

CELSO PUPO PESCE

Eng. Naval, Escola Politécnica da USP, 1978

CÁLCULO DA FORÇA DE DERIVA SOBRE CORPOS
CILÍNDRICOS FLUTUANTES SUJEITOS À AÇÃO
DE ONDAS ALEATÓRIAS: Os efeitos dos po
tenciais de primeira e segunda-ordem em
lâmina d'água de profundidade finita.

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da USP para obtenção
do Título de Mestre em Engenharia.

Orientador:

Prof. JOSÉ AUGUSTO PENTEADO ARANHA, Ph.D.
Professor Assistente do Departamento de
Engenharia de Estruturas e Fundações da
Escola Politécnica da USP.

Pesquisador do Instituto de Pesquisas
Tecnológicas do Estado de São Paulo S.A.

São Paulo, 1984

*A Sandra, Fernando
e Ricardo*

A meus pais

AGRADECIMENTOS

O autor deseja registrar seus sinceros agradecimentos:

Ao Professor Doutor *José Augusto Penteado Aranha*, pela sempre constante e profunda dedicação com que se empenhou na orientação da presente dissertação;

Ao Professor Doutor *Toshi-ichi Tachibana*, pelo inestimável incentivo no desenvolvimento deste e de tantos outros trabalhos e a quem devo a primeira oportunidade de dedicar-me aos estudos da hidrodinâmica;

À Divisão de Engenharia Naval do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, S.A., pelo apoio e suporte recebidos, e em particular à pessoa de seu diretor o Prof. Dr. *Manoel de Andrade e Silva Reis* pelo incentivo e interesse demonstrados;

Aos colegas *Marina Sugaya*, *José Eduardo Zindel Deboni*, *Gabriel Felix Gueller* e *José Thomê de Carvalho Filho*, pelo auxílio prestado no desenvolvimento dos programas computacionais e aos colegas *Danton Nunes* e *Kazuo Hirata* por suas valiosas sugestões;

A todos os colegas do Agrupamento de Hidrodinâmica da Divisão de Engenharia Naval que direta ou indiretamente tenham contribuído para a consecução da presente pesquisa;

Aos Professores do Departamento de Engenharia Naval da Escola Politécnica da USP pelo constante incentivo;

Ao setor de Documentação da DINA V/IPT, e em particular à colega *Eleonora Aparecida Sampaio* pelo prestimoso auxílio na coleta bibliográfica e em sua catalogação normalizada.

RESUMO

Apresenta-se um método teórico para o cálculo da força de deriva em corpos cilíndricos flutuantes sujeitos à ação de ondas aleatórias. Consideram-se as contribuições associadas aos potenciais de primeira e segunda-ordem em lâmina d'água de profundidade constante. O desenvolvimento teórico resulta em uma expressão relativamente simples para o cálculo da força de deriva, fruto da demodulação quadrática do trem de ondas incidentes. A contribuição do potencial de primeira-ordem é dada por um simples coeficiente calculado através de extensão do método de Maruo. A contribuição do potencial de segunda-ordem é determinada a partir da aplicação de uma extensão da relação de Haskind ao equacionamento deste potencial, o que torna desnecessária a solução do problema não-linear em aproximação de segunda-ordem.

O método apresentado exige a solução dos problemas lineares de difração e radiação, conseguida através do Método Compatibilizado de Elementos Finitos ("Hybrid Element Method").

Os exemplos de processamento apresentados referem-se a uma seção retangular típica, envolvendo análises de sensibilidade dos coeficientes a variações de parâmetros geométricos e dinâmicos. Os resultados numéricos são verificados com base em dados publicados por Faltinsen, Maruo, Kim e Kokkinowrackos, a testando-se sua confiabilidade.

SUMMARY

A theoretical method is presented for the computation of the slow-drift forces on a floating body due to the action of irregular waves. The method is restricted to the two-dimensional problem dealing with the effects of the first and second-order potential in finite-depth waters. A simple expression is derived for the slow-drift forces, resulting from a square demodulation of the irregular wave profile. The first-order potential contribution is computed from an extension of Maruo's method to the finite-depth waters. The second-order potential contribution is determined by the use of the Haskind relations, applied to the second-order potential equation. By this manner the solution for the second-order potential becomes unnecessary.

This method requires the solution of the first-order (or linearized) diffraction and radiation problems which in this work is made through the use of the Hybrid Element Method.

A typical rectangular cross-section is considered for practical examples. The analysis comprises studies on the numerical sensitivity of the coefficients with respect to changes in the geometric and dynamic parameters. The numerical results are compared with Faltinsen, Maruo, Kim and Kokkinowrachos calculations, showing their reliability.

ÍNDICE

NOMENCLATURA	i
LISTA DE FIGURAS	xii
LISTA DE TABELAS	xv
LISTA DE GRÁFICOS	xv
1. INTRODUÇÃO	1.1
2. O FENÔMENO DE OSCILAÇÃO DE CORPOS FUNDEADOS EM BAIXA FREQÜÊNCIA	2.1
2.1. Força sobre o corpo em aproximação de segunda- -ordem	2.3
2.1.1. Forças de segunda-ordem em ondas harmônicas	2.7
2.1.2. Forças de segunda-ordem em ondas aleatórias	2.10
2.2. Métodos de Cálculo das Forças de Deriva, Breve Histórico Bibliográfico	2.14
3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE DIFRAÇÃO NÃO LINEAR DAS ONDAS DE SUPERFÍCIE	3.1
3.1. Equações de Campo e Condições de Contorno . . .	3.2
3.1.2. Condições de Contorno na Superfície Livre	3.5
3.1.3. Condições de Contorno na Superfície de um Corpo Rígido	3.6
3.2. Equacionamento do Problema Bidimensional Correto até Segunda-Ordem.	3.8
3.3. Aplicação do Método das Expansões Assintóticas .	3.9
3.3.1. Aproximação Linear do Problema Bidimensional	3.11
3.3.2. Aproximação de Segunda ordem	3.11

4. FORÇA MÉDIA DE DERIVA EM ONDAS MONOCROMÁTICAS	
O PROBLEMA BIDIMENSIONAL EM ÁGUAS DE PROFUNDIDADE FINITA . . .	4.1
4.1. Dedução da Força Média de Deriva em Ondas Monocromáticas	4.3
4.1.1. Integração da Equação de Navier-Stokes no eixo x	4.5
4.2. Considerações Adicionais	4.12
5. FORÇA DE DERIVA EM ONDAS ALEATÓRIAS.	
APROXIMAÇÃO VÁLIDA PARA ESPECTROS DE BANDA ESTREITA . . .	5.1
5.1. Ondas de "espectro de Banda Estreita". Representação através de funções de modulação	5.2
5.2. Aproximação Assintótica da função potencial em ondas aleatórias	5.5
5.3. A aproximação adotada e as formulações encontradas na literatura	5.11
5.4. Densidade Espectral de Energia da Força de Deriva em ondas aleatórias	5.15
6. CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE FORÇA DE DERIVA EM ONDAS ALEATÓRIAS DEVIDO AO POTENCIAL DE SEGUNDA ORDEM . . .	6.1
6.1. Equacionamento do potencial $\Phi_{20}(x,z)$	6.1
6.2. Cálculo do coeficiente $Q_2^{(2)}(\omega,h)$	6.3
7. SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA LINEAR BIDIMENSIONAL. PROGRAMAS COMPUTACIONAIS.	7.1
7.1. O Sistema DERIV.	7.4
7.1.1. Sistema ONDA	7.6
7.1.2. O programa CARGA	7.7
7.1.3. O programa SODF	7.7

8. EXEMPLOS DE PROCESSAMENTO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS	8.1
8.1. Descrição dos Exemplos de Processamento	8.3
8.2. Apresentação e Discussão de Resultados	8.11
8.2.1. Coeficientes de Força de Deriva e Coeficientes de Reflexão	8.11
8.2.2. Grandezas de Primeira-Ordem: Coeficientes hidrodinâmicos, forças excitantes e movimentos	8.21
8.2.2.1. A influência das profundidade nos coe- ficientes hidrodinâmicos	8.22
8.2.2.2. A influência do refinamento da malha nos coeficientes hidrodinâmicos	8.32
8.2.2.3. Funções de transferência de movimentos	8.32
9. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	9.1
10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	10.1
ANEXOS	
I - DEDUÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO NA SUPERFÍCIE LIVRE	I.1
I.1. Dedução da condição exata	I.1
II - DEDUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO NO FUNDO E NA SUPERFÍCIE DO CORPO	II.1
II.1. Condição de Contorno na superfície do corpo. Caso Bidimensional	II.2
II.2. Aproximação assintótica da condição de contorno no corpo em segunda ordem	II.10
II.3. O potencial de segunda ordem e a condição de contorno na superfície do corpo	II.11
III - SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE DIFRAÇÃO E RADIAÇÃO DE ONDAS DE SUPERFÍCIE COM CONDIÇÕES DE CONTORNO LINEARIZADAS. CASO BIDI- MENSIONAL	III.1
III.1. Cálculo da Resposta Cinemática de um corpo cilíndrico à ação de ondas monocromáticas	III.1

III.1.1.	Equação geral do movimento	III.2
III.1.1.1.	Caso Bidimensional em Primeira-ordem	III.12
III.1.2.	Equacionamento geral do Problema de Per- turbção de uma onda monocromática . . .	III.13
III.1.3.	Massas Adicionais e Amortecimento por ra- dição	III.18
III.1.4.	Resposta Cinemática do Corpo a uma onda de amplitude unitária	III.19
III.1.5.	Comentários Adicionais	III.20
III.2.	Solução do Problema Linear Bidimensional pelo Mē- todo Compatibilizado de Elementos Finitos	III.22
III.2.1.	Solução Analítica nas regiões exteriores A_{II}^{\pm} . Caso Bidimensional	III.24
III.2.1.1.	Os coeficientes de Transmis- são e Reflexão	III.32
III.2.2.	Solução pelo Método dos Elementos Fini- tos na Região discretizada	III.33
III.2.2.2.	O Método dos Elementos Finitos	III.37
IV	- ADIMENSIONALIZAÇÃO DE VARIÁVEIS	IV.1
IV.1.	Variáveis Geométricas de Movimentos, tempo e rela- ção de dispersão	IV.4
IV.2.	Pressão e Função Potencial	IV.6
IV.3.	Potencial de onda incidente (aproximação linear) e equação do problema de difração e radiação . .	IV.8
IV.4.	Outras variáveis adimensionais	IV.11
IV.5.	Relação dos adimensionais utilizados com os adi- mensionais comumente encontrados na literatura .	IV.12
V	- COMPLEMENTO ALGÉBRICO DEDUTIVO DA FÓRMULA DA FORÇA DE DERIVA EM ONDAS MONOCROMÁTICAS	V.1

VI	- POTENCIAIS DE RADIAÇÃO EM FREQUÊNCIA NULA	VI.1
	VI.1. Equacionamento e Condição de Radiação	VI.2
	VI.2. Solução do potencial de Radiação em frequên- cia nula pelo Método Compatibilizado de Ele- mentos Finitos	VI.7
	VI.2.1. Singularidade de $[G_0]$ e Solução em espaço funcional restrito	VI.12
	VI.3. Massas Adicionais e Coeficientes de Amorte- cimento	VI.23
VII	- O FUNCIONAL $J(\psi)$, O POTENCIAL Φ_{20} E SUA CONDIÇÃO DE RADIAÇÃO	VII.1
	VII.1. Condição de Radiação de Φ_{20}	
VIII	- ONDAS ALEATÓRIAS, DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA E MODULAÇÃO	VIII.1
	VIII.1. Representação da onda em série de Fourier. Conceito de Modulação em Amplitude e Fase . . .	VIII.3
	VIII.2. Densidade Espectral de Energia da Força de Deriva em Ondas Aleatórias	VIII.16
	VIII.3. Parâmetros Estatísticos e Parâmetros Espectrais	VIII.19
	VIII.3.1. Largura de Banda Espectral de um Espectro de mar típico	VIII.23
	VIII.4. Aproximação Assintótica da Função Poten- cial Associada a Ondas Aleatórias de Espec- tro de Banda Estreita	VIII.28
IX	- CÁLCULOS DOS COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO DEVIDO A EFEITOS VISCOSOS. FORMULAÇÕES EMPÍRICAS	IX.1
	IX.1. Forças Viscosas de Amortecimento em "roll" e "sway"	IX.3
	IX.2. Linearização dos coeficientes de amortecimen- to viscoso	IX.6
	IX.3. Coeficiente de amortecimento viscoso em "sway"	IX.8

IX.4.	Coeficientes de amortecimento viscoso em "roll"	IX.15
IX.4.1.	Coeficiente de amortecimento por atrito viscoso. Método de Kato	IX.16
IX.4.2.	Coeficiente de amortecimento vorticoso. Método de Ikeda & Tanaka	IX.18
IX.5.	Coeficientes de amortecimento viscoso acoplados: "roll-sway", "sway-roll".	IX.24
IX.5.1.	"Roll" em "Sway"	IX.24
IX.5.2.	"Sway" em "Roll"	IX.27
X	- EXEMPLOS DE LISTAGENS DE PROCESSAMENTO	X.1

o0o

NOMENCLATURA

A fim de possibilitar uma melhor compreensão do texto, procurou-se permitir maior continuidade na leitura do mesmo através da introdução de definições de variáveis em todo seu decorrer. Assim, a nomenclatura aqui descrita limita-se às variáveis cuja utilização não tem caráter localizado.

GERAL

i) - Alfabeto romano

- a_{jk} - coeficiente de massa (inércia) adicional segundo os modos jk
- a_{jk}^0 - a_{jk} em frequência nula ($\lim_{\omega \rightarrow 0} a_{jk}$)
- a_m - amplitude de onda na raia espectral de frequência ω_m
- $a(t)$ - função de modulação em amplitude e fase
- a_{uu} - coef. de massa adicional em "sway" - caso bidimensional
- a_{ww} - coef. de massa adicional em "heave" - caso bidimensional
- $a_{u\theta}$ - coef de massa adicional "sway-roll" - caso bidimensional
- $a_{\theta\theta}$ - coef. de inércia adicional em "roll" - caso bidimensional
- A - amplitude de onda incidente
- A_I - região de discretização no MCEF
- A_{II}^{\pm} - regiões de solução em série de Fourier no MCEF

- A_n^\pm - coeficientes de s\u00e9rie de Fourier
 A_0^\pm - coeficientes de ordem zero na expans\u00e3o em s\u00e9rie de Fourier no MCEF
 A_{20}^\pm = coeficientes de ordem zero associado ao potencial $\phi_{20}(x,z)$
 A_s - \u00e1rea seccional
 b - meia boca da se\u00e7\u00e3o bidimensional
 b_{jk} - coeficiente de amortecimento por radia\u00e7\u00e3o nos modos jk
 b_{jk}^0 - b_{jk} em frequ\u00eancia nula ($\lim_{\omega \rightarrow 0} b_{jk}$)
 $b_{uu}, b_{ww}, b_{\theta\theta}$ - coeficientes de amortecimento em "sway", "heave", "sway-roll" e "roll" - caso bidimensional
 B - boca da se\u00e7\u00e3o bidimensional
 $B_{20}(x,z)$ - condi\u00e7\u00e3o de contorno no corpo associada ao potencial $\phi_{20}(x,z)$
 $B_{22}(x,z,2\omega)$ - condi\u00e7\u00e3o de contorno no corpo associada ao potencial $\phi_{22}(x,z,2\omega)$
 $B_{jk}^L, B_{jk}^{(2)}$ - coeficientes de amortecimento viscosos nos modos jk - L: linearizado
 $[C^{(1)}]$ - matriz de restaura\u00e7\u00e3o linearizada
 $C(x,t)$ - fun\u00e7\u00e3o de modula\u00e7\u00e3o cosseno
 C_D - coeficiente de arrasto
 C_f - coeficiente de atrito viscoso
 C_p - coeficiente de press\u00e3o

- d - calado da seção
- $D(\omega)$ - força média de deriva em ondas monocromáticas de frequência ω
- $D_M(\omega)$ - força média de deriva em ondas monocromáticas - fórmula de Maruo
- $\tilde{D}(t)$ - força de deriva em ondas aleatórias
- $\tilde{D}_1(t)$ - parcela de $\tilde{D}(t)$ associada ao potencial de primeira-ordem $\psi_1(x, z, t)$
- $\tilde{D}_2(t)$ - parcela de $\tilde{D}(t)$ associada ao potencial de segunda-ordem $\psi_{20}(x, z, t)$
- e_{\pm}^{\pm} - termo de ordem 1 na expansão em série de Taylor do "perímetro molhado" da seção, à direita (+) e à esquerda (-)
- $\{E^{(1)}\}$ - vetor de forças generalizadas em primeira-ordem
- $f(x, t)$ - função complexa de modulação de um trem de ondas aleatórias
- $f_0(t)$ - $f(0, t)$
- $f_0(z), f_n(z)$ - auto-funções constituintes de uma base ortonormal
- $\{F^{(1)}\}, \vec{F}_1$ - vetor de força excitante em primeira-ordem
- $\{F^{(2)}\}, \vec{F}_2$ - vetor de força excitante em segunda-ordem
- F_n - coeficientes das auto funções $f_n(z)$
- $F_j(t)$ - componente j da força hidrodinâmica total
- $F_{ej}(t)$ - componente j da força excitante em ondas
- $F_{Bj}(t)$ - componente j da força hidrodinâmica devido aos movimentos do corpo

- $\vec{F}_2(t)$ - força de segunda-ordem em baixa frequência, ondas aleatórias
 \vec{g} - vetor aceleração da gravidade
 $g_0(z), g_n(z)$ - limites de $f_0(z)$ e $f_n(z)$ quando $\omega \rightarrow 0$
 G_n - limite de F_n quando $\omega \rightarrow 0$
 $G(\phi, \psi)$ - funcional bilinear associado ao MCEF em $W_2^{(1)}(A)$
 $[G_\alpha]$ - forma discretizada de $G(\phi, \psi)$
 h - profundidade da lâmina d'água
 $h_j(x, z)$ - função global ou local de interpolação ou função característica no MEF
 H_0 - coeficiente de área seccional
 $[I_0]$ - matriz de inércia em relação ao polo 0
 $[I_G]$ - matriz de inércia em relação ao polo G
 $J(\psi), \bar{J}(\psi)$ - funcionais lineares (eq.), no espaço $W_2^{(1)}(S)$
 k, k_0 - número de onda
 \hat{k}_a - número de onda adimensionalizador
 k_n - número de onda de ordem 1, 2, 3, ...
 kC - número de Keulegan-Carpenter
 $L(\omega)$ - função de transferência linear
 $L_0(\psi), L_n(\psi)$ - funcionais lineares em $W_2^{(1)}(A_I)$
 $\{L_{0,n}\}$ - forma discreta de $L_{0,n}(\psi)$
 $L_{20}(x)$ - condição de contorno na superfície livre associada a $\phi_{20}(x, z)$
 $L_{22}(x, z, 2\omega)$ - condição de contorno na superfície livre associada a $\phi_{22}(x, z, 2\omega)$
 $L_x(t)$ - quantidade de movimento linear da massa fluida na direção do eixo x

- m - massa
 $[m]$ - matriz de massa generalizada
 $m^{(1)}, m^{(2)}$ - vazão em massa associada aos potenciais de 1ª e 2ª ordem
 $\vec{M}_0, \{M_0\}$ - momento de uma força em relação ao polo 0
 \vec{n} - versor normal a uma superfície ou contorno
 n_x, n_y, n_z, n_j - componentes do versor normal
 $p(x, z, t)$ - pressão, caso bidimensional
 $p(r_1, r_2, r_3, t)$ - pressão, caso tridimensional
 p_0 - pressão de referência
 $p^\pm(x, z); p_{1,2}(x, z)$ - funções auxiliares em $W_2^{(1)}(A_I)$
 $p_a(x, z), p_s(x, z)$ - partes anti-simétrica e simétrica de $p^\pm(x, z)$
 p_{mn} - função de transferência quadrática de pressão
 P_{mn} - parte real da função de transferência quadrática das forças de deriva em ondas aleatórias $T_{mn}(\omega_m, \omega_n)$
 $[P]$ - matriz de mudança de base
 $P(x)$ -
 P_m - pressão máxima na seção
 $q^\pm(x, z), q_{1,2}(x, z)$ - funções auxiliares em $w_1^{(2)}(A_I)$
 $q_a(x, z), q_s(x, z)$ - partes anti-simétrica e simétrica de $q^\pm(x, z)$
 $q(z)$ - função auxiliar na condição de radiação do equacionamento de $\phi_{20}(x, z)$ e $\phi_U^0(x, z)$
 $[Q]$ - matriz de perturbação da matriz de mudança de base $[P]$
 Q_{mn} - parte imaginária da função de transferência quadrática da força de deriva em ondas aleatórias $T_{mn}(\omega_m, \omega_n)$

- $Q_2^{(1)}$ - coeficiente de força de deriva associado à contribuição de segunda-ordem do potencial de primeira ordem
 $Q_2^{(2)}$ - coeficiente de força de deriva associado ao potencial de segunda ordem
 $\vec{r}, \{r\}$ - vetor posição
 \vec{r}_k - vetor posição em aproximação de k-ésima ordem
 r_j - componente j-ésima do vetor posição
 r_θ - raio de giração em "roll"
 R_D, R_j - coeficientes complexos de reflexão associados aos problemas de difração e radiação por movimento de amplitude unitária no modo j
 $[R_G]$ - matriz produto vetorial por \vec{r}_G ($\vec{r}_G \wedge$)
 R_e - nº de Reynolds
 s - coordenada curvilínea ao longo do contorno de uma curva
 S_0 - perímetro molhado da seção bidimensional
 $S_V(\omega)$ - espectro de potência de uma variável v
 S_n^\pm - coeficientes de série de Fourier associadas ao potencial $\phi_u^0(x, z)$
 S - domínio fluido infinito
 t - variável tempo
 T_{mn} - função complexa de transferência quadrática das forças de deriva nas frequências ω_m, ω_n .
 T_{ij} - coeficiente hidrodinâmico complexo
 T - coeficiente complexo de transmissão de ondas
 T - período de onda monocromática

- $u(t)$ - movimento de "sway", caso bi-dimensional
 $u_1(t), u_2(t)$ - movimento de "sway" em 1ª e 2ª ordens
 u_{10}, u_{20} - amplitudes complexas do movimento de "sway" em ondas harmônicas, em 1ª e 2ª ordens
 u_ψ - movimento de sway associado ao potencial $\psi(x, z)$
 U_0^\pm - parâmetros da condição de radiação de um problema potencial de ondas de gravidade
 $U(z)$ - perfil de velocidades na vertical, caso bi-dimensional
 $\vec{v}, \{v\}$ - vetor velocidade
 $v(x, z)$ - campo de velocidades no escoamento
 $V_k(\psi)$ - funcional linear associado ao movimento do corpo no modo k
 $\{V_k\}$ - forma discreta de $V_k(\psi)$
 y^\pm - fronteiras verticais do domínio fluido, \bar{a} direita e \bar{a} esquerda
 x_p, \bar{x}_p - coordenada de uma partícula ou ponto P nos referenciais $(0, x, z)$ e $(0, \bar{x}, \bar{z})$
 $w(t)$ - movimento de "heave" caso bi-dimensional
 $w_1(t), w_2(t)$ - movimento de "heave" em 1ª e 2ª ordens
 w_{10}, w_{20} - amplitudes complexas do movimento de "heave" em ondas harmônicas, em 1ª e 2ª ordens
 w_ψ - movimento de heave associado ao potencial $\bar{\psi}(x, z)$
 $[W]$ - matriz produto vetorial pela velocidade angular $\{\omega\}$
 z_p, \bar{z}_p - coordenada de uma partícula ou ponto P nos referenciais $(0, x, z)$ e $(0, \bar{x}, \bar{z})$
 $z'(s)$ - derivada parcial em z do contorno do corpo, de coordenada curvilínea s .

ii) - Alfabeto Grego

- α - ângulo de incidência do trem de ondas
 $\alpha(\omega, h)$ - parâmetro de medida da importância das contribuições dos potenciais de 1ª e 2ª ordens nas forças de deriva
 $\beta_n(\alpha)$ - número de ondas generalizado na direção de incidência
 β_j - ângulo de fase
 γ - inclinação da onda ($\gamma = kA$)
 δ_R, δ_T - variação nos coeficientes de reflexão e transmissão devido ao efeito de forças viscosas agentes sobre o corpo
 Δk_j - variação de número de onda k_j associado a $\Delta\omega$
 $\Delta\omega$ - largura de raia espectral
 ϵ - parâmetro pequeno
 ϵ_p, ϵ_r - parâmetro pequeno em mar-profundo e mar-raso
 $\eta(x, t)$ - perfil de onda
 $\eta_1(x, t), \eta_2(x, t)$ - perfil de onda em 1ª e 2ª ordens
 η_{10}, η_{20} - amplitudes complexas associadas a uma onda harmônica $\eta_1(x, t)$ ou $\eta_2(x, t)$
 η_c, η_s - representação de $\eta(x, t)$ em série cosseno, seno de Fourier
 $\theta(t)$ - ângulo de "roll", caso bi-dimensional
 $\theta_1(t), \theta_2(t)$ - movimento de "roll" em 1ª e 2ª ordens
 θ_{10}, θ_{20} - amplitudes complexas do movimento de "roll" em ondas harmônicas, 1ª e 2ª ordens
 θ_ψ - movimento de roll associado ao potencial $\psi(x, z)$

- λ - comprimento de onda
 λ_n - raízes das auto funções $g_n(z)$
 μ - viscosidade dinâmica
 ν - viscosidade cinemática
 $\{\xi_i\}$ - vetor de movimento generalizado ou de configuração no espaço tridimensional
 ρ - densidade da água
 τ - tensão de cisalhamento
 $\phi(x,z)$ - função potencial, ondas harmônicas, caso bidimensional
 $\phi_1(x,z), \phi_2(x,z)$ - termos de 1ª e 2ª ordens da expansão assintótica de $\phi(x,z)$
 $\phi_k(k,z)$ - função potencial associado ao movimento do corpo no modo k
 $\phi_k^0(x,z)$ - função potencial $\phi_k(x,z)$ em frequência nula
 $\phi_R(x,z), \bar{\phi}_R(x,z)$ - funções potenciais auxiliares
 $\phi_{Ra}(x,z), \phi_{Rs}(x,z)$ - partes simétricas e antisimétricas de $\phi_R(x,z)$
 $\Phi(x,z,t)$ - função potencial, ondas harmônicas, caso bi-dimensional
 $\Phi_1(x,z,t), \Phi_2(x,z,t)$ - aproximações de 1ª e 2ª ordens de expansão assintótica de $\Phi(x,z,t)$
 $\Phi_{20}(x,z)$ - função potencial em segunda-ordem, ondas harmônicas, parcela independente do tempo
 $\Phi_{22}(x,z,t)$ - função potencial em segunda-ordem, ondas harmônicas, parcela pulsante em 2ω

- $\phi_D(x,z), \Phi_D(x,z,t)$ - função potencial, problema de difração
 $\phi_I(x,z), \Phi_I(x,z,t)$ - função potencial, onda incidente
 $\psi(x,z)$ - função auxiliar pertencente a $W_2^{(1)}(A_I)$
 $\psi(x,z,t)$ - função potencial, ondas aleatórias, caso bi-dimensional
 $\psi_1(x,z,t), \psi_2(x,z,t)$ - termos de 1ª e 2ª ordens da expansão assintótica de $\psi(x,z,t)$
 $\psi_{20}(x,z,t)$ - modulação de $\Phi_{20}(x,z)$
 $\psi_{22}(x,z,t)$ - modulação de $\Phi_{22}(x,z,t)$
 $\bar{\psi}(x,z,t)$ - expansão de $\psi(x,z,t)$ em série assintótica na banda espectral Ω
 $\psi_R(x,z)$ - função auxiliar restrita ao espaço $W_2^{(1)}(A_I)$
 ω - frequência de onda
 $\vec{\omega}, \{\omega\}$ - vetor velocidade angular
 ω_k - frequência natural no modo k de oscilação do corpo
 ω_m - frequência da m-ésima raia espectral
 ω_0 - frequência central do espectro
 $\hat{\omega}a$ - frequência de adimensionalização
 Ω - largura de banda espectral

Notações Matemáticas

- ∇, ∇^2 - gradiente, Laplaciano
 ∂C - contorno ao longo da linha C
 ∂B_0 - contorno do corpo em sua posição média de equilíbrio
 ∂F - contorno ao longo da superfície livre
 ∂H - contorno do fundo

$\frac{D}{dt}$	- derivada substancial
$E[\cdot]$	- expectância de um processo aleatório
σ_v	- desvio padrão de uma variável aleatória v
$F[\cdot]$	- transformada de Fourier
$O(\)$	- ordem de magnitude
$\ \psi\ $	- norma de W
$R_v(t)$	- função de auto-correlação da variável aleatória v
$(*)$	- complexo conjugado
$\langle \ \rangle$	- média temporal de uma função
$f * g$	- produto de convolução
$[\]^T$	- matriz transposta
$\vec{u} \wedge \vec{v}$	- produto vetorial
$\vec{u} \cdot \vec{v}$	- produto escalar
<u>Notações Especiais</u>	

Λ	- indica: i) referencial solidário ao corpo ou ii) variável dimensional
x^{\pm}	- indica a função ou variável x avaliada à direita e à esquerda do domínio fluido

Espaços Funcionais

$W_2^{(1)}(A_I)$	- espaço de Sobolev no domínio A_I
$W_2^{(1)0}(A_I)$	- sub-espaço de $W_2^{(1)}(A_I)$
$W_N(A_I)$	- sub-espaço N -dimensional de $W_2^{(1)}(A_I)$

Bases ou Sistemas de Referência

$(0, x, z)$	- referencial inercial, caso bi-dimensional
$(0, \tilde{x}, \tilde{z})$	- referencial solidário ao corpo, caso bidimensional
$(0, r_1, r_2, r_3)$	- referencial inercial, caso bidimensional
$(0, \hat{r}_1, \hat{r}_2, \hat{r}_3)$	- referencial solidário ao corpo, caso bidimensional

LISTA DE FIGURAS

<u>Figura</u>	<u>Título</u>
1.1	Tensões nas amarras de um navio-cisterna - escala-real Pesce, 1981 [48]
1.2	Tensões nas amarras de um navio-cisterna - modelo reduzido [26]
1.3	Tensões nas amarras de um navio cisterna - modelo reduzido - [26]
1.4	Espectro de Potência de onda medida em escala real - Pesce, 1981 [48]
2.1	Corpo Cilíndrico Fundeado - Sistemas de Referência
2.2	Curvas de Resposta em Frequência de Movimentos em 1ª ordem
2.3.	Espectros de Potência de Ondas e Força de Deriva
2.4	Idealização do Fenômeno de Oscilação Lenta de Corpos Fundeados
2.5	Força Média de Deriva segundo Maruo
2.6	Coeficiente de Reflexão. Cilindro Circular, segundo Maruo
2.7	Modelo Heurístico do Fenômeno de Oscilação Lenta segundo Hsu & Blenkarn
3.1	Sistema de Referências - Caso tridimensional
3.2	Sistema de Referências - Caso bidimensional
4.1	Domínio Fluido e Volume de Controle, Caso Bidimensional

- 5.1 Ondas Aleatórias e a Função de Modulação
- 6.1 Domínio Fluido e o Corpo Cilíndrico
- 7.1 Ilustração do Método Compatibilizado de Elementos Finitos (MCEF)
- 7.2 Fluxograma de Processamento do Sistema DERIV
- 8.1 Parâmetros Geométricos dos Problemas Analisados
- 8.2 Malha de Elementos Finitos Básica Caso A $B/d=2.0$; $h/B=1.0$
- 8.3 Malha de Elementos Finitos Básica Caso B $B/d=2.0$; $h/B=2.0$
- 8.4 Malha de Elementos Finitos Básica Caso C $B/d=2.0$; $h/B=5.0$
- 8.5 Malha de Elementos Finitos Básica Caso D $B/d=2.0$; $h/B=10.0$
- II.1 Sistemas de Referência - Caso Bidimensional
- III.1 Definição dos Ângulos de Banda, Trim e Guinada ("Roll", "pitch" e "yaw")
- III.2 Sistemas de Referência - Caso Tridimensional
- III.3 O método Compatibilizado de Elementos Finitos
- III.4 Elemento Finito da Região Discretizada
- VI.1 O Método Compatibilizado de Elementos Finitos
- VIII.1 Trem de ondas aleatórias no instante t .
- VIII.2 (a) perfil de onda aleatória no instante $t=t_0$
(b) série temporal de onda na posição $x=x_0$
- VIII. Densidade Espectral de energia de Onda. Aproximação em funções - resalto

- VIII.4 Espectro de potência simplificado com 3 raias
- VIII.5 Frequências de corte para Espectros de mar Típicos

- IX.1 Seções Típicas no Estudo dos Coeficientes de Amortecimento viscoso
- IX.2 Coeficientes de Arrasto de corpos cilíndricos
- IX.3 Função de Transferência em "sway", seção retangular sem restrição ao movimento
- IX.4 Coeficiente de Amortecimento por radiação de ondas. Seção Retangular
- IX.5 Diagrama de Pressões ao longo do Contorno da Seção. Idealização
- IX.6 Coeficiente $f_1 \times \sigma$
- IX.7 Coeficiente $f_2 \times \sigma$
- IX.8 Seções Bidimensionais. Pontos de Separação
- IX.9 Força de amortecimento viscoso "roll-sway"

LISTA DE TABELAS

- 8.1. Características dos Problemas Analisados
 8.2 Parâmetros dimensionais típicos dos problemas Analisados

LISTA DE GRÁFICOS - Exemplos de Resultados de Processamento

Objetivos

- 8.1 a 8.4; 8.11 a 8.21; 8.32 a 8.54 - Análise do efeito da profundidade da lâmina d'água. Seção retangular
 8.5 a 8.7; 8.21 a 8.23; 8.35 a 8.36 - Análise do efeito da variação dos parâmetros de inércia e de dissipação viscosa. Seção retangular
 8.8 a 8.10; 8.24 a 8.31; 8.37 a 8.42 - Análise do efeito de refinamento localizado das malhas de Elementos finitos na solução numérica. Seção Retangular

Descrição

Análise do Problema de Segunda-Ordem

- 8.1 Coef. de Força de Deriva $Q_2^{(1)}$ - contribuição do potencial de 1ª ordem - A,B,C
 8.2 Coef. de Força de Deriva $Q_2^{(2)}$ - contribuição do potencial de 1ª ordem - A,B,C
 8.3 Coeficientes de Reflexão $|R|^2$ - A,B,C
 8.4 Parâmetro α , medidor da importância relativa entre as contribuições dos potenciais de 2ª e 1ª ordens - A,B,C
 8.5 Coef. de Força de Deriva $Q_2^{(1)}$ - contribuição do potencial de 1ª ordem - A,A₁,A₂
 8.6 Coef. de Força de Deriva $Q_2^{(2)}$ - contribuição do potencial de 1ª ordem - A,A₁,A₂

- 8.7 Coeficientes de Reflexão $|R|^2$, - A, A_1, A_2
- 8.8 Coef. de Força de Deriva $Q_2^{(1)}$ - contribuição do potencial de 1ª ordem - A, D
- 8.9 Coef. de Força de Deriva $Q_2^{(2)}$ - contribuição do potencial de 1ª ordem - A, D
- 8.10 Coeficientes de Reflexão $|R|^2$, - A, D

Análise do Problema de primeira-Ordem

- 8.11 Coeficiente de massa adicional em "sway" (a_{uu}) - A, B, C
- 8.12 Coeficiente de massa adicional em "sway-roll" ($a_{u\theta}$) - A, B, C
- 8.13 Coeficiente de massa adicional em "heave" (a_{ww}) - A, B, C
- 8.14 Coeficiente de inércia adicional em "roll" ($a_{\theta\theta}$) - A, B, C
- 8.15 Coeficiente de amortecimento por radiação em "sway" (b_{uu}) - A, B, C
- 8.16 Coeficiente de amortecimento por radiação em "sway-roll" ($b_{u\theta}$) - A, B, C
- 8.17 Coeficiente de amortecimento por radiação em "heave" (b_{ww}) - A, B, C
- 8.18 Coeficiente de amortecimento por radiação em "roll" ($b_{\theta\theta}$) - A, B, C
- 8.19 Força excitante em "sway" (F_n) - A, B, C
- 8.20 Força excitante em "heave" (F_w) - A, B, C
- 8.21 Momento excitante em "roll" (F_θ) - A, B, C

- 8.22 Coeficiente de amortecimento total incluindo-se o efeito de forças viscosas em "roll" ($B_{\theta\theta}^L$) - A,B,C
- 8.23 Coeficiente de amortecimento por efeito de forças viscosas em "sway-roll" ($B_{u\theta}^L$) - A,B,C
- 8.24 idem 8.11 - A;D
- 8.25 idem 8.12 - A,D
- 8.26 idem 8.13 - A,D
- 8.27 idem 8.14 - A,D
- 8.28 idem 8.15 - A,D
- 8.29 idem 8.16 - A,D
- 8.30 idem 8.17 - A,D
- 8.31 idem 8.18 - A,D
- 8.32 Função de Transferência do movimento de "sway" - A,B,C
- 8.33 Função de Transferência do movimento de "heave" - A,B,C
- 8.34 Função de Transferência do movimento de "roll" - A,B,C
- 8.35 idem 8.32 - A,A₁
- 8.36 idem 8.34 - A,A₁,A₂
- 8.37 idem 8.36 - A,A₂,D
- 8.38 Força excitante em "sway" (F_n) - A,D
- 8.39 Força excitante em "heave" (F_w) - A,B,C
- 8.40 Momento excitante em "roll" (F_θ) - A,D
- 8.41 idem 8.22 - A,D
- 8.42 Idem 8.23 - A,D

1. INTRODUÇÃO

O acelerado crescimento da indústria oceânica e o desenvolvimento de técnicas de exploração de recursos do mar trouxe à tona problemas os mais diversos ao campo da engenharia, muitos deles de natureza multidisciplinar, gerando uma extensa atividade de pesquisa.

Em tal panorama o fundeio, prática bastante antiga na arte da navegação, passou a ser executado em mar aberto sob condições ambientais antes não muito comuns, servindo como instrumento de posicionamento de embarcações e sistemas oceânicos durante o desempenho de suas missões. Navios armazenadores de petróleo, plataformas semi-submersíveis, navios-guindaste, navios-sonda, barcas lançadoras de tubulação, quebra-ondas, sistemas de aproveitamento de energia de ondas são alguns exemplos de estruturas oceânicas que se utilizam de sistemas de amarração para posicionamento e operação.

O projeto e especificação do sistema de amarração assume, então, grande importância, na medida em que seu custo representa, em geral, parcela insignificante quando comparado aos prejuízos decorrentes de uma eventual falha no sistema de fundeio.

A ação ambiental (ondas, vento e correnteza) impõem a tais sistemas cargas de natureza dinâmica obrigando à análise de seu comportamento sob o ponto de vista dinâmico.

Sua complexidade, no entanto, dificulta sobremaneira qualquer abordagem mais simples do problema, induzindo a elabo-

ração de modelos matemáticos e/ou a realização de ensaios com modelos em escala reduzida.

A ação das forças ambientais sobre o sistema corpo-amarração se traduz na forma de um carregamento do mesmo para uma nova posição média de equilíbrio e de oscilações em torno desse ponto em duas faixas distintas de frequência. Na primeira faixa, a de frequências próprias das ondas, o corpo oscila em seus seis possíveis graus de liberdade ("surge, sway, heave, roll, pitch, yaw"). Tal comportamento é geralmente estudado sob hipóteses linearizadoras e se constitui na teoria clássica do comportamento do navio no mar. Os movimentos translacionais são de um modo geral, da mesma ordem de magnitude da amplitude da onda incidente. Já na segunda faixa, em baixa frequência, o sistema oscila no plano horizontal segundo três graus de liberdade, "surge", "sway" e "yaw". Tais movimentos podem atingir grandes amplitudes e muitas vezes comprometer o sistema de fundeio.

