez K . Utilizando as coordenadas generalizadas X_1 e X_2 , pede-se:

- a) Escolher a posição e o número de atuadores capazes de transmitir força na direção Ox , de tal sorte que o sistema seja controlável.
- b) Escolher também o número e a posição de sensores, que podem ser sensores de deslocamento ou velocidade, de tal sorte que o sistema seja observável.
- c) Determine as matrizes A , B e C dos sistema escolhido nos itens a) e b), tal que

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (8.6)$$

e

$$y = Cx \quad (8.7)$$

- d) Justifique sua resposta do item a).
- e) Justifique sua resposta do item b).

Questão 5 (1.0 pontos) Considere o sistema de tempo contínuo descrito pela eq. 8.8. Determine a matriz do sistema discreto, G , sabendo que o intervalo de discretização é Δt segundos.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad (8.8)$$

Questão 6 (1.0 pontos) Considere o sistema definido por

$$\dot{x} = f(x, t) \quad (8.9)$$

suponha que

$$f(0, t) = 0, \text{ para todo } t \quad (8.10)$$

Suponha ainda que

1. existe uma função escalar $V(x, t)$, com derivadas parciais contínuas;
2. $V(x, t)$ é positiva definida. Ou seja, $V(0, t) = 0$ e $V(x, t) \geq \alpha(\|x\|) > 0$ para todo $x \neq 0$ e todo t , onde α é uma função escalar contínua não-decrescente tal que $\alpha(0) = 0$.
3. a derivada total $\dot{V}(x, t)$ é negativa definida, para todo $x \neq 0$ e todo t , ou seja, $\dot{V}(x, t) \leq -\gamma(\|x\|) < 0$ onde γ é uma função escalar contínua não-decrescente tal que $\gamma(0) = 0$.

4. existe uma função escalar contínua não-decrescente β tal que $\beta(0) = 0$ e para todo t , $V(x, t) \leq \beta(\|x\|)$.

5. $\alpha(\|x\|)$ aproxima-se de infinito quando $\|x\|$ cresce indefinidamente.

Mostre, por exemplo graficamente, que para todo $\|x_0\|$ partindo de dentro de uma esfera de raio δ existe uma esfera de raio ϵ , tal que $\beta(\delta) < \alpha(\epsilon)$.

Referências Bibliográficas

- [1] Kuo, Benjamin C. Digital Control Systems, Holt-Saunders International Editions, 1980. (capítulo 2)
- [2] Ogata, Katsuhito Discrete-Time Control Systems, Prentice-Hall, New Jersey, 2 ed., 1995. Capítulo 2.
- [3] Proakis, J. G. and Dimitris Manolakis, Digital Signal Processing, Macmillan, New York, 1992.