Um exemplo bastante elucidativo do comportamento acima exposto é dado nas figuras 1.1 a 1.3. Nelas são apresentadas séries temporais de forças em amarras, medidas em escala real e em modelo reduzido, correspondentes a estudos realizados recentemente para a determinação da causa de desgarramento de navios-aramazenadores de petróleo nos campos do Ceará[47]. Nota-se claramente as oscilações nas duas faixas de frequência citadas. Em particular, na figura 1.3, é nítida a correlação das oscilações em baixa frequência com a existência de "grupos de onda". Observando-se o espectro de potência da onda então medida, mostra

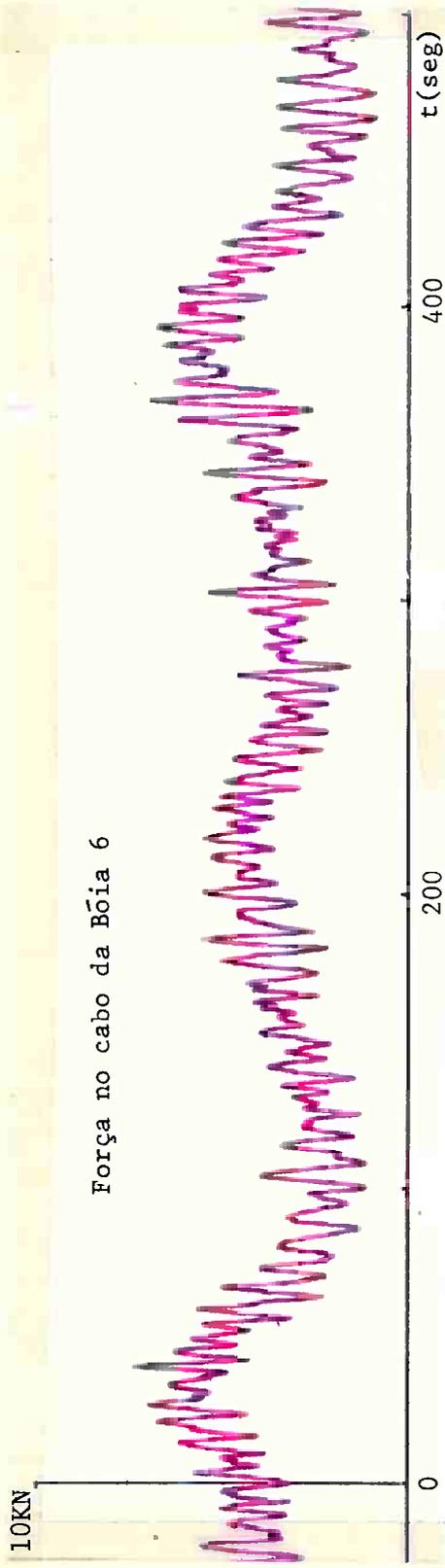


Fig. 1.1 - Tensão na amarra de um navio-cisterna. Registro obtido em escala real, Pesce, 1981 [47]

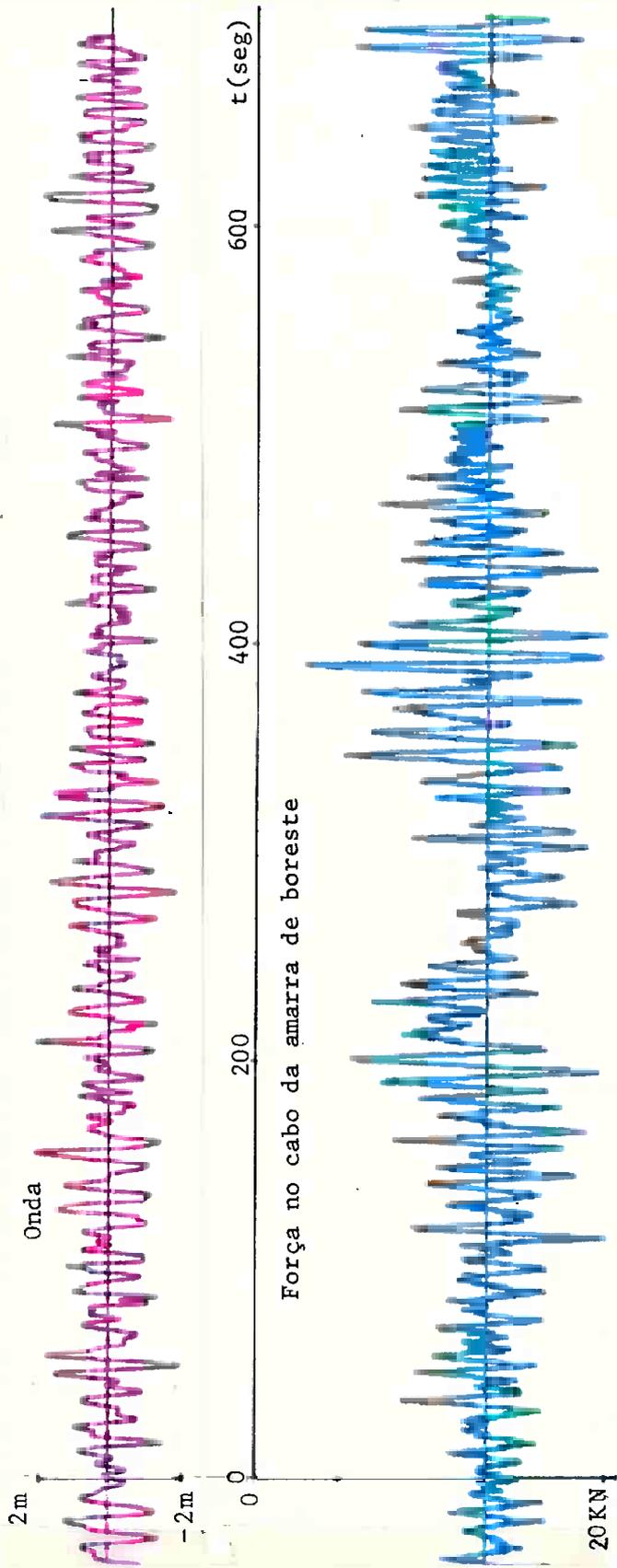


Fig. 1.2 - Tensão na amarra de um navio cisterna. Registro obtido em ensaio com modelo reduzido em ondas aleatórias, [26]

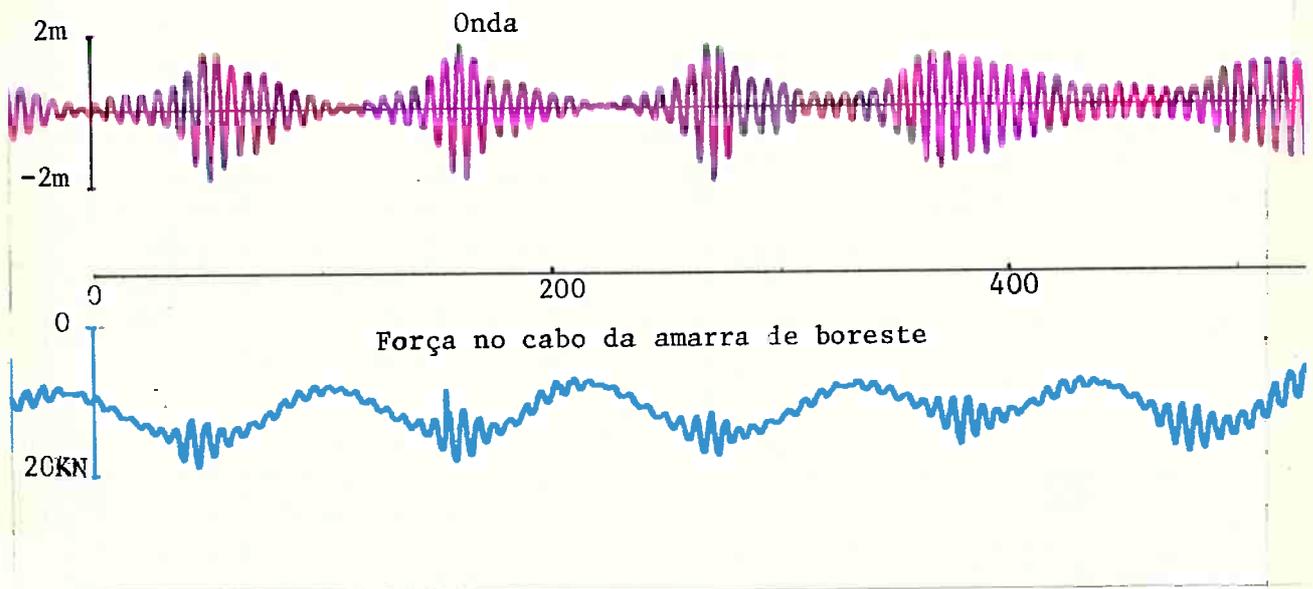


Fig. 1.3 - Tensão na amarra de um navio-cisterna. Registro obtido em ensaio com modelo reduzido em grupos de ondas regulares

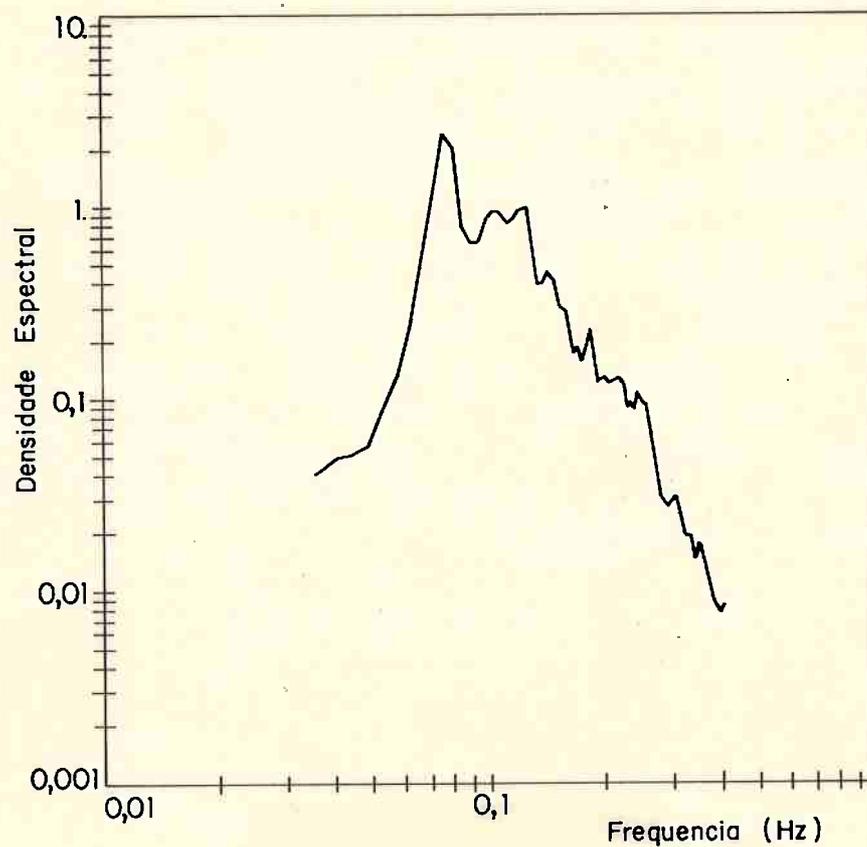


Fig. 1.4 - Espectro de potência de onda medida em escala real, Pesce, 1981[47]

do na figura 1.4, não se evidencia a existência de componentes em baixa frequência. Admitindo-se as ondas de superfície como principais agentes destas oscilações, o fenômeno somente poderá ser explicado através de relações não-lineares. De fato, diversos autores têm mostrado serem forças de segunda ordem, devido à ação das ondas, a principal causa deste fenômeno.

Embora de pequena magnitude quando comparadas às forças de primeira ordem, as forças de segunda-ordem, oriundas da difração não linear da onda incidente podem induzir grandes amplitudes de oscilação, o que caracteriza um fenômeno ressonante. Tais forças têm componentes de baixa e de alta frequência. As primeiras se relacionam à largura da banda espectral ou à frequência típica dos grupos de onda. As últimas têm frequência de ordem de magnitude duas vezes superior à frequência central típica das ondas. Em geral, os sistemas corpo-âmbarras se constituem, no plano horizontal, em sistemas elástico-amortecidos de baixa rigidez e elevada inércia e portanto com frequências naturais bastante baixas, próximas muitas vezes das frequências típicas dos grupos de onda. Assim, a pequena excitação em baixa frequência pode ser amplificada pelo sistema mecânico produzindo uma resposta dinâmica até mesmo maior do que aquela observada na frequência central do espectro da onda.

Obviamente vento e correnteza podem contribuir para a ocorrência do fenômeno. Seu estudo não se constitui em objetivo do presente trabalho, podendo, no entanto, ser observado nas referências [24], [45], [47], [48].

Técnicas as mais diversas têm sido sugeridas para o estudo do problema de oscilações lentas. Todas elas esbarram, no entanto, na quantificação das "forças de segunda ordem em baixa frequência", também designadas "forças de deriva". Tais forças se devem à contribuição de termos quadráticos de pressão relacionados ao potencial de primeira-ordem, e termos lineares relacionados ao potencial de segunda-ordem, ambos advindos da perturbação do potencial de onda incidente pela presença do corpo no meio fluido. Em particular não é clara, até o momento, a relação de importância entre as duas parcelas acima citadas, notadamente no que se refere à influência da profundidade da lâmina d'água. Na realidade, os efeitos não-lineares se tornam mais importantes à medida que a profundidade diminui.

Assim, o objetivo central do presente trabalho é a elaboração de um método para o cálculo da "força de deriva" em corpos submetidos à ação de ondas aleatórias considerando-se as parcelas relacionadas aos potenciais de primeira e segunda ordem em águas de profundidade finita. Restringe-se o estudo ao caso de corpos cilíndricos ou seja ao problema bidimensional, embora os resultados aqui apresentados possam ser estendidos ao caso geral bidimensional através de técnicas assintóticas como a "teoria de faixas" ou a "teoria de corpos esbeltos".

Em particular, demonstra-se que a contribuição do potencial de segunda ordem pode ser calculada através de uma extensão das relações de Haskind, prescindindo-se assim da solução do problema não-linear. A técnica utilizada é a aproximação

da solução exata do potencial sob a forma de uma série assintótica. A solução de primeira-ordem, que resulta no conhecimento do potencial de primeira-ordem é então suficiente para a análise completa do problema proposto.

O presente trabalho é estruturado em 9 capítulos (incluindo o presente) e 10 anexos.

O capítulo 2 encarrega-se de descrever e discutir o fenômeno de oscilação lenta, sua natureza, importância e implicações e relatar um breve histórico da bibliografia coletada neste assunto.

O capítulo 3 e os anexos I e II estabelecem a formulação geral dos problemas de difração e radiação não-linear das ondas de superfície e introduzem o conceito de aproximações assintóticas, estabelecendo as aproximações de primeira e segunda ordem. O anexo III se ocupa de indicar a solução do problema linear, necessário à continuidade do trabalho e apresenta, de forma sucinta, o método numérico de solução empregado: o "Método Compatibilizado de Elementos Finitos". O anexo IV descreve a adimensionalização de variáveis adotada, sua conceituação e interrelacionamento com outras adimensionalizações presentes na literatura. Ainda o anexo IX apresenta os métodos semi-empíricos utilizados para a introdução dos efeitos viscosos no comportamento cinemático do corpo em primeira-ordem, e conseqüentemente nas forças de deriva.

O capítulo 4, complementado pelo anexo V, apresenta o método de cálculo da parcela da força média de deriva em ondas monocromáticas, em águas de profundidade finita, constituindo-

-se em extensão do método proposto por Maruo em águas infinitamente profundas.

O capítulo 5 introduz um método assintótico para o cálculo das forças de deriva em ondas aleatórias através dos conceitos de modulação em amplitude e fase de uma onda monocromática. Os resultados alcançados no capítulo 4 são então estendidos e mostra-se o relacionamento do método proposto com métodos constantes da literatura. Introduce-se ainda a parcela da força de deriva correspondente ao potencial de segunda ordem e estabelece-se a relação com a parcela oriunda do potencial de primeira-ordem em termos de ordem de magnitude. É apresentado o cálculo do espectro de potência das forças de deriva. O anexo VIII complementa as deduções deste capítulo.

O capítulo 6, complementado pelos anexos VI e VII, apresenta o método de cálculo do coeficiente de força de deriva, em ondas aleatórias devido ao potencial de segunda-ordem. Utiliza-se uma extensão das relações de Haskind aplicada ao potencial de segunda-ordem, com o que se calcula o coeficiente em questão sem a necessidade da solução do problema potencial em segunda aproximação. Para tanto, o anexo VI formula e resolve o problema de radiação em "sway" no limite assintótico quando a frequência tende a zero e o anexo VII cuida de aspectos matemáticos e estabelece as condições de radiação do potencial de segunda-ordem necessárias ao método exposto no capítulo 6.

O capítulo 7 descreve os programas de computador de-

envolvidos ou adaptados ao presente trabalho e que integram o sistema DERIV. O anexo X apresenta listagens de exemplos de processamento. O manual de utilização do sistema, bem como as listagens dos programas que o compõem não são incluídos no presente texto, podendo porém ser apreciados na referência [28].

O capítulo 8 cuida de apresentar alguns exemplos de processamento do sistema DERIV, discutindo-os à luz de resultados encontrados na literatura ou sob considerações de caráter teórico. São apresentados 42 gráficos correspondentes aos coeficientes de força de deriva, respostas cinemáticas em primeira ordem e coeficientes hidrodinâmicos.

Finalmente, o capítulo 9 conclui a presente dissertação tecendo algumas considerações e sugestões para trabalhos futuros.

2. O FENÔMENO DE OSCILAÇÃO DE CORPOS FUNDEADOS EM BAIXA FREQUÊNCIA

A título de apresentação do fenômeno de oscilação lenta de corpos fundeados tomaremos o caso simplificado de um corpo cilíndrico flutuando em lâmina d'água de profundidade arbitrária, amarrado no plano da seção.

Adotamos 2 sistemas de coordenadas cartesianas. O primeiro (o, x, z) é inercial e tem o eixo x coincidente com a linha da superfície da água inicialmente em repouso. O segundo (O, \hat{x}, \hat{z}) é solidário ao corpo, com origem em O . Os sistemas são supostos coincidentes no instante $t=0$. Define-se o ângulo de roll como o ângulo formado entre os eixos ox e $O\hat{x}$ em um instante t qualquer. Definem-se ainda os movimentos de "sway" $u = x_0(t)$ e "heave" $w = z_0(t)$ de acordo com o anexo II

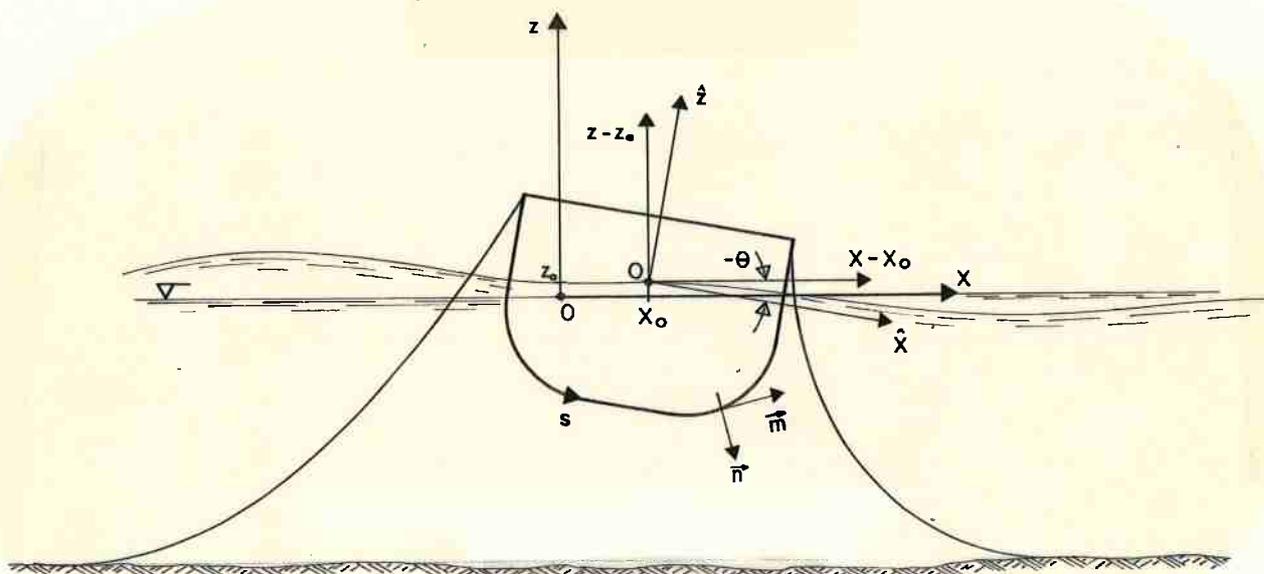


Fig. 2.1 - Corpo cilíndrico fundeado

O sistema corpo-amarras possui restauração hidrostática segundo os graus de liberdade w e θ (heave e roll). No plano horizontal (eixo ox) as forças de restauração se devem unicamente à ação das linhas de amarração e têm, em geral, característica elástica não linear.

Assim, corpo e amarração constituem um sistema mecânico não-linear típico. Tomemos, em primeira instância, a aproximação linear do sistema. Considerando as frequências naturais de oscilação segundo os modos de heave e roll tem-se em geral:

$$\omega_{\theta} \sim \omega_w \sim \omega_0 \quad (2.2.a)$$

onde ω_0 é a frequência típica das ondas.

Sabe-se também que para embarcações de grande e médio porte, o sistema de fundeio constitui-se em restrição bastante fraca aos movimentos. Assim, no plano horizontal, modo em "sway" (u), tem-se, em geral:

$$\omega_u \ll \omega_0 \quad (2.2.b)$$

Considerando-se a perda de energia por radiação de ondas como um fator de amortecimento do sistema, espera-se que sua característica de resposta dinâmica à uma força excitante harmônica seja representada em frequência por curvas ressonantes típicas, como exemplificado na figura 2.2.

Sob tais considerações, a ocorrência de movimentos de grande amplitude no plano horizontal em frequências próximas a ω_u , caracterizando portanto um fenômeno ressonante, só pode ser

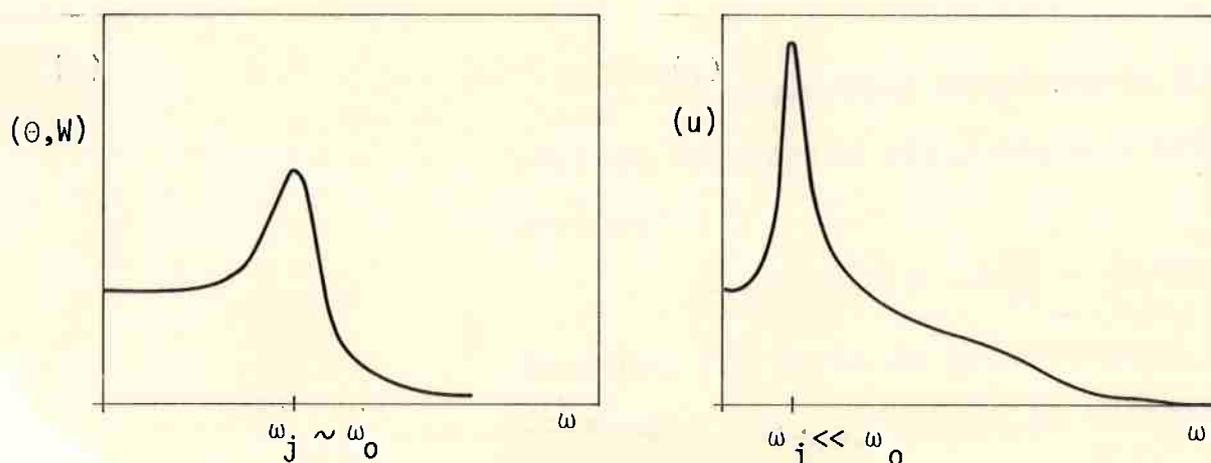


Fig. 2.2 - Curvas de resposta típica

explicado pela existência de relações não lineares entre a onda incidente e as forças dela decorrentes. Procuraremos analisar a seguir a origem de tais não-linearidades.

2.1. Força sobre o corpo em aproximação de segunda-ordem

Admita-se o escoamento ondulatório como invíscido e irrotacional podendo considerá-lo então dentro da teoria potencial. A inclusão de efeitos viscosos será feita oportunamente no capítulo 4.

Designando $\partial B(x, z, t)$ o contorno da superfície molhada do corpo em um dado instante, $\vec{n}(x, z, t)$ o versor normal a esta superfície, apontando para seu exterior e $p(x, z, t)|_{\partial B}$ a pressão junto a ∂B , a força hidrodinâmica agente sobre o corpo é escrita:

$$\vec{F} = - \int_{\partial B} p(x, z, t) |_{\partial B} \vec{n} \, ds \quad (2.3.a)$$

e o momento em torno da origem:

$$\vec{M} = - \int_{\partial B} p(x, z, t) |_{\partial B} \vec{r} \wedge \vec{n} \, ds \quad ; \quad \vec{r} = (x - x_0, z - z_0) \quad (2.3.b)$$

e

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_1(t) = [u_1(t) - z\theta_1(t); w_1(t) + x\theta_1(t)] \quad (2.7)$$

Na expressão (2.5) são evidentes os termos de primeira e segunda ordens. Note-se porém que uma fonte adicional de não-linearidade deve ser considerada na integração das expressões 2.3.a e 2.3.b, na medida em que o contorno ∂B varia no tempo.

Denominando S_0 o comprimento do contorno B_0 e S o comprimento do contorno ∂B pode-se escrever:

$$-S_0/2 + \epsilon e_1^- + \epsilon^2 e_2^- \leq S \leq S_0/2 + \epsilon e_1^+ + \epsilon^2 e_2^+$$

Verifica-se que (Potash; 1971) [52]:

$$\begin{aligned} e_1^+(t) &= (\eta_1(\bar{x}(+S_0/2), t) - w_1(t) - \bar{x}(S_0/2)\theta_1(t))/\bar{z}'(S_0/2) \\ e_1^-(t) &= (\eta_1(\bar{x}(-S_0/2), t) - w_1(t) - \bar{x}(S_0/2)\theta_1(t))/\bar{z}'(S_0/2) \end{aligned} \quad (1) \quad (2.8)$$

Aplicando-se a regra de Leibniz \bar{a} (2.3.a) vem (Potash, 1971):

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) &= \int_{\partial B_0} p(x, z, t) \vec{n}(s) ds + \\ &+ \epsilon [e_1^+ p(x(S_0/2), z(S_0/2), t) \vec{n}(S_0/2) - e_1^- p(x(-S_0/2), z(-S_0/2), t) \vec{n}(-S_0/2)] + \\ &+ 0(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

e analogamente para (2.3.b).

(1) - $\bar{z}(s)$ é a derivada de \bar{z} em relação a \bar{x} calculada em s .

Substituindo-se agora a expressão (2.5) em (2.9) e agrupando-se termos de mesma ordem de magnitude tem-se:

- força dinâmica em primeira ordem ⁽¹⁾:

$$\begin{aligned} \vec{F}_1(t) = & - \rho g \int_{\partial B_0} (-w_1(t) + x(s)\theta_1(t) + \eta_1(x(s),t)) \vec{n}(s) \Big|_{\partial B_0} ds - \\ & - \rho \int_{\partial B_0} \frac{\partial \psi_1}{\partial t}(x(s),z(s),t) \vec{n}(s) \Big|_{\partial B_0} ds \end{aligned} \quad (2.10)$$

- força dinâmica em segunda-ordem

$$\begin{aligned} \vec{F}_2(t) = & - \epsilon \rho g [e_1^{+2}(t) \cdot z^{'+} \vec{n}^+ - e_1^{-2}(t) \cdot z'^- \vec{n}^-] - \epsilon \rho [e_1^+(t) \cdot \frac{\partial \psi_1^+}{\partial t} \vec{n}^+ - e_1^-(t) \frac{\partial \psi_1^-}{\partial t} \vec{n}^-] - \\ & - \epsilon \rho g \int_{\partial B_0} \eta_2(x(s),t) \vec{n}(s) \Big|_{\partial B_0} ds - \epsilon \rho g \int_{\partial B_0} (-w_2(t) - x(s)\theta_2(t)) \vec{n}(s) \Big|_{\partial B_0} ds - \\ & - \frac{1}{2} \epsilon \rho g \int_{\partial B_0} z(s)\theta_1^2(t) \vec{n}(s) \Big|_{\partial B_0} ds - \epsilon \rho g \int_{\partial B_0} (\vec{r}_1(t) \nabla \frac{\partial \psi_1}{\partial t}) \vec{n}(s) \Big|_{\partial B_0} ds - \\ & - \frac{1}{2} \epsilon \rho \int_{\partial B_0} (\nabla \psi \cdot \nabla \psi_1) \vec{n}(s) \Big|_{\partial B_0} ds - \epsilon \rho \int_{\partial B_0} \frac{\partial \psi_2}{\partial t} \vec{n}(s) \Big|_{\partial B_0} ds \end{aligned} \quad (2.11)$$

onde:

$$z'^{\pm} = z'(\pm S_0/2) \Big|_{\partial B_0} \quad ; \quad \psi_1 = \psi_1(x(\pm S_0/2), z(\pm S_0/2), t) \Big|_{\partial B_0}$$

$$\vec{n}^+ = \vec{n}(S_0/2) \Big|_{\partial B_0}$$

$$\vec{n}^- = \vec{n}(-S_0/2) \Big|_{\partial B_0}$$

e analogamente para as expressões dos momentos de força.

(1) - Desconsiderou-se o termo em $z(s)$ visto que sua integração ao longo de ∂B_0 corresponde ao empuxo hidrostático.

Note-se que a menos dos termos em η_2 e ψ_2 , as demais contribuições às forças e momento de segunda-ordem se devem a termos quadráticos ou bilineares de grandezas de primeira-ordem.

2.1.1. Forças de segunda-ordem em ondas harmônicas

Tomando-se agora a incidência de uma onda monocromática, de frequência ω , tanto $\psi_1(x, z, t)$ como $u_1(t)$, $w_1(t)$ e $\theta_1(t)$ serão harmônicas de frequência ω .

Escrevendo-se então:

$$\psi_1(x, z, t, \omega) = \Phi_1(x, z, t) + (*) \quad (2.12)^{(1)}$$

com

$$\Phi_1(x, z, t) = \frac{1}{2} \phi_1(x, z) e^{-i\omega t}$$

como o potencial complexo, solução do problema de primeira-ordem, e analogamente;

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \frac{1}{2} u_{10} e^{-i\omega t} + (*) \\ w_1(t) &= \frac{1}{2} w_{10} e^{-i\omega t} + (*) \\ \theta_1(t) &= \frac{1}{2} \theta_{10} e^{-i\omega t} + (*) \end{aligned} \quad (2.13)$$

é fácil verificar-se de (2.11), (2.12) e (2.13) que os termos quadráticos ou bilineares darão origem a termos que podem ser de compostos em um valor constante somado a um sinal de frequência 2ω . Tomando-se, por exemplo, o termo em $\nabla\psi_1 \cdot \nabla\psi_1$ tem-se:

(1) - (*) indica complexo conjugado

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{2} \varepsilon \rho \int_{\partial B_0} (\nabla \psi_1 \cdot \nabla \psi_1) \Big|_{\partial B_0} \vec{n}(s) ds = \\
& = - \frac{\varepsilon}{4} \rho \int_{\partial B_0} (\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1^*) \Big|_{\partial B_0} \vec{n} ds - \frac{1}{8} \varepsilon \rho \int_{\partial B_0} (\nabla \phi_1 \nabla \phi_1 e^{-2i\omega t} + (*)) \Big|_{\partial B_0} \vec{n} ds
\end{aligned}$$

Decomposição análoga pode ser demonstrada para os termos dependentes de $\eta_2(x,t)$ e $\psi_2(x,z,t)$. Veremos no capítulo 3 e nos anexos I e II que o potencial de segunda ordem é solução da equação de Laplace sob condições de contorno não homogêneas na superfície-livre e no corpo. Tais condições de contorno são funções quadráticas ou bilineares do potencial e movimentos em primeira-ordem. Pode-se então escrever:

$$\psi_2(x,z,t,\omega) = \Phi_{20}(x,z,\omega) + \Phi_{22}(x,z,t,2\omega) + (*) \quad (2.14)$$

$$\eta_2(x,z,t,\omega) = \eta_{20}(x,\omega) + \eta_{20}(x,t,2\omega) \quad (2.15)$$

e analogamente:

$$w_2(t,\omega) = w_{20}(x,\omega) + w_{22}(x,t,2\omega) \quad (2.16)$$

$$\Theta_2(t,\omega) = \Theta_{20}(x,\omega) + \Theta_{20}(x,t,2\omega)$$

Visto que estamos interessados tão somente no cálculo das forças de baixa-frequência, desconsideraremos os termos pulsantes em 2ω . Tal procedimento equivale a tomar-se a média de $F(t)$ em um período $T = 2\pi/\omega$, resultando a força média em segunda-ordem em ondas monocromáticas. Note-se, que nesse caso, a contribuição do potencial de segunda-ordem é nula. A força média de

segunda-ordem, em ondas monocromáticas, fica então escrita:

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{F}_2(t, \omega) \rangle = & -\frac{1}{2} \varepsilon \rho g \left[\left(|\eta_{10}^+|^2 + |w_{10}|^2 + x^2 |\Theta_{10}|^2 - \operatorname{Re}(w_{10} \eta_{10}^{+*} + x^+ \Theta_{10} \eta_{10}^{+*} - w_{10} x^+ \Theta_{10}^*) \right) z^+ \vec{n}^+ - \right. \\
 & \left. - \left(|\eta_{10}^-|^2 + |w_{10}|^2 + x^2 |\Theta_{10}|^2 - \operatorname{Re}(w_{10} \eta_{10}^{-*} + x^- \Theta_{10} \eta_{10}^{-*} - w_{10} x^- \Theta_{10}^*) \right) z^- \vec{n}^- \right] + \\
 & -\frac{1}{2} \varepsilon \rho g \left\{ \operatorname{Re} \left(i \omega \phi_1^+ (\eta_1^+ - w_{10} - x^+ \Theta_{10}) \right) \vec{n}^+ - \operatorname{Re} \left(i \omega \phi_1^- (\eta_1^- - w_{10} - x^- \Theta_{10}) \right) \vec{n}^- \right\} + \\
 & - \varepsilon \rho g \int_{\partial B_0} (\eta_{20} - w_{20} - x \Theta_{20}) \vec{n} \Big|_{\partial B_0} ds + \\
 & - \frac{1}{4} \varepsilon \rho g |\Theta_{10}|^2 \int_{\partial B_0} z \vec{n} \Big|_{\partial B_0} ds + \\
 & - \frac{1}{2} \varepsilon \rho g \int_{\partial B_0} \operatorname{Re} \left[i \omega \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} (u_{10} - z \Theta_{10}) + i \omega \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z} (w_1 + x \Theta_{10}) \right] \vec{n} \Big|_{\partial B_0} ds + \\
 & - \frac{1}{4} \varepsilon \rho \int_{\partial B_0} (\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1^*) \vec{n} \Big|_{\partial B_0} ds
 \end{aligned}$$

onde:

$$x^\pm = x(\pm S_0/2) \Big|_{\partial B_0}$$

$$\eta_{10}^\pm = \eta_{10}(x(\pm S_0/2)) \Big|_{\partial B_0} \quad : \text{ amplitudes complexas de oscilação da superfície livre nas intersecções com } \partial B_0$$

$$\phi_1^\pm = \phi_1(x(\pm S_0/2), z(\pm S_0/2), t) \Big|_{\partial B_0}$$

É evidente a complexidade do cálculo de $\langle \vec{F}_2(t, \omega) \rangle$ através de (2.17). No entanto, pode-se deduzir uma expressão alternativa, baseando-se no procedimento introduzido por Maruo (1960) [37] para o cálculo da componente de força segundo o eixo x. Maruo uti

lizou-se do princípio da conservação da quantidade de movimento aplicado a um domínio fluido, no qual flutua o corpo, com fronteiras verticais posicionadas no infinito.

Tal método, embora não apresente explicitamente as diversas parcelas que contribuem na força média de deriva, tem a virtude de expressá-la de uma forma sintética, conforme veremos adiante. Por estas razões, o método de Maruo será estendido, no presente trabalho, ao caso de profundidades arbitrárias e expandido assintoticamente para o caso de incidência de ondas aleatórias.

2.1.2. - Forças de segunda-ordem em ondas aleatórias

Analisaremos, a seguir e de forma breve, o caso de incidência de ondas aleatórias. Os aspectos mais formais desta análise e o método assintótico de cálculo da força de deriva serão objeto do capítulo 5.

Inicialmente, com o intuito de simplificar a exposição, consideraremos a superposição de duas ondas monocromáticas de frequências ω_1 e ω_2 , muito próximas, tais que:

$$|\omega_1 - \omega_2| \ll \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad (2.18)$$

Caracteriza-se, assim, a existência da propagação de grupos de ondas ou ainda uma modulação em amplitude.

A frequência da função de modulação pode-se associar y ma variação muito lenta da força média de deriva, calculada na frequência central $\omega_0 = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$. Paralelamente, o potencial de segunda ordem $\phi_{20}(x,z)$, independente do tempo em ondas monocromáticas, também poderá ser visto como uma função lentamente oscilante. Estendendo tal raciocínio, ainda bastante heurístico, para um trem de ondas aleatórias cujo espectro tem largura de banda (Ω) bastante estreita, explica-se a origem de forças de segunda-ordem em baixa frequência ($o(2\Omega)$).

Assim, a um trem de ondas aleatórias, caracterizado por um espectro de potência do tipo mostrado na figura 2.3.a, estarão associadas forças e momentos cujo espectro é apresentado simplificadaamente na figura 2.3.b.

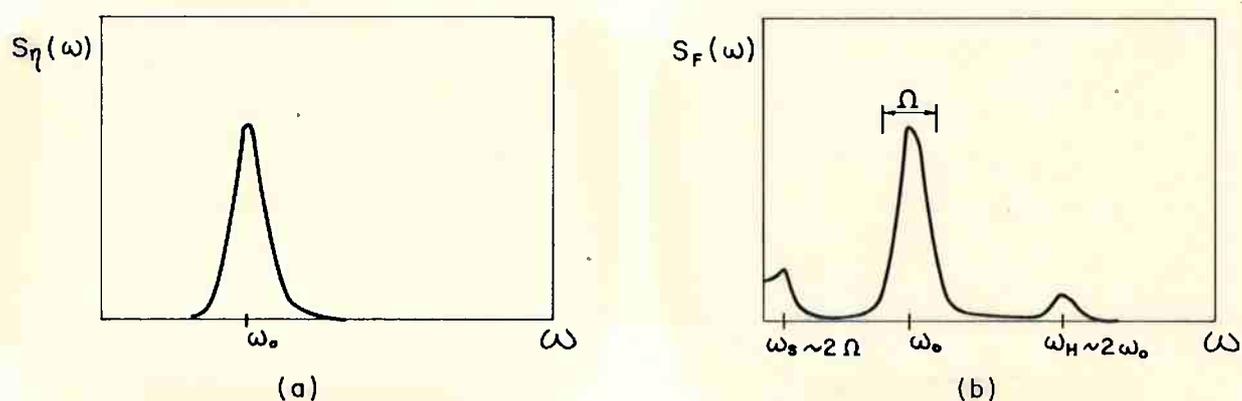


Fig. 2.3 - Espectros de potência

(a) - onda;

(b) - força

Caso o sistema corpo-amarras tenha frequência natural ω_u próxima a 2Ω ocorrerá ressonância, resultando então as grandes amplitudes de movimentos e forças nas linhas de amarração observadas em baixa frequência.

Cabe observar que, em geral, despreza-se a contribuição do potencial de segunda-ordem no cálculo das forças em baixa frequência, sob o argumento de que tal termo é desprezível, quando comparado à contribuição dos termos quadráticos do potencial de primeira ordem. É fato que, em águas infinitamente profundas, a difração não-linear é desprezível. No entanto, o efeito de não-linearidade se torna mais importante à medida que a profundidade diminui. Faz-se necessário então estudar ambos os termos em questão, e sua importância relativa em função da profundidade.

Para melhor clareza de entendimento apresenta-se a idealização do fenômeno de oscilação lenta na forma de um diagrama em blocos, na figura 2.4.

Note-se que neste diagrama se acrescentou a ação das forças dissipativas de natureza viscosa no modelo até então idealizado.

Tais forças se associam à perda de energia por efeitos viscosos devido ao movimento do corpo. São empregados modelos semi-empíricos para a quantificação destes efeitos, caracterizados por dois parâmetros adimensionais: os números de Reynolds e o de Keulegan-Carpenter. A inclusão de tais modelos é descrita no

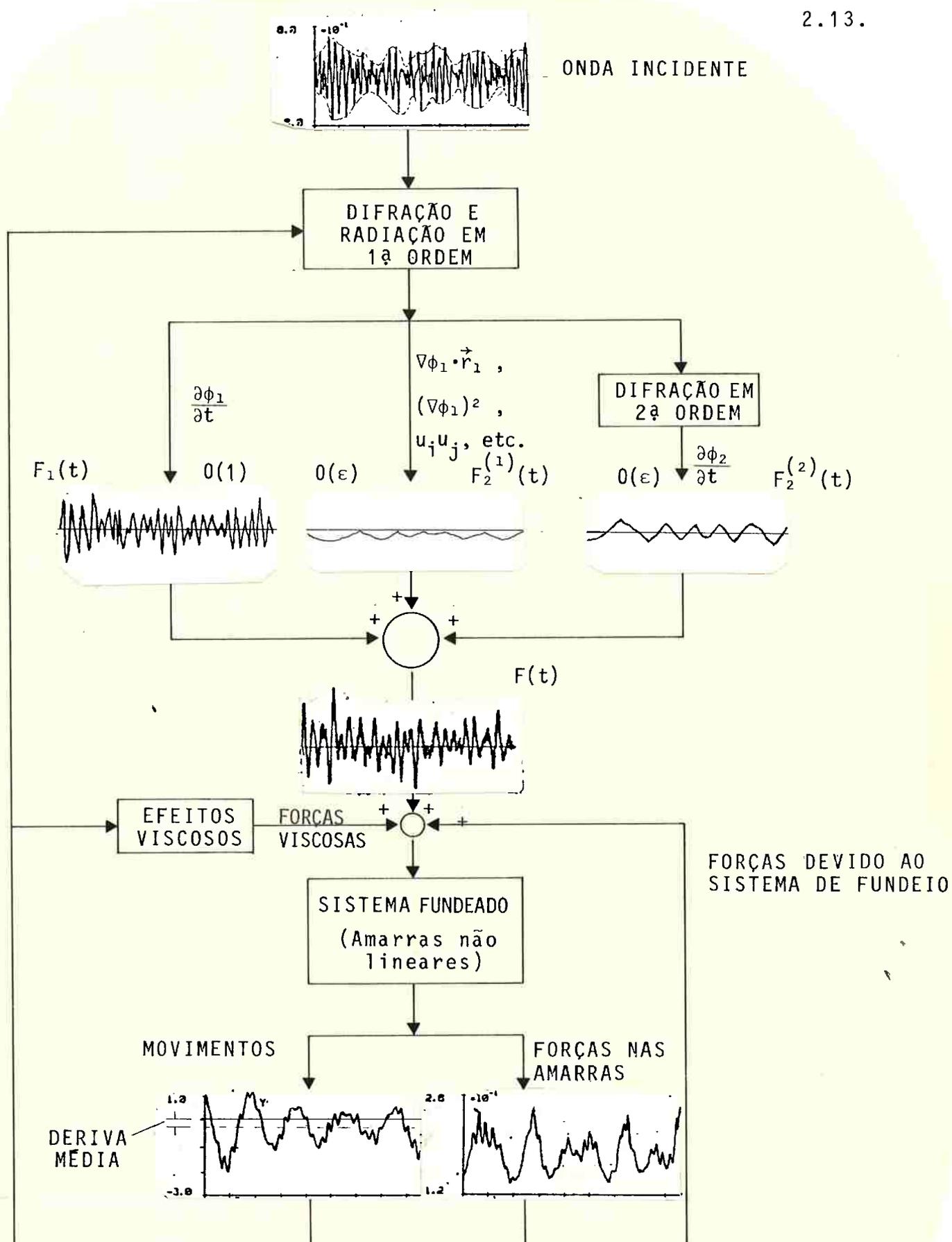


Fig. 2.4. - O fenômeno de Oscilação lenta de corpos fundeados sujeito à ação de ondas aleatórias

Deve-se porém a Maruo , em 1960 [37], a publicação de um trabalho considerado fundamental no estudo e determinação das forças de deriva. Em seu célebre artigo, Maruo propiciou o entendimento da origem da força média de deriva em ondas monocromáticas, estabelecendo a relação entre a reflexão do trem de onda e as diferenças de fase entre as forças excitantes e as oscilações do corpo em primeira-ordem. Através do balanço da quantidade de movimento realizado em uma superfície de controle infinita, contendo um corpo cilíndrico flutuante, Maruo demonstra que a força média de deriva pode ser calculada, no caso bidimensional, por uma simples fórmula. Tal fórmula é função quadrática da amplitude da onda refletida:

$$D = \frac{1}{2} \rho g |R|^2 A_I^2 \quad (2.19)$$

onde

$|R| = \frac{A_R}{A_I}$ é o módulo do coeficiente de reflexão

A_R - amplitude da onda refletida

A_I - amplitude da onda incidente

O problema de determinação da força média de deriva ficou praticamente esquecido até o final da década de 60 quando, a partir do crescimento das atividades de prospecção de petróleo na plataforma continental, surgiu a necessidade do fundeio de embarcações armazenadoras em mar aberto. Evidenciou-se então a importância do fenômeno de oscilação lenta das embarcações fundeadas e com ele a necessidade do estudo das forças de deriva.

Em 1970, Hsu & Blenkarn [21] publicaram um artigo em que estabeleciam um modelo de simulação do comportamento de uma embarcação fundeada.

O método, de caráter semi-empírico, aproximava o trem de ondas aleatórias por uma sucessão infinita de semi-períodos de ondas harmônicas, caracterizados por amplitudes e frequências definidas, e associava a cada semi-período uma força de deriva calculada com base nos resultados alcançados por Maruo. A aproximação então feita, embora um tanto heurística, descrevia, do ponto de vista prático a essência do fenômeno físico ocorrente, a demodulação quadrática da amplitude do trens de ondas. Ressaltava também o caráter modulador dos grupos de onda presentes no mar real.

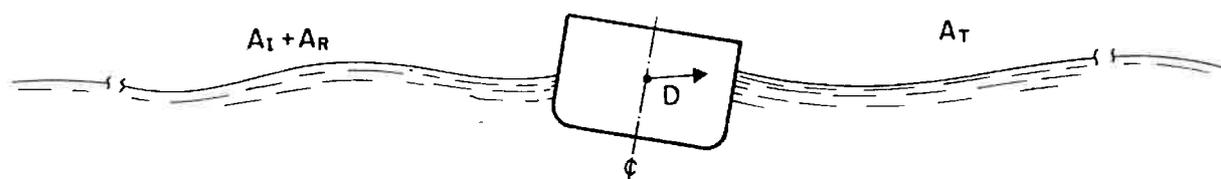


Fig. 2.6. - Força média de deriva segundo Maruo

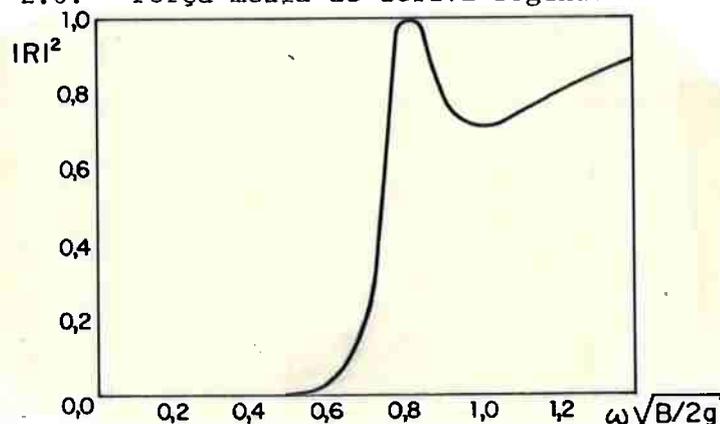


Fig. 2.7. Coeficiente de reflexão. Curva típica. Cilindro Retangular segundo Maruo.

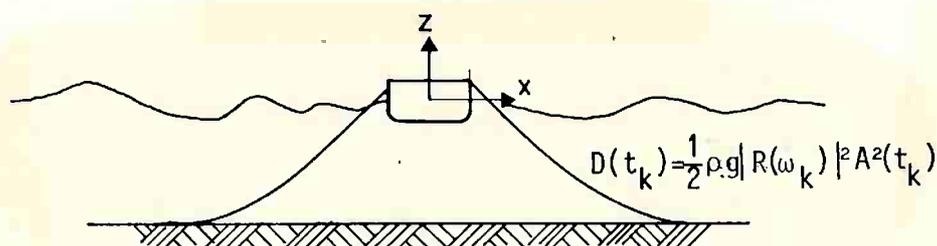
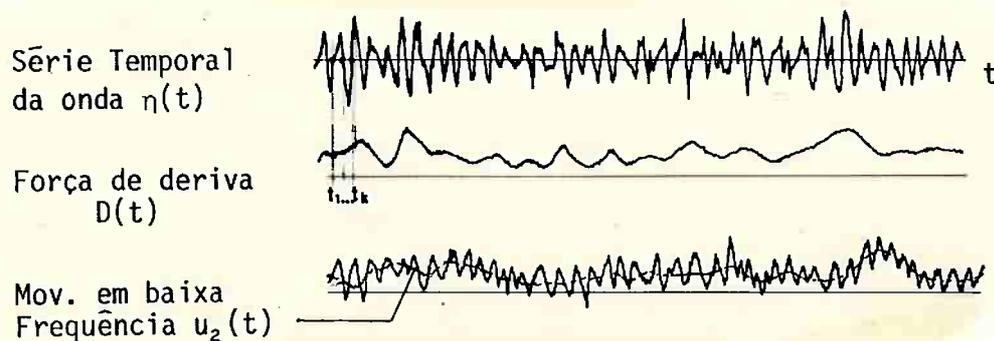


Fig. 2.8. - Modelo heurístico segundo Hsu & Blenkarn

Muitos outros estudos se seguiram. Destacam-se o de Remery & Hermans (1971) [53], que, também baseados nos estudos de Maruo propuseram um modelo de simulação no domínio do tempo em ondas irregulares a partir da identificação dos grupos de ondas regulares como um fenômeno de modulação em amplitude.

Paralelamente, o estudo teórico-analítico do problema vinha se desenvolvendo. Potash em 1971 [52] estabeleceu o equacionamento do problema potencial, correto até aproximação de segunda-ordem, associado ao movimento harmônico de corpos cilíndricos em águas de profundidade infinita. Sua preocupação residia porém no estudo do sistema em alta frequência (2ω).

Newman (1967,74) [42], [43], já se dedicava ao estudo teórico das forças de deriva e em 1974 abordou o tema em questão introduzindo no problema o conceito de funções de transferência quadráticas. Tais funções estabelecem a relação não-linear entre componentes harmônicas do espectro de onda e as forças de deriva. Tomando um trem de ondas aleatórios não perturbado, Newman determina o campo de pressão em segunda-ordem, considerando não somente o termo quadrático do potencial de primeira ordem mas também o termo dependente do potencial em segunda ordem. O potencial de segunda-ordem é determinado pela equação de Laplace a condições de contorno não-homogêneas na superfície livre, funções quadráticas do potencial em primeira-ordem. A partir dos termos de segunda-ordem da equação de Bernoulli resulta:

$$p_2(x,z,t) = \rho R_e \sum_m^N \sum_n^N \{a_m a_n^* p_{mn}(z) \exp[i(\omega_m - \omega_n)t - i(k_m - k_n)x]\} \quad (2.20)$$

com

$$p_{mn}(z) = \frac{1}{2} (\omega_m - \omega_n) \max\left(\frac{-\omega_m}{\omega_n}\right) e^{|k_m - k_n|z} - \frac{1}{2} \omega_m \omega_n e^{(k_m + k_n)z}$$

$p_{mn}(z)$ é definida como função de transferência quadrática de pressão e relaciona $p_2(x,z,t)$ às componentes harmônicas, de frequência ω_m e ω_n e amplitudes complexas a_m e a_n .

Em tal caso simplificado, em que a solução de segunda-ordem é conhecida, é viável o cálculo extado da matriz p_{mn} . No entanto, casos mais genéricos, com a presença de um corpo difrator, requerem a solução de $N(N/2+1)$ problemas em segunda ordem, após a determinação dos correspondentes problemas em primeira-or

dem. Newman sugere então aproximar-se assintoticamente o problema, sob a hipótese de pequena largura de banda espectral da onda incidente. Assim, a função de transferência quadrática de força em baixa frequência $T_{mn} = L(p_{mn})$ se resume aos termos da diagonal principal da matriz, o que equivale a resolver N problemas de ondas monocromáticas. A força de deriva seria dada por:

$$D(t) = \sum_m^N \sum_n^N a_m a_n^* [T_{mm} e^{i(\omega_m - \omega_n)t} + O(\omega_m - \omega_n)] \quad (2.21)$$

Tal aproximação, no entanto, acaba por desconsiderar a contribuição do potencial em segunda-ordem. Mostra-se no capítulo 5 do presente trabalho que a contribuição do potencial de segunda-ordem se evidencia nos termos fora da diagonal principal. Mostra-se também que o método assintótico então proposto pode ser visto como uma aproximação complementar ao método de Newman, permitindo incorporar o efeito do potencial de segunda-ordem.

Seguindo o conceito de funções de transferência quadrática outros autores procuraram estabelecer os efeitos do potencial de segunda-ordem. Pinkster (1979) [51], adota a hipótese de que a principal contribuição do potencial de segunda-ordem se deve ao potencial da onda incidente não perturbada, equivalentemente ao exemplo simplificado apresentado por Newman. São portanto desconsiderados os efeitos de segunda ordem do movimento do corpo, e a difração em segunda-ordem. Os resultados alcançados sob tais hipóteses se comparados com os cálculos exatos efetuados por Faltinsen (1980) [16], para o caso de cilindros

flutuantes em águas de profundidade infinita, mostram que os erros na função de transferência quadrática são pronunciados para grandes espaçamentos de frequência entre componentes harmônicas.

Faltinsen & Loken (1980) [16] apresentam ainda uma comparação entre a aproximação sugerida por Newman e o cálculo exato da força de deriva para corpos cilíndricos flutuantes em ã-guas infinitamente profundas, sob a ação de ondas aleatórias unidireccionais. Concluem que a aproximação de Newman é bastante boa em termos de aplicações práticas e sugerem que, em águas infinitamente profundas, o efeito do potencial de segunda-ordem é desprezível.

Outros autores como Kim & Dalzell (1981) [32], Salvensen (1974) [56], Miksad & Powers (1981) [38], podem ser citados no estudo do presente problema. O conceito de funções de transferência quadrática e seu cálculo em ondas duais monocromáticas, com posterior aplicação à ação de ondas aleatórias, constitui-se como ponto comum dos diversos trabalhos. Diferem, no entanto, os métodos numéricos empregados.

O método proposto no presente trabalho procura utilizar as vantagens decorrentes do método de integração das pressões de Maruo, também conhecido como "de campo-distante", estendido ao caso de ondas aleatórias, introduzindo ainda um procedimento de cálculo da contribuição do potencial de segunda-ordem, em águas de profundidade constante. Para tanto, baseado na hipótese de que a onda incidente seja caracterizada por um respectro de banda estreita, o método utiliza o conceito de modula-

ção (em amplitude e fase) de uma onda monocromática, como uma aproximação assintótica do potencial de onda incidente. Adicionalmente, a aplicação de uma extensão das relações de Haskind ao potencial de segunda-ordem permite determinar sua contribuição às forças de deriva sem que seja necessário efetivamente calculá-lo. Basta portanto a determinação da solução em primeira-ordem em ondas monocromáticas, tarefa também essencial aos métodos "exatos".⁽¹⁾

A título de melhor situar o leitor, adianta-se a expressão da força de deriva em ondas aleatórias desenvolvida no presente trabalho, e apresentada posteriormente no capítulo 5 (5.14):

$$\bar{D}(t) = \varepsilon \left\{ Q_2^{(1)}(\omega_0, h) + \frac{Q_2^{(2)}}{\omega_0}(\omega_0, h) \frac{d}{dt} \right\} |f_0(t)|^2 \quad (2.22)$$

onde

ε - parâmetro pequeno

$Q_2^{(1)}$ - coeficiente de força média de deriva em ondas monocromáticas de frequência ω_0 , associado ao potencial e movimentos em 1ª ordem

ω_0 - frequência central do espectro de onda

h - profundidade

$Q_2^{(2)}$ - coeficiente de força de deriva em ondas aleatórias devido ao potencial de segunda-ordem

$f_0(t)$ - função de modulação da onda incidente

(1) - "exatos": dentro da teoria potencial de ondas de pequena amplitude

É importante ressaltar a simplicidade da expressão (2.22) quando comparada a (2.20), onde os coeficientes p_{mn} devem ser integrados ao longo do corpo, com base em (2.17), para fornecer a matriz de transferência quadrática de força em ondas aleatórias T_{mn} .

Na expressão (2.22) a função de modulação $f_0(t)$ associada à onda aleatória incidente é facilmente calculável (ver capítulo 5 e anexo VIII). O coeficiente $Q_2^{(1)}(\omega_0, h)$ resulta diretamente da solução do problema linear, em ondas monocromáticas de frequência ω_0 , em lâmina d'água de profundidade h . O coeficiente $Q_2^{(2)}(\omega_0, h)$, por sua vez, é prontamente calculado a partir desta mesma solução.

3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE DIFRAÇÃO NÃO LINEAR DAS ONDAS DE SUPERFÍCIE

É comum no estudo das ondas de superfície de pequena amplitude linearizar-se a formulação do problema hidrodinâmico. Vimos nos capítulos anteriores, no entanto, que as forças de deriva causadas por ondas de superfície agindo sobre corpos flutuantes têm natureza não linear e que o fenômeno de oscilação lenta do corpo então decorrente pode ser equacionado sob aproximações de segunda-ordem. O presente capítulo tem por objetivo equacionar de forma correta até segunda ordem o problema hidrodinâmico da perturbação (difração e radiação) das ondas de superfície por um corpo flutuante nelas presente.

O equacionamento será inicialmente desenvolvido para um caso genérico de perturbação tridimensional, e depois restrito ao caso bidimensional, ou seja corpos cilíndricos infinitamente longos.

No que segue o fluido é considerado incompressível, invíscido e irrotacional, permitindo estas duas últimas hipóteses descrever o escoamento pela teoria potencial. Os efeitos da viscosidade, relevantes sobretudo em regimes ressonantes, serão analisados posteriormente, nos capítulos 4, 8 e com algum detalhe no anexo IX.

É interessante ainda introduzir-se o conceito de "ondas de pequena amplitude". Para tanto um parâmetro adimensional pequeno ϵ , que relaciona a amplitude de onda A com uma di-

mensão linear característica do fenômeno ondulatório, deve ser definido. Em águas de profundidade infinita tal dimensão é o comprimento da onda λ . Em águas rasas, por outro lado, a dimensão linear de maior relevância é a profundidade h . Desta forma define-se:

. em águas profundas:

$$\epsilon = \epsilon_p = kA \quad (3.1.a)$$

. em águas rasas:

$$\epsilon_r = \frac{A}{h} \quad (3.1.b)$$

onde

$k = 2\pi/\lambda$: é o número de onda

Visto que "águas profundas" significa ter-se $k.h \gg 1$ e "águas rasas" $k.h \ll 1$ uma expressão uniforme para o parâmetro pequeno é dada por

$$\epsilon = \frac{kA}{\tanh kh} \quad (3.2)$$

A expressão "correta até n-ésima ordem em ϵ " significa erros da forma

$$(1 + O(\epsilon^n))$$

3.1. Equações de Campo e Condições de Contorno

Considere-se inicialmente o problema geral da perturbação das ondas de superfície incidindo sobre um corpo flutuante. Adota-se um sistema cartesiano de coordenadas $(0, r_1, r_2, r_3)$ fixo, conforme representado na figura 3.1, com origem na superfície livre e o eixo r_3 vertical apontado para cima. O domínio flui-

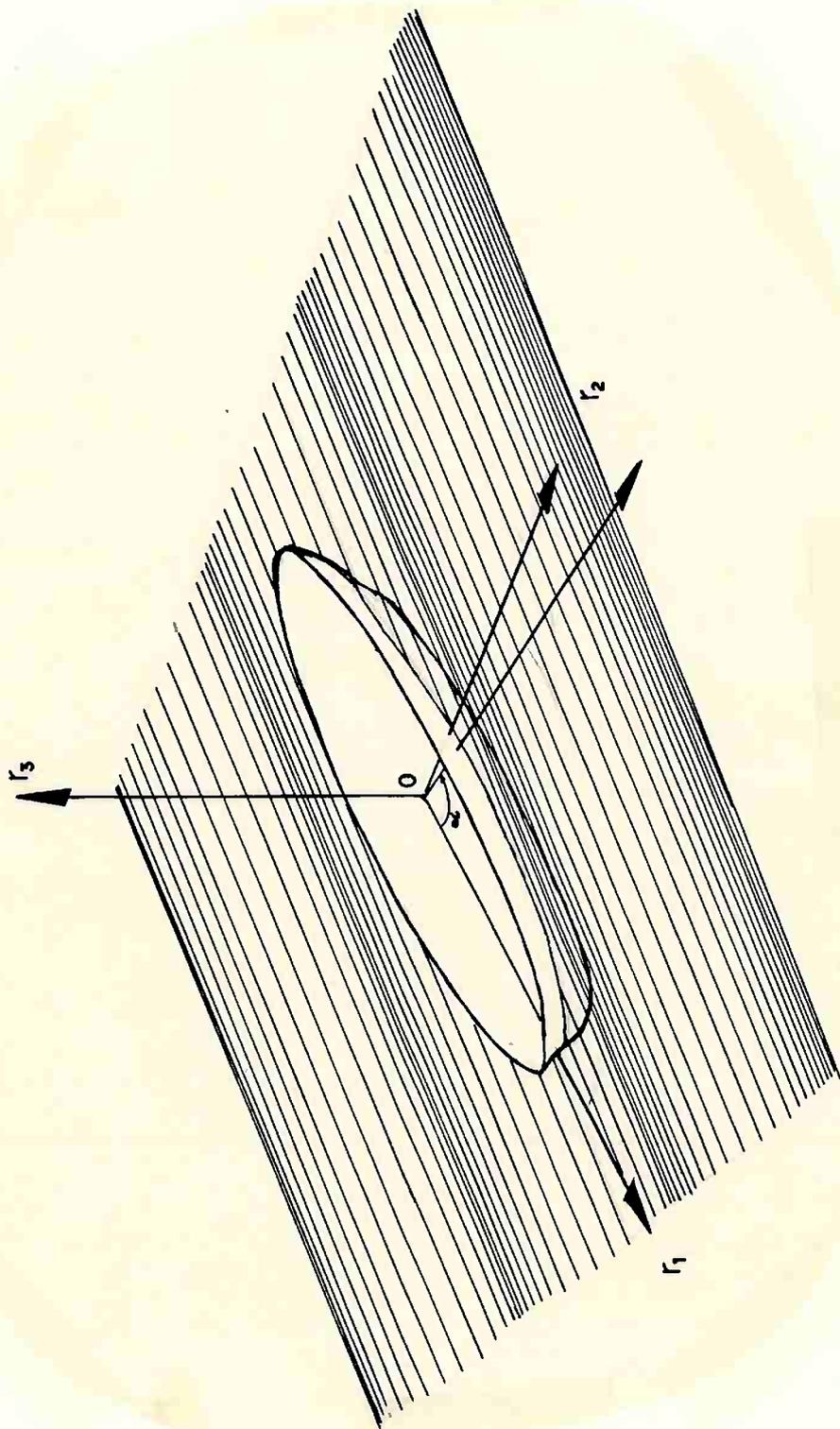


Fig. 3.1. - Sistema de referências Caso tridimensional

do é considerado infinito e o corpo é posicionado, quando em equilíbrio em águas tranquilas, em torno da origem 0 do sistema $(0, r_1, r_2, r_3)$.

Sob hipótese de fluido ideal o campo de velocidades resultante é expresso pelo gradiente de uma função potencial de velocidades $\Phi(r_1, r_2, r_3, t)$. A equação da continuidade aplicada a esse campo de velocidades leva à equação de Laplace:

$$\nabla^2 \Phi(r_1, r_2, r_3, t) = 0 \quad (3.3)$$

A equação (3.3) deve ser resolvida sob condições de contorno particulares, que no presente caso se restringem à superfície livre, à superfície do corpo, ao fundo e a condições de radiação no infinito.

A condição de radiação deve estabelecer a finitude da função $\Phi(r_1, r_2, r_3, t)$ e será analisada posteriormente.

Nos demais contornos, superfícies do corpo, do fundo e superfície livre, tais condições equivalem a compatibilizar o fluxo nestas superfícies, permitindo no entanto que haja velocidade tangencial relativa. Na superfície do fundo tais condições são facilmente formuladas. Já nas superfícies do corpo e na superfície livre as condições de contorno exigem maior elaboração em vista do prévio desconhecimento das funções que as caracterizam no tempo e espaço.

Diante da hipótese de ondas de pequena amplitude e pequenos deslocamentos do corpo a função potencial solução de (3.3)

é usualmente representada na forma de uma expansão em série de potências, no parâmetro pequeno, (Wehausen & Leitone), [68], série esta que converge para a solução exata quando ϵ tende a zero (ver Anexo I).

A cada potência n de ϵ corresponde uma solução particular de (3.3) com condições de contorno estabelecidas a partir das soluções de ordem inferior. O procedimento acima é usualmente conhecido como Método das Aproximações Sucessivas (Van Dyke) [64] ou Método das Aproximações Assintóticas, e será aqui utilizado.

3.1.2. Condições de Contorno na Superfície Livre

A condição cinemática impõe a continuidade do fluxo junto à superfície linear de contorno. Ou seja as velocidades normais do fluido e da superfície devem ser iguais. Então, sendo $\eta = \eta(r_1, r_2, t)$ a função que define a elevação da superfície teremos:

$$\left. \frac{D}{Dt} (r_3 - \eta) \right|_{r_3 = \eta(r_1, r_2, t)} = 0 \quad (3.4)$$

ou ainda:

$$\left. \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla \right) (r_3 - \eta) \right|_{r_3 = \eta} = 0 \quad (3.4.a)$$

onde $\frac{D}{Dt}$ indica derivada total ou substancial.

A condição dinâmica na superfície livre impõe a igualdade de pressões entre os dois meios, ar e água. Ou seja a pressão junto à superfície se iguala à pressão atmosférica. Tal con

dição pode ser traduzida através da equação de Bernoulli assumindo invariância da pressão atmosférica, p_a , e desprezando-se os efeitos de tensão superficial:

$$-\frac{1}{\rho}(p-p_a) = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi + gr_3 \Big|_{r_3=\eta(r_1, r_2, t)} = 0 \quad (3.5)$$

ou ainda

$$\eta = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi \right) \Big|_{r_3=\eta(r_1, r_2, t)} \quad (3.5.a)$$

A substituição de (3.5.a) em (3.4.a) leva à condição geral "exata" na superfície livre (3.6):

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla\phi \cdot \nabla \right) \left(gr_3 + \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla\phi \right) \Big|_{r_3=\eta(r_1, r_2, t)} = 0$$

ou

$$g \frac{\partial\phi}{\partial r_3} + \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + 2\nabla\phi \cdot \nabla \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\phi \cdot \nabla(\nabla\phi \cdot \nabla\phi) \Big|_{r_3=\eta(r_1, r_2, t)} = 0 \quad (3.6)$$

3.1.3. Condições de Contorno na Superfície de um Corpo Rígido

Tanto as condições de contorno na superfície de um corpo rígido, como na do fundo podem ser estabelecidas através da compatibilização do fluxo potencial nessas superfícies, assumindo as impermeáveis. Seja $F(r_1, r_2, r_3, t) = 0$ a equação definidora da superfície do corpo. $F(r_1, r_2, r_3, t)$ é escolhida de tal forma que $\nabla F(r_1, r_2, r_3) = \vec{n}$ para todo t , sendo \vec{n} o versor normal à superfície do corpo apontado para seu exterior. A condição cinemática junto a esta superfície estabelece que (Wehausen, pg.649)

$$\frac{D}{Dt} (F(r_1, r_2, r_3, t)) = 0 \quad (3.7)^{(1)}$$

Esta é a única condição a ser imposta, visto que o fluido é invíscido, e a condição acima iguala a componente normal de velocidade do fluido em um dado ponto da superfície à componente da velocidade do mesmo ponto na direção de sua normal. Ou seja:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla F \right|_{(r_1, r_2, r_3) \in F(r_1, r_2, r_3, t)} = 0 \quad (3.7.a)$$

ou ainda

$$\left. \nabla \phi \cdot \vec{n}(r_1, r_2, r_3, t) \right|_{(r_1, r_2, r_3) \in F} = - \left. \frac{\partial F}{\partial t}(r_1, r_2, r_3, t) \right|_{(r_1, r_2, r_3) \in F} \quad (3.7.b)$$

No caso da condição de contorno no fundo teremos:

$$\left. \nabla \phi \cdot \vec{n}(r_1, r_2, r_3) \right|_{(r_1, r_2, r_3) \in F(r_1, r_2, r_3)} = 0 \quad (3.8)$$

Veremos adiante como aproximar a expressão (3.7.b) de forma correta até segunda ordem, com o que os efeitos não lineares devido aos movimentos do corpo no meio fluido serão descritos no equacionamento do problema.

(1) - Tal condição é geral e foi aplicada implicitamente na expressão (3.4)

3.2. Equacionamento do Problema Bidimensional Correto até Segunda-Ordem

Restringir-nos-emos, agora, ao caso bidimensional. Tomaremos o sistema de referências representado na figura 3.2, com $ox \equiv or_2$ e $oz \equiv or_3$

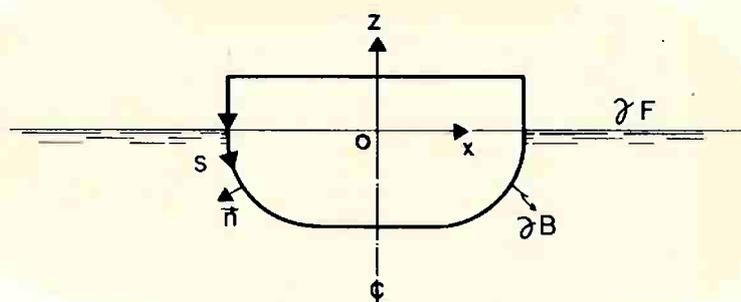


Fig. 3.2. - Sistema de referências caso bidimensional

Com auxílio das deduções apresentadas nos anexos I e II e com erro da ordem $[1+o(\varepsilon^2)]$, o potencial $\phi(x,z,t)$ deve satisfazer a seguinte equação diferencial e respectivas condições de contorno (ver expressões I.5 e II.22).

$$\cdot \nabla^2 \phi = 0$$

$$\cdot \left. \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} = - \frac{1}{g} \left[2\nabla \phi \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \right] \Big|_{z=0}$$

$$\cdot \left. \nabla \phi \cdot \vec{n} \right|_{\partial H} = 0 \quad ; \text{ no fundo}$$

$$\cdot \left. \nabla \phi \cdot \vec{n} \right|_{\partial B} = \left\{ \left(\frac{du}{dt} - z \frac{d\theta}{dt} \right) n_x + \left(\frac{dw}{dt} + x \frac{d\theta}{dt} \right) n_z + \frac{d}{dt} \left[[\theta(t)(w(t) + x \cdot \theta(t) - \frac{1}{2} \theta^2(t))] n_x - \right. \right.$$

$$\left. - [\theta(t)(u(t) - z \cdot \theta(t) + \frac{1}{2} \theta^2(t))] n_z \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s} \left\{ [(u(t) - z \theta(t)) n_x + (w(t) + x \theta(t)) n_z] \frac{\partial \phi}{\partial s} \right\} \Big|_{\partial B} \quad ; \text{ na su}$$

perfície do corpo

(3.9)

além de uma condição de radiação a ser especificada posteriormente. Tal condição necessariamente incluirá a onda incidente.

Nas expressões (3.9) acima (ver fig. 3.2)

∂B : indica contorno do corpo

s : coordenada ao longo do contorno do corpo

u, w, θ : movimento segundo três graus de liberdade, "sway", "heave" e "roll" respectivamente.

É importante notar que até o presente momento não se impôs qualquer restrição quanto à natureza da solução, constituindo-se (3.9) em formulação geral do problema bidimensional com erro da ordem $[1+o(\epsilon^2)]$.

3.3 Aplicação do Método das Expansões Assintóticas

O método das expansões assintóticas aplicado ao presente problema se enquadra em um procedimento geral de aproximação de equações e condições de contorno não lineares por uma série de expressões lineares. A solução exata é assumida como uma série de potências em um parâmetro adimensional pequeno que descreve o problema do ponto de vista físico. Esta série deve convergir para a solução exata quando tal parâmetro tende a zero. No presente problema o parâmetro ϵ definido em (3.1) permite escrever-se a solução $\Phi(r_1, r_2, r_3, t)$ como (Wehausen, pg. 464).

$$\Phi(r_1, r_2, r_3, t) = \Phi_0 + \epsilon \Phi_1(r_1, r_2, r_3, t) + \epsilon^2 \Phi_2(r_1, r_2, r_3, t) + \dots \quad (3.9.1)$$

Analogamente a elevação $\eta(x,y,t)$ é escrita:

$$\eta(r_1, r_2, t) = \eta_0 + \eta_1(r_1, r_2, t) + \epsilon \eta_2(r_1, r_2, t) + \dots \quad (3.9.1)$$

O par $\Phi_0(r_1, r_2, r_3, t)$, $\eta_0(r_1, r_2, r_3, t)$ corresponde à solução particular do fluido em repouso:

$$\begin{aligned} \Phi_0(r_1, r_2, r_3, t) &= C_\phi \\ \eta_0(r_1, r_2, t) &= C_\eta \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade assumimos $C_\phi = 0$. A definição do sistema de coordenadas faz $C_\eta = 0$. Assume-se também que $F(r_1, r_2, r_3, t)$ possa ser expandido em série de potências em ϵ :

$$F(r_1, r_2, r_3, t) = F_0(r_1, r_2, r_3) + \epsilon F_1(r_1, r_2, r_3, t) + \epsilon^2 F_2(r_1, r_2, r_3, t) + \dots \quad (3.9.2)$$

onde $F_0(r_1, r_2, r_3) = 0$ define a superfície do corpo flutuando em equilíbrio no fluido em repouso. Assim, as demais variáveis do problema, velocidade \vec{v} , movimento do corpo u_j , pressão p , etc., também são representadas como séries em ϵ :

$$\begin{aligned} \vec{v}(r_1, r_2, r_3, t) &= \vec{v}_1 + \epsilon \vec{v}_2 + \dots \\ u_j(t) &= u_{j1} + \epsilon u_{j2} + \dots \\ p(r_1, r_2, r_3, t) &= p_1 + \epsilon p_2 + \dots \end{aligned} \quad (3.9.3)$$

onde foram tomados, sem perda de generalidade,

$$v_0 = 0 \quad \text{e} \quad u_{j0} = p_0(r_1, r_2, 0) = 0$$

A solução geral é conseguida determinando-se cada função Φ_k , solução da equação geral de campo:

$$\nabla^2 \phi_k = 0$$

com condições de contorno explicitadas em função da solução de ordem imediatamente inferior.

3.3.1. Aproximação Linear do Problema Bidimensional

Na primeira aproximação ou aproximação linear das expressões (3.6) e (3.7.b) a equação (3.9) se reduz a (ver anexos I e II; expressões I.10 e II.23)

$$\begin{aligned} \cdot \quad \nabla^2 \phi_1 &= 0 \\ \cdot \quad \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \Big|_{z=0} &= 0 \quad (3.10) \\ \cdot \quad \nabla \phi_1 \cdot \vec{n} \Big|_{\partial B_0} &= \left(\frac{du_1}{dt} - z \frac{d\theta_1}{dt} \right) n_x + \left(\frac{dw_1}{dt} + x \frac{d\theta_1}{dt} \right) n_z \end{aligned}$$

onde foram desprezados termos de ordem superior a ϵ , e onde o subscrito (1) indica tratar-se de aproximação em primeira ordem.

3.3.2. Aproximação de Segunda ordem

A segunda aproximação estabelece o potencial de segunda ordem como solução da seguinte equação e condições de contorno (ver expressões I.11 e II.24)

$$\begin{aligned} \cdot \quad \nabla^2 \phi_2 &= 0 \quad (3.11) \\ \cdot \quad \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -[2\nabla \phi_1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) \right)] \Big|_{z=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \quad \left. \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n} \right|_{\partial H} = 0 \\
 & \cdot \quad \left. \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n} \right|_{\partial B} = \left(\frac{du_2}{dt} - z \frac{d\theta_2}{dt} \right) n_x + \left(\frac{dw_2}{dt} + x \frac{d\theta_2}{dt} \right) n_z \\
 & + \frac{d}{dt} \left\{ [\theta_1(t)(w_1(t) + x\theta_1(t)) - \frac{1}{2}\theta_1^2(t)x] n_x - [\theta_1(t)(u_1(t) - z\theta_1(t)) + \frac{1}{2}\theta_1^2(t)z] n_z \right\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial s} \left[(u_1(t) - z\theta_1(t)) n_x + (w_1(t) + x\theta_1(t)) n_z \right] \frac{\partial \Phi_1}{\partial s}
 \end{aligned}$$

Note-se que o potencial e os movimentos resultantes da solução do problema linear excitam o potencial Φ_2 através das condições de contorno quadráticas nas superfícies livre e no corpo. Caso Φ_1 e portanto os movimentos em primeira ordem forem harmônicos de frequência ω , o potencial Φ_2 compor-se-á de um termo constante, Φ_{20} , e um termo pulsante em 2ω , Φ_{22} :

$$\Phi_2(x, z, t) = \Phi_{20}(x, z) + \Phi_{22}(x, z, t)$$

Visto que se objetiva estudar o fenômeno de oscilações lentas de corpos fundeados, apenas Φ_{20} será de interesse nos capítulos futuros.

O Capítulo 6 desenvolverá o equacionamento de Φ_{20} oportunidade em que será introduzida a condição de radiação a ser imposta.

4. FORÇA MÉDIA DE DERIVA EM ONDAS MONOCROMÁTICAS

O PROBLEMA BIDIMENSIONAL EM ÁGUAS DE PROFUNDIDADE FINITA

Como visto no Capítulo 2, o cálculo das forças de deriva em ondas aleatórias requer a solução do problema linearizado:

O método "exato" consiste em construir a função de transferência quadrática das forças de segunda ordem a partir da combinação bilinear das soluções dos problemas de perturbação associados aos diversos pares de componentes harmônicas do espectro da onda. Em particular os termos dispostos na diagonal principal caracterizam a força média de deriva em ondas monocromáticas (ver Newman (1974)[43]). A determinação de cada termo da matriz é feita através da integração da pressão ao longo da superfície do corpo, tomando-se na expressão (2.11) a combinação bilinear correspondentes aos pares de componentes harmônicas. Tal método é conhecido como "integração de campo próximo", utilizado por Faltsen,[16], Pinkster,[51], Dalzell[32] e outros e permite estudar-se separadamente as contribuições dos diversos termos da expressão (2.11) nas forças de deriva.

Na aproximação sugerida por Newmann [43] o cálculo da força de deriva em ondas aleatórias reduz-se, no entanto, ao cômputo dos termos na diagonal principal, ou seja ao coeficiente de força média de deriva em ondas monocromáticas. Embora de evidente vantagem em termos de processamento, perde-se em tal aproximação, as contribuições bilineares dos potenciais harmônicos em primeira ordem e a contribuição do potencial de segunda ordem.

Por outro lado, sob hipótese de pequena largura de banda espectral, é possível determinar-se as forças de deriva em ondas aleatórias a partir do conceito de modulação em amplitude de uma onda monocromática. Tal procedimento será visto com detalhe no Capítulo 5. Caracterizam-se então os potenciais em primeira e segunda ordem através de uma aproximação assintótica da solução na frequência central do espectro ω_0 , aproximação esta construída a partir da representação modulada do trem de ondas.

Basta, portanto, o cálculo da força média de deriva em onda monocromática de frequência ω_0 .

Neste contexto, o método de Maruo, para determinação da força média de deriva em ondas monocromáticas, traz a vantagem de descrever o fenômeno através de uma simples relação, função quadrática da amplitude da onda refletida. Para o caso bidimensional, em águas de profundidade infinita, tem-se (Maruo(1960) [37]):

$$D_M(\omega) = \frac{1}{2} \rho g |R(\omega)|^2 A_I^2 \quad (4.1)$$

onde

D_M : força média de deriva em ondas monocromáticas, profundidade infinita e na ausência de efeitos viscosos

$R(\omega)$: é o coeficiente de reflexão

A_I : é a amplitude de onda incidente

Conforme exposto no Capítulo 2, Maruo aplica o princípio da conservação de quantidade de movimento a um volume de controle com fronteiras no infinito. A integração da

pressão é feita em tais fronteiras o que justifica a designação de "integração em campo distante". Ao contrário do método direto, e em que pese a simplicidade da expressão (4.1), o método de Maruo não deixa explícitas as diversas contribuições à força de segunda ordem. No entanto, a forma sintética justifica sua adoção.

No que segue, desenvolveremos o cálculo do coeficiente de força média de deriva em ondas monocromáticas, agindo sobre um corpo cilíndrico flutuante, estendendo o método de Maruo para o caso de profundidade arbitrária.

4.1. Dedução da Força Média de Deriva em Ondas Monocromáticas

Consideramos para o presente desenvolvimento o volume de controle esquematizado na figura 4.1., com fronteiras na superfície livre, no fundo e no infinito.

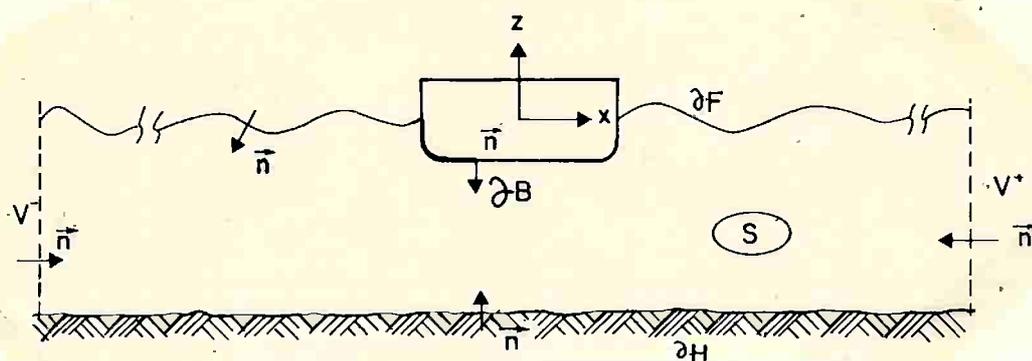


Fig. 4.1. Volume de Controle

O cálculo das forças de deriva será desenvolvido com base no Teorema da Conservação da Quantidade de Movimento aplicado ao volume (ou superfície) de controle. O fluido é assumido

incompressível, e seu campo de velocidades e de pressão regido por:

Equação de Navier-Stokes

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u. \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(p + \frac{\rho g z^2}{2} \right) + \nu \nabla^2 w$$

ou

$$\rho \frac{D}{Dt}(\vec{V}) = - \nabla \left(p + \frac{\rho g}{2} z^2 \right) + \nu \nabla^2 \vec{V}$$

Equação da continuidade

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (4.3)$$

onde apenas as forças gravitacionais foram tomadas como forças de campo.

No presente desenvolvimento serão considerados os efeitos viscosos apenas junto à superfície do corpo de tal sorte que, ao longe, o escoamento será tratado pela teoria potencial. Tal hipótese procura levar em consideração que os efeitos viscosos são desprezíveis no caso da propagação de ondas livres com frequência típica das ondas de gravidade (Wehausen, pg 645). Já, na presença de um corpo no escoamento ondulatório, os efeitos viscosos podem vir a se tornar relevantes em uma região próxima a ele⁽¹⁾.

(1) - Dentro destas hipóteses as condições de contorno na superfície livre e no fundo permanecem inalteradas, sendo porém necessário reestabelecer aquela correspondente à superfície do corpo.

Assumindo-se uma descrição paramétrica para a superfície do corpo dada por $x = X(r,s,t)$ e $z = Z(r,s,t)$ tais condições ficam explicitadas:

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} \quad e \quad w = \frac{\partial z}{\partial t}$$

4.1.1. Integração da Equação de Navier-Stokes no eixo x

A integração da equação de Navier-Stokes, segundo o eixo x (5.4.a), realizada na superfície $S(t)$ de controle fornece:

$$\iint_{S(t)} \rho \frac{u}{t} dS + \rho \iint_{S(t)} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) dS + \iint_{S(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dS - \mu \iint_{S(t)} \nabla^2 u dS = 0 \quad (4.5)$$

integrando-se o segundo termo por partes e aplicando-se em seguida a equação da continuidade vem:

$$\iint_{S(t)} \rho \frac{\partial u}{\partial t} dS + \rho \iint_{S(t)} \left(\frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) \right) dS + \iint_{S(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dS - \mu \iint_{S(t)} \nabla^2 u dS = 0 \quad (4.5.a)$$

Aplicando-se o teorema do divergente aos 2º, 3º e 4º termos, e visto que:

$$\frac{\partial}{\partial x} (u^2) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) = \nabla \cdot u \vec{v} = u \nabla \cdot \vec{v}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} (p) = \nabla \cdot (p \vec{i}) \quad ; \quad \nabla^2 u = \nabla \cdot (\nabla u)$$

temos:

$$\iint_{S(t)} \rho \frac{\partial u}{\partial t} dS - \rho \oint_{\partial S(t)} u \vec{v} \cdot \vec{n} dS - \oint_{\partial S(t)} p n_x d\partial S(t) + \mu \int_{\partial B(t)} \nabla u \cdot \vec{n} d\partial B(t) = 0 \quad (4.5.b)$$

Particionando o contorno $S(t)$ conforme o esquema da fi gura 4.3 tem-se:

$$\begin{aligned}
 \iiint_{S(t)} \rho \frac{\partial u}{\partial t} dS(t) - \rho \int_{\partial F(t)} u(x,z,t) \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial F(t)} d\partial F(t) - \rho \int_{\partial B(t)} u(x,z,t) \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial B(t)} d\partial B(t) = \\
 = \rho \int_{\partial V^-} (u \vec{v} \cdot \vec{n}) d\partial V^- + \rho \int_{\partial H} (u \vec{v} \cdot \vec{n}) d\partial H + \rho \int_{\partial V^+} (u \vec{v} \cdot \vec{n}) d\partial V^+ + \\
 + \int_{\partial V^-} p n_x d\partial V^- + \int_{\partial H} p n_x d\partial H + \int_{\partial V^+} p n_x d\partial V^+ + \\
 + \int_{\partial F} p n_x d\partial F(t) + \int_{\partial B} p n_x d\partial B(t) - \mu \int_{\partial B} \nabla u \cdot \vec{n} d\partial B(t) \quad (4.6)
 \end{aligned}$$

onde o contorno \bar{e} percorrido no sentido anti-horário.

Lembrando ainda que:

$$\begin{aligned}
 \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial V^-} = 1 \quad ; \quad n_x \Big|_{\partial V^-} = 1 \quad ; \quad n_z \Big|_{\partial V^-} = 0 \\
 \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial H} = -1 \quad ; \quad n_x \Big|_{\partial V^+} = -1 \quad ; \quad n_z \Big|_{\partial V^+} = 0 \quad (4.7) \\
 \vec{v} \cdot \vec{n} \Big|_{\partial H} = 0 \quad e \quad p(x,z,t) \Big|_{z=\eta(x,t)} = 0
 \end{aligned}$$

e levando as fronteiras V_{\pm} ao infinito, assumindo ainda que a profundidade em V_{\pm} seja h , tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S(t)} \rho \frac{\partial u}{\partial t} dS(t) - \rho \int_{\partial F(t)} u(x,z,t) \left(\vec{v} \cdot \vec{n} \right) d\partial F(t) - \rho \int_{\partial B(t)} u(x,z,t) \left(\vec{v} \cdot \vec{n} \right) d\partial B(t) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-h}^{\eta(x,t)} (\rho u^2(x,z,t) + p(x,z,t)) dz - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{\eta(x,t)} (\rho u^2(x,z,t) + p(x,z,t)) dz + \\
 & \quad + \int_{\partial B(t)} p(x,z,t) n_x d\partial B(t) - \mu \int_{\partial B(t)} \nabla u \cdot \vec{n} d\partial B(t) \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

A componente da força em x exercida pelo fluido sobre o corpo é dada pelos dois últimos termos de (4.8):

$$F_x(t) = - \int_{\partial B(t)} p(x,z,t) n_x d\partial B(t) + \mu \int_{\partial B(t)} \nabla u \cdot \vec{n} d\partial B(t) \quad (4.9)$$

Em (4.8) se reduz a:

$$\begin{aligned}
 & \iint_{S(t)} \rho \frac{\partial u}{\partial t} dS(t) - \rho \int_{\partial F(t)} u(x,z,t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\partial F(t) - \rho \int_{\partial B(t)} u(x,z,t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) d\partial B(t) = \\
 & = \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-h}^{\eta(x,t)} (\rho u^2(x,z,t) + p(x,z,t)) dz - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{\eta(x,t)} (\rho u^2(x,z,t) + p(x,z,t)) dz - F_x(t) \quad (4.10)
 \end{aligned}$$

onde \vec{v} é a velocidade da fronteira $\partial S(t)$ de $S(t)$ na superfície livre e no corpo. O segundo e terceiro termo de (4.10) estão associados à variação do volume de controle $S(t)$ no tempo, visto que as demais fronteiras são fixas. Assim o primeiro membro de (4.10) é a derivada total em relação ao tempo da componente de velocidade u integrada em todo o volume de controle. Ou seja é a variação da quantidade de movimento segundo o eixo x :

$$\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt}(t) &= \rho \frac{d}{dt} \iiint_{S(t)} u(x,z,t) dS(t) = \\ &= \rho \iint_{S(t)} \frac{\partial}{\partial t} u(x,z,t) dS(t) - \rho \int_{\partial F(t)} u(x,z,t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) |d\partial F(t) - \rho \int_{\partial B(t)} u(x,z,t) (\vec{v} \cdot \vec{n}) |d\partial B(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

A expressão (4.10) se reduz então a:

$$\begin{aligned} \frac{dL_x}{dt}(t) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-h}^{\eta(x,t)} (\rho u^2(x,z,t) + p(x,z,t)) dz - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{\eta(x,t)} (\rho u^2(x,z,t) + p(x,z,t)) dz - \\ &= F_x(t) \end{aligned} \quad (4.10.a)$$

Cumpra notar que as expressões (4.10) levam em consideração as forças de natureza viscosa agentes sobre o corpo.

Não obstante, (4.10) pouca vantagem oferece visto que relaciona $F_x(t)$ a $\frac{dL_x}{dt}(t)$, uma quantidade desconhecida a priori.

Assumindo, no entanto, que o problema em questão esteja associado à propagação de uma onda harmônica de frequência ω , $L_x(t)$ será periódica em $T = 2\pi/\omega$.

Tomando-se a média de (4.10.a) no período T e indicando tal média por

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(t) dt$$

tem-se:

$$\frac{1}{T}(L_x(t+T) - L_x(t)) = \left\langle \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-h}^{\eta(x,t)} (\rho u^2 + p) dz - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{\eta(x,t)} (\rho u^2 + p) dz - F_x(t) \right\rangle \quad (4.13)$$

Dada a periodicidade T de $L_x(t)$ (4.13) se reduz a

$$D(\omega) = \langle F_x(t) \rangle = \left\langle \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-h}^{\eta(x,t)} (\rho u^2 + p) dz - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{\eta(x,t)} (\rho u^2 + p) dz \right\rangle \quad (4.14)$$

A expressão (4.14) efetivamente conduz à determinação da força média de deriva em onda monocromática. Basta o conhecimento do campo de velocidades e pressão longe do corpo.

Lembrando que longe do corpo os efeitos viscosos são considerados desprezíveis tomaremos o potencial de velocidade, solu-

ção do problema de perturbação $\Phi(x, z, t)$, segundo a expansão asintótica (3.9.1)

Assim, correto até segunda ordem; longe do corpo:

$$p(x, z, t) = -\rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \varepsilon \rho \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{\varepsilon}{2} \rho \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} - \rho g z$$

e

$$\rho u^2(x, z, t) + p(x, z, t) = \varepsilon \frac{\rho}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right\} - \rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \rho g z \quad (4.15)$$

Então:

$$\begin{aligned} D(\omega) = & \frac{\varepsilon}{2} \rho \left\langle \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-h}^{\eta(x, t)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dz - \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{\eta(x, t)} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right\rangle + \\ & + \rho \left\langle \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{\eta(x, t)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} dz - \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-h}^{\eta(x, t)} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} dz \right\rangle + \rho g \left\langle \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{\eta(x, t)} z dz - \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-h}^{\eta(x, t)} z dz \right\rangle + \\ & + \varepsilon \rho \left\langle \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{-h}^{\eta(x, t)} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} dz - \lim_{x \rightarrow -\infty} \int_{-h}^{\eta(x, t)} \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} dz \right\rangle \quad (4.16) \end{aligned}$$

De acordo com as passagens algébricas apresentadas no a nexo V a expressão (4.16) se reduz a:

$$\begin{aligned} D(\omega) = & \frac{\varepsilon}{2} \rho \left\langle \int_{-h}^0 \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \Big|_{x \rightarrow -\infty} dz - \int_{-h}^0 \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} \Big|_{x \rightarrow +\infty} dz \right\rangle + \\ & + \frac{1}{2} \rho g \langle \eta^2(x, t) \rangle \Big|_{x \rightarrow -\infty} - \frac{1}{2} \rho g \langle \eta^2(x, t) \rangle \Big|_{x \rightarrow +\infty} + O(\varepsilon^2) \quad (4.16.a) \end{aligned}$$

Tomando-se (III.2.a) e (III.2.b) dadas também em (V.2)), e substituindo-as em (4.16) segue (ver Anexo V):

$$D(\omega) = \frac{1}{4} \rho g A^2 \left(1 + \frac{kh}{\sinh kh \cdot \cosh kh}\right) \{1 + |R|^2 - |T|^2\} \quad (4.17)$$

onde R e T são os coeficientes (complexos) de reflexão e transmissão respectivamente (Ver Anexo III).

Note-se que a expressão (4.12) é geral e os coeficientes de reflexão e transmissão podem ou não estar afetados por efeitos de dissipação viscosa.

Definindo-se R_c e T_c os coeficientes de reflexão e transmissão para o caso do sistema conservativo de tal sorte que:

$$|R|^2 = |R_c|^2 - \delta R \quad (4.18)$$

$$|T|^2 = |T_c|^2 - \delta T$$

com $\delta R + \delta T > 0$

e lembrando-se que no caso conservativo:

$$|R_c|^2 + |T_c|^2 = 1 \quad (4.19)$$

a expressão (4.12) fica:

$$D(\omega) = \frac{1}{2} \rho g A^2 \left(1 + \frac{kh}{\sinh kh \cdot \cosh kh}\right) |R_c|^2 \left(1 + \frac{\delta T - \delta R}{2|R_c|^2}\right) \quad (4.20)$$

ou ainda:

$$D(\omega) = Q_2^{(1)}(\omega, h) \rho g A^2 \quad (4.20.a)$$

onde se definiu o coeficiente de força média de deriva em ondas monocromáticas, em profundidade arbitrária, e com a inclusão de efeitos viscosos, como:

$$Q_2^{(1)}(\omega, h) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) |R_c|^2 \left(1 + \frac{\delta T - \delta R}{2|R_c|^2} \right) \quad (4.21)$$

Na ausência de dissipação viscosa $\delta T = \delta R = 0$ e (4.21) se reduz a:

$$Q_2^{(1)}(\omega, h) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2kh}{\sinh 2kh} \right) |R_c|^2 \quad (4.21.a)$$

É conveniente ressaltar-se, uma vez mais, que em ondas monocromáticas a força média de deriva depende, de forma correta até segunda ordem, apenas dos termos quadráticos associados ao potencial de primeira ordem. Ainda, cabe lembrar que a hipótese de escoamento potencial foi adotada apenas ao longe do corpo, permitindo-se considerar o efeito da dissipação viscosa junto à sua superfície no cálculo do coeficiente de força média de deriva.

4.2. Considerações Adicionais

Comparando-se as expressões (4.20) ou (4.21) com a fórmula de Maruo (4.1), deduzida para o caso de águas infinitamente profundas e na ausência de efeitos viscosos, é imediato verificar que:

$$\lim_{kh \rightarrow \infty} D(kh) = D_M(\omega) \left(1 + \frac{\delta T - \delta R}{2|R_c|^2} \right) \quad (\text{águas profundas})$$

e

$$\lim_{kh \rightarrow 0} D(kh) = 2D_M(\omega) \left(1 + \frac{\delta T - \delta R}{2|R_c|^2} \right) \quad (\text{águas rasas})$$

indicando claramente a influência da profundidade. A ação das forças viscosas pode reduzir ou aumentar a força média de deriva, dependendo se: $\delta R > \delta T$ ou $\delta T > \delta R$, respectivamente.

Por fim é interessante notar que o método aqui exposto, e aplicado ao cálculo da força média de deriva, é válido para a determinação da força média em segunda ordem segundo os dois graus de liberdade restantes: "heave" (w) e "roll" (θ). Ambos os casos são particularmente importantes no estudo de oscilações lentas de corpos flutuantes com baixa restauração no plano vertical, como é o caso de plataformas semi-submersíveis.

5. FORÇA DE DERIVA EM ONDAS ALEATÓRIAS.

APROXIMAÇÃO VÁLIDA PARA ESPECTROS DE BANDA ESTREITA

O capítulo anterior mostrou como calcular-se, para o caso de escoamento bidimensional, a força média de deriva em ondas monocromáticas. Ressaltou-se então que, em ondas monocromáticas, a força média de deriva dependia apenas de termos quadráticos do potencial em primeira ordem. A contribuição do potencial de segunda-ordem era nula.

Já, em ondas aleatórias, a pressão em segunda-ordem, correspondente tanto aos termos quadráticos do potencial de primeira-ordem quanto ao potencial de segunda ordem, oscila muito lentamente. Aos primeiros corresponde pressão média diferente de zero e ao último média nula.

Tal oscilação está intimamente associada à característica de sinal modulado que se pode atribuir a um trem de ondas aleatórias, característica esta tanto mais evidente quanto menor for a largura de banda do espectro de potência associado.

É natural esperar-se que a adoção de uma aproximação assintótica dos termos de pressão em segunda-ordem, tomada em torno da frequência central ω_0 do espectro de onda, conduza a uma boa estimativa para o cálculo da força de deriva em ondas aleatórias.

O presente capítulo objetiva construir esta expansão e de tal forma que os resultados obtidos no capítulo anterior para

ondas monocromáticas possam aqui ser utilizados. A hipótese fundamental adotada é tratarmos de ondas de espectros ditos de "banda estreita", os quais podem ser associados, de forma dual, a trens de onda cuja amplitude varia muito lentamente com o tempo.

5.1. Ondas de "espectro de banda estreita". Representação através de funções de modulação.

Assumiremos a incidência de um trem de ondas aleatórias de propagação unidirecional e espectro $S_{\eta}(\omega)$. Sob hipóteses de ergodicidade e integrabilidade uma realização do processo aleatório descritivo da elevação da cota de água na superfície pode ser aproximada na forma de série de Fourier (cosseno ou seno) por:

$$\eta_c(x,t) \cong \sum_{j=-N}^N a_j \cos(k_j x - \omega_j t + \epsilon_j) \quad (5.1)$$

com

$$a_j = (2S_{\eta}(\omega)\Delta\omega)^{1/2}$$

onde

$$\frac{\omega_j^2}{g} = k_j \tanh k_j h$$

$S_{\eta}(\omega)$ é a densidade espectral de amplitude

ϵ_j - fases aleatórias com distribuição constante de probabilidade

$\Delta\omega$ - distância entre duas raias espectrais de frequência

$(2N+1)$ - nº de harmônicos considerados.

Sendo ω_0 a frequência central do espectro $S_\eta(\omega)$ considerado, $\eta_c(x,t)$ pode ser representado através da modulação em amplitude e fase de uma onda "portadora" de frequência ω_0 (ver anexo VIII).

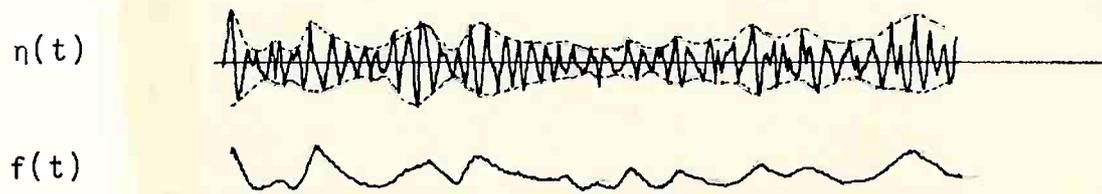


fig.5.1. - Ondas Aleatórias e a função de modulação $f(t)$

Dessa forma:

$$\eta_c(x,t) \cong \hat{a}(x,t)\cos(k_0x - \omega_0t + \epsilon(x,t)) \quad (5.2)$$

onde $a(x,t)$ e $\epsilon(x,t)$ são funções moduladoras de amplitude e fase respectivamente.

Outra forma de representação, cuja manipulação é mais imediata, e onde $\epsilon(x,t)$ é implicitamente considerada, é dada na forma da expressão (5.3) abaixo (ver anexo VIII);

$$\eta_c(x,t) \cong C(x,t)\cos(k_0x - \omega_0t) + S(x,t)\sin(k_0x - \omega_0t) \quad (5.3)$$

Sob hipótese de dispersão linear e com erro da ordem $(1 + 0(\Omega^2))$, onde Ω é a largura de banda espectral, e após algum trabalho algébrico (anexo VIII), chega-se às seguintes expressões para $C(x,t)$ e $S(x,t)$:

$$\begin{aligned} C(x,t) &= \sum_{j=-N}^N a_j \cos(\Delta k_j x - j\Delta\omega t + \epsilon_j) \\ S(x,t) &= - \sum_{j=-N}^N a_j \text{sen}(\Delta k_j x - j\Delta\omega t + \epsilon_j) \end{aligned} \quad (5.4)$$

onde

$$\Delta k_j = \frac{2 j \omega_0 \Delta \omega}{g \tanh k_0 h} (1 + 0(\Delta \omega^2))$$

É imediato verificar-se ainda que (5.3) pode ser expresso na forma complexa:

$$\eta_c(x,t) = \frac{1}{2} f(x,t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} + \frac{1}{2} f^*(x,t) e^{-i(k_0 x - \omega_0 t)} \quad (5.3.a)$$

onde $f(x,t)$ é a função complexa de modulação definida por:

$$f(x,t) = C(x,t) + i S(x,t) = \sum_{j=-N}^N a_j e^{-i(\Delta k_j x - j\Delta\omega t + \epsilon_j)} \quad (5.4.a)$$

Analogamente, a expressão de onda aleatória em série seno de Fourier, dada na forma complexa fica:

$$\eta_s(x,t) = \frac{1}{2} f(x,t) e^{i(k_0 x - \omega_0 t)} - \frac{1}{2} f^*(x,t) e^{-i(k_0 x - \omega_0 t)} \quad (5.3.b)$$

5.2. Aproximação Assintótica da função potencial em ondas aleatórias

Na presente seção todas as variáveis são dimensionais, de conformidade à adimensionalização apresentada no anexo IV e por facilidade de notação, não receberão marcação especial.

Considere-se então o problema da incidência de um trem de ondas aleatórias unidirecionais sobre um corpo cilíndrico flutuante de comprimento infinito. A onda é caracterizada por um espectro de potência $S_{\eta}(\omega)$ de banda estreita e frequência central ω_0 . Considere-se a representação modulada do trem de ondas, dada pela expressão (5.3.a).

Com erro da ordem $1 + 0(\epsilon^2)$ a função potencial correspondente à solução do problema de difração e radiação do trem de ondas aleatórias pode ser definida como:

$$\psi(x,z,t) = (\psi_1(x,z,t) + \epsilon\psi_2(x,z,t))(1+0(\epsilon^2)) \quad (5.5) \quad (1)$$

O objetivo é representar $\psi(x,z,t)$ na forma de uma expansão assintótica da solução potencial complexa

$$\phi_1(x,z,t) = \phi_1(x,z)e^{-i\omega_0 t}$$

associada à incidência de uma onda monocromática de frequência ω_0 . O parâmetro pequeno da expansão deve ser indicativo do grau de

(1) - O parâmetro pequeno ϵ é definido em termos da amplitude média de onda e da frequência central ω_0 como $\epsilon = \frac{\omega_0^2 \hat{A}}{g}$

concentração de energia em torno da frequência central ω_0 . É natural, portanto que se tome Ω , a largura de banda espectral, como parâmetro de tal expansão. Desta forma o cálculo da força de deriva em ondas aleatórias seguirá como aproximação assintótica da solução do problema em ondas monocromáticas.

Considera-se também que o corpo tenha dimensões características muito inferiores ao comprimento de onda de modulação. Assim sendo tomaremos a expansão em torno de uma posição fixa no espaço e definiremos, sem perda de generalidade, $f_0(t) = f(0,t)$.

Sendo $\phi(x,z,t)$ dada, conforme visto nos anexos I, II e III e capítulo 3, como:

$$\phi(x,z,t) = \phi_1(x,z,t) + \epsilon(\phi_{20}(x,z) + \phi_{22}(x,z,t)) \quad (5.6)$$

e lembrando (ver anexo VIII) que:

$$\left| \frac{1}{f_0(t)} \frac{df_0}{dt} \right| \sim 0(\Omega) \quad (5.7)$$

aproxima-se $\psi_1(x,z,t)$ e $\psi_2(x,z,t)$ em torno da origem pelas seguintes expressões (ver anexo VIII):

$$\psi_1(x,z,t) = \frac{1}{2} [f_0(t)\phi_1(x,z,t) + \frac{df_0}{dt}\bar{\psi}_1(x,z,t) + (*)] (1 + 0(\Omega^2)) \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(x,z,t) = & [|f_0(t)|^2 \Phi_{20}(x,z) + \frac{d}{dt}(|f_0(t)|^2) \bar{\Psi}_{20}(x,z) + \\ & + \frac{1}{2} |f(t)|^2 \Phi_{22}(x,z,t) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(|f_0(t)|^2) \bar{\Psi}_{22}(x,z,t) + (*)] (1 + O(\Omega^2)) \end{aligned} \quad (5.9)$$

e os movimentos do corpo em primeira-ordem por:

$$\begin{aligned} u_\psi(t) = & \frac{1}{2} [f_0(t) u_1(t) + \frac{df_0}{dt} u_{\bar{\Psi}_1}(t) + (*)] (1 + O(\Omega^2)) \\ w_\psi(t) = & \frac{1}{2} [f_0(t) w_1(t) + \frac{df_0}{dt} w_{\bar{\Psi}_1}(t) + (*)] (1 + O(\Omega^2)) \\ \theta_\psi(t) = & \frac{1}{2} [f_0(t) \theta_1(t) + \frac{df_0}{dt} \theta_{\bar{\Psi}_1}(t) + (*)] (1 + O(\Omega^2)) \end{aligned} \quad (5.10)$$

onde u_1 , w_1 e θ_1 são os movimentos em primeira ordem correspondentes à incidência de onda monocromática de frequência ω_0 .

O potencial $\bar{\Psi}_1$ por sua vez está associado aos efeitos das interações bilineares entre pares de componentes harmônicas do espectro $S_\eta(\omega)$. $\bar{\Psi}_1(x,z,t)$ é equacionado por (VIII.52) e a ele correspondem os movimentos $u_{\bar{\Psi}_1}$, $w_{\bar{\Psi}_1}$ e $\theta_{\bar{\Psi}_1}$, expressos em (5.9).

Cabe lembrar que o objetivo central do presente trabalho é estudar a importância relativa entre as contribuições do potencial de primeira e de segunda-ordem. Assim, em vista de (5.7) desconsideraremos os termos em $\bar{\Psi}^{(1)}$, resultando as seguintes aproximações para ψ_1 , ψ_2 e u_ψ , w_ψ , θ_ψ :

(1) - mantém-se o termo em Φ_{20} visto que até o momento nada se sabe da sua variação com a profundidade; por outro lado, qualquer que seja a profundidade, os termos bilineares em $\bar{\Psi}_1$, $u_{\bar{\Psi}_1}$, etc., sempre terão ordem de magnitude Ω vezes inferior quando comparados aos termos envolvendo a modulação quadrática da solução harmônica.

$$\psi_1(x, z, t) \cong \frac{1}{2} [f_0(t) \phi_1(x, z, t) + (*)] (1 + 0(\Omega)) \quad (5.8.a)$$

$$\psi_2(x, z, t) \cong [|f_0(t)|^2 \phi_{20}(x, z) + |f_0(t)|^2 \phi_{22}(x, z, t)] (1 + 0(\Omega)) \quad (5.9.a)$$

$$u_\psi(t) = \frac{1}{2} [f_0(t) u_1(t) + (*)] (1 + 0(\Omega))$$

$$w_\psi(t) = \frac{1}{2} [f_0(t) w_1(t) + (*)] (1 + 0(\Omega)) \quad (5.10.a)$$

$$\theta_\psi(t) = \frac{1}{2} [f_0(t) \theta_1(t) + (*)] (1 + 0(\Omega))$$

Considerando a forma adimensional de (2.11) nela substituímos (5.8.a) (5.9.a) e (5.10.a) desconsiderando os termos pulsantes em 2ω . Observando então a expressão (2.17) que fornece a força média de segunda-ordem em ondas monocromáticas é imediato verificar que: (1)

$$\begin{aligned} \vec{F}_2(t) = & \{ |f_0(t)|^2 \vec{F}_2(t, \omega_0) + \\ & - \left[\epsilon \frac{d}{dt} |f_0(t)|^2 R_e [(n_{10}^+ - w_{10} - x^{+\theta_{10}}) \phi_1^{+*} \vec{n}^+ - (n_{10}^- - w_{10} - x^{-\theta_{10}}) \phi_1^{-*} \vec{n}^-] + \right. \\ & - \epsilon \frac{d}{dt} |f_0(t)|^2 \int_{\partial B_0} R_e [(u_{10} - z\theta_{10}) \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x}] \vec{n} ds + \epsilon \frac{d}{dt} |f_0(t)|^2 \int_{\partial B_0} R_e [(w_{10} + x\theta_{10}) \frac{\partial \phi_1^*}{\partial z}] \vec{n} ds + \\ & \left. - \epsilon \frac{d}{dt} |f_0(t)|^2 \int_{\partial B_0} \phi_{20}(x, z) \vec{n} ds \right\} (1 + 0(\Omega)) \quad (5.11) \end{aligned}$$

(1) - o superescrito ~ indica oscilação lenta

Consistentemente às hipóteses assumidas nas aproximações (5.8.a), (5.9.a) e (5.10.a), apenas o primeiro e último termos serão mantidos. De fato, os demais termos são de ordem Ω vezes menor quando comparados ao primeiro, o que se verifica facilmente com base em (5.7).

Assim:

$$\vec{\tilde{F}}_2(t) = \{ |f_0(t)|^2 \vec{F}_2(t, \omega_0) - \epsilon \frac{d}{dt} |f_0(t)|^2 \int_{\partial B_0} \Phi_{20}(x, z) \vec{n} ds \} (1 + 0(\Omega)) \quad (5.11.a)$$

Calculemos por fim a componente de $\vec{\tilde{F}}_2(t)$ segundo o eixo x , também conhecida como força de deriva em ondas aleatórias. Designando-a $\tilde{D}(t)$ e observando a expressão alternativa da força média de deriva em ondas monocromáticas, dada por (4.20), segue que:

$$\tilde{D}(t) = [\epsilon(\omega_0, h) Q_2^{(1)} |f_0(t)|^2 + \frac{\epsilon}{\omega_0} Q_2^{(2)}(\omega_0, h) \frac{d}{dt} |f_0(t)|^2] (1 + 0(\Omega)) \quad (5.12)$$

onde se definiu o coeficiente $Q_2^{(2)}(\omega_0, h)$ como:

$$Q_2^{(2)}(\omega_0, h) = - \omega_0 \int_{\partial B_0} \Phi_{20}(x, z) n_x ds \quad (5.13)$$

A expressão (5.12) pode ser rearranjada e escrita como:

$$\tilde{D}(t) = \epsilon \{ Q_2^{(1)}(\omega_0, h) + \frac{1}{\omega_0} Q_2^{(2)}(\omega_0, h) \frac{d}{dt} \} |f_0(t)|^2 (1 + 0(\Omega)) \quad (5.14)$$

O coeficiente $Q_2^{(1)}(\omega_0, h)$ já fora calculado no capítulo anterior e portanto resta-nos determinar $Q_2^{(2)}(\omega_0, h)$.

É importante ressaltar que, uma vez conhecida a função de modulação $f_0(t)$, a expressão (5.14) permite estender os resultados obtidos em ondas monocromáticas para o caso da incidência de ondas aleatórias. Enfatiza-se no entanto que o cálculo dos coeficientes $Q_2^{(1)}$ e $Q_2^{(2)}$ não prescinde do conhecimento da solução em primeira-ordem.

Vale ainda notar que a expressão (5.14) se constitui em aproximação do cálculo da força dinâmica de deriva em ondas aleatórias dependendo tão somente da geometria do corpo, da frequência central do espectro de mar ω_0 e da profundidade local. O cálculo de $\tilde{D}(t)$ pela expressão (5.14) é bastante simples quando comparada a formulações comumente adotadas na literatura atual (ver Faltinsen, Newman, Pinkster, etc.) pois requer tão somente o cálculo dos coeficientes $Q_2^{(1)}(\omega, h)$ e $Q_2^{(2)}(\omega, h)$. Este último coeficiente, por sua vez pode ser diretamente determinado a partir do potencial $\phi_1(x, z)$ e do potencial de radiação em frequência nula $\phi_u^{(0)}(x, z)$ associado ao movimento de "sway", sendo desnecessário, portanto, o cálculo do potencial $\phi_{20}(x, z)$. Tal método é objeto do capítulo 6 onde se faz uso de uma extensão da relação de Haskind aplicada ao problema.

Ressalta-se que a formulação apresentada é válida somente para o caso em que o espectro de potência do mar considerado é de banda estreita e não existem variações muito bruscas nos coeficientes $Q_2^{(1)}$ e $Q_2^{(2)}$.

Por fim, observando (5.14) é interessante notar que a parcela de $\tilde{D}(t)$ associada ao potencial de primeira-ordem tem média positiva, diferente de zero e nunca se anula, visto que $Q_2^{(1)}(\omega_0, h) > 0$ para todo ω_0 . Em contrapartida a parcela $\tilde{D}(t)$ associada ao potencial de segunda-ordem tem média nula e amplitude da ordem $O(\frac{\Omega}{\omega_0} Q_2^{(2)})$.

Finalizando a presente seção definiremos o parâmetro $\alpha(\omega, h)$ como indicador da importância relativa das contribuições dos potenciais de segunda e primeira ordem nas forças de deriva:

$$\alpha(\omega, h) = \frac{Q_2^{(2)}(\omega, h) \langle [\frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} |f_0(t)|^2]^2 \rangle^{1/2}}{Q_2^{(1)}(\omega, h) \langle (|f_0(t)|^2)^2 \rangle^{1/2}} \quad (5.15)$$

Lembrando que $\langle (|f_0(t)|^2) \rangle^{1/2} \sim O(1)$ e que $\langle [\frac{d}{dt} |f_0(t)|^2]^2 \rangle^{1/2} \sim O(\Omega)$ e utilizando-se da expressão (4.21), vem:

$$\alpha(\omega, h) \cong \frac{2\Omega}{\omega} \frac{Q_2^{(2)}(\omega, h)}{Q_2^{(1)}(\omega, h)} = 2\bar{\Omega} \frac{Q_2^{(1)}(\omega, h)}{Q_2^{(2)}(\omega, h)} \quad (5.15.a)$$

5.4. A aproximação adotada e as formulações encontradas na literatura

Como visto no capítulo 2, trabalhos recentemente publicados adotam o conceito de funções de transferência quadráticas para a avaliação das forças de deriva em ondas aleatórias (ver p. ex., Newman, 1974; Pinkster, 1979; Faltinsen, 1980).

Baseando-se na representação do perfil de ondas aleatórias dada por (5.3.a) estendem a relação (4.15) válida para on

das monocromáticas e que relaciona a força média de deriva ao quadrado da amplitude da onda. Assim a força dinâmica de deriva é escrita (Newman, 1974):

$$\tilde{D}(t) = \text{Real} \left\{ \sum_{m=-N}^N \sum_{n=-N}^N a_m a_n \exp(i(m-n)\Delta\omega t - i(\epsilon_m - \epsilon_n)) \cdot T_{mn}(\omega_m, \omega_n) \right\} \quad (5.16)$$

onde $T_{mn}(\omega_m, \omega_n)$ é a função de transferência em segunda-ordem em baixa frequência, também designada função de transferência quadrática.

Os termos T_{mn} fora da diagonal ($m \neq n$) traduzem o efeito da interação não linear de componentes harmônicas de frequências ω_m e ω_n respectivamente.

São interpretados como a amplitude da força dinâmica de deriva agente sobre o corpo flutuante sujeito à ação de um trem de ondas composto por duas ondas harmônicas de amplitudes unitárias e frequências ω_m e ω_n , também designado "grupo de ondas regulares".

Definindo-se:

$$T_{mn}(\omega_m, \omega_n) = P_{mn} - iQ_{mn} \quad (5.17)$$

a expressão (5.16) toma a forma (Pinkster, 1979; Faltinsen, 1980):

$$\tilde{D}(t) = \sum_m \sum_n a_m a_n (P_{mn} \cos((m-n)\Delta\omega t - (\epsilon_m - \epsilon_n)) + Q_{mn} \text{sen}((m-n)\Delta\omega t - (\epsilon_m - \epsilon_n))) \quad (5.16.a)$$

Tomando-se a média de $\tilde{D}(t)$ no tempo tem-se a força média de deriva dada por:

$$D = \langle \tilde{D}(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Real} \left\{ \sum_m a_m^2 |T_{mm}|^2 \right\}^{1/2} \quad (5.18)$$

Os coeficientes $|T_{mm}|^2$ podem ser interpretados fisicamente como a força média de deriva agente sobre o corpo flutuante em ondas regulares de amplitude unitária e frequência ω_m . Ou em outras palavras:

$$\frac{1}{2} |T_{mm}|^2 = \epsilon Q_2^{(1)}(\omega_m) \quad (5.19)$$

Impondo-se que os termos opostos da matriz $[T_{mn}]$ em relação à sua diagonal principal tenham igual contribuição na força total segue que (Newman, 1974, [43]):

$$T_{mn} = T_{nm}^* \quad (5.20)$$

ou seja:

$$P_{mn} = P_{nm} \quad (5.21)$$

$$Q_{mn} = -Q_{nm}$$

Tais termos contêm a parcela dinâmica associada à variação lenta dos potenciais de primeira e segunda ordens. Sua determinação envolve esforços computacionais bastante grandes. A atual representação do perfil de ondas aleatórias envolvendo

$M = 2N + 1$ componentes harmônicas levaria, se adotado o método direto de solução, a M soluções de problemas lineares e de segunda ordem e a $(M-1)M$ combinações de soluções. Este é o procedimento seguido por Faltinsen (1980) [16]. Por outro lado, assumindo que a contribuição significativa para a parcela dinâmica da força de deriva se deve à interação de componentes harmônicas muito próximas, ou seja, de frequências tais que:

$$|\omega_m - \omega_n| \ll \frac{1}{2} (\omega_m + \omega_n)$$

Newman reduz o trabalho computacional restringindo o cálculo da força de deriva em (5.21) aos termos próximos à diagonal principal. Para tanto, supondo que $T_{mn}(\omega_m, \omega_n)$ são funções regulares em ω_m e ω_n , aproxima T_{mn} pelo termo linear de sua expansão em série:

$$T_{mn} = T_{mm} + O(\omega_m - \omega_n) \quad (5.22)$$

ou, utilizando-se das relações (5.21):

$$P_{mn} = P_{mn} + O(|\omega_m - \omega_n|) = P_{nm} = P_{nn} + O(|\omega_m - \omega_n|) = P_{oo}$$

$$Q_{mn} = Q_{mm} + O(\omega_m - \omega_n) = O(\omega_m - \omega_n) = -Q_{nm}$$

Assim:

$$\tilde{D}(t) \cong \text{Real} \left\{ \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N a_n a_m \exp(i(m-n)\Delta\omega t - i(\epsilon_m - \epsilon_n)(T_{oo} + O(\omega_m - \omega_n))) \right\} \quad (5.17.a)$$

Tomemos agora a aproximação adotada no presente trabalho dada pela expressão (5.14). Introduzindo-se a função de modulação apresentada por (5.4.a) segue que:

$$\tilde{D}(t) \cong \varepsilon \text{Real} \left\{ \sum_{nm} a_n a_m \exp(i(m-n)\Delta\omega t - i(\varepsilon_m - \varepsilon_n)) (Q_2^{(1)}(\omega_0) + 2i(m-n)\frac{1}{\omega_0} Q_2^{(2)}(\omega_0)) \right\} (1+O(\Omega))$$

onde $\varepsilon = \frac{\hat{\omega}_0^2 \hat{A}}{g}$ (5.23)

Comparando-se (5.23) e (5.16.a) com auxílio de (5.17) segue de imediato que para a aproximação adotada:

$$P_{mn} = \varepsilon Q_2^{(1)}(\omega_0) + O(|\omega_m - \omega_n|) = P_{nm}$$

$$Q_{mn} = -\frac{1}{\omega_0} Q_2^{(2)}(\omega_0) \cdot (m-n)\Delta\omega = -\frac{1}{\omega_0} (\omega_m - \omega_n) Q_2^{(2)}(\omega_0) = -Q_{nm}$$

(5.24)

Ou seja, o método ora apresentado constitui-se em uma aproximação complementar àquela sugerida por Newman, com a virtude de agregar ao modelo a contribuição do potencial em segunda-ordem.

5.5. Densidade Espectral de Energia da Força de Deriva em ondas aleatórias

Nos itens anteriores apresentou-se uma expressão da força de deriva em ondas aleatórias dada no domínio do tempo. Para tanto valeu-se de uma aproximação assintótica para representar a amplitude da onda aleatória através da introdução do

conceito de modulação em amplitude e fase.

A representação no domínio do tempo é particularmente interessante quando o sistema em estudo tem características não lineares de resposta como é o caso de um navio fundeado, dada a restauração inerentemente não-linear do sistema de amarração. Casos há, no entanto, em que o sistema pode ser linearizado em torno de sua posição de equilíbrio como, por exemplo, quando o prê-tensionamento das amarras é bastante elevado. A representação do fenômeno no domínio da frequência se torna então altamente atrativa porquanto possibilita determinar-se, com pouco esforço computacional, os parâmetros estatísticos das variáveis aleatórias de interesse como tensões nas amarras e movimentos no plano horizontal. Não obstante, mesmo quando é imperativa a simulação no domínio do tempo, o conhecimento da função de densidade espectral de energia das forças dinâmicas de deriva é sobremaneira interessante.

O espectro de potência da força de deriva pode ser calculado a partir do espectro de potência da função moduladora e da expressão assintótica (5.14).

Mostra-se facilmente (ver anexo VIII) que o espectro da função moduladora é dado por:

$$S_{f_0}(\omega) = 2(S_{\eta}(\omega_0 + \omega) + S_{\eta}(\omega_0 - \omega)) \quad (5.25)$$

onde $S_{\eta}(\omega)$ é o espectro de potência da onda incidente, e que o espectro de $a^2(t) = f_0(t) \cdot f_0^*(t)$ por:

$$S_{a^2}(\omega) = (2\sigma_n^2)^2 \delta(\omega) + 2(S_{f_0}(\omega) * S_{f_0}(\omega)) \quad (5.26)$$

onde

- σ_n^2 é a variância de $n(t)$
- $\delta(\omega)$ é a função de Dirac
- * indica produto de convolução

Analogamente o espectro de potência de $\frac{d}{dt}a^2(t)$ é dado por:

$$S_{\dot{a}^2}(\omega) = \omega^2 S_{a^2}(\omega) \quad (5.27)$$

e portanto o espectro de potência da força de deriva é aproximado a partir da expressão (5.14) por:

$$S_{\ddot{D}}(\omega) \cong \epsilon^2 \{ (Q_z^{(1)}(\omega_0))^2 + (Q_z^{(2)}(\omega_0))^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \} \{ 4\sigma_n^2 \delta(\omega) + 8[(S_{\eta}(\omega_0 + \omega) + S_{\eta}(\omega_0 - \omega)) * (S_{\eta}(\omega_0 + \omega) + S_{\eta}(\omega_0 - \omega))] \} \quad (5.28)$$

Admitindo que o sistema corpo-amarras tenha características de resposta linear, dadas por uma função de transferência $L(\omega)$, é imediato verificar (Bishop & Price, pg 207) que o espectro de potência da resposta do sistema às excitações das forças de segunda ordem em baixa frequência é dado por:

$$S_L(\omega) = L(\omega)L^*(\omega)S_{\ddot{D}}(\omega) \quad (5.29)$$

É interessante observar ainda que a força média de deriva em ondas aleatórias decorre diretamente de (5.28) e pode

ser expressa por:

$$D = \langle \bar{D}(t) \rangle = 2\epsilon Q_2^{(1)}(\omega_0) \sigma_\eta^2 = \epsilon Q_2^{(1)}(\omega_0) \bar{A}^2 \quad (5.30)$$

onde

$\bar{A} = \sqrt{2} \sigma_\eta$ é a amplitude média do trem de ondas aleatórias.

6. CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE FORÇA DE DERIVA EM ONDAS ALEATÓRIAS DEVIDO AO POTENCIAL DE SEGUNDA ORDEM

O capítulo anterior mostrou como aplicar os resultados obtidos em ondas monocromáticas para a determinação das forças dinâmicas de deriva em ondas aleatórias.

Definiu-se então em (5.13) o coeficiente de força de deriva $Q_2^{(2)}(\omega)$, associado ao potencial de segunda ordem $\Phi_{20}(x,z,\omega)$, observando naquela ocasião que sua contribuição nas forças de deriva dar-se-ia apenas em ondas aleatórias.

O objetivo do presente capítulo, é, com o auxílio dos desenvolvimentos expostos nos anexos VI e VII, apresentar o método de cálculo do coeficiente $Q_2^{(2)}(\omega)$. A princípio parece necessário o conhecimento do potencial $\Phi_{20}(x,z,\omega)$, parcela independente do tempo do potencial de segunda ordem $\Phi_2(x,z,t)$. No entanto uma extensão da relação de Haskind aplicada ao problema possibilita calcular-se $Q_2^{(2)}(\omega)$ sem que seja necessário a determinação de $\Phi_{20}(x,z,\omega)$.

No que segue tomaremos todas as variáveis adimensionalizadas segundo o exposto no anexo IV.

6.1. Equacionamento do potencial $\Phi_{20}(x,z)$.

Como visto nos anexos I e II e particularmente indicado nas expressões (I.6), (I.12) o potencial de segunda ordem $\Phi_2(x,z,t)$ é a aproximação assintótica em segunda ordem da solu-

ção do problema de perturbação do potencial linear de onda incidente $\Phi_I(x, z, t) = -\frac{1}{2\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cos kh} e^{i(kx-\omega t)}$, ocasionada por um corpo fixo ou flutuante.

Matematicamente $\Phi_2(x, z, t)$ pode ser encarado como uma solução particular da equação homogênea associada à equação linear (3.10) ou (IV.24) quando se introduz condições de contorno na superfície livre e no corpo que são funções quadráticas da aproximação assintótica linear $\Phi_1(x, z, t)$. Por ser Φ_1 harmônico no tempo, e de frequência ω , tais condições de contorno podem ser separadas em um termo independente do tempo e um termo dependente do tempo e pulsante com frequência 2ω . Do termo independente do tempo resulta o potencial $\Phi_{20}(x, z)$, também independente do tempo, associado à onda incidente de frequência ω . $\Phi_{20}(x, z)$ é equacionado então por (II.28) ou na forma adimensional por:

$$\begin{aligned}
 & \cdot \nabla^2 \Phi_{20} = 0 \\
 & \cdot \left. \frac{\partial \Phi_{20}}{\partial z} \right|_{z=0} = L_{20}(x), \text{ na superfície livre em seu plano médio, de contorno } \partial F \\
 & \cdot \left. \nabla \Phi_{20} \cdot \vec{n} \right|_{\partial B} = B_{20}(x, z) \Big|_B; \text{ na superfície do corpo em sua posição média, de contorno } \partial B \\
 & \cdot \left. \nabla \Phi_{20} \cdot \vec{n} \right|_{\partial H} = 0; \text{ no fundo de contorno } \partial H \\
 & \cdot \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi_{20} = (A_{20}^{\pm} + U_{20}^{\pm}(x-x_0^{\pm}))g_0(z) \quad (6.1) \\
 & \text{onde: (ver I.17 e II.27)}
 \end{aligned}$$

$$L_{20}(x) = -i\omega \frac{\partial}{\partial x} (\phi_1^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \phi_1 \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x}) \Big|_{z=0} \quad (6.2)^{(1)}$$

e

$$B_{20}(x,z) \Big|_{\partial B} = \frac{\partial}{\partial s} \{ [(u_{10} - z\theta_{10}) nx + (w_{10} + x\theta_{10}) nz] \frac{\partial \phi_1^*}{\partial s} \} \Big|_{\partial B_0} + (*) \quad (6.3)$$

A condição de radiação em (6.1) fica estipulada a partir do conhecimento dos valores A_{20}^{\pm} e U_{20}^{\pm} . Tal condição é analisada no anexo VII, traduzindo a equação da conservação de massa.

6.2. Cálculo do coeficiente $Q_2^{(2)}(\omega, h)$

O método consiste em se aproveitar as peculiaridades oferecidas pelas condições de contorno de uma função potencial equacionada no mesmo domínio fluido. O potencial $\phi_u^0(x, z)$, correspondente à solução linear do problema de radiação em "sway", no caso limite quando $\omega \rightarrow 0$, é bastante propício ao método.

Considere-se então o domínio fluido infinito, de área denominada S , e delimitado pela superfície livre, pela superfície do corpo e pelo fundo, de cota constante $-h$, de contornos ∂F , ∂B e ∂H respectivamente (fig. 6.1), com o versor normal ao contorno apontando para o interior da região.

(1)(*) - denota complexo conjugado.

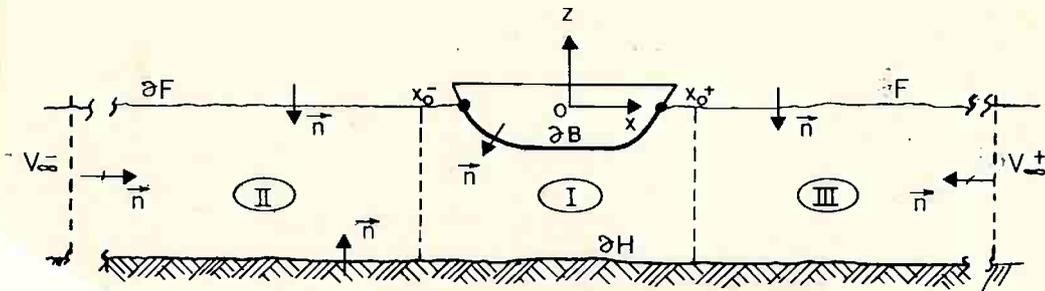


Fig. 6.1 - Domínio fluido considerado

Tomando-se a equação de Laplace $\nabla^2 \phi_u^0(x, z) = 0$ dada em (VI.3), multiplicando-a por $\phi_{z0}(x, z)$ e integrando o produto resultante por partes, em todo o domínio fluido vem:

$$\iiint_S \nabla^2 \phi_u^0 \cdot \phi_{z0} dS = \iint_S \nabla \cdot (\nabla \phi_u^0 \phi_{z0}) dS - \iint_S \nabla \phi_u^0 \cdot \nabla \phi_{z0} dS = 0 \quad (6.4.)$$

Aplicando-se o teorema da divergência ao primeiro termo do segundo membro da identidade (6.4) vem:

$$\oint_{\partial S} (\nabla \phi_u^0 \cdot \vec{n}) \phi_{z0} d\partial S - \iint_S \nabla \phi_u^0 \cdot \nabla \phi_{z0} dS = 0 \quad (6.4.a)$$

onde ∂S representa o contorno de S .

Referindo-se agora à nomenclatura apresentada na figura 6.1 onde $\partial S = \partial F \cup \partial B \cup \partial H \cup \partial V_{\pm\infty}$ e verificando de (VI.3) que:

$$\left. \nabla \phi_u^0 \cdot \vec{n} \right|_{\partial B} = nx; \quad \left. \nabla \phi_u^0 \cdot \vec{n} \right|_{\partial H} = 0; \quad \left. \nabla \phi_u^0 \cdot \vec{n} \right|_{\partial F} = \frac{\partial \phi_u^0}{\partial z} = 0 \quad e$$

$$\left. \nabla \phi_u^0 \cdot \vec{n} \right|_{\partial V_{\pm\infty}} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial \phi_u^0}{\partial x}(x, z) = -U_0^\pm g_0(z),$$

tem-se:

$$\int_{\partial B_0} \phi_{20} n_x d\partial B_0 - \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_u^0}{\partial x}(\infty, z) \phi_{20}(\infty, z) d\partial V_{+\infty} + \int_0^{-h} \frac{\partial \phi_u^0}{\partial x}(-\infty, z) \phi_{20}(-\infty, z) d\partial V_{-\infty} = \iint_S \nabla \phi_u^0 \cdot \nabla \phi_{20} dS \quad (6.4.b)$$

Tomando as expressões de $Q_2^{(2)}$ dada em (5.13), a condição de radiação de ϕ_u^0 dada por (VI.5.a) e a condição de radiação ϕ_{20} dada em (6.1) e lembrando ainda que $\int_{-h}^0 g_0(z) dz = \sqrt{\pi}$, tem-se:

$$Q_2^{(2)} = -\omega \left\{ \iint_S \nabla \phi_u^0 \cdot \nabla \phi_{20} dS + U_0^+ (A_{20}^+ - U_{20}^+ X_0^+) + U_0^- (A_{20}^- - U_{20}^- X_0^-) - \lim_{x \rightarrow \infty} (U_0^+ U_{20}^+ - U_0^- U_{20}^-) x \right\} \quad (6.4.c)$$

Observando-se o desenvolvimento da expressão (VII.19), no anexo VII, o primeiro termo de (6.4.c) fica:

$$\begin{aligned} & - \iint_S \nabla \phi_u^0 \cdot \nabla \phi_{20} dS = \bar{J}(\phi_u^0) = \\ & = -2 \operatorname{Re} \left\{ i\omega \int_{\partial F} \phi_1(x, 0) \cdot \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x}(x, 0) \cdot \frac{\partial \phi_u^0}{\partial x}(x, 0) dx + \right. \\ & \left. + \iint_{\partial B_0} [(u_{10} - z\theta_{10})n_x + (w_{10} + x\theta_{10})nz] \frac{\partial \phi_1^*}{\partial s} \cdot \frac{\partial \phi_u^0}{\partial s} d\partial B_0 \right\} \quad (6.5) \end{aligned}$$

que relaciona apenas funções potenciais e funções de transferência de movimentos resultantes da solução do problema em aproximação

mação de primeira ordem.

Para o caso em estudo, onde se considera a função potencial ϕ_u^0 , o funcional $\bar{J}(\phi_u^0)$ pode ser mostrado convergente e os parâmetros U_0^\pm identicamente nulos. Ainda, como visto no anexo (VII), os parâmetros U_{20}^\pm são finitos e dados por (VII.18) em função dos coeficientes de reflexão e transmissão. Assim, o coeficiente de força de deriva $Q_2^{(2)}$ relacionado ao potencial de segunda ordem ϕ_{20} fica expresso por:

$$Q_2^{(2)} = -2\omega \operatorname{Real} \left\{ i\omega \int_{\partial F} \phi_1(x,0) \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x}(x,0) \cdot \frac{\partial \phi_u^0}{\partial x}(x,0) dx + \int_{\partial B_0} [(u_{10} - z\theta_{10})n_x + (w_{10} + x\theta_{10})n_z] \frac{\partial \phi_1^*}{\partial s} \cdot \frac{\partial \phi_u^0}{\partial s} \Big|_{(x,z) \in \partial B_0} d\partial B_0 \right\} \quad (6.6)$$

Uma forma alternativa de (6.6) é escrita a partir das condições de contorno de $\phi_1(x,z)$ na superfície ($z=0$) e no corpo (∂B_0). Assim:

$$Q_2^{(2)} = 2 \operatorname{Real} \left\{ i \int_{\partial C} (\nabla \phi_1 \cdot \vec{n}) \frac{\partial \phi_1^*}{\partial s} \frac{\partial \phi_u^0}{\partial s} ds \right\} \quad (6.6.a)$$

onde ∂C é o contorno dado pela união $\partial F \cup \partial B_0$

A aplicação de uma extensão da Relação de Haskind ao problema reduziu o cálculo de $Q_2^{(2)}$ à avaliação de integrais de funções previamente calculadas ao longo da superfície livre ($z=0$) e da superfície do corpo, funções estas que, por sua vez, são soluções de equações lineares a condições de contorno tam-

são lineares.

Por outro lado, o Método Compatibilizado de Elementos Finitos permite calcular-se a parcela da primeira integral ao longo da superfície livre, correspondente aos intervalos $(-\infty, x_0^-)$ e $(x_0^+, +\infty)$, de forma analítica.

Como visto no anexo III as soluções analíticas nesses intervalos podem ser expressas na forma de séries de Fourier.

Assim:

$$\begin{aligned} \text{para } x > x_0^+ \\ \phi_1(x, 0) &\cong -\frac{1}{2\omega} T e^{ikx} + \sum_{n=1}^{N_s} A_n^+ f_n(0) e^{-k_n(x-x_0^+)} \\ \phi_u^0(x, 0) &\cong S_0^+ g_0(0) + \sum_{n=1}^{N_s} S_n^+ g_n(0) e^{-\lambda_n(x-x_0^+)} \end{aligned} \quad (6.7.a)$$

$$\begin{aligned} \text{para } x < x_0^- \\ \phi_1(x, 0) &\cong -\frac{1}{2\omega} (e^{ikx} + \text{Re } e^{-ikx}) + \sum_{n=1}^{N_s} A_n^- f_n(0) e^{k_n(x-x_0^-)} \\ \phi_u^0(x, 0) &\cong S_0^- g_0(0) + \sum_{n=1}^{N_s} S_n^- g_n(0) e^{\lambda_n(x-x_0^-)} \end{aligned} \quad (6.7.b)$$

Sabendo-se que $g_n(0) = G_n \cos(\lambda_n h)$ e $f_n(0) = F_n \cos(k_n h)$, tal parcela fica determinada pela expressão (6.8), abaixo:

$$\begin{aligned}
Q_{2F}^{(2)} = & -2i\omega^2 \text{Imagf} \left(-\frac{ik}{4} \sum_{n=1}^{N_S} S_n^+ g(o) (1 - |R|^2 + |T|^2 + 2iI_m \left(\frac{\lambda_n R e^{2ikx_0}}{\lambda_n - 2i} \right)) \right) + \\
& + \frac{1}{2\omega} \sum_{j=1}^{N_S} \sum_{n=1}^{N_S} (f_n(o) \lambda_j S_j^+ g(o) \left(\frac{e^{ikx_0}}{k_n + \lambda_j - ik_0} \right) k_n (A_n^{+*} R - A_n^{+*} T - ik A_n^-) + \\
& + \frac{e^{-ikx_0}}{k_n + \lambda_j + ik} (k_n A_n^{-*} - ik (A_n^{+*} T^* - A_n^{-*} R^*))) + \\
& + \sum_{e=1}^{N_S} \sum_{j=1}^{N_S} \sum_{n=1}^{N_S} \left(\frac{f_n(o) k_j f_j(o) \lambda_j S_j^+ g(o)}{k_n + k_j + \lambda_e} (A_n^+ A_j^{+*} - A_n^- A_j^{-*}) \right) \quad (6.8)
\end{aligned}$$

onde se supõe, para facilidade de apresentação, que $x_0^+ = -x_0^- = x_0$.

A parcela da integral em ∂F no intervalo $[-x_0, x_0]$ e a integral em ∂B_0 devem ser determinadas numericamente.

É importante observar que a expressão (6.4.c), embora deduzida para uma determinada função $\phi_U^0(x, z)$, é válida para qualquer $\psi(x, z)$ pertencente à mesma classe de funções. Em particular as funções $\phi_W^0(x, z)$ e $\phi_\Theta^0(x, z)$ levam ao cálculo dos coeficientes de força de segunda ordem $Q_{2W}^{(2)}$ $Q_{2\Theta}^{(2)}$ correspondentes aos graus de liberdade em "heave" e "roll" respectivamente. Vale observar no entanto que, no caso em "heave" o funcional $\bar{J}(\phi_W^0)$ é divergente.

No entanto, não é difícil verificar que a parcela divergente de $\bar{J}(\phi_W^0)$ anula o termo limite restando:

$$\begin{aligned}
Q_{2W}^{(2)}(\omega) = & 2 \operatorname{Re} \left\{ i\omega \int_F \phi_1(x,0) \frac{\partial \phi_1^{\pm}}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial \phi_W^0}{\partial x}(x,0) dx + \right. \\
& \left. + \int_{\partial B} [(u_{10} - z\theta_{10})n_x + (w_{10} + x\theta_{10})n_z] \frac{\partial \phi_1^{\pm}}{\partial s} \frac{\partial \phi_W^0}{\partial s} d\partial B + \right. \\
& \left. + U_{0W}^+(A_{20W}^+ - U_{20W}^+ x_0^+) + U_{0W}^-(A_{20W}^- + U_{20W}^- x_0^-) \right\} \quad (6.9)
\end{aligned}$$

onde:

$$\phi_W^0(x,0) = \phi_W^0(x,0) \mp (x - x_0^{\pm}) U_{0W}^{\pm} ; \quad x \geq x_0^{\pm}$$

7. SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA LINEAR BIDIMENSIONAL.

PROGRAMAS COMPUTACIONAIS

Como visto nos capítulos anteriores, o problema da determinação da força de deriva em ondas aleatórias, agente sobre um corpo cilíndrico flutuante, reduziu-se à solução do problema linear de perturbação do campo potencial de velocidades em ondas monocromáticas.

No domínio do tempo a expressão (5.14) permite avaliar a força dinâmica de deriva decorrente das contribuições das pressões de segunda ordem associadas aos potenciais de primeira ordem e segunda ordem, através do conhecimento dos coeficientes $Q_2^{(1)}(\omega_0)$ e $Q_2^{(2)}(\omega_0)$ e da função de modulação $f_0(t)$.

Por sua vez os coeficientes $Q_2^{(1)}$ e $Q_2^{(2)}$ são determinados a partir das expressões (4.10) e (6.6) respectivamente, e a função $f_0(t)$ pode ser calculada pela expressão (5.4.a).

Diversos métodos numéricos apresentam-se como viáveis à solução do problema linear, destacando-se o Método das Distribuições de Fontes de Frank, o Método de Elementos de Contorno (MEC), o Método de Elementos Finitos (MEF) e o Método Compatibilizado de Elementos Finitos (MCEF) ou Método de Elementos Finitos Localizados (MEFL) ("Hybrid Element Method" ou "Localized Finite Element Method").

O método de distribuição de singularidades, no qual se baseia o Método de W. Frank, é classicamente adotado em problemas

de hidrodinâmica do navio [12]

Por sua vez os métodos de Elementos de Contorno e Elementos Finitos são de emprego mais recente, tendo se evidenciado como poderosas ferramentas na solução de problemas em mecânica do contínuo e em particular em mecânica dos fluidos (ver p. ex. Zienkiewicz, [69], Chung, [13]).

A aplicação direta do MEF ao problema em questão exige no entanto um grande esforço computacional. Tal fato se deve à imposição da condição de radiação, aplicada necessariamente longe do corpo difrator (distância superior a 3 comprimentos de onda quando $kB \rightarrow 0(1)$, segundo Andersen, 1979 [2]). Por outro lado a dimensão típica do elemento deve ser compatível com o mínimo comprimento de onda estudado, o que leva a um grande número de elementos na malha de discretização e por conseguinte a um elevado ônus de processamento numérico.

A adoção do MCEF reduz substancialmente este ônus graças a representação da solução através de expansão em série de Fourier na região exterior à malha de discretização. A precisão desta expansão é bastante grande possibilitando diminuir as dimensões da região de discretização. (ver p. ex. Aranha, 1982 [3], Andersen, 1979 [2], Bai & Yeung, 1974 [5]). O desenvolvimento pormenorizado do MCEF no que tange aos aspectos matemáticos de existência, unicidade e convergência numérica da solução podem ser apreciados em Aranha, 1982 [3] onde uma discussão detalhada da aplicação do MCEF ao problema de ondas de superfície é encontrada.

Cabe-nos tão somente descrever o MCEF de forma bastante sucinta, o que é feito no anexo III.

Com o intuito de possibilitar uma melhor compreensão do texto apresenta-se a seguir uma breve visão do MCEF.

O domínio fluido infinito é particionado em três regiões conforme pode ser observado na figura 7.1. A região A_I que contém o corpo, é discretizada em uma malha de elementos finitos triangulares ou quadrangulares, e em seu interior a solução do problema de contorno se processa numericamente, através do MEF. Nas regiões exteriores A_{II}^\pm a solução é representada na forma de uma expansão em série de Fourier, cujos coeficientes são determinados a partir da compatibilização de fluxo e pressão nas fronteiras V^\pm .

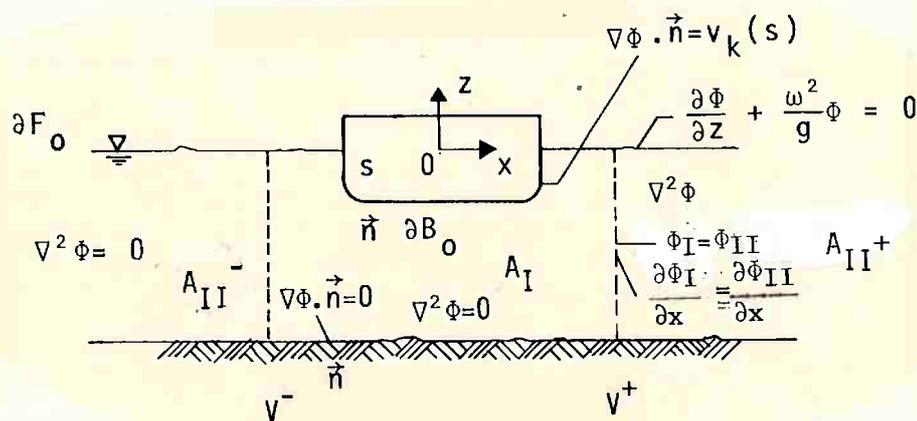


Fig. 7.1 - O método Compatibilizado de Elementos Finitos

As condições de contorno na superfície do corpo correspondentes aos problemas de difração e radiação são aplicadas separadamente e o cômputo final do potencial perturbado é feito através da combinação linear destas soluções, funções da resposta cinemática do corpo, para cada frequência de onda.

O MCEF foi aplicado ao presente trabalho através da elaboração do sistema DERIV, escrito em linguagem FORTRAN IV, e implementado em computador CDC.

O núcleo do sistema DERIV é o sistema ONDA, previamente desenvolvido [25], e que se constitui na programação do MCEF propriamente dito.

7.1. O Sistema DERIV

A utilização do sistema ONDA requereu a elaboração de dois programas a nível de pré e pós-processadores: CARGA e SODF respectivamente.

Designa-se DERIV o sistema integrado CARGA-ONDA-SODF.

O fluxograma de processamento do sistema DERIV é apresentado no diagrama 7.2 abaixo. O manual de utilização bem como as listagens dos programas são apresentados na referência [28].

O programa CARGA determina as condições de contorno na superfície do corpo correspondentes aos problemas de difração e radiação. O sistema ONDA resolve o problema linear bidimensional associado à equação (III.16) determinando numericamente a função potencial em cada nó da malha de discretização e calculando os coeficientes da série de Fourier correspondente à solução analítica nas regiões exteriores A_{II} . O programa SODF calcula os coeficientes hidrodinâmicos da seção, as forças excitantes, a resposta cinemática do corpo cilíndrico nos três graus de liberdade e os coeficientes de força de deriva correspondentes ao potencial de primeira e segunda-ordem. Efeitos de natureza

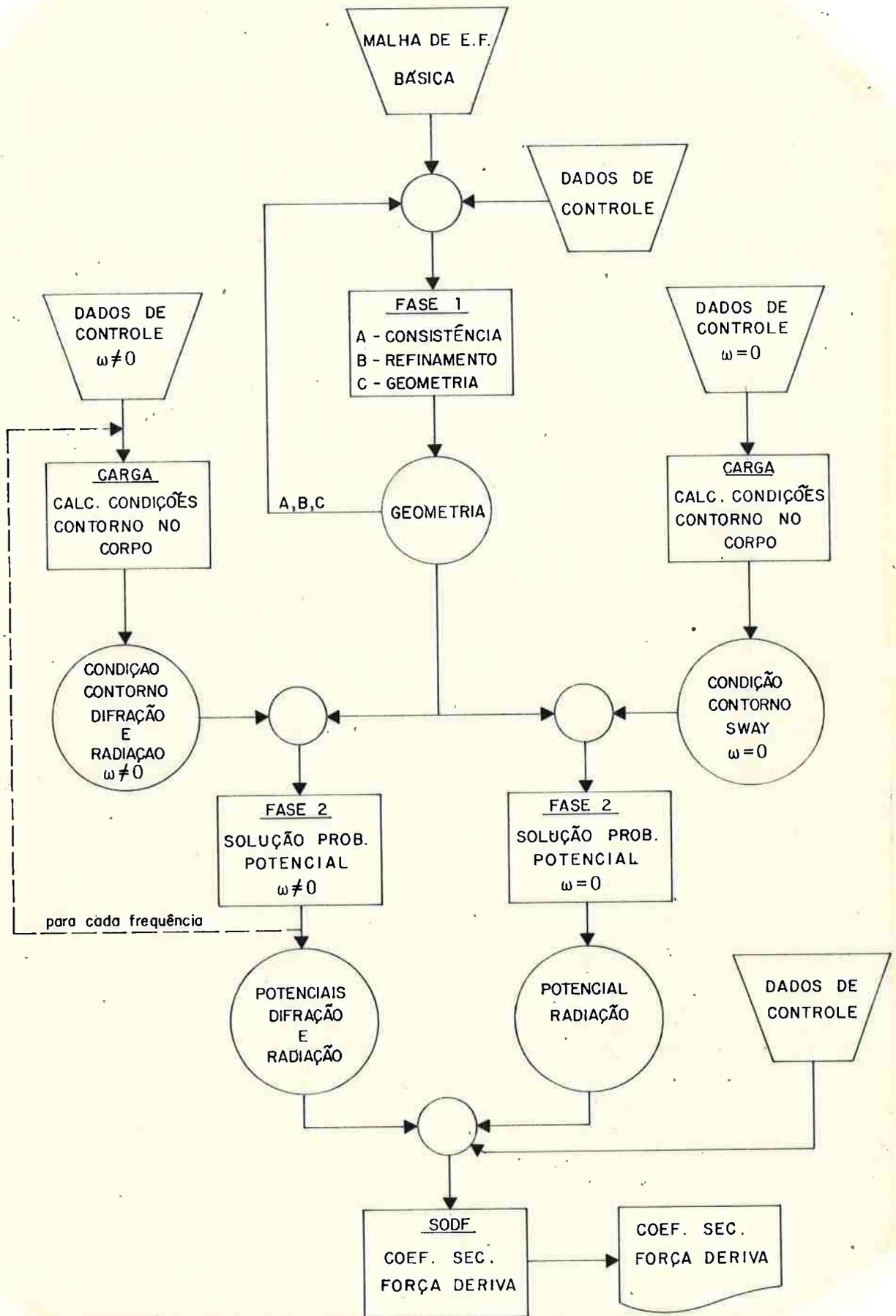


Fig. 7.1 - Fluxograma de Processamento do Sistema DERIV

viscosa e a ação de amarras de característica lineares de restauração são também consideradas.

7.1.1. Sistema ONDA

O sistema ONDA compõe-se de dois subsistemas denominados FASE1 e FASE2..

O subsistema FASE1 tem como funções:

- Verificar a CONSISTÊNCIA dos dados geométricos da malha
- REFINAR a malha de discretização
- Determinar as matrizes de funções características e operadores vetoriais associados à malha de discretização; proceder algoritmos de compactação e permutação com o objetivo de otimizar a solução do sistema linear final.

O subsistema FASE 2 tem como função:

- montar e solucionar o sistema linear dado em (III.32)

O sistema ONDA faz uso de malhas discretizadas por elementos triangulares com função características lineares. Os métodos numéricos e computacionais utilizados podem ser apreciados na referência [25] e considerações sobre convergência e erros associados à discretização e ao truncamento do número de termos da solução em série na referência [3]. O anexo III apresenta algumas particularidades dos procedimentos utilizados.

7.1.2. O programa CARGA

O programa CARGA calcula as condições de contorno na superfície do corpo e determina o vetor de condições nodais equivalentes. São considerados os casos correspondentes à difração (III.18) e radiação (III.19) em 3 graus de liberdade - "sway", "heave" e "roll" (deriva, arfagem e balanço). Os resultados são gravados em arquivo e se constituem nos dados de entrada do programa FASE2 do sistema ONDA.

7.1.3. O programa SODF

O programa SODF admite como dados de entrada os arquivos gerados pelo processamento do programa FASE2. O primeiro arquivo corresponde à solução da equação (III.52) na frequência ω de interesse. O segundo arquivo corresponde à solução da equação (III.52) formulada para o problema de radiação em "sway" na frequência nula.

O programa SODF determina os coeficientes de força de deriva associados ao potencial de primeira e segunda ordem, $Q_2^{(1)}$ e $Q_2^{(2)}$ respectivamente, através do cálculo do potencial total de perturbação causado pelo corpo. Como resultados intermediários adicionais o programa SODF determina os coeficientes e forças hidrodinâmicas seccionais e a resposta cinemática do corpo em primeira ordem.

O programa SODF consta de um programa principal, e de 29 subrotinas. Sua descrição e apresentação é feita na referência [28]. Exemplos de listagens de processamento constam do anexo X.

8. EXEMPLOS DE PROCESSAMENTO E DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Embora o método numérico adotado e implementado através do sistema DERIV permita considerar seções de forma arbitrária, restringiram-se os exemplos de processamento ao caso de seções retangulares.

Além da simplicidade geométrica, o que traz evidentes vantagens do ponto de vista de análise dos resultados, as seções retangulares são bastante representativas em problemas reais de fundo. Barcaças de serviço oceânico ou mesmo petroleiros armazenadores de petróleo caracterizam-se por possuírem longo corpo paralelo médio, de seção retangular ou quase-retangular.

Tais motivos fazem-nos alvo de estudo bastante frequente e conseqüentemente a elas correspondem dados e resultados mais abundantes, como se pôde constatar na bibliografia consultada.

Não se pretende porém apresentar resultados que possam conduzir a um estudo sistemático do cálculo de forças de deriva para tais seções.

O processamento dos exemplos escolhidos limita-se aos objetivos de fornecer elementos para discussão de tópicos julgados de relevante interesse no problema em estudo e muitas vezes abordados no decorrer do texto.

Em particular e em relação ao cálculo dos coeficientes de força de deriva, citam-se:

- . Influência da profundidade
- . importância relativa das contribuições associadas aos potenciais de primeira e segunda ordem
- . influência dos movimentos de primeira-ordem
- . influência da dissipação de energia por amortecimento viscoso nos movimentos de primeira-ordem
- . influência da posição vertical do centro de gravidade da seção

Para tanto, além dos resultados concernentes aos coeficientes de força de deriva são também apresentados aqueles referentes ao cálculo dos coeficientes e grandezas de primeira-ordem, correspondentes à teoria linear bidimensional. Entre eles incluem-se adicionalmente os coeficientes linearizados de amortecimento viscoso, decompostos em amortecimento por fricção ou por atrito e amortecimento vorticoso ou turbilhonar.

A apresentação dos resultados do problema linear cumpriu a dupla função de proporcionar ao leitor maior clareza de entendimento da discussão a ser realizada, e de possibilitar atestar a confiabilidade dos cálculos numéricos através de comparação com resultados encontrados na bibliografia.

Cumprir notar que o método desenvolvido no presente trabalho introduz um novo coeficiente $Q_2^{(2)}$ para o cálculo do efeito do potencial de segunda-ordem nas forças de deriva, não se encontrando na bibliografia parâmetros que a ele possam ser diretamente comparados nem tampouco resultados experimentais ou mesmo dados que pudessem ser analisados e correlacionados.

Observa-se também que o estudo do problema de deriva tem sido realizado fundamentalmente em águas de profundidade in finita, conforme se pode constatar na bibliografia consultada. A única referência encontrada [34], em que a influência da pro fundidade é abordada, restringe-se a estudar os efeitos relativos ao potencial de primeira-ordem em corpos tridimensionais.

8.1. Descrição dos Exemplos de Processamento

A escolha dos exemplos de processamento foi feita com o objetivo de apresentar casos típicos de solução do problema e de mostrar a sensibilidade dos coeficientes e forças hidrodinâmicas à variação de parâmetros geométricos e dinâmicos.

Elegeu-se um problema de referência, o qual denominou-se A, correspondente ao caso de uma seção retangular com razão boca-calado (B/d) igual a 2.0 e razão profundidade-boca (h/B) igual a 1.0. Variando-se os parâmetros geométricos e topológicos da malha de referência foram construídas outras três malhas de elementos finitos.

A figura 8.1 esquematiza os parâmetros geométricos con siderados. A tabela 8.1 descreve as características dos problemas analisados.

Tabela 8.1 - Característica dos Problemas Analisados - Seção Retangular

MALHA	PARÂMETROS DA SEÇÃO			PARÂMETROS DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS					
	B/d	h/B	h/d	N_T		N_e		N_B	
				Básica	Refinada	Básica	Refinada	Básica	Refinada
A	2.0	1.0	2.0	49	161	64	256	11	21
B	2.0	2.0	4.0	57	191	78	312	11	21
C	2.0	5.0	10.0	70	237	98	392	11	21
D	2.0	1.0	2.0	77	265	112	448	19	37

N_T : número de nós ; N_e : número de elementos

N_B : número de nós na superfície do corpo.

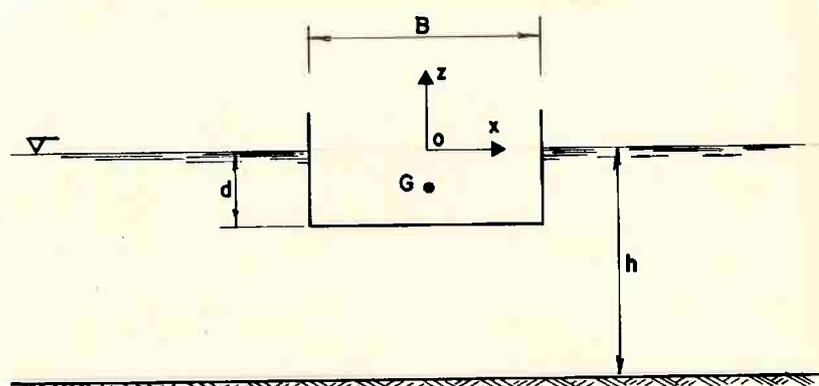


Fig. 8.1 - Parâmetros geométricos dos problemas analisados

As malhas de elementos finitos são apresentadas em sua forma básica nas figuras 8.2 a 8.6. As malhas B e C foram construídas sucessivamente a partir da malha A de referência, objetivando analisar o efeito da profundidade na solução do problema.

A malha D difere da malha A tão somente na topologia junto às quinas da seção. Visa evidenciar a sensibilidade do coeficiente e forças hidrodinâmicas ao grau de refinamento nestas regiões. Um estudo sistemático do problema fugiria em demasia do escopo do presente trabalho, podendo ser porém observado em Aranha (1982) [3].

Os processamentos foram realizados sob as seguintes condições básicas:

- . posição vertical do centro de gravidade: $zG/B = -0.125$
- . raio de giração: $r_o/B = 0.25$
- . inclusão de efeitos viscosos nos movimentos de roll e sway⁽¹⁾
- . inclinação da onda incidente: $KA = 0.0628(2A/\lambda=2\%)^{(2)}$
- . corpo sem qualquer restrição ao movimento⁽³⁾

O caso A foi processado ainda em duas condições adicionais:

- A₁ : alterando-se a posição do C.G: $zG/B = -0.25$
- A₂ : sem a inclusão de efeitos viscosos nos movimentos de roll e sway

Tais alterações visam mostrar a forte influência do movimento de "roll nos coeficientes de força de deriva.

(1) - modelo semi-empírico de Ikeda e Tanaka [22] (anexo IX)

(2) - os coeficientes de amortecimento viscoso dependem linearmente da inclinação da onda (ver anexo IX)

(3) - o objetivo do presente capítulo é o cálculo dos coeficientes de força de deriva em frequências super-ressonantes em relação à frequência natural em "sway" imposta por eventual linha de fundeio; nesta situação dominam as forças de inércia e podem ser desconsideradas as forças de natureza elástica; em frequências ressonantes as forças de deriva são desprezíveis em relação às forças de primeira-ordem.

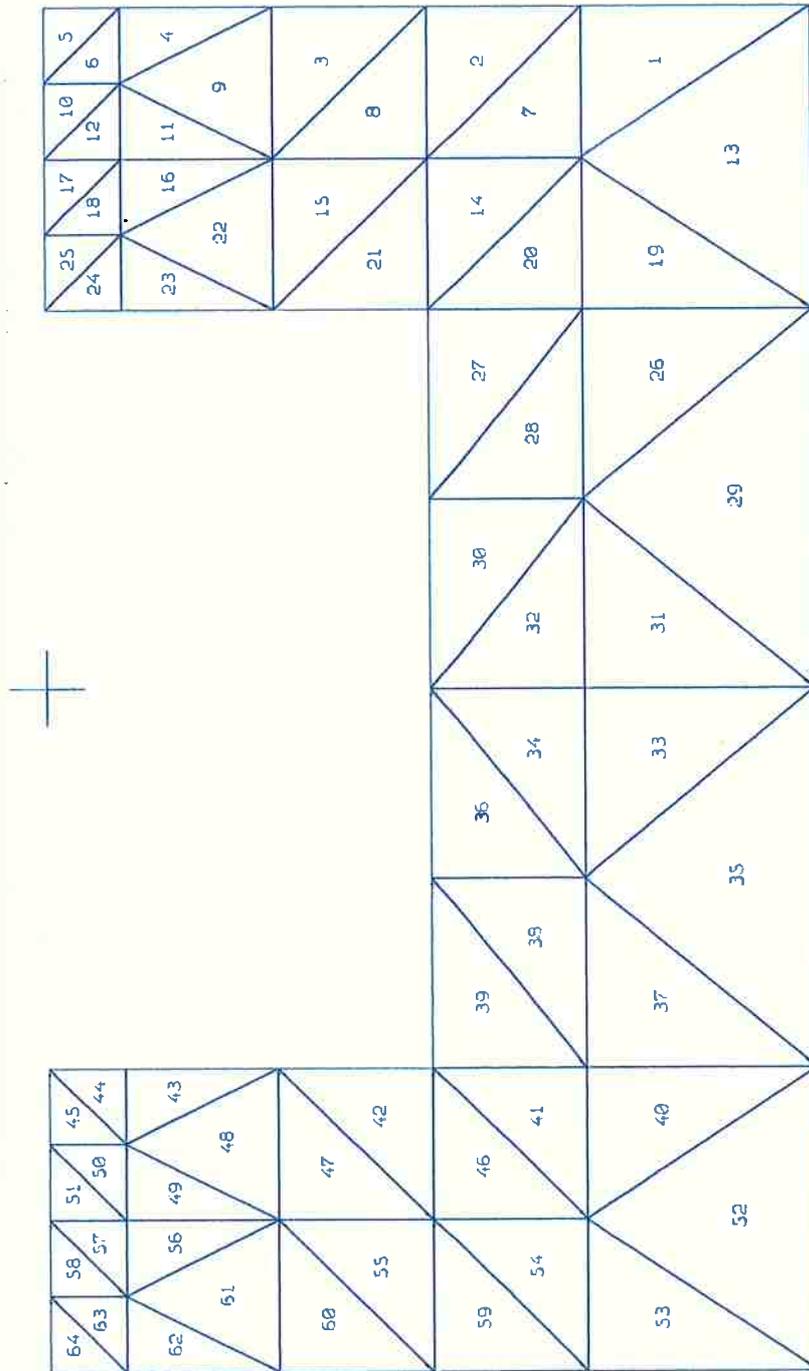


Fig. 8.2 - Malha de Elementos Finitos Básica. Caso A
 $B/d=2.0$ $h/B=1.0$

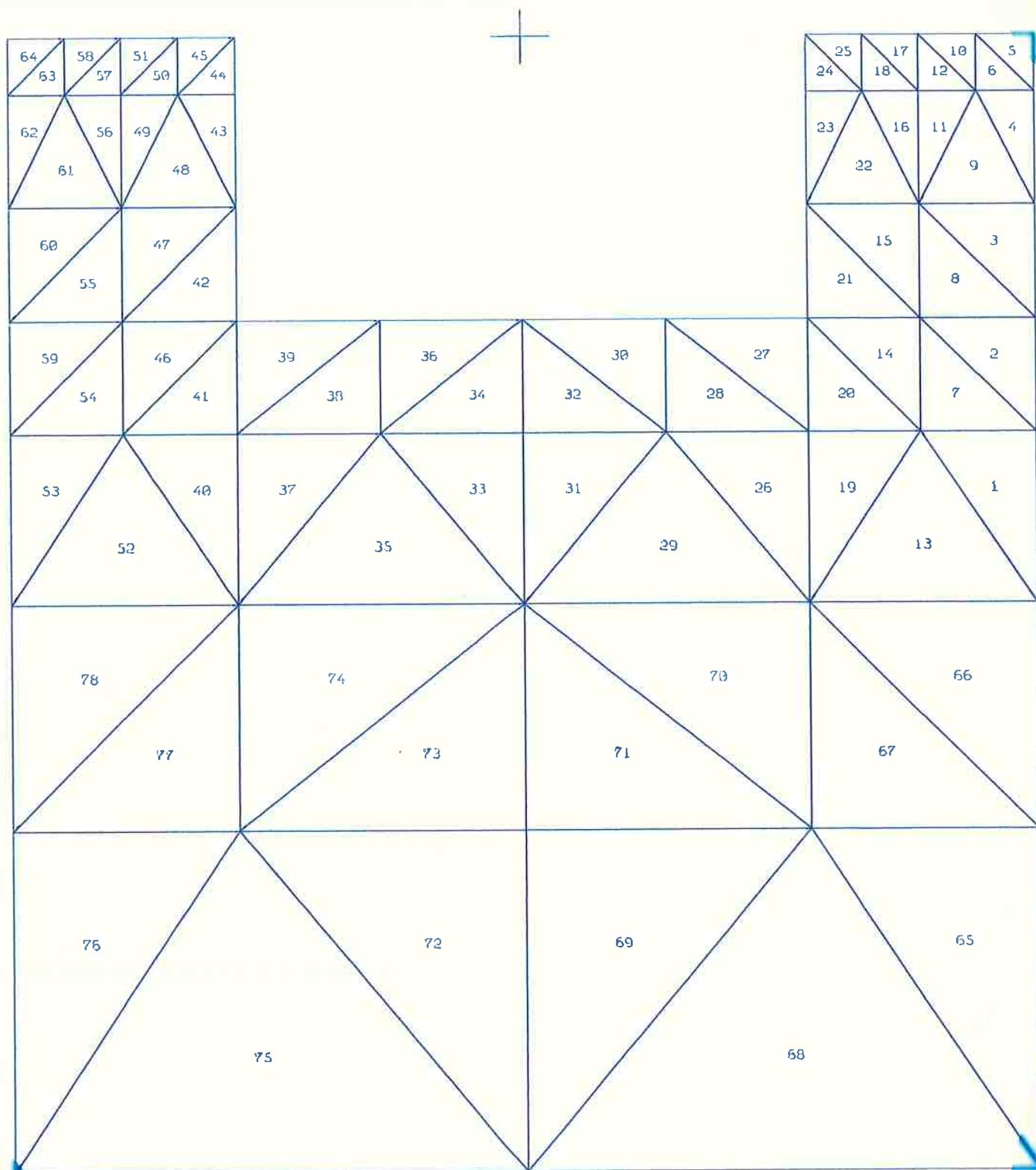


Fig. 8.3 - Malha de Elementos Finitos Básica. Caso B
 $B/d=2.0$ $h/B=2.0$

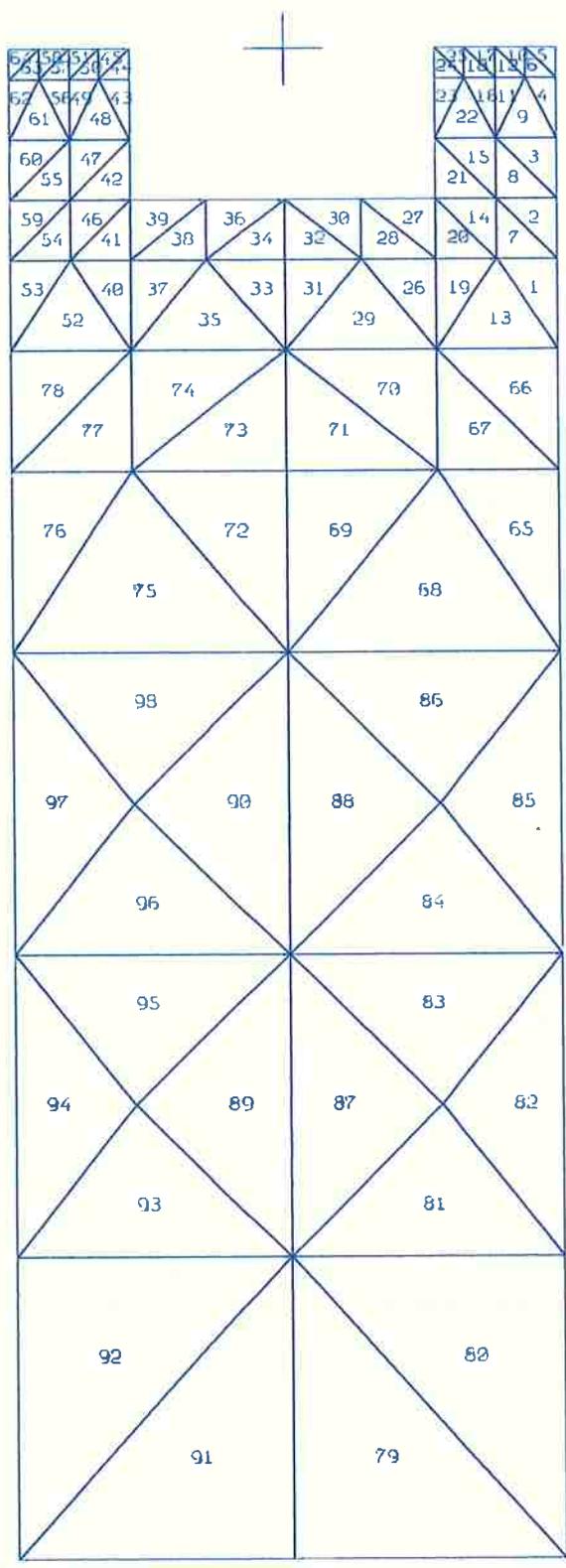
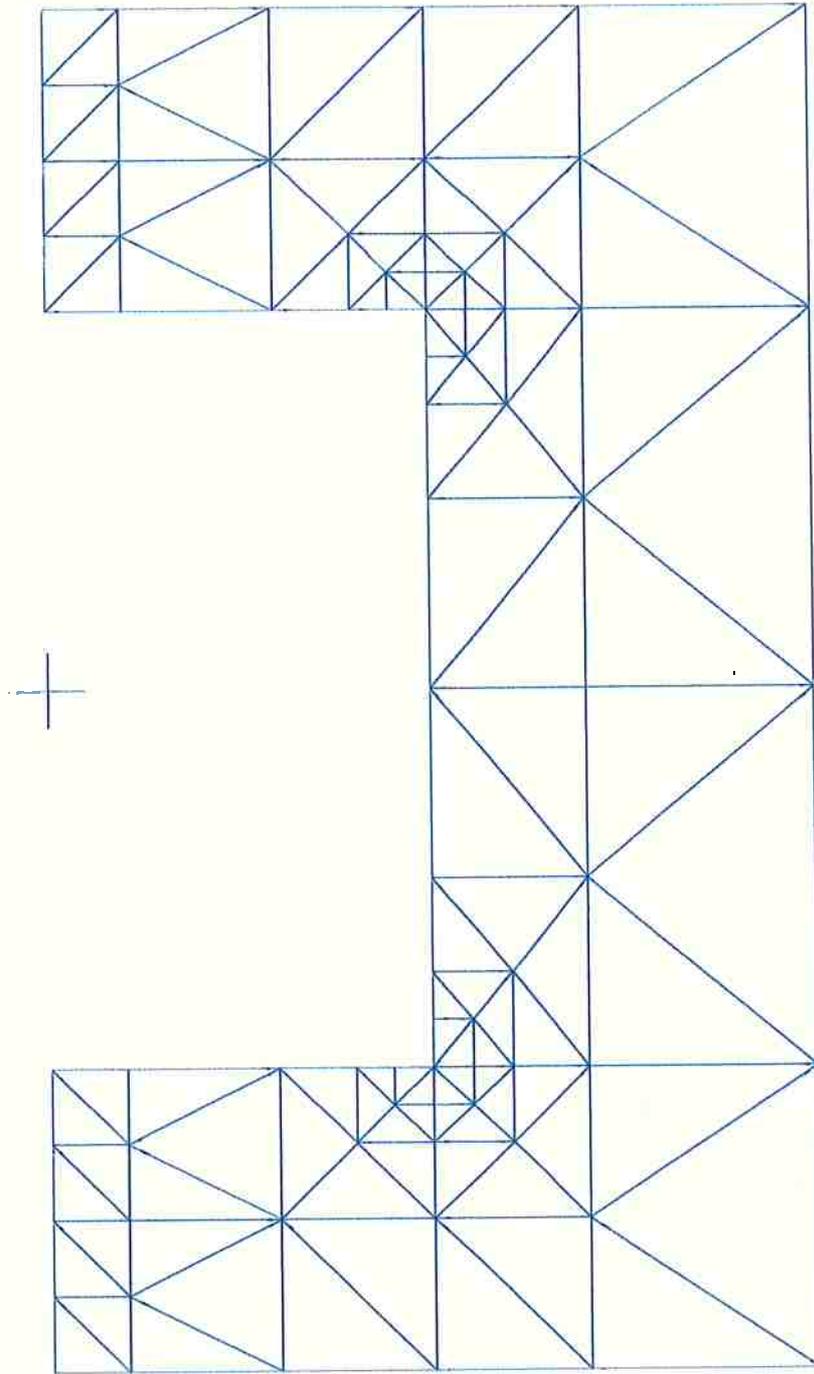


Fig. 8.4 - Malha de Elementos Finitos Básica. Caso C
 $B/d=2.0$, $h/B=5.0$



8.9.

Fig. 8.5 - Malha de Elementos Finitos Básica. Caso D
 $B/d=2.0$, $h/B=2.0$

Cabe observar por fim, e a título de maior clareza de entendimento, que se arbitrarmos a dimensão de 20m à boca B da seção, seu calado terá 10m e as lâminas d'água consideradas terão 20,40 e 100m respectivamente

Considerando-se então, da relação de dispersão, $\tanh k_p h = 0.99$ como o limite indicativo de águas profundas e $\tanh k_r h = 0.99 k_r h$ como limite indicativo de águas rasas, construiu-se a tabela 8.2 abaixo para os problemas considerados.

Tabela 8.2. - Parâmetros Dimensionais Típicos dos Problemas Analisados

MALHA	\hat{h} (m)	\hat{k}_p (m^{-1})	$\hat{\omega}_p$ (s^{-1})	T_p (s)	k_r (m^{-1})	$\hat{\omega}_r$ (s^{-1})	\hat{T}_r (s)
A	20	0.1325	1.145	5.48	8.75×10^{-3}	1.23×10^{-2}	51.0
B	40	0.0662	0.809	7.76	4.37×10^{-3}	8.71×10^{-2}	72.2
C	100	0.0265	0.512	12.27	1.75×10^{-3}	5.51×10^{-2}	114.1
	h	k_p	ω_p	T_p	k_r	ω_r	T_r
A	2.0	1.325	1.145	5.48	8.75×10^{-2}	0.123	51.0
B	4.0	0.662	0.809	7.76	4.37×10^{-2}	0.087	72.2
C	10.0	0.265	0.512	12.27	1.75×10^{-2}	0.055	114.1

Como se pode observar da tabela acima, pode-se considerar a lâmina d'água como profunda em períodos de onda inferiores a 12.3 seg., para a malha C, 7.8 seg para a malha B e 5.5 seg para a malha A. Os limites correspondentes a águas-rasas são bastante superiores aos maiores períodos que caracterizam as ondas de gravidade (~20 seg).

8.2. Apresentação e Discussão de Resultados

Os resultados numéricos são apresentados na forma de gráficos relacionando coeficientes e funções de transferência de movimentos com a frequência da onda incidente. Os valores são adimensionalizados conforme o anexo IV. Segue-se a adimensionalização utilizada por Vugts no que concerne aos coeficientes hidrodinâmicos e forças excitantes em primeira-ordem.

8.2.1. Coeficientes de Força de Deriva e Coeficientes de Reflexão e Transmissão

Os gráficos de número 8.1 a 8.9 apresentam os resultados numéricos relativos aos coeficientes de força de deriva $Q_2^{(1)}$ e $Q_2^{(2)}$, associados aos efeitos dos potenciais de primeira e segunda-ordem respectivamente, e relativos ao coeficiente de reflexão.

Os gráficos 8.1 a 8.3 têm como objetivo mostrar a influência da variação da profundidade da lâmina d'água no cálculo destes coeficientes.

Em particular o coeficiente $Q_2^{(2)}$ é bastante sensível à variação da profundidade.

O efeito da profundidade é também bastante importante no cálculo do coeficiente $Q_2^{(1)}$ (gráfico 8.1) tornando-o mais elevado à medida que diminui a profundidade, em uma dada frequência de onda.

O gráfico 8.4 apresenta o parâmetro α definido no capítulo 5 pela expressão 5.15.a, e que relaciona a importância

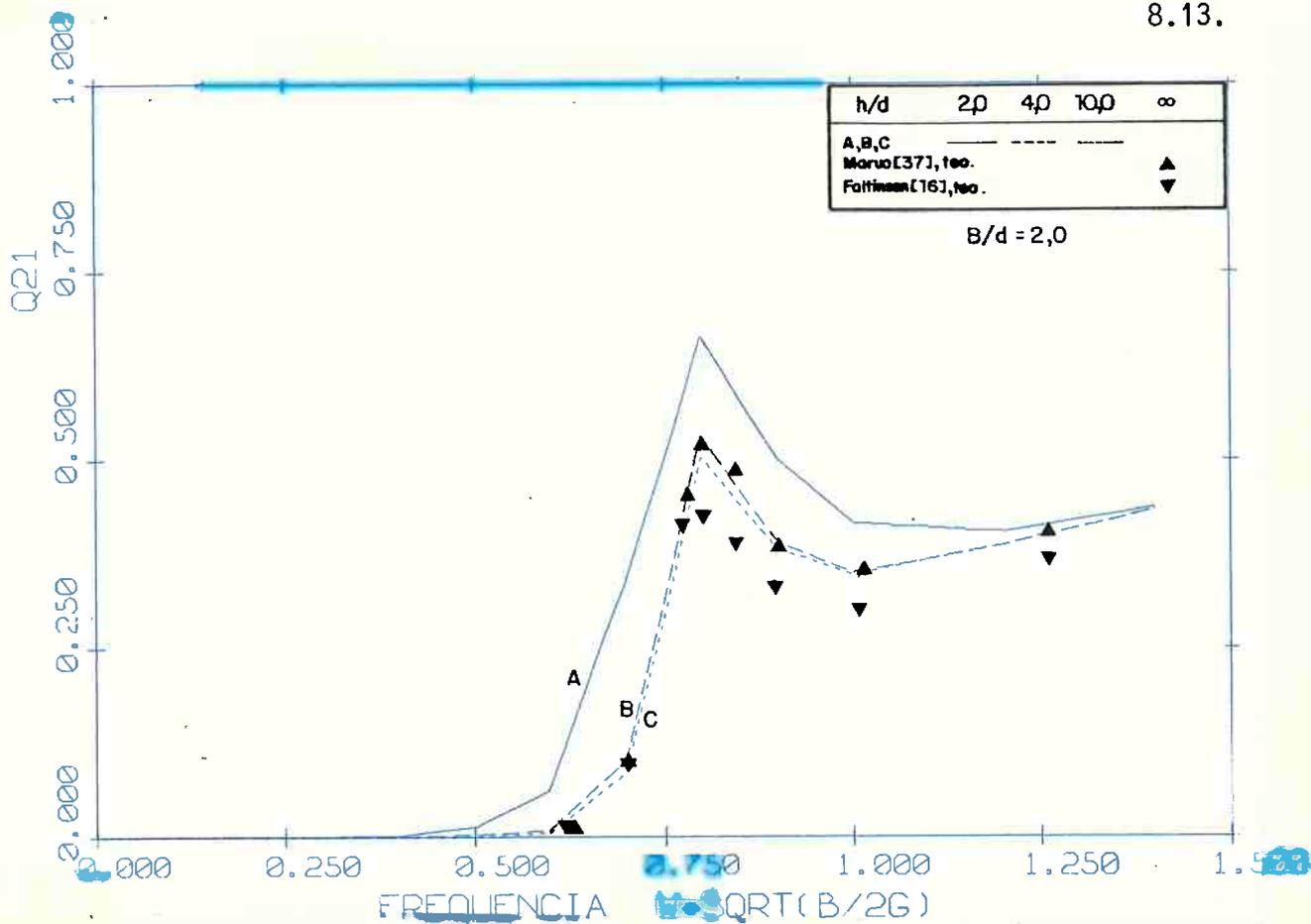
das contribuições dos potenciais de primeira e segunda-ordem no cômputo das forças de deriva. Note-se que se, de acordo com o exemplo sugerido, tomarmos $\hat{B} = 20\text{m}$ e $\Omega \cong 0.2$, o parâmetro α assume o valor $0(1)$ para as frequências próximas a $\omega_A = 0.5$, $\omega_B = 0.6$ e $\omega_C = 0.7$, correspondentes as profundidades 20m (A), 40m (B) e 100m (C) respectivamente. Ou seja, para ondas cuja frequência central do espectro (ω_0) é inferior a ω_A , ω_B e ω_C os efeitos do potencial de segunda-ordem são preponderantes.

É fato que em tais frequências o coeficiente $Q_2^{(1)}$ é bem menor do que $0(1)$. No entanto, é também fato que às menores frequências estão associadas as ondas de maior amplitude e que a força de deriva a ela é quadraticamente proporcional.

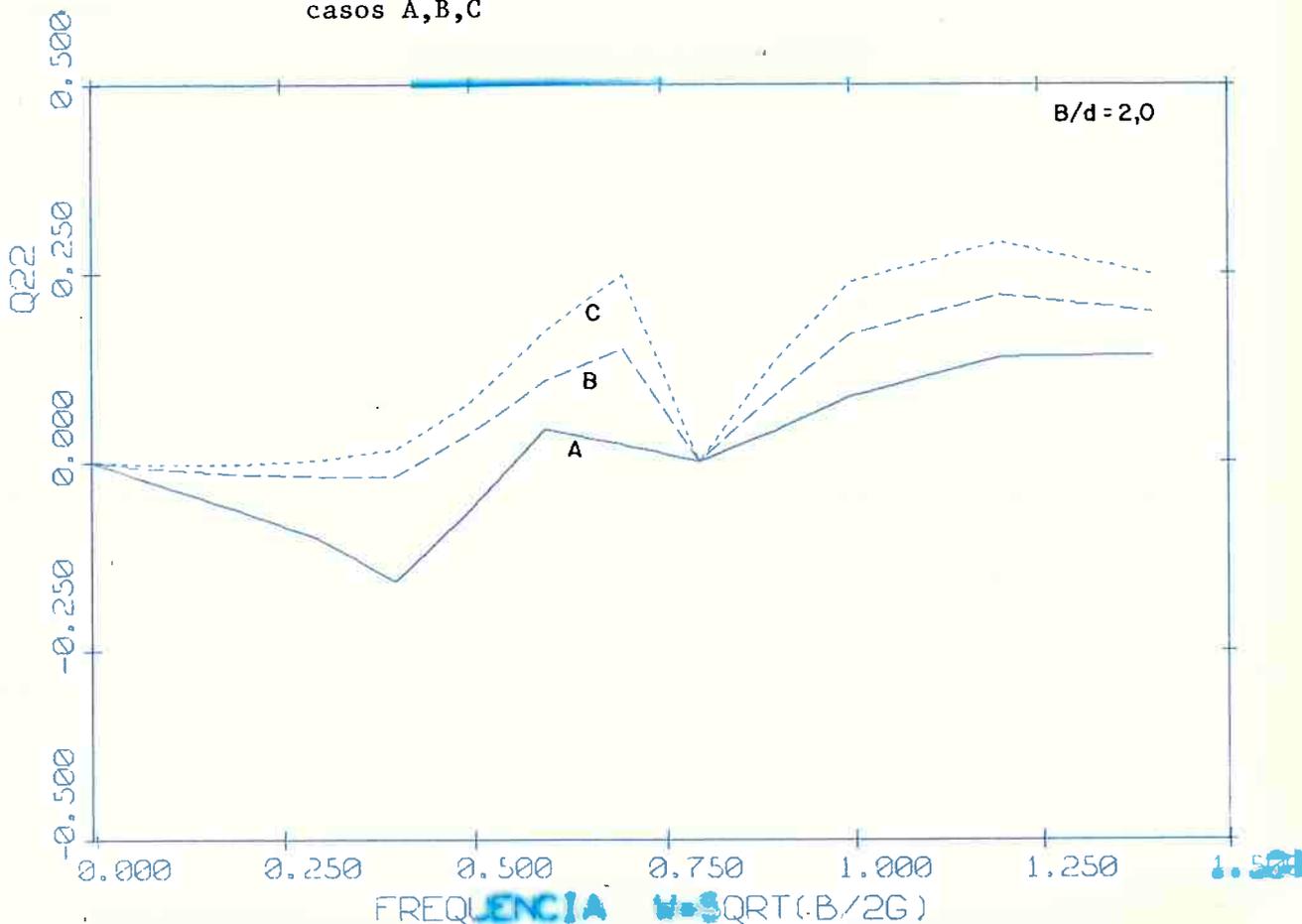
É importante observar a forte correlação dos coeficientes de deriva com os movimentos de "roll" e "heave" do corpo cilíndrico.

Observando-se os gráficos 8.2 e 8.34 verifica-se que o pico do movimento de roll faz alterar significativamente a tendência das curvas de $Q_2^{(2)}$ em $\omega \sim 0.5$. Esta dependência é reforçada pelos gráficos 8.6 e 8.36. No caso A_2 o pico em roll é bastante pronunciado, devido à não inclusão de dissipação viscosa, perturbando significativamente o coeficiente $Q_2^{(2)}$. No caso A_1 a curva de $Q_2^{(2)}$ assume um mínimo local em $\omega \sim 0.7$ e encontra forte alteração em sua tendência em $\omega \sim 0.9$ devido ao fato da máxima resposta do movimento de roll se dar nesta frequência.

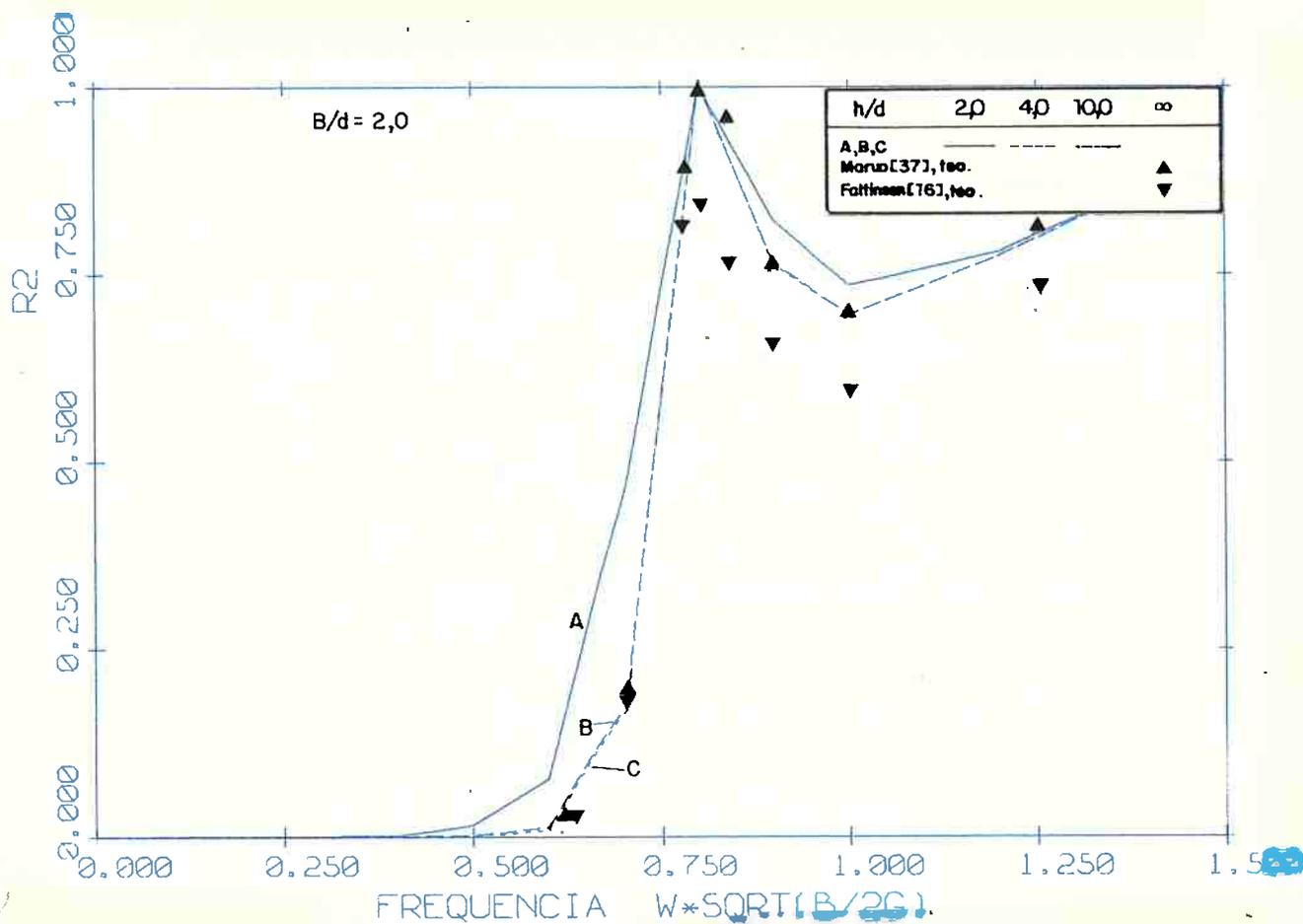
Voltando as atenções ao gráfico 8.32 fica evidente a forte dependência de $Q_2^{(2)}$ com relação ao movimento de heave. Tanto os



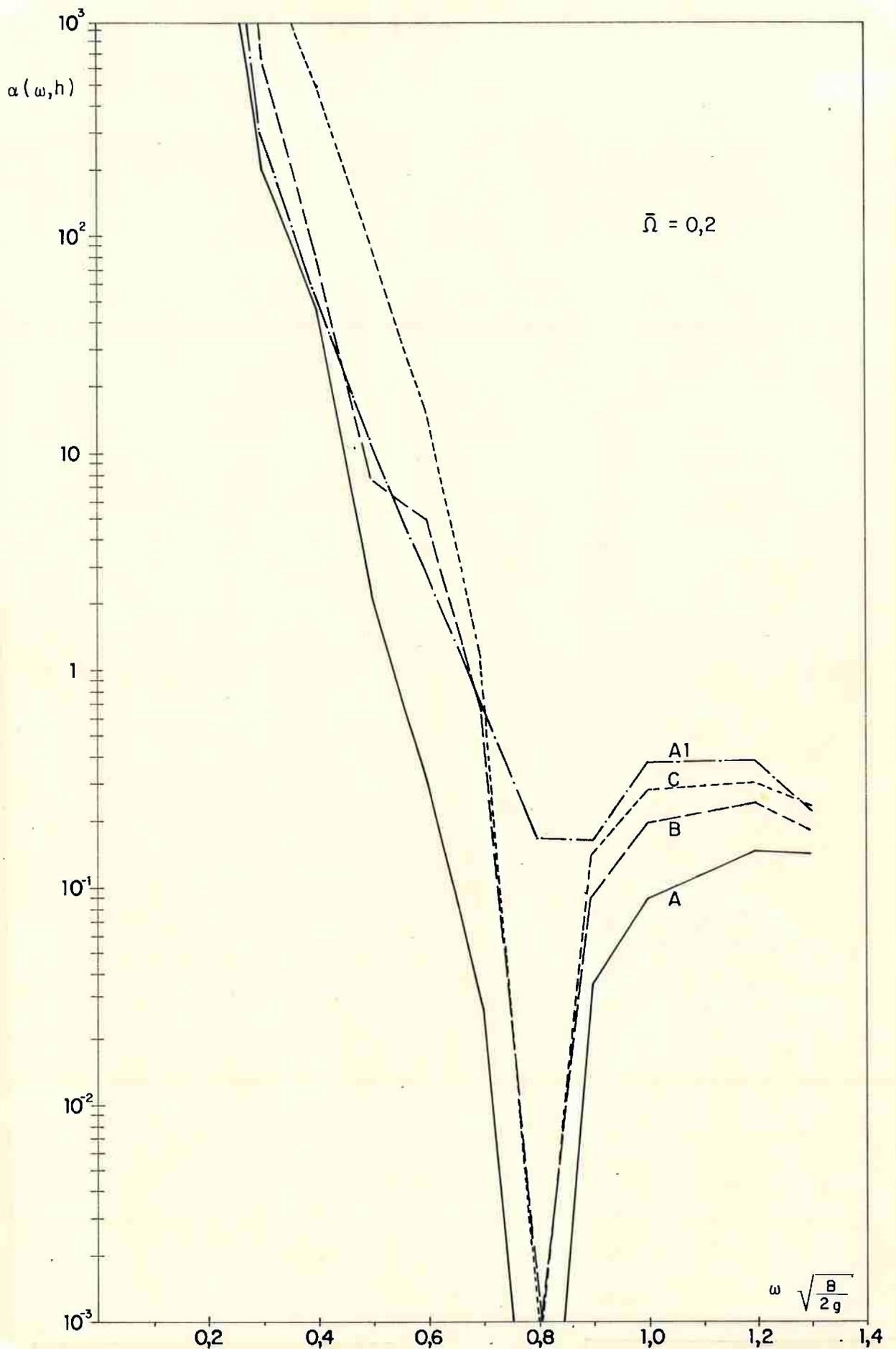
Graf. 8.1 - Coeficiente de força de deriva $Q_2^{(1)}(\omega, h)$: contribuição do potencial de primeira-ordem, seção retangular, casos A, B, C



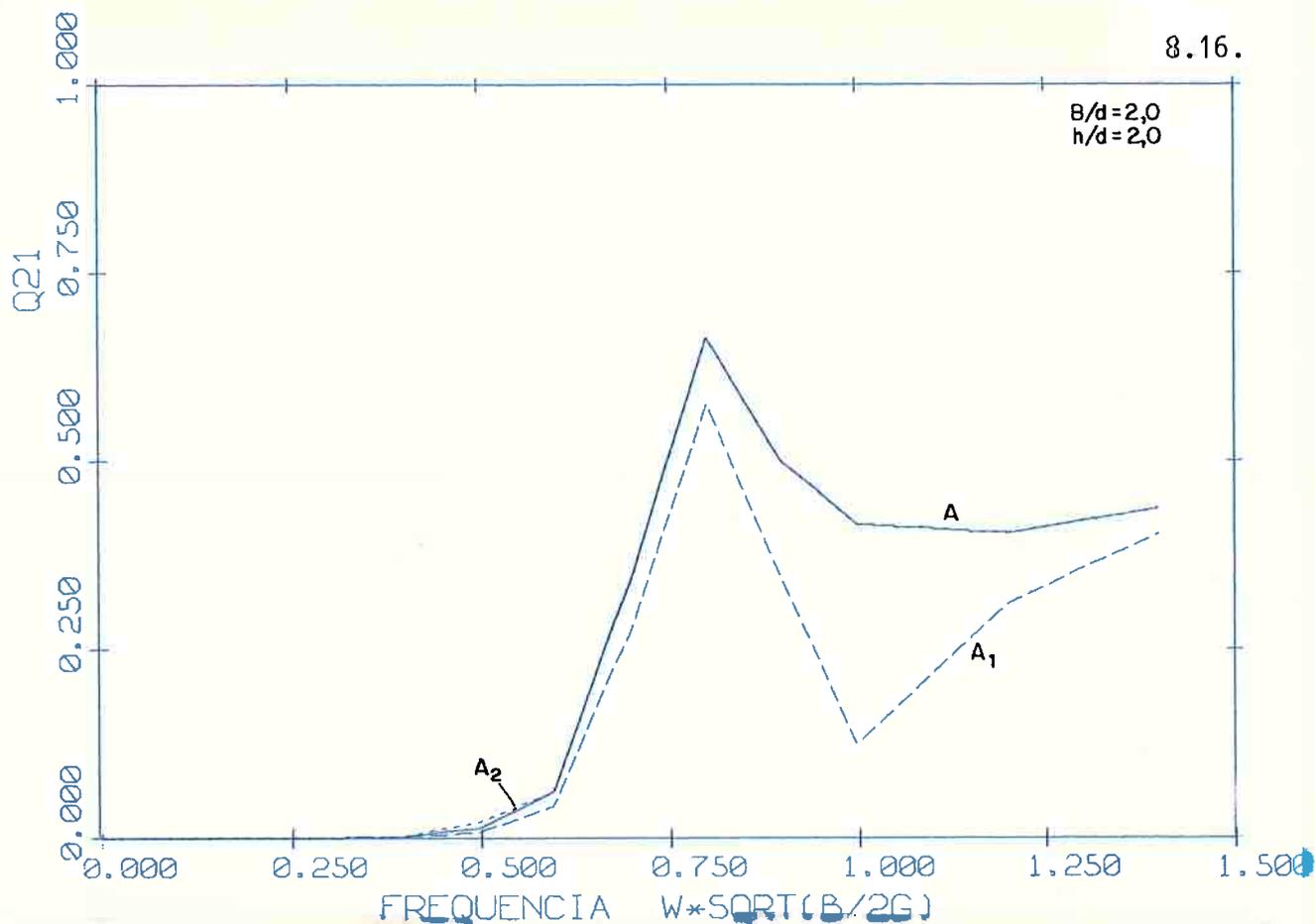
Gráf. 8.2 - Coeficiente de força de deriva $Q_2^{(2)}(\omega, h)$: contribuição do potencial de segunda-ordem. Seção retangular, casos A, B, C



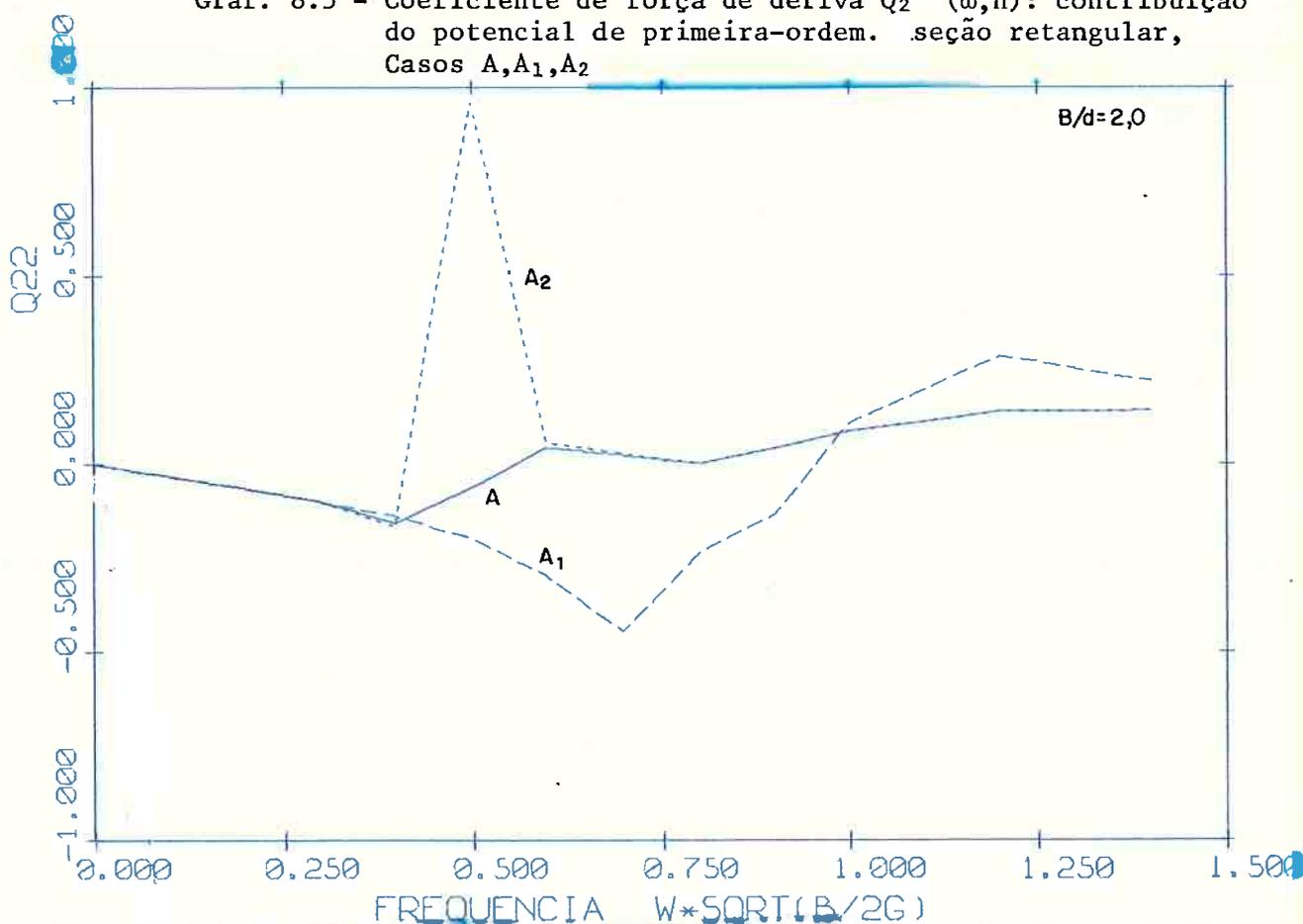
Graf. 8.3 - Coeficiente de reflexão $|R|^2$. Seção retangular, casos A, B, C



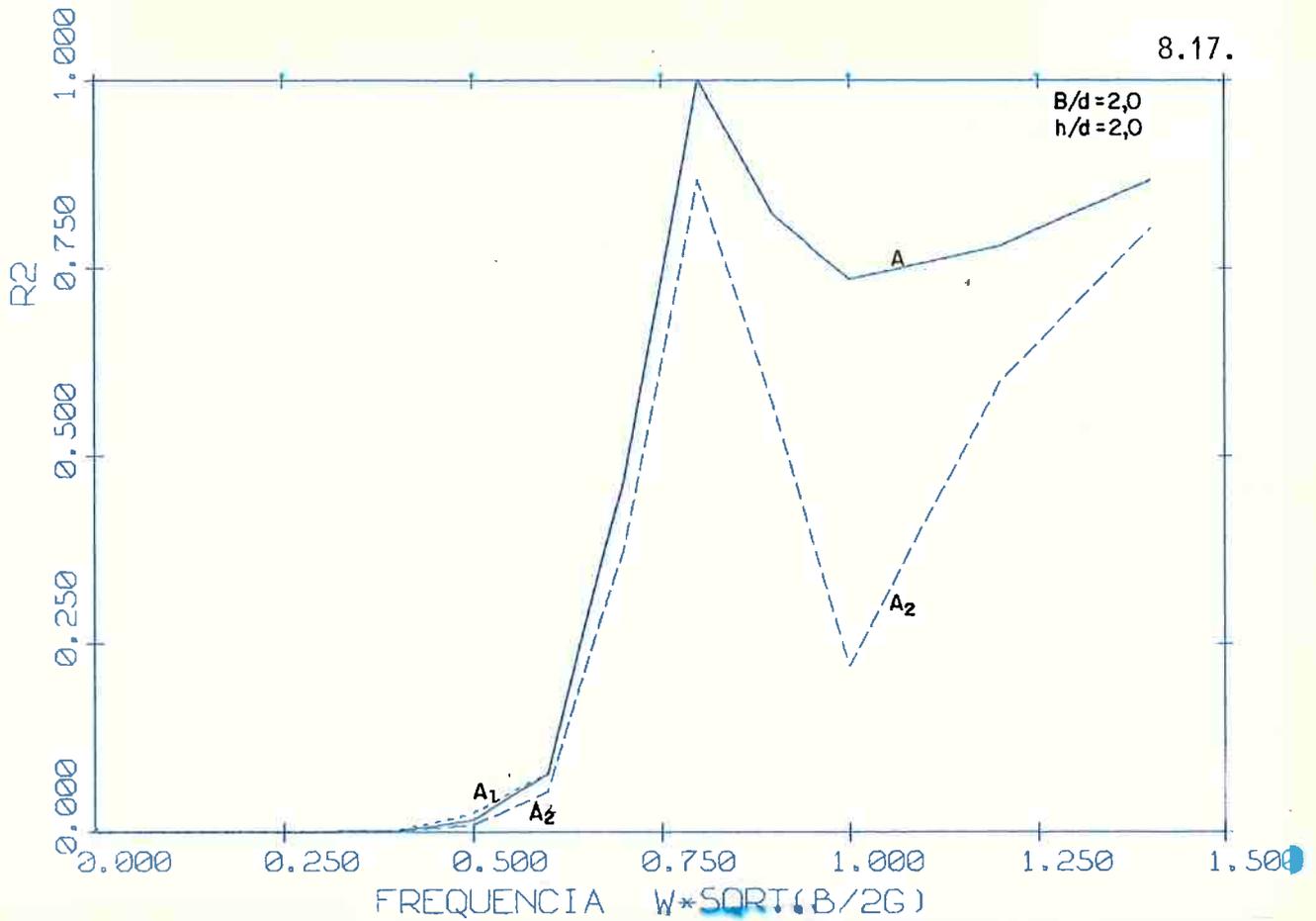
Graf. 8.4 - Coeficiente α de importância relativa entre as contribuições dos potenciais de primeira e segunda ordem nas forças de deriva. Seção retangular, Casos A,B,C,A1



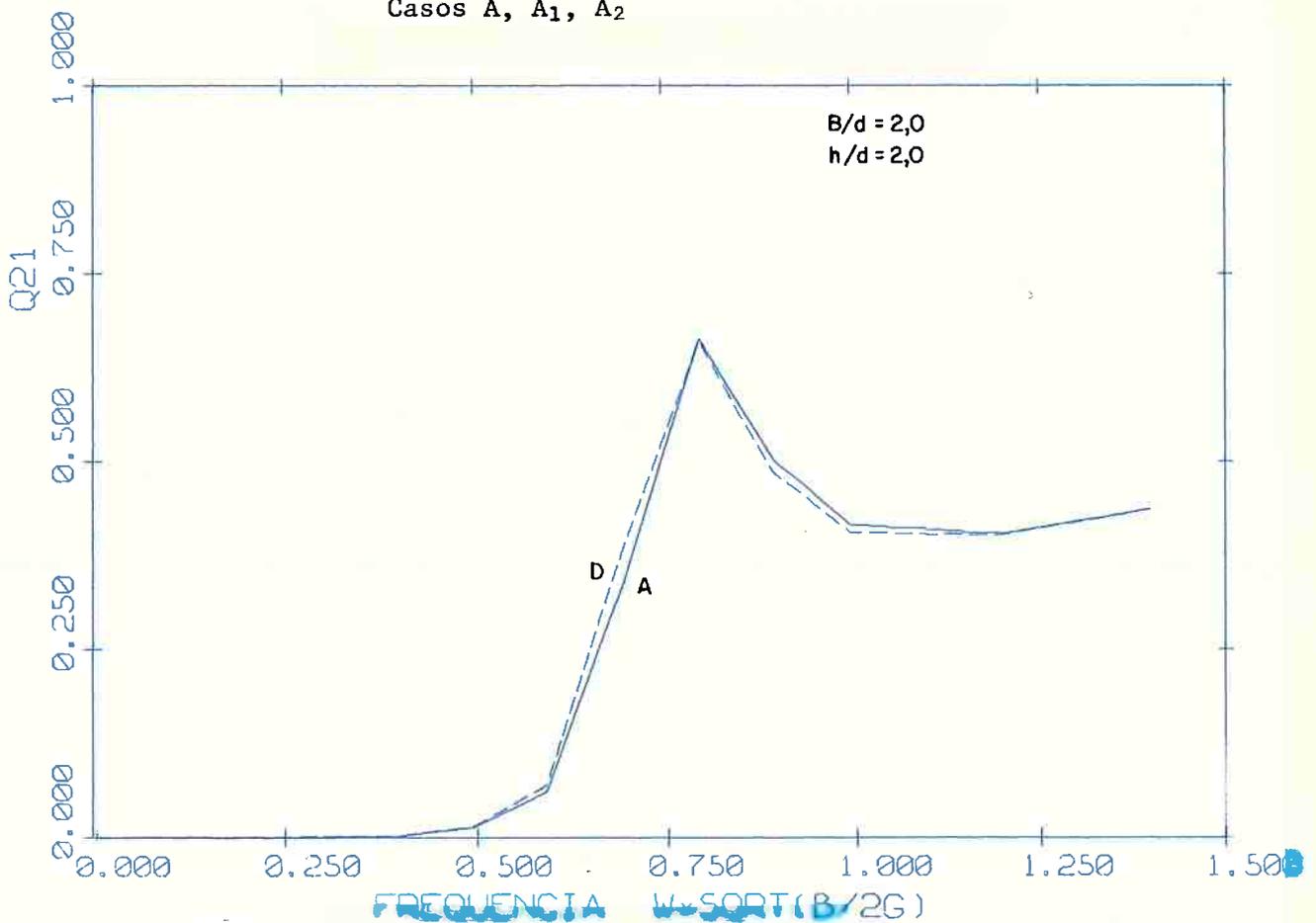
Graf. 8.5 - Coeficiente de força de deriva $Q_2^{(1)}(\omega, h)$: contribuição do potencial de primeira-ordem. seção retangular, Casos A, A₁, A₂



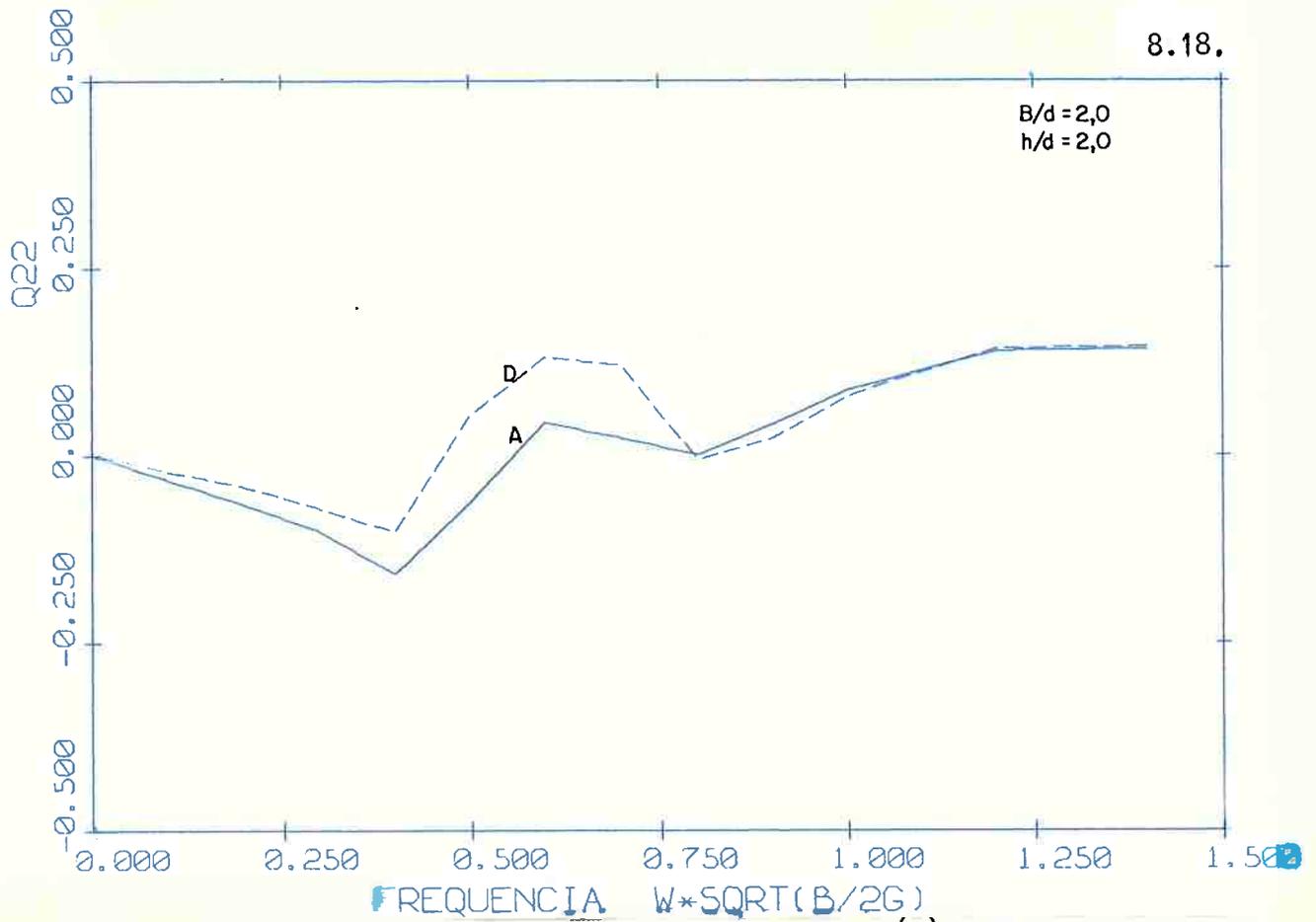
Graf. 8.6 - Coeficiente de força de deriva $Q_2^{(2)}(\omega, h)$: contribuição do potencial de segunda-ordem. Seção retangular, casos A, A₁, A₂.



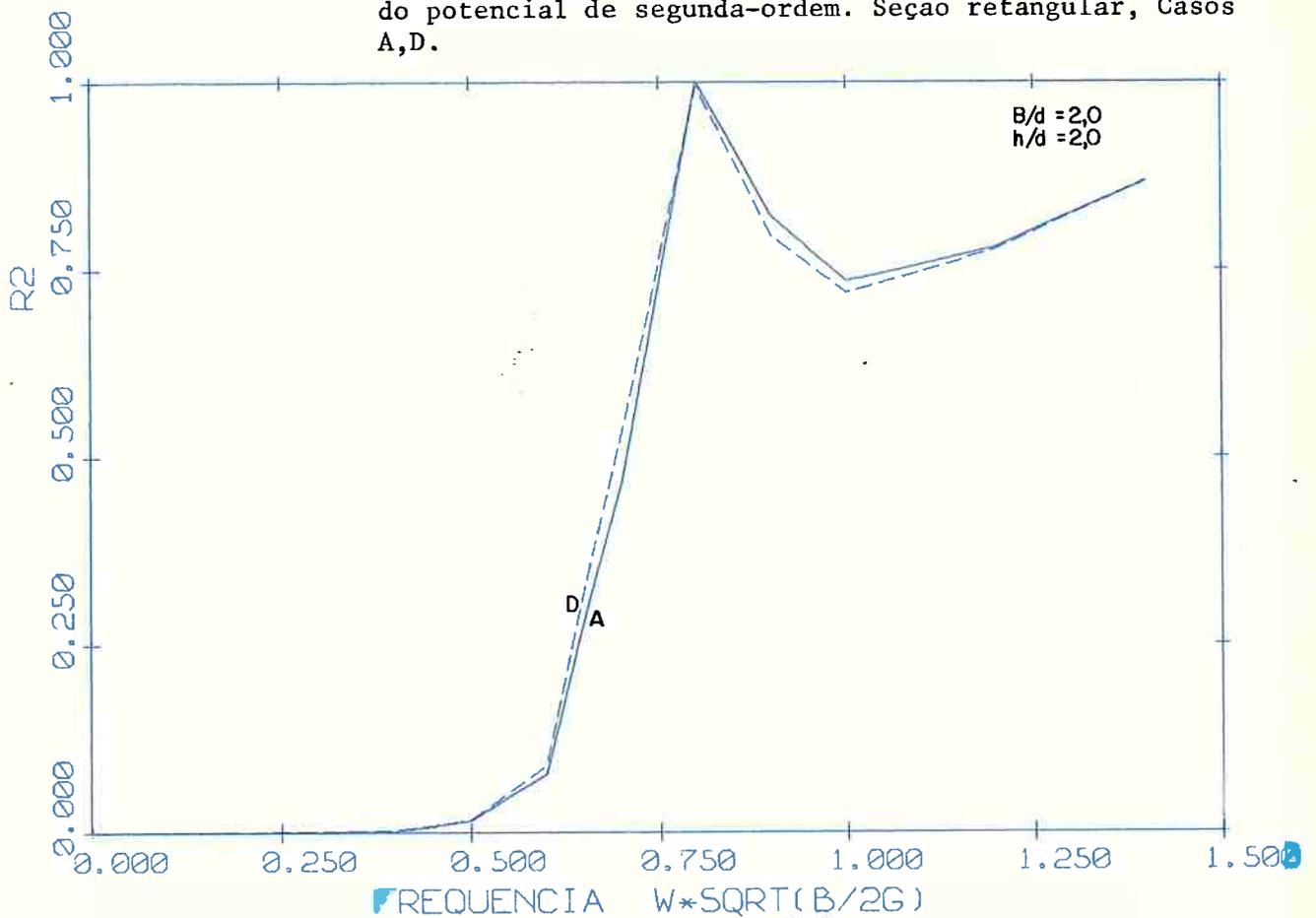
Graf. 8.7 - Coeficiente de reflexão $|R|^2$. Seção retangular, Casos A, A₁, A₂



Graf. 8.8.- Coeficiente de força de deriva $Q_2^{(1)}$ (ω, h): contribuição do potencial de primeira-ordem. Seção retangular, casos A, D.



Graf. 8.9 - Coeficiente de força de deriva $Q_2^{(2)}(\omega, h)$: contribuição do potencial de segunda-ordem. Seção retangular, Casos A, D.



Graf. 8.10 - Coeficiente de reflexão $|R|^2$. Seção retangular, casos A, D.

máximos locais observados no gráfico 8.2 em $\omega \sim 0.7$ quanto o mínimo observado no gráfico 8.6, caso A', ocorrem na frequência de máxima resposta em "heave".

Por sua vez o coeficiente $Q_2^{(1)}$ é fortemente dependente destes movimentos. O máximo local em $\omega \sim 0.8$ se deve à perturbação causada pelo corpo se movimentando nos modos de "heave" e "roll" (ver gráficos 8.2, 8.32 e 8.34). Note-se que no caso A' ($\omega_0 \sim 0.9$) o lobo de $Q_2^{(1)}$ em $\omega \sim 0.8$ é atenuado. Em contrapartida há um mínimo local em $\omega \sim 1.0$ evidenciando que, dependendo da fase relativa entre os movimentos pode haver aumento ou redução de $Q_2^{(1)}$.

Note-se por fim que $Q_2^{(1)} \rightarrow 0.5$ com $\omega \rightarrow \infty$ e $Q_2^{(2)} \rightarrow 0$ linearmente com ω , ou seja $\frac{Q_2^{(1)}}{\omega}$ tem um limite finito diferente de zero em $\omega = 0$.

Os resultados numéricos obtidos para $Q_2^{(1)}$ foram correlacionados àqueles apresentados por Faltinsen & Locken (1980) [16], referentes ao cálculo em águas de profundidade infinita. Correspondem portanto ao caso C, em frequências superiores a $\omega \sim 0.5$ (ver item 8.1). Esta correlação é apresentada no gráfico 8.1. Note-se a perfeita consistência da curva C com os resultados obtidos por Maruo, transcritos em [16]. Os resultados devido a Faltinsen & Locken são ligeiramente inferiores apresentando porém a mesma tendência.

Cumprе notar que não foram encontrados na bibliografia pesquisada resultados que pudessem oferecer ampla correlação. Apenas Kokkinowrachos (1983) [34] investiga o efeito da varia -

ção da profundidade no cálculo do coeficiente $Q_2^{(1)}$. Os resultados publicados referem-se porém a corpos tridimensionais de baixa esbeltez.

Por sua vez o coeficiente $Q_2^{(2)}$ constitui um novo enfoque no estudo das forças de deriva e tal fato impossibilita sua verificação direta. Atesta-se porém os resultados numéricos alcançados através da correlação dos coeficientes hidrodinâmicos e forças excitantes em primeira-ordem com aqueles apresentados por Vugts (1968) [66], Kim (1968) [29] e Korrinowrachos (1983) [34]. Tais correlações são objeto da seção 8.2.2, deixando-se para então sua discussão. Adianta-se no entanto que as comparações são amplamente satisfatórias trazendo confiabilidade aos valores numéricos de $Q_2^{(2)}$.

Cabe por fim lembrar que devem ser levantados dados experimentais com o fim específico de confirmar a teoria aqui apresentada. Em que pese a aparente simplicidade na realização de tais experimentos enfatiza-se que a grandeza de interesse é de segunda-ordem, e portanto de difícil detecção. A medição direta através de transdutores de força convencionais certamente lhe imporia erros experimentais, talvez inaceitáveis. Métodos indiretos tais como a medição dos movimentos em baixa frequência e posterior análise harmônica tendo como referência a função de modulação em amplitude poderiam ser cogitados. Ressalta-se porém que erros outros estariam envolvidos, associados à determinação experimental dos coeficientes hidrodinâmicos, ou mesmo aos métodos numéricos de análise empregados.

Quaisquer que sejam porém os métodos experimentais aventados, seu emprego certamente exigiria um estudo bastante aprofundado, envolvendo quiçã o desenvolvimento de técnicas originais de experimentação e fugindo portanto do escopo do presente trabalho.

8.2.2. Grandezas de Primeira-Ordem: Coeficientes hidrodinâmicos, forças excitantes e movimentos

Os gráficos de número 8.11 a 8.36 apresentam os coeficientes hidrodinâmicos, forças excitantes e curvas de resposta em frequência dos movimentos.

Os coeficientes e forças hidrodinâmicos são apresentados na forma adimensionalizada segundo Vugts, conforme descrito no anexo IV. As curvas de resposta em frequência ou funções de transferência dos movimentos em primeira ordem são apresentadas na forma adimensional que relaciona as amplitudes dos movimentos à amplitude da onda incidente (amplitude de inclinação da onda para o movimento em "roll").

São feitas correlações com os resultados apresentados por Vugts (1968) [66] Kim (1969) [29], Bai & Yeung (1974) [51] e Kokkinowrachos (1983). Os primeiros são experimentais. Os resultados de Kim são teóricos, calculados a partir do método de

Grim estendido para águas de profundidade arbitraria pelo método de Thorne. Ambos são já classicamente conhecidos e citados na literatura. Bai & Yeung utilizam-se do MCEF ou "Hybrid Element Method". O último faz uso do "macro-element method". Tal método difere do MCEF apenas na região próxima ao corpo onde a solução a ser compatibilizada também é expressa na forma de série de Fourier.

Os resultados experimentais de Vugts agregam os efeitos de forças de natureza viscosa e correspondem ao caso C ($h/d = 10,0$).

8.2.2.1 A influência da profundidade nos coeficientes hidrodinâmicos

Os gráficos 8.11 a 8.14 mostram a influência da profundidade da lâmina d'água nos coeficientes de massa adicional. Note-se a excelente concordância dos resultados dos coeficientes a_{uu} , a_{ww} e $a_{u\theta}$ apresentados com aqueles obtidos da literatura. Em particular note-se que o limite de a_{ww} quando $\omega \rightarrow 0$ aumenta com o aumento da profundidade de conformidade aquilo que fora adiantado no anexo VI a partir de considerações puramente teóricas. Inversamente o coeficiente a_{uu} aumenta à medida que diminui a profundidade, também corroborando as considerações do anexo VI. Ressalte-se tão somente o comportamento peculiar apresentado pela curva a_{ww} devido a Kim. O mínimo local ocorrente em baixa frequência deve-se, segundo Kim, a uma singularidade da

integral de Grim nessa vizinhança.

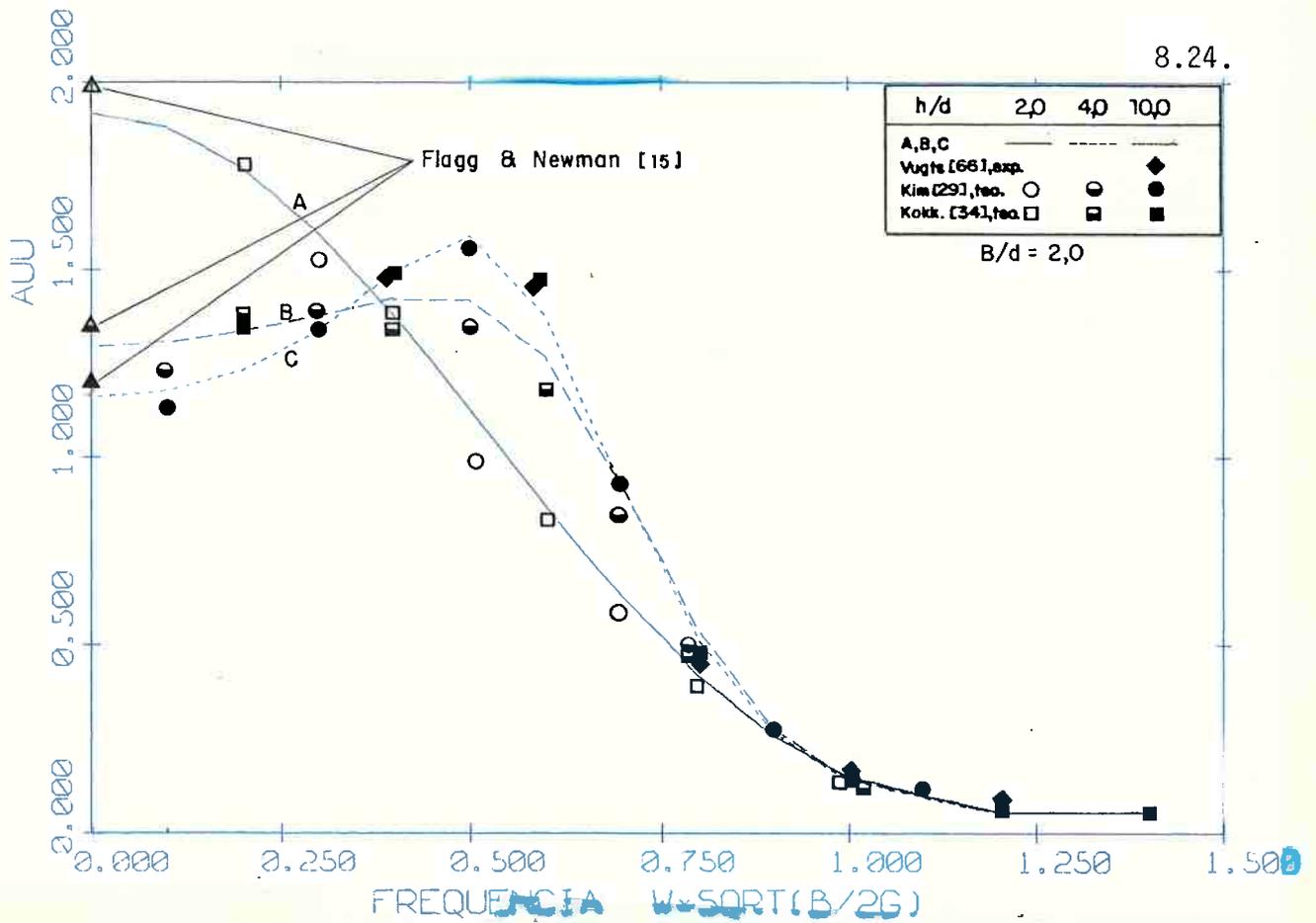
Os resultados referentes ao coeficiente de inércia adicional $a_{\theta\theta}$ (graf. 8.14) apresentam boa correlação com os das referências [66] e [34] apesar de certa discrepância nos valores numéricos. Cumpre notar que os resultados do presente trabalho convergem para os resultados experimentais de Vugts em alta frequência, quando segundo o autor os erros experimentais são menores. Na realidade é de se esperar que as imprecisões numéricas sejam mais acentuadas, no caso de seções retangulares, para os coeficientes de "roll". As quinas constituem singularidades de perturbação e a solução nestas vizinhanças têm maior contribuição no cálculo dos coeficientes de roll, dada a maior distância ao polo 0 de momentos.

Similarmente, os gráficos 8.15 a 8.18 apresentam os coeficientes de amortecimento por radiação de ondas.

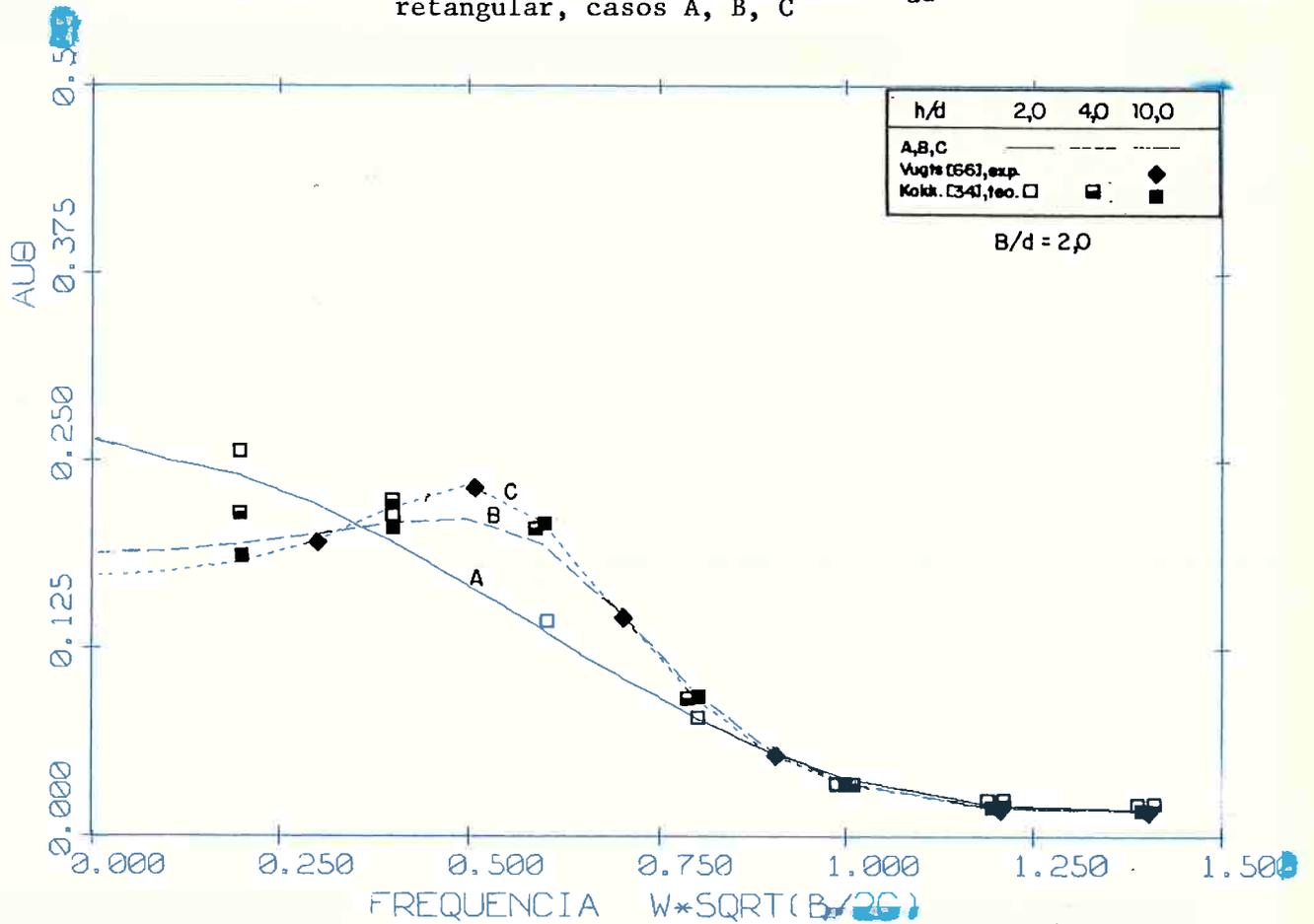
Note-se uma vez mais a excelente concordância dos resultados com aqueles obtidos da literatura.

É importante observar no gráfico 8.17 o limite assintótico obtido a partir da expressão teórica (VI.51), anexo VI, atestando claramente a confiabilidade do método numérico empregado.

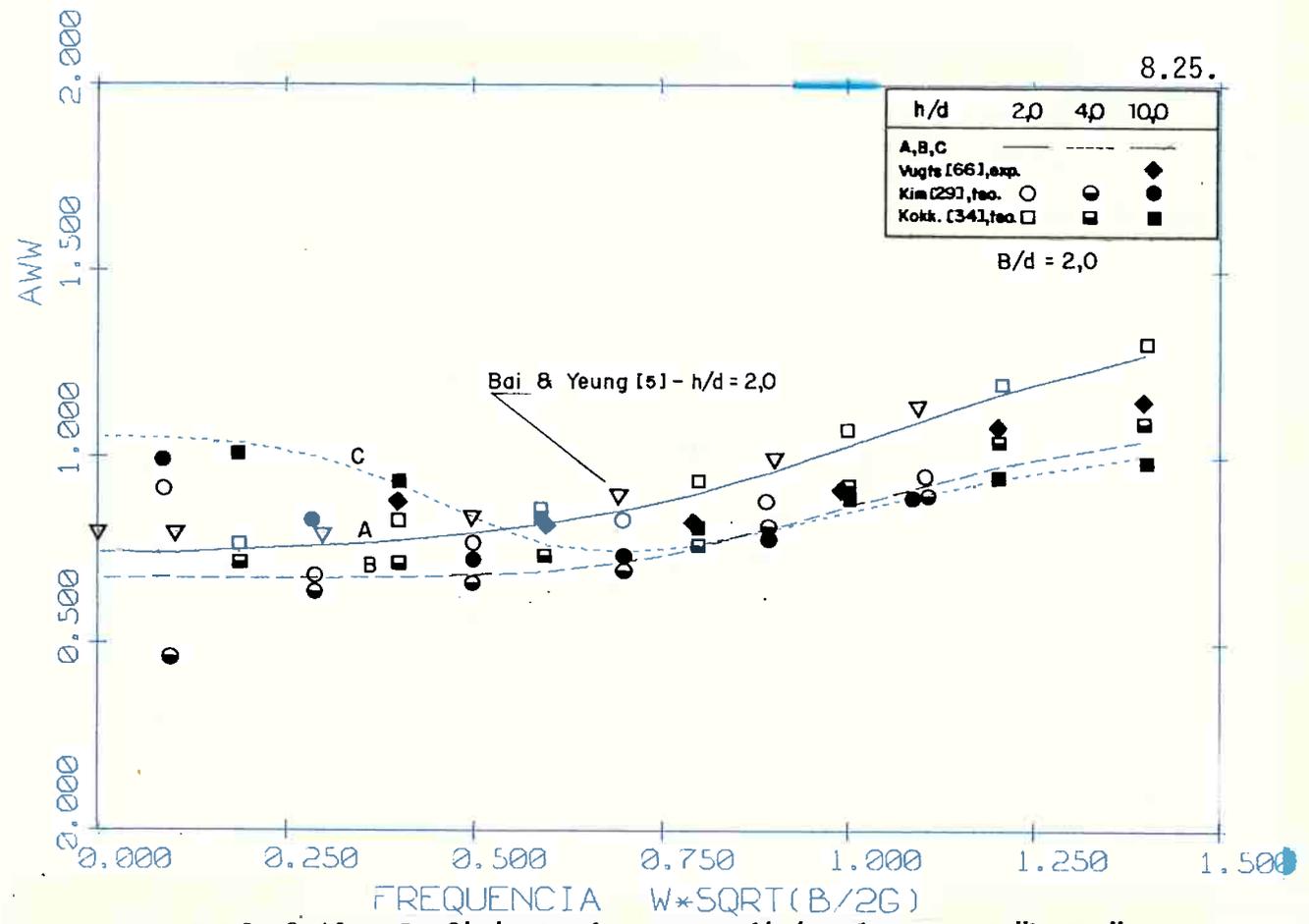
Os gráficos 8.19 a 8.21 mostram as forças e momentos excitantes. Observa-se também a boa concordância com os dados obtidos da literatura.



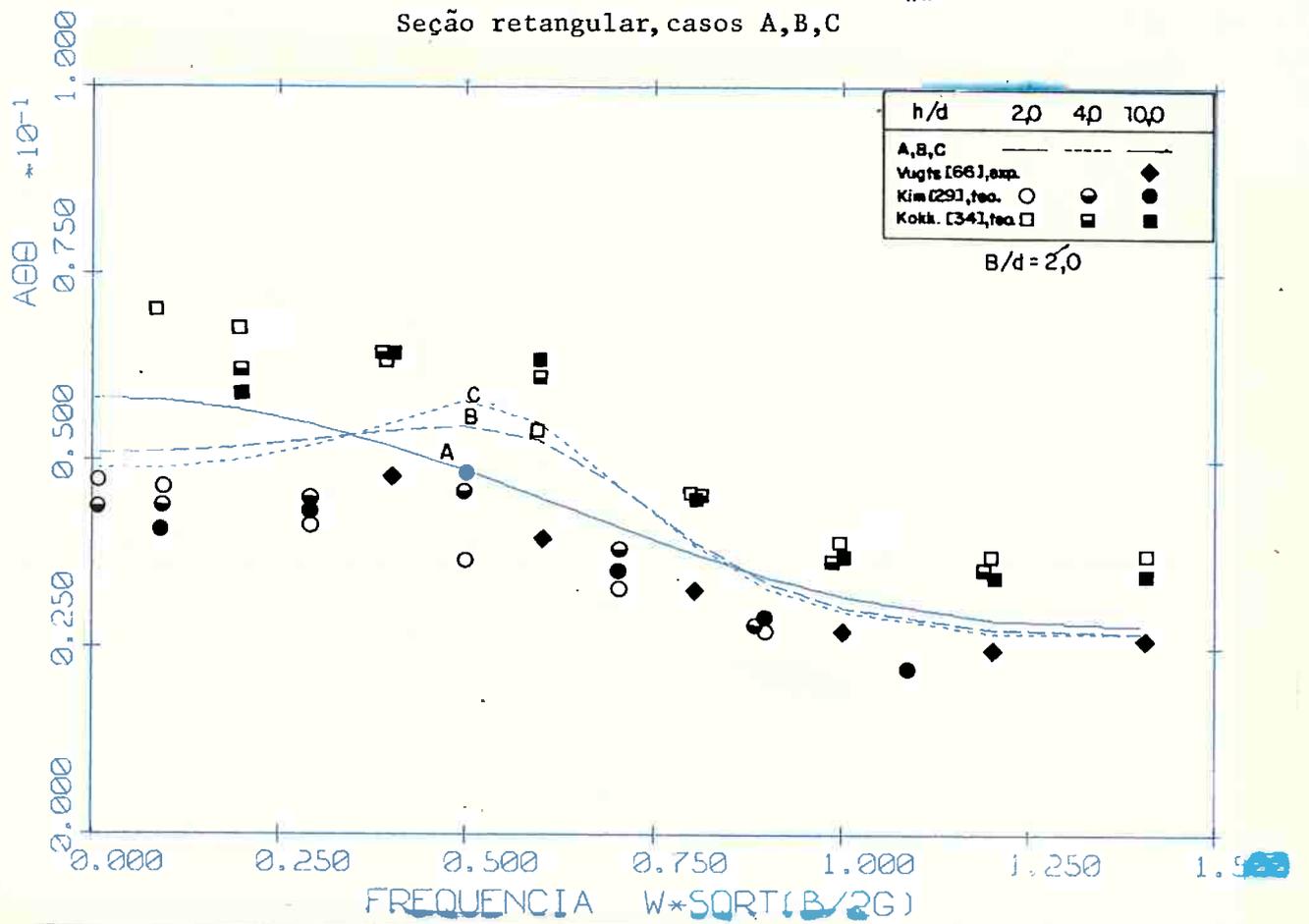
Graf. 8.11 - Coeficiente de massa adicional a_{uu} , em "sway". Seção retangular, casos A, B, C



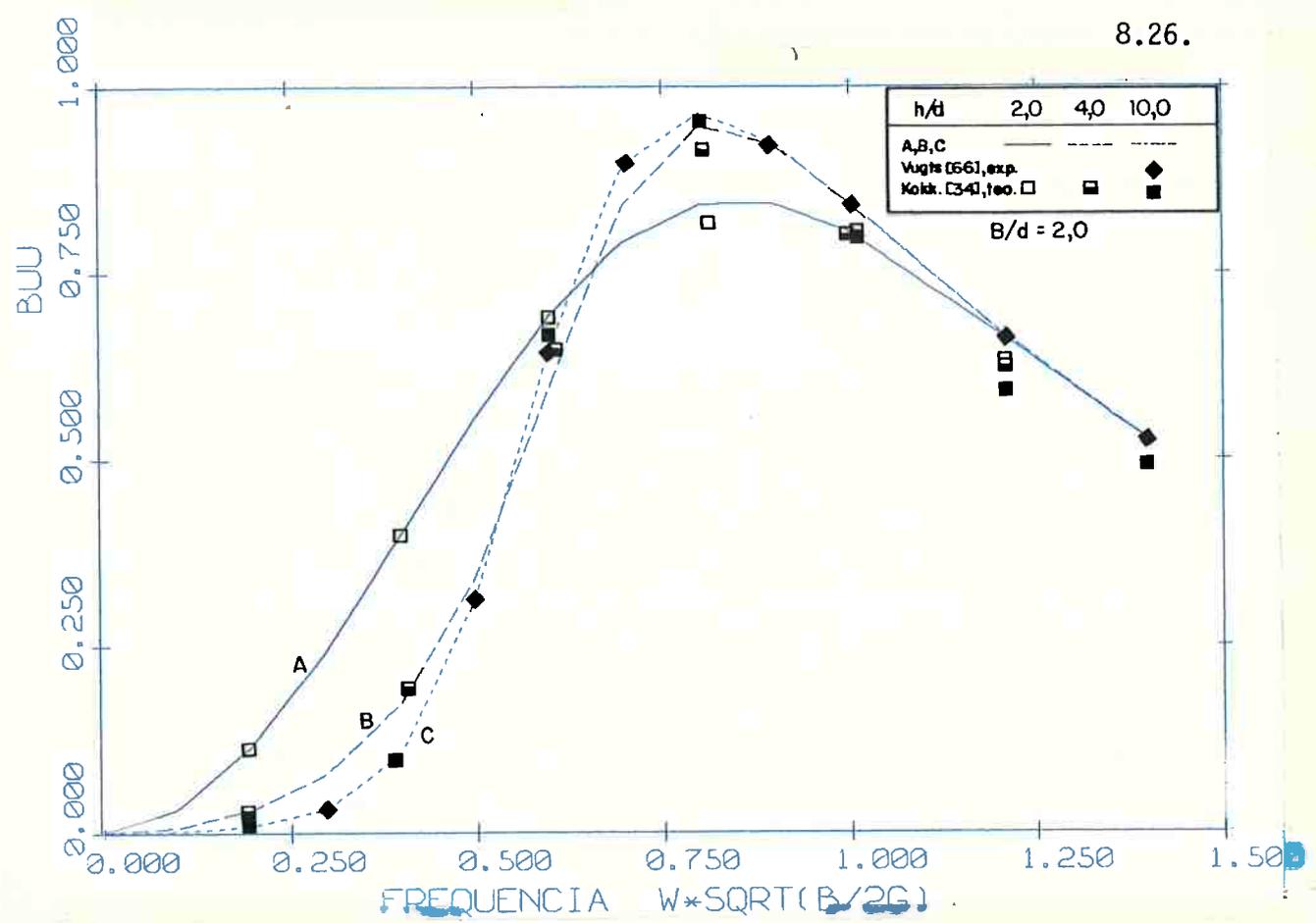
Graf. 8.12 - Coeficiente de massa adicional $a_{u\theta}$, em "sway-roll". Seção retangular, casos A,B,C



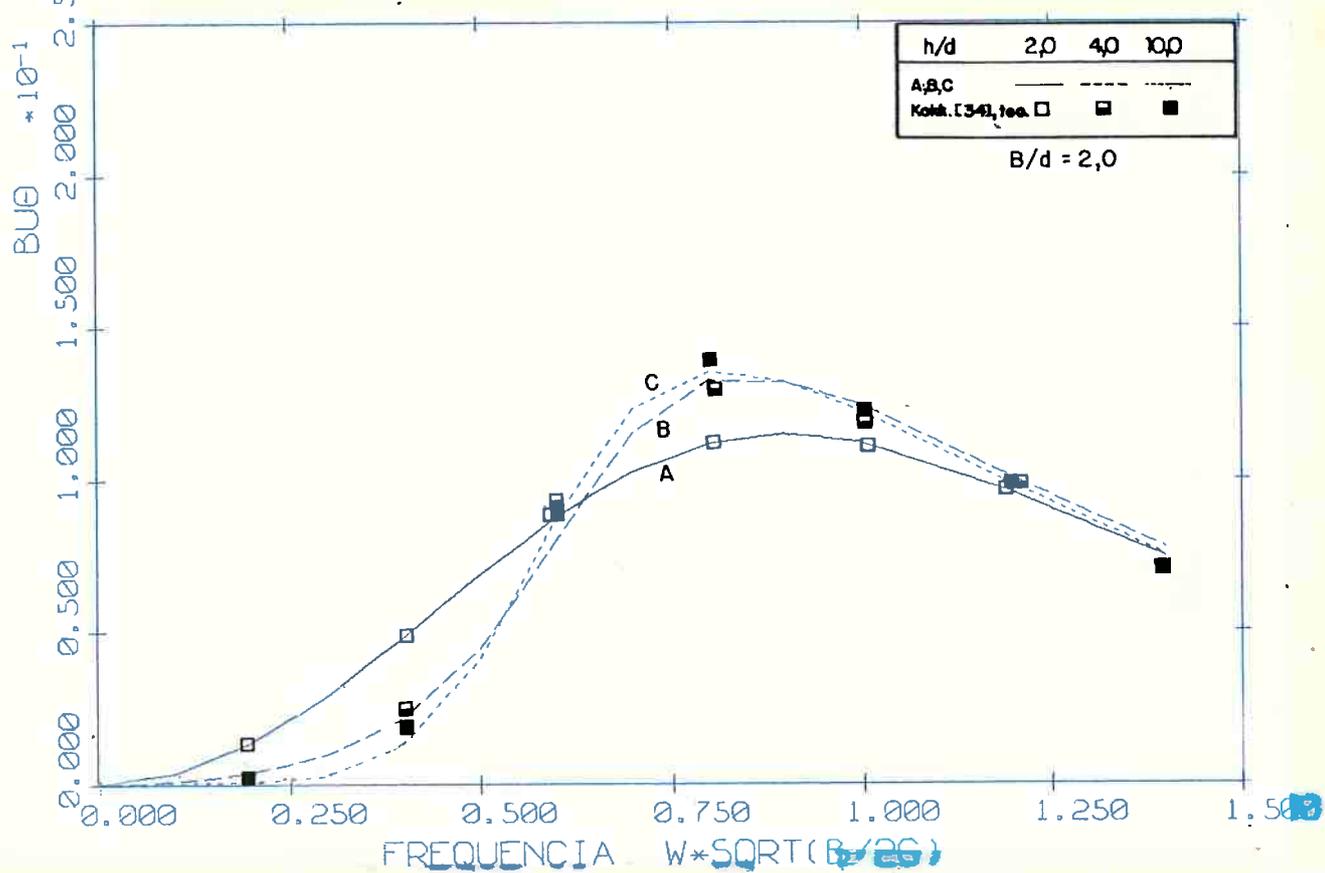
Graf. 8.13 - Coeficiente de massa adicional a_{ww} , em "heave".
Seção retangular, casos A,B,C



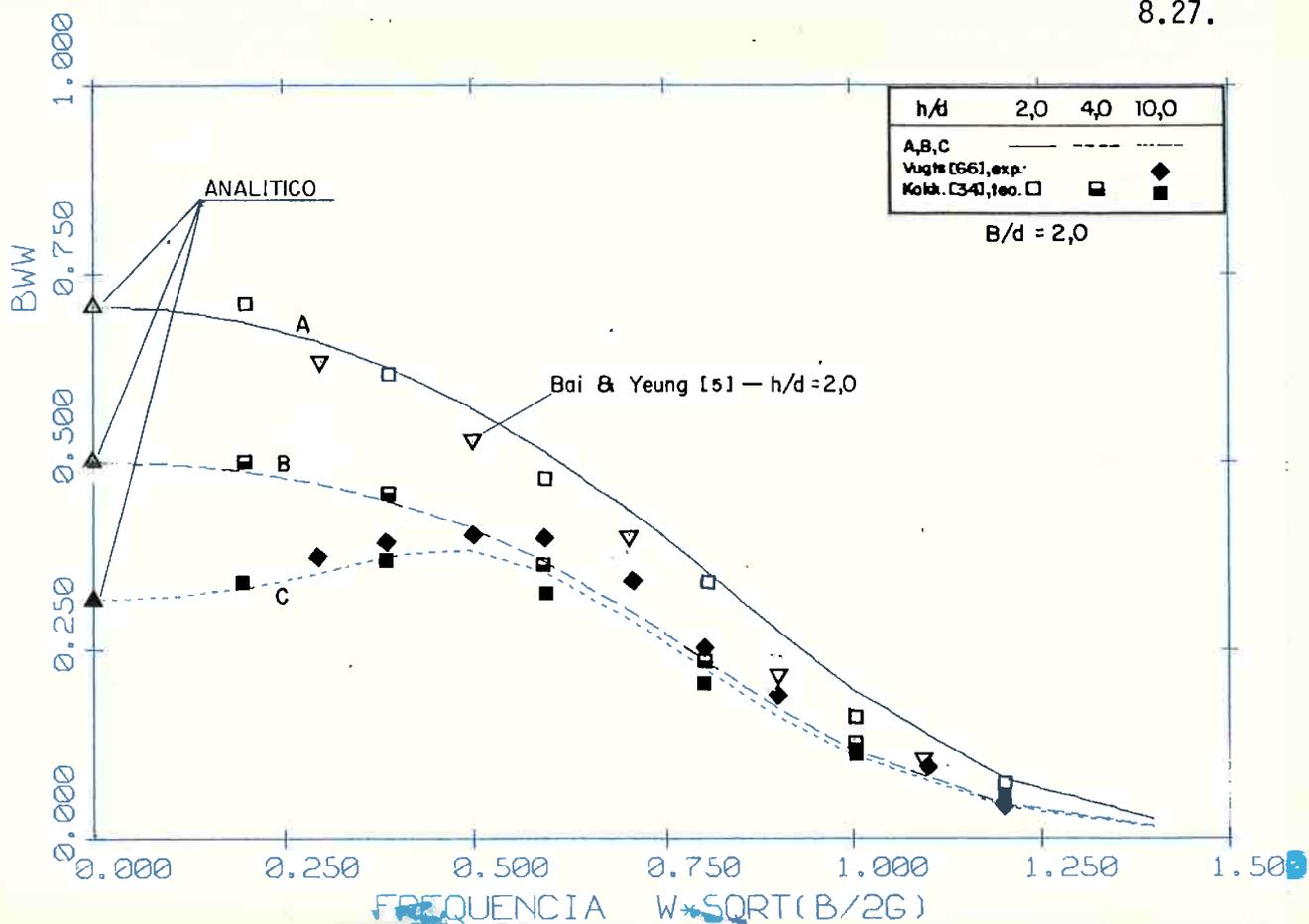
Graf. 8.14 - Coeficiente de inércia adicional a_{00} , em "roll".
Seção retangular, casos A,B,C



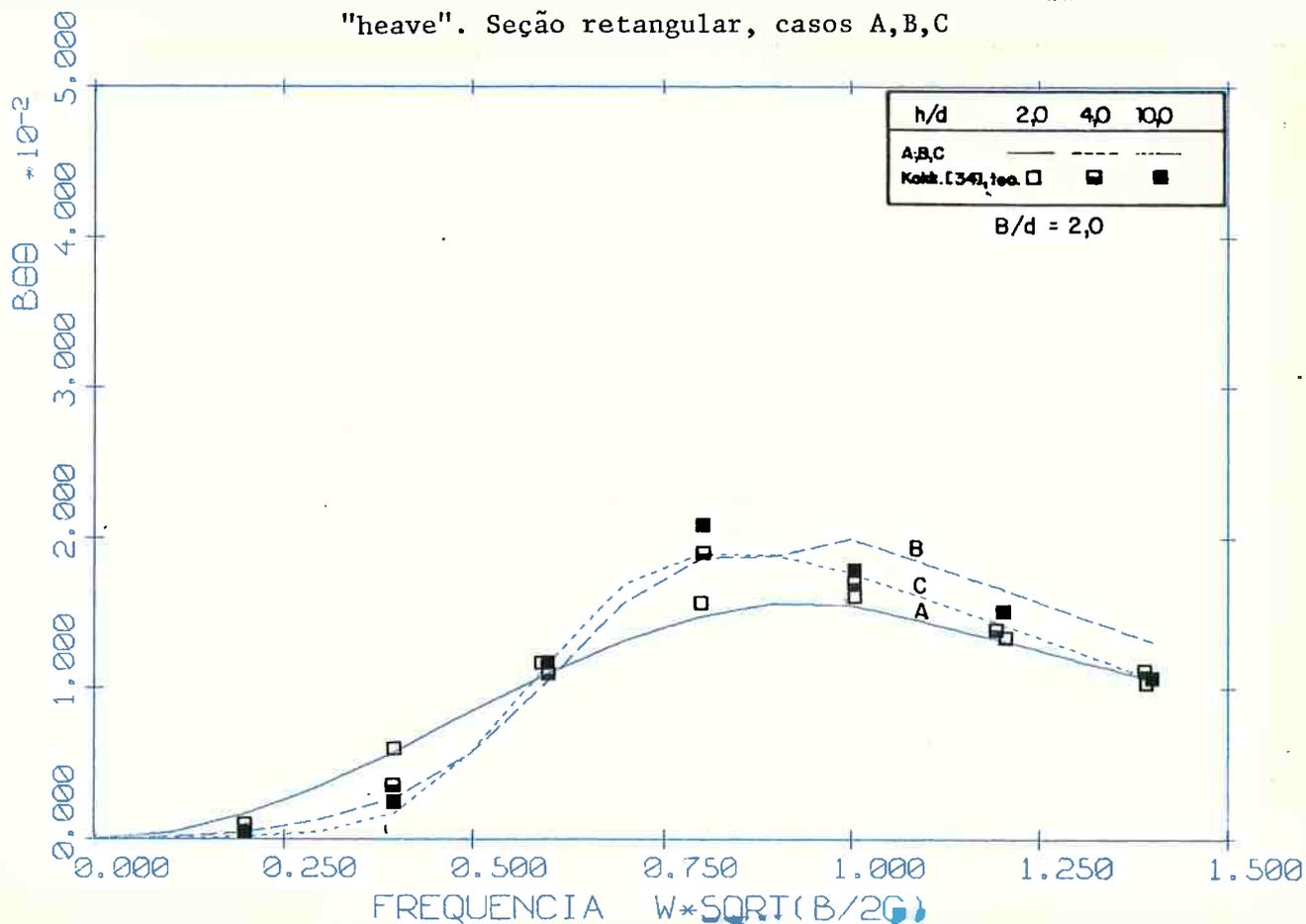
Graf. 8.15 - Coeficiente de amortecimento por radiação b_{uu} , em "sway". Seção retangular, casos A,B,C



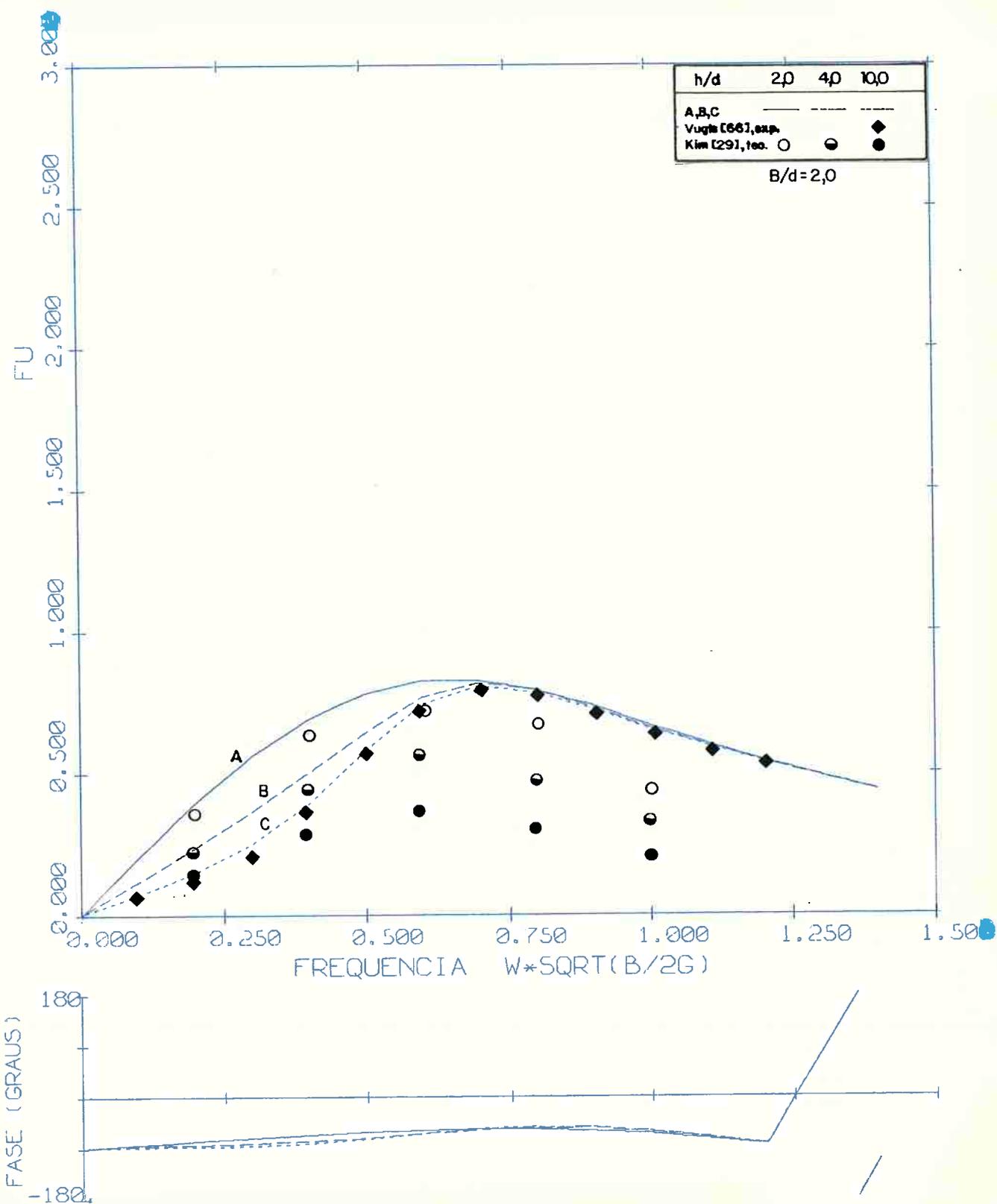
Graf. 8.16 - Coeficiente de amortecimento por radiação, $b_{u\theta}$, em "sway-roll". Seção retangular, casos A,B,C



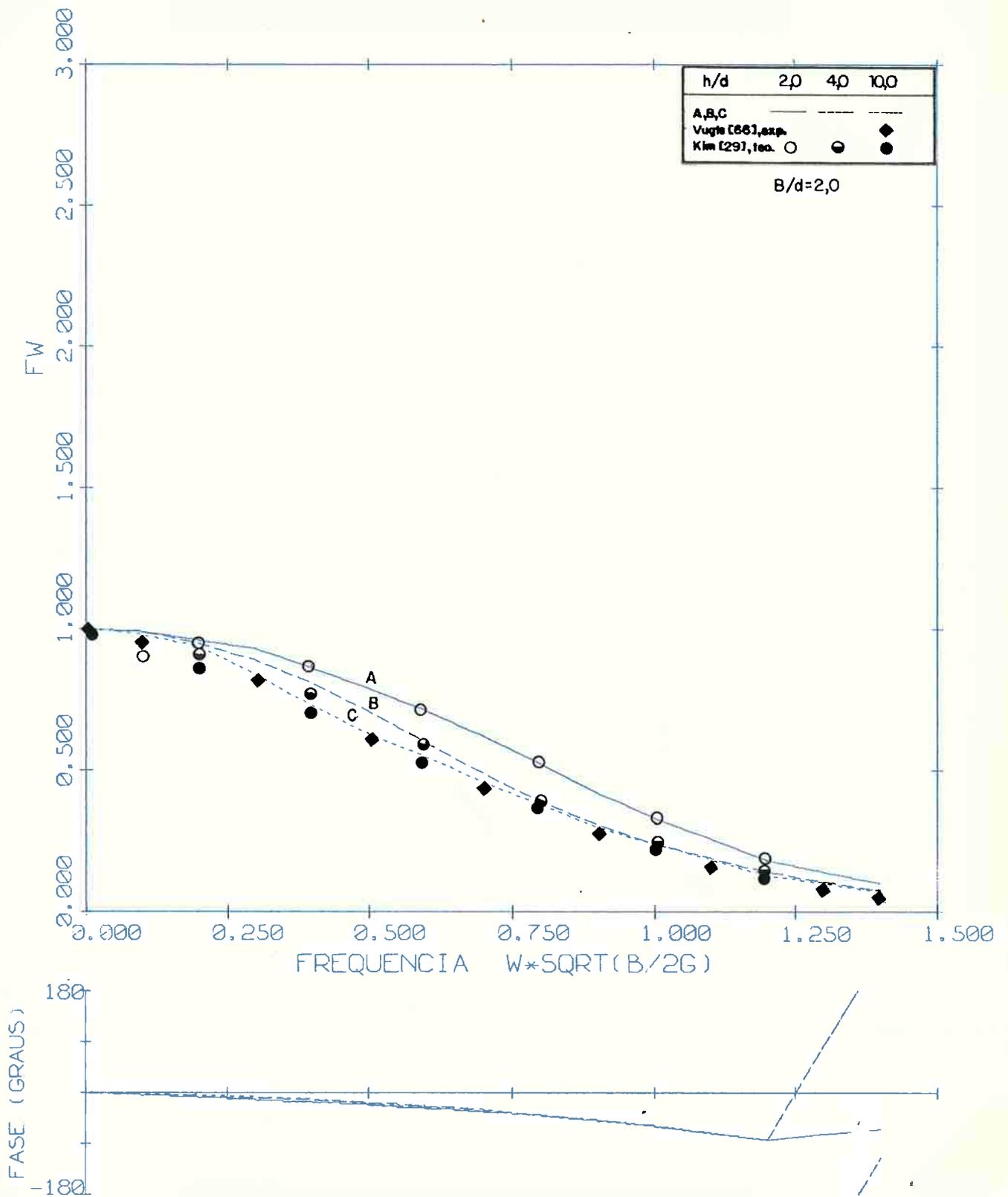
Graf. 8.17 - Coeficiente de amortecimento por radiação, b_{ww} , em "heave". Seção retangular, casos A,B,C



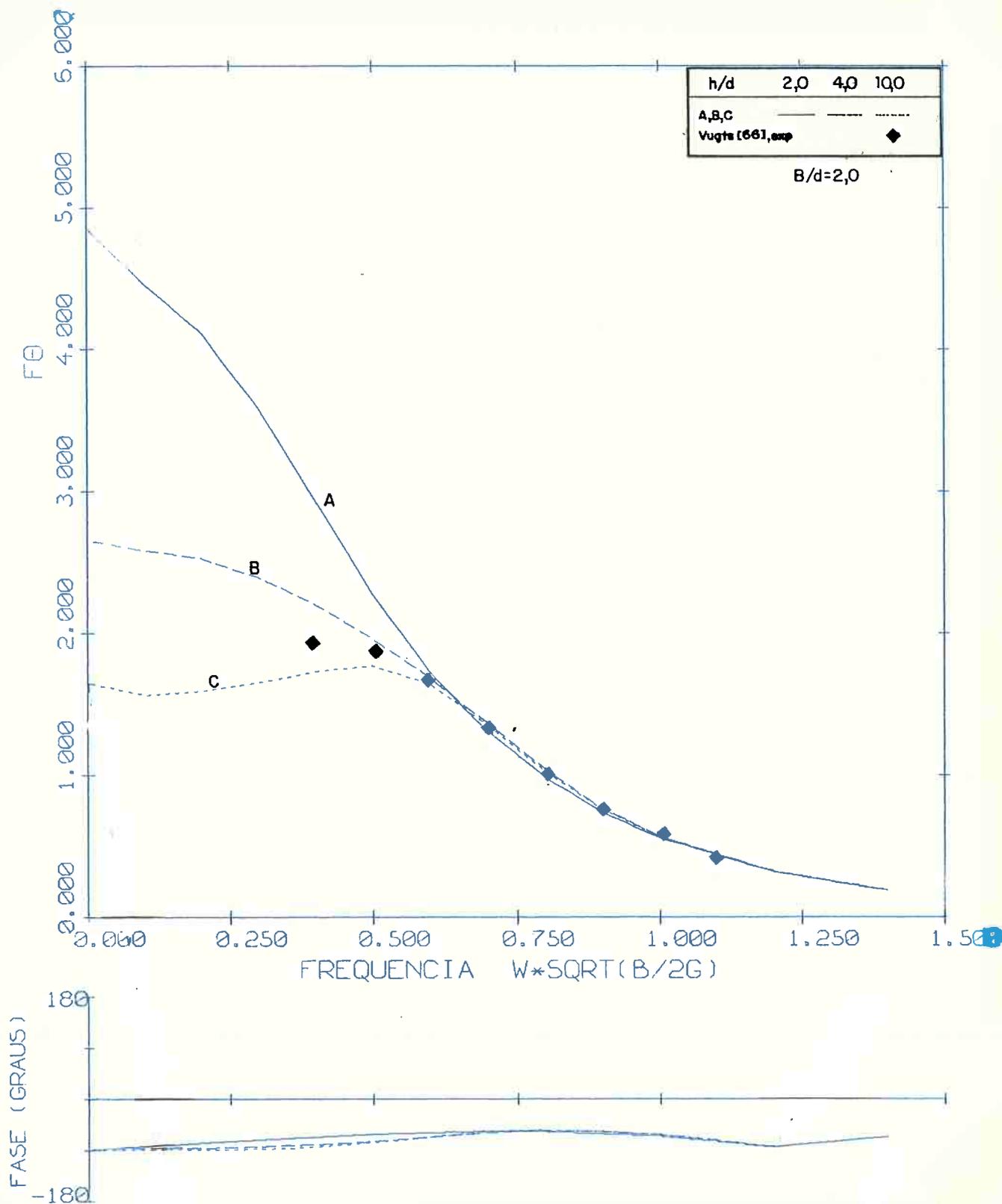
Graf. 8.18 - Coeficiente de amortecimento por radiação, $b_{\theta\theta}$, em "roll". Seção retangular, casos A,B,C



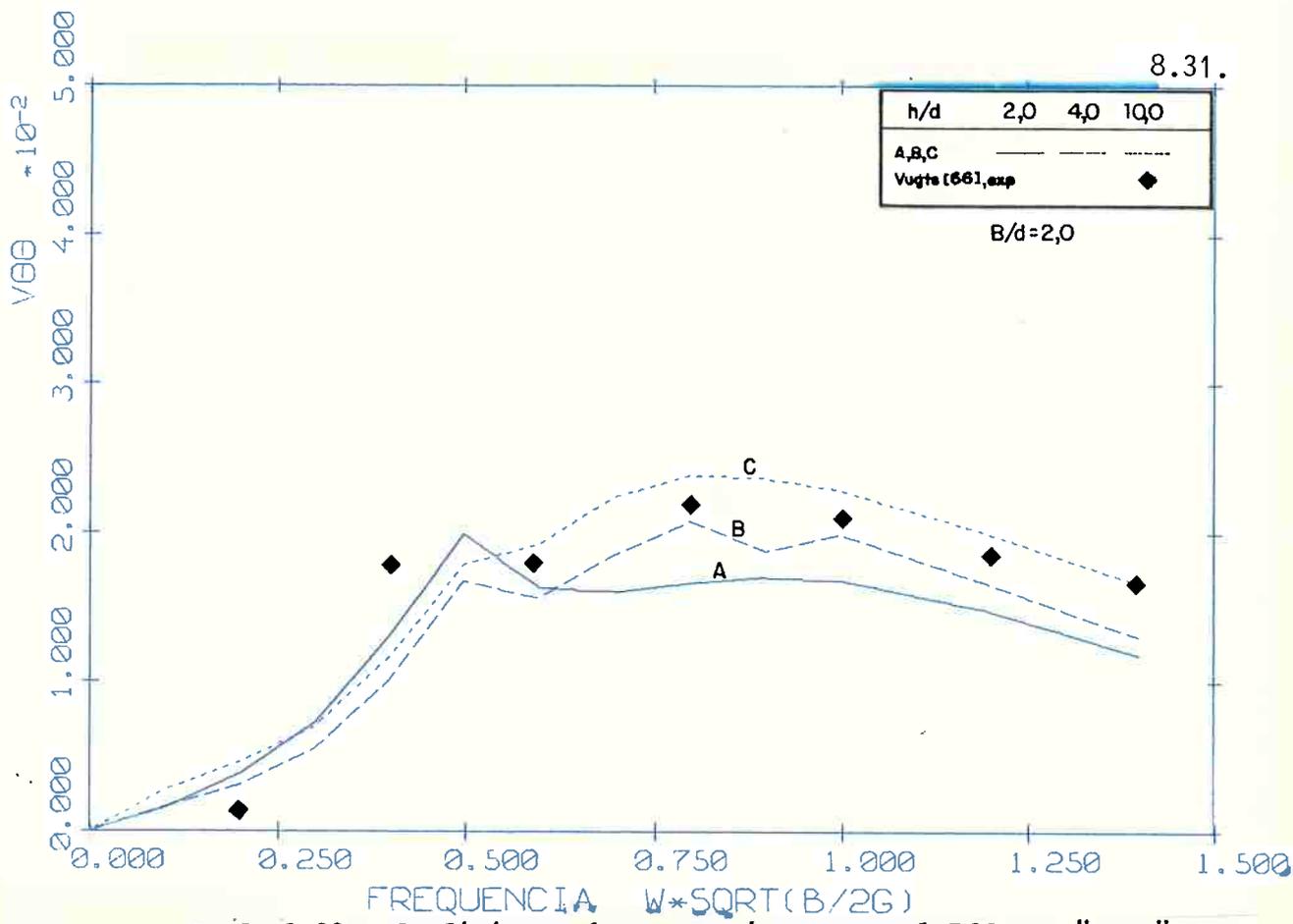
Graf. 8.19 - Força excitante F_u , em "sway". Seção retangular, casos A,B,C.



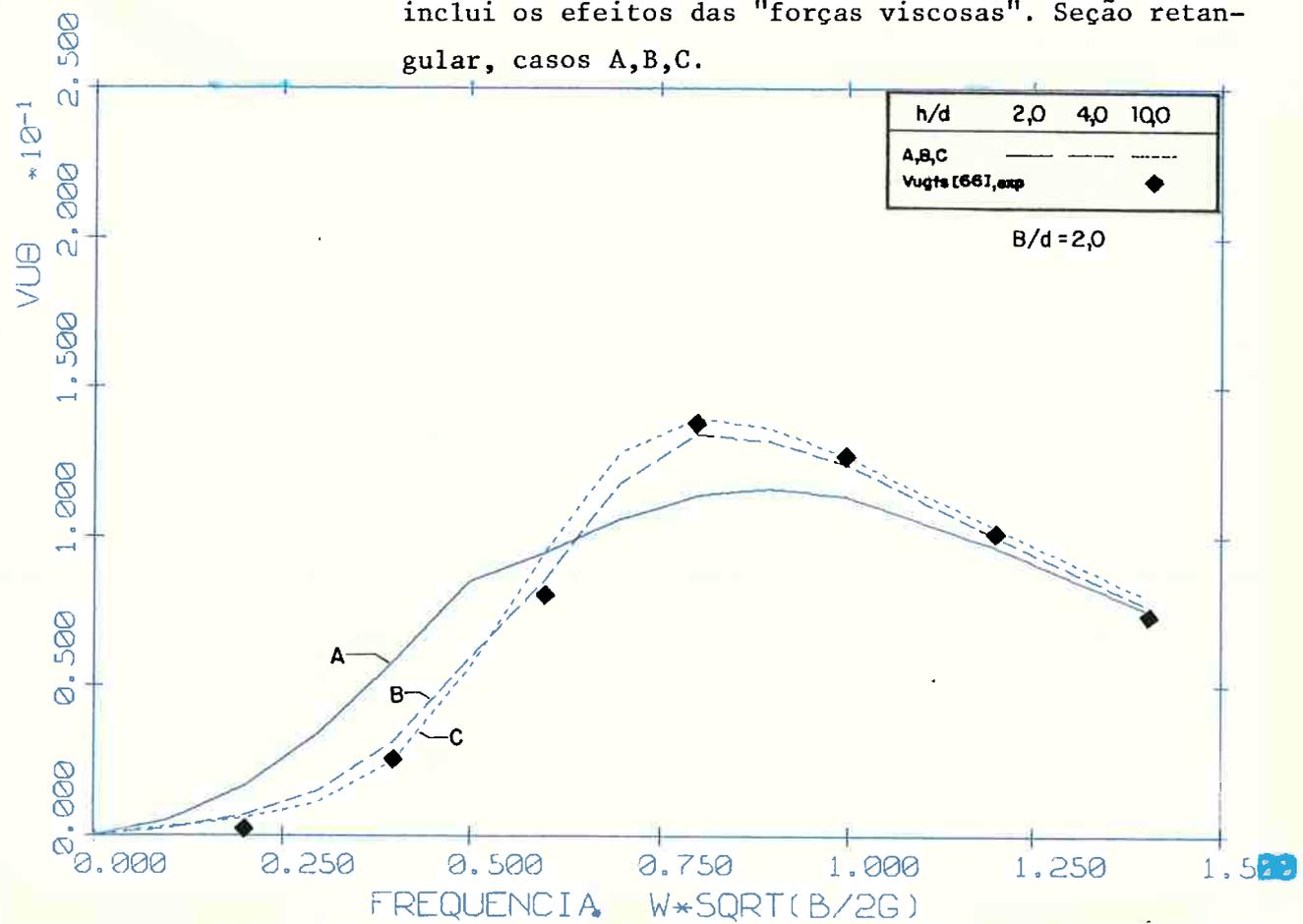
Graf. 8.20 - Força excitante em "heave". Seção retangular, casos A,B,C.



Graf. 8.21 - Momento excitante F_{θ} em "roll". Seção retangular, casos A,B,C



Graf. 8.22 - Coeficiente de amortecimento total $B\theta\theta$, em "sway" - inclui os efeitos das "forças viscosas". Seção retangular, casos A,B,C.



Graf. 8.23 - Coeficiente de amortecimento total $Bu\theta$, em "sway-roll" - inclui os efeitos das forças viscosas. Seção retangular, vsdod, A,B,C.

Por fim os gráficos 8.22 e 8.23 apresentam os coeficientes linearizados de amortecimento por efeitos viscosos. Os resultados são contrapostos aos resultados experimentais de Vugts observando-se porém que apenas se pretende avaliar a ordem de magnitude relativa entre ambos. Os experimentos de Vugts foram conduzidos em três amplitudes distintas de movimento de "roll" em oscilação forçada: 0.05, 0.10 e 0.20 rad. No cálculo realizado as amplitudes de "roll" são sempre inferiores a 0.1 rad. Note-se que a correlação é satisfatória mostrando que o método semi-empírico de Ikeda e Tanaka [22] leva a valores bastante aceitáveis.

8.2.2.2. A influência do refinamento da malha nos coeficientes hidrodinâmicos

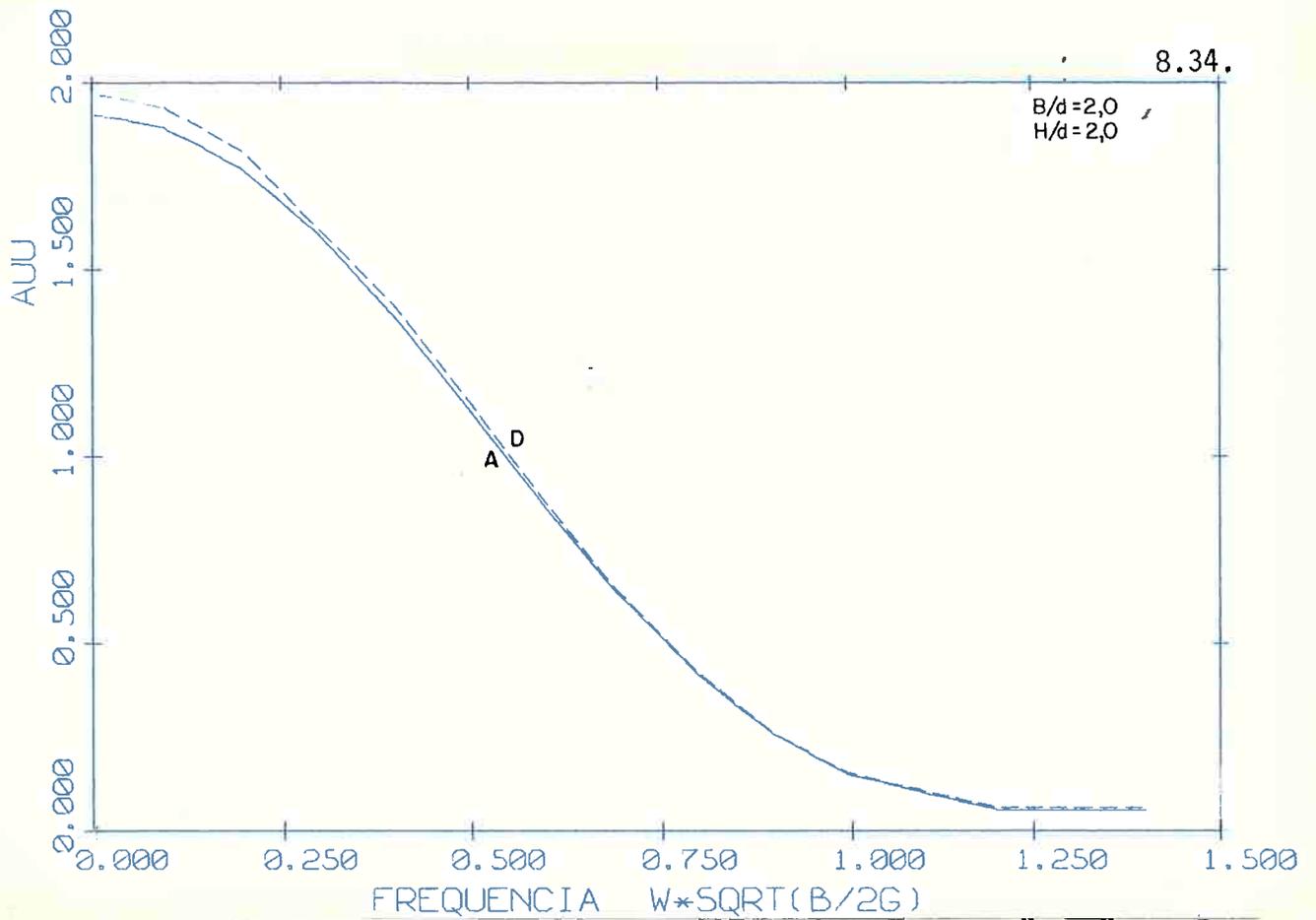
Conforme aventado anteriormente os valores dos coeficientes hidrodinâmicos podem ser afetados pelo grau de refinamento da malha de elementos finitos junto às quinas, em particular aqueles associados ao movimento de "roll". De fato, os gráficos 8.24 a 8.31 confirmam tal assertiva através da comparação dos resultados correspondentes às malhas A e D.

Enfatiza-se que o coeficiente $a_{\theta\theta}$ é efetivamente o mais sensível ao refinamento da malha de discretização.

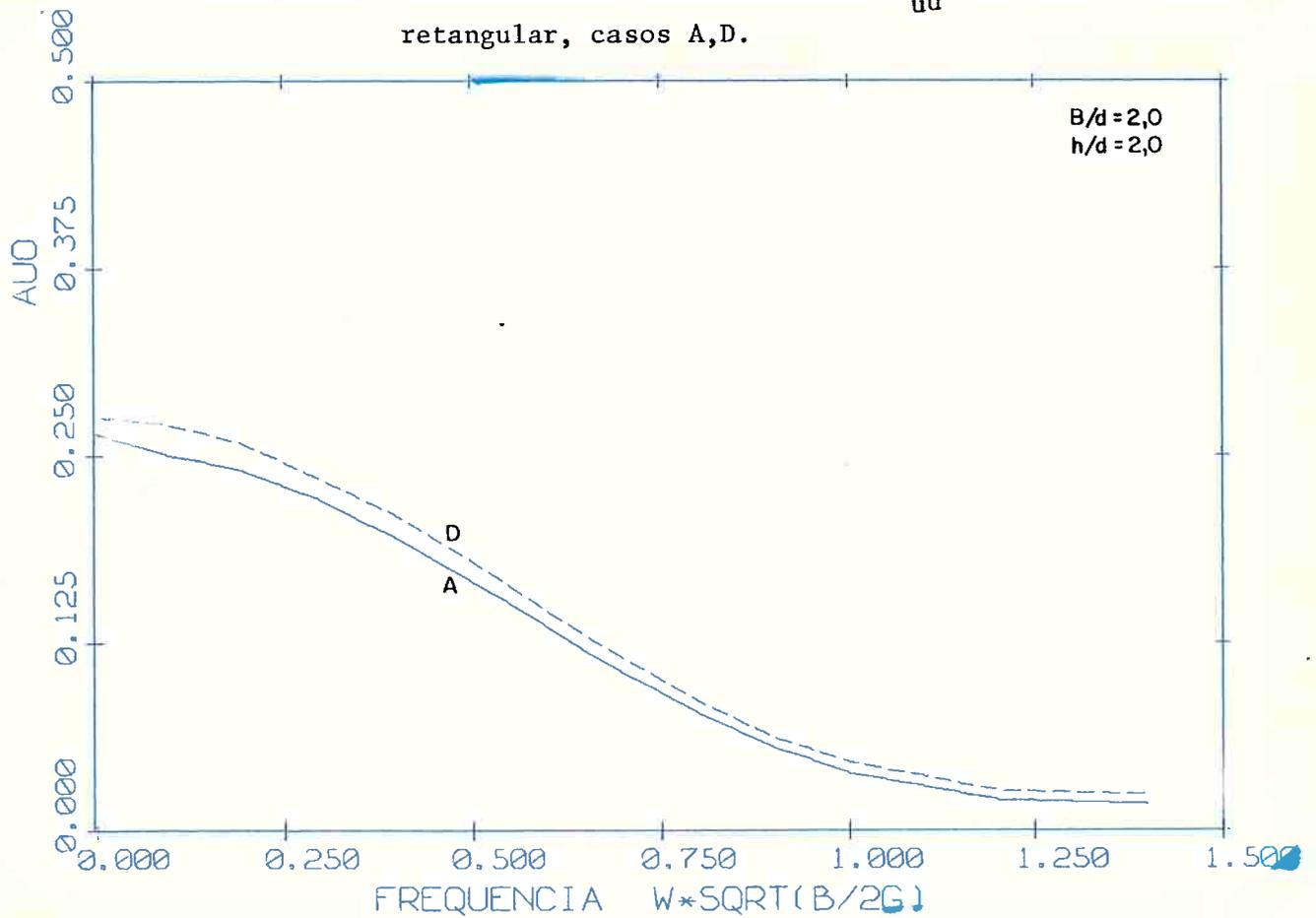
8.2.2.3 Funções de transferência de movimentos

É nítida nos gráficos 8.32 a 8.34 o efeito da profundidade nos movimentos do corpo cilíndrico. O movimento de "roll"

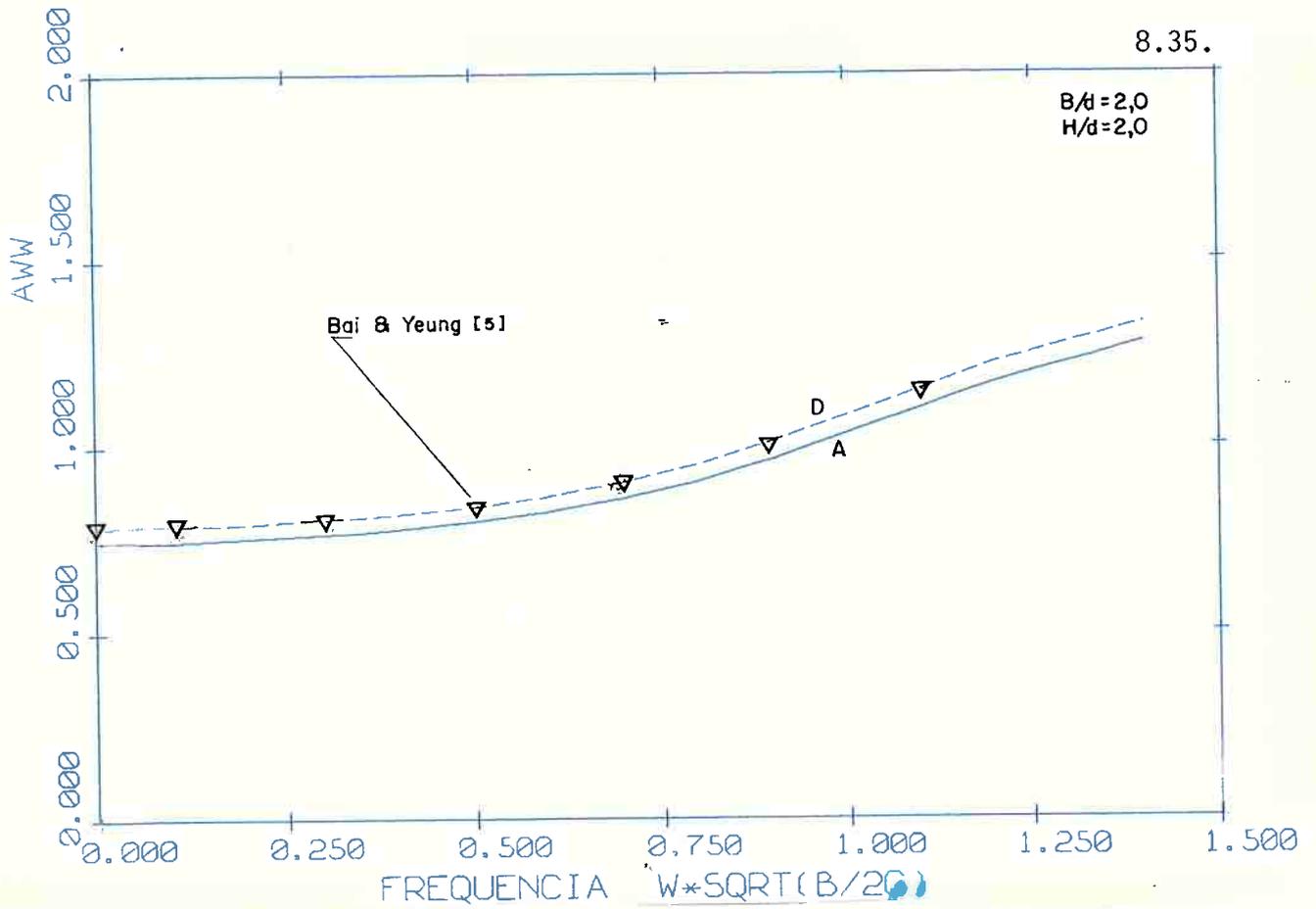
é particularmente afetado, amplificando-se com a diminuição da profundidade. Convém observar os limites assintóticos das funções de transferência dos movimentos quando $\omega \rightarrow 0$. Nessa situação, em que o corpo é livre para se movimentar inexistindo restrições elásticas como linhas de amarração, a resposta em "sway" tende a infinito com $\frac{1}{\tanh kh}$, e a resposta em "roll" tende a 1.0. Tais limites podem ser facilmente verificados (ver anexo III). Note-se também nos gráficos 8.35 e 8.36 a influência da inclusão de forças de natureza viscosa no cálculo dos movimentos, e a influência da alteração da posição vertical do centro de gravidade, levando a ressonância em "roll" para frequências mais elevadas.



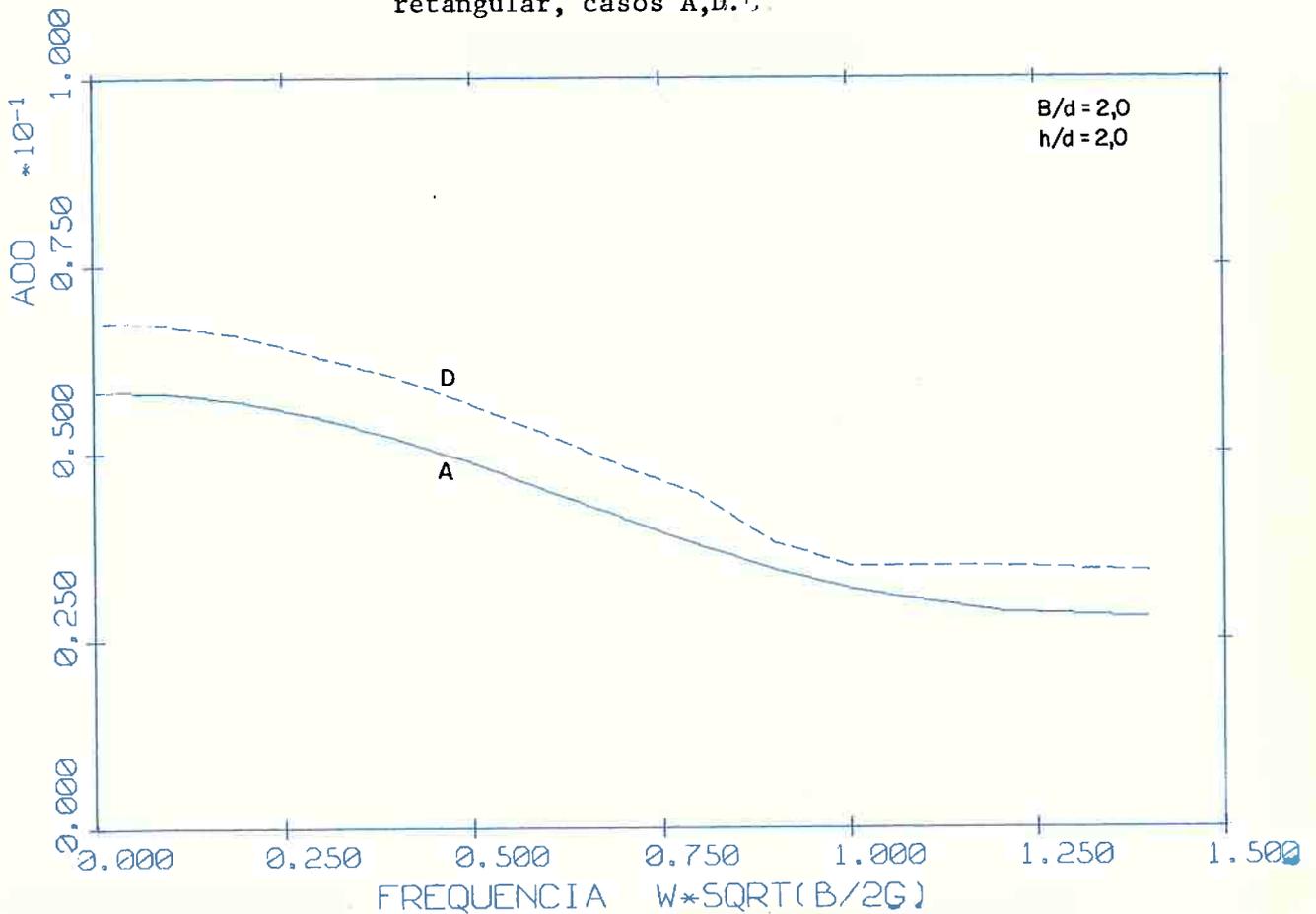
Gráf. 8.24 - Coeficiente de massa adicional a_{uu} , em "sway". Seção retangular, casos A,D.



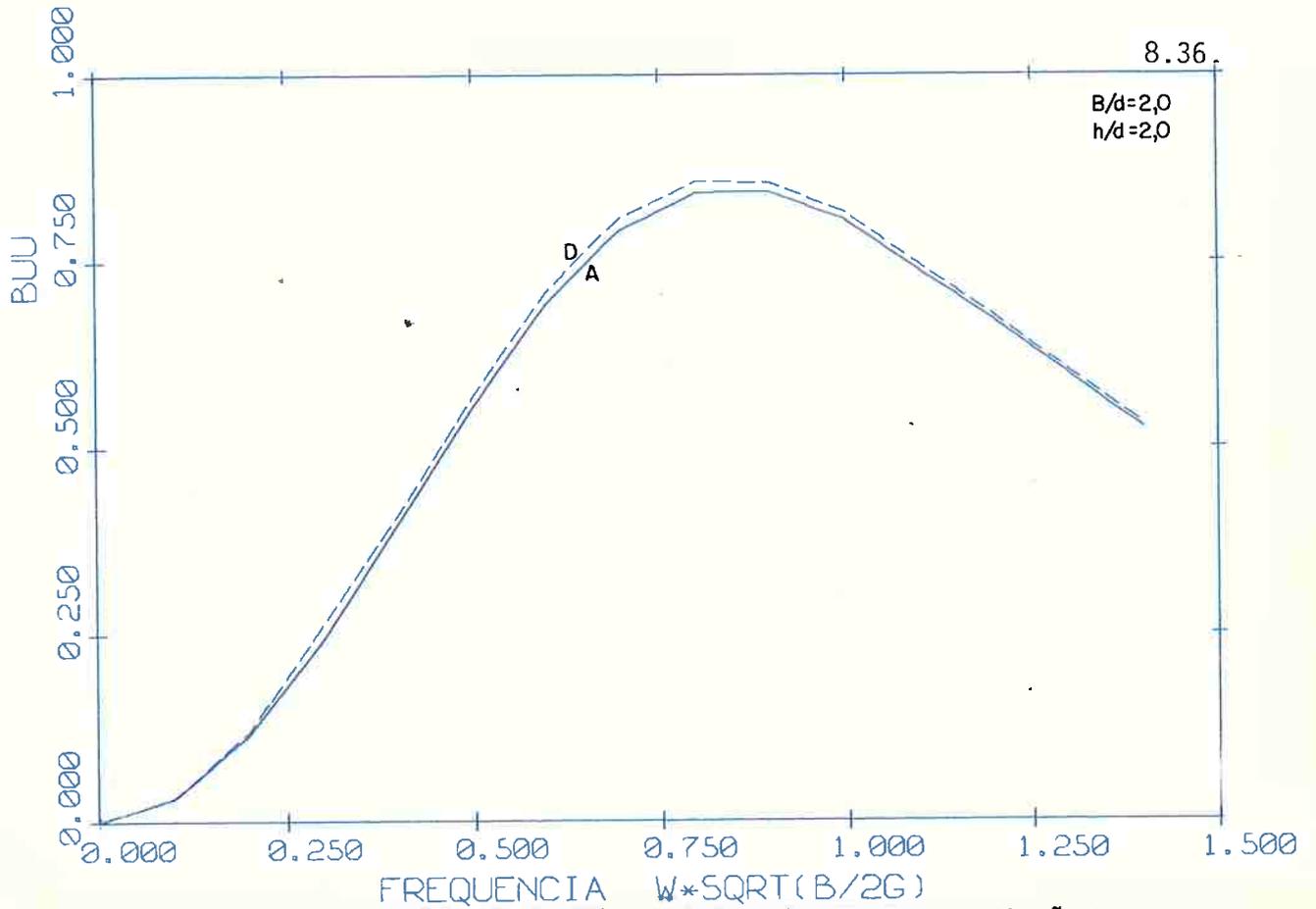
Gráf. 8.25 - Coeficiente de massa adicional a_{u0} , em "sway-roll" seção retangular, casos A,D.



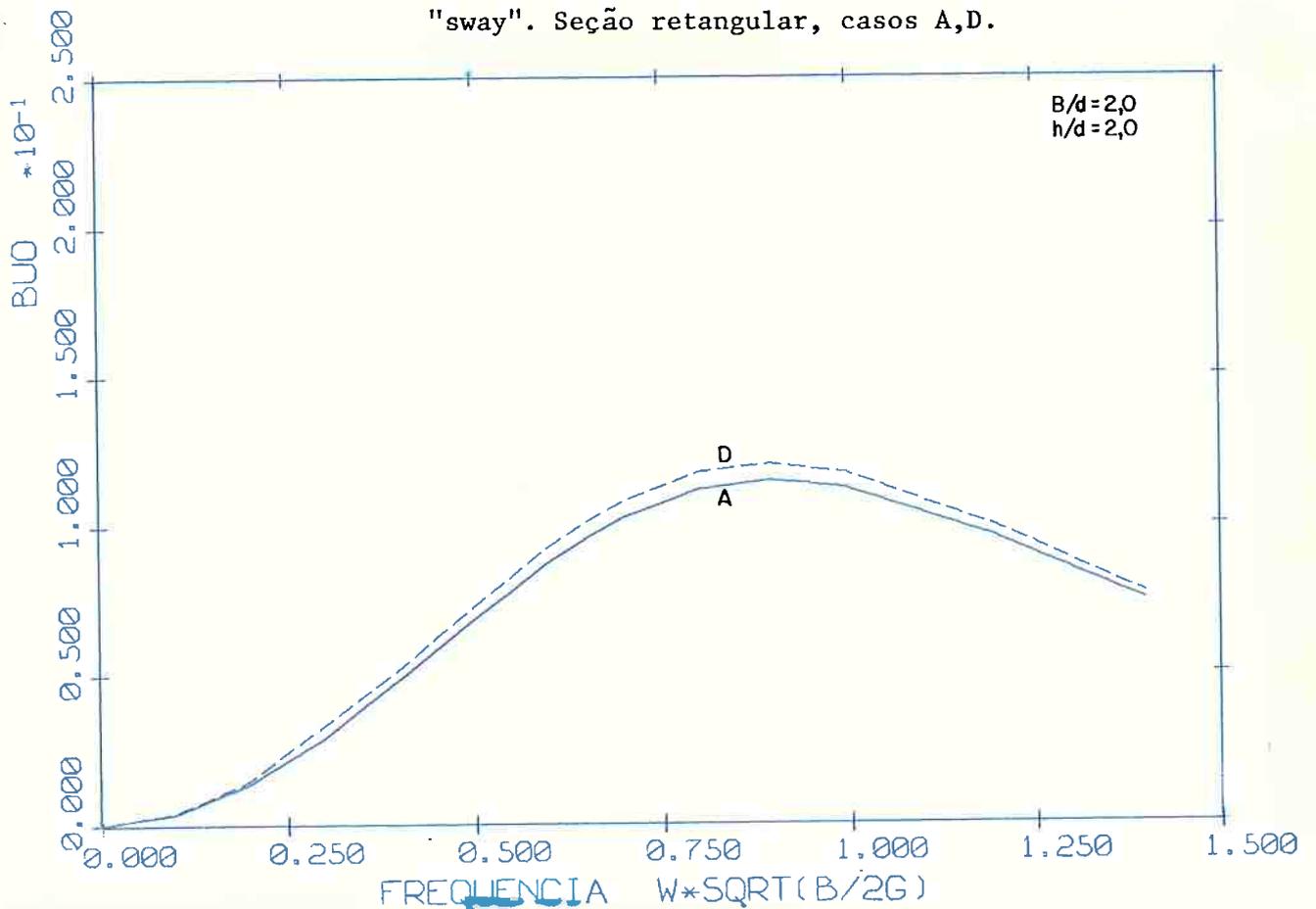
Graf. 8.26 - Coeficiente de massa adicional a_{ww} , em "heave". Seção retangular, casos A,D.



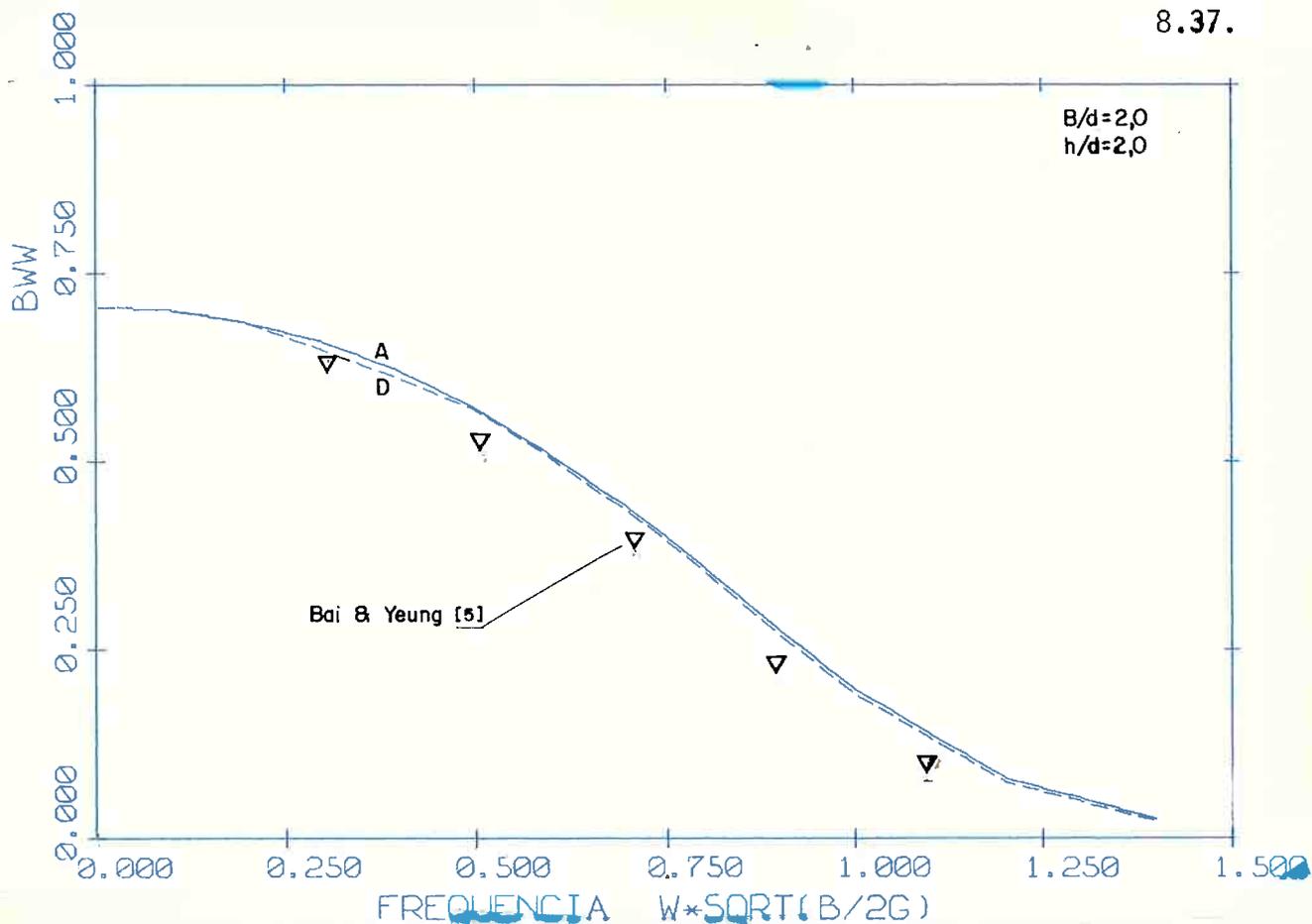
Graf. 8.27 - Coeficiente de inércia adicional a_{00} , em "roll". Seção retangular, casos A,D.



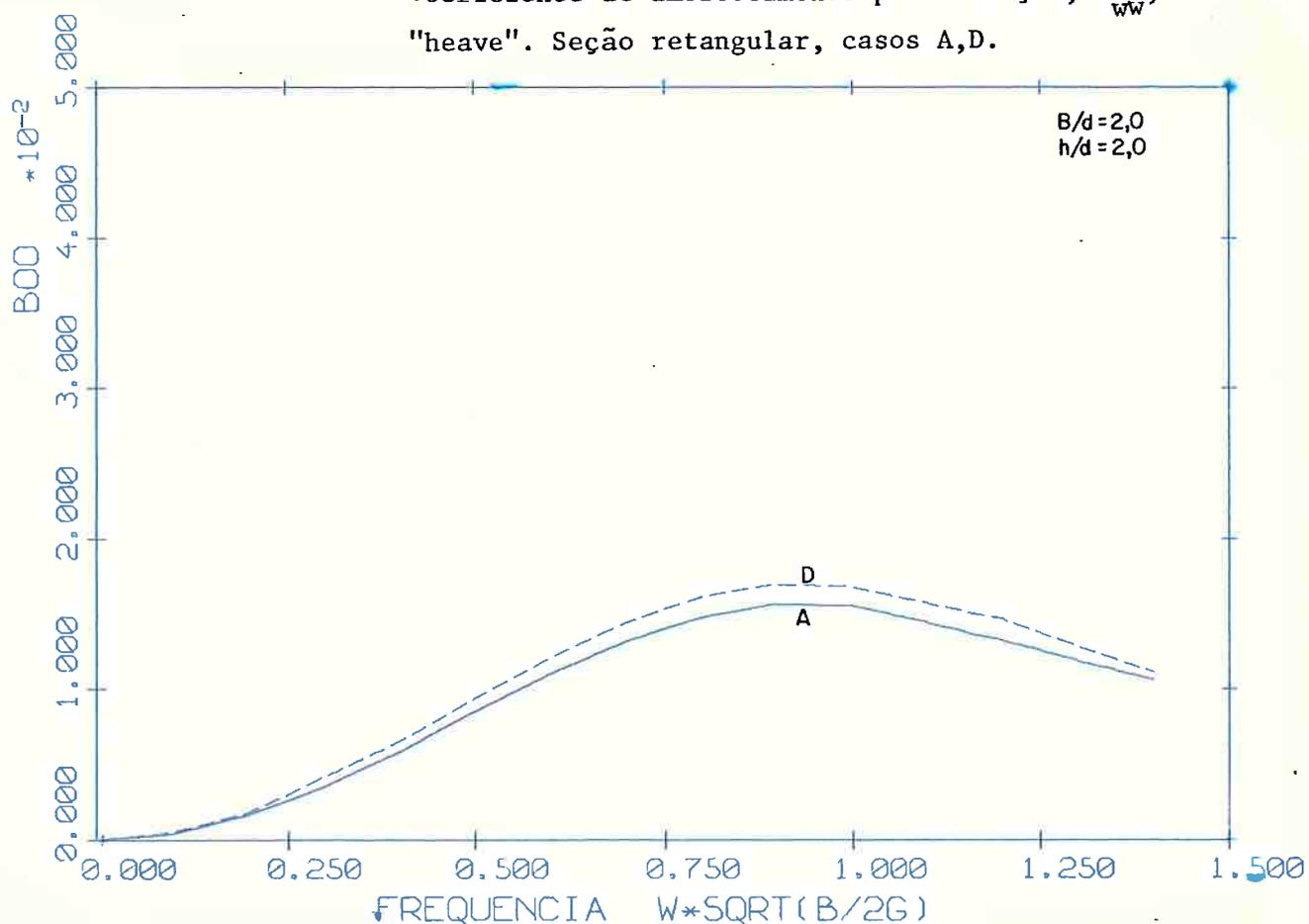
Graf. 8.28 - Coeficiente de amortecimento por radiação b_{uu} , em "sway". Seção retangular, casos A,D.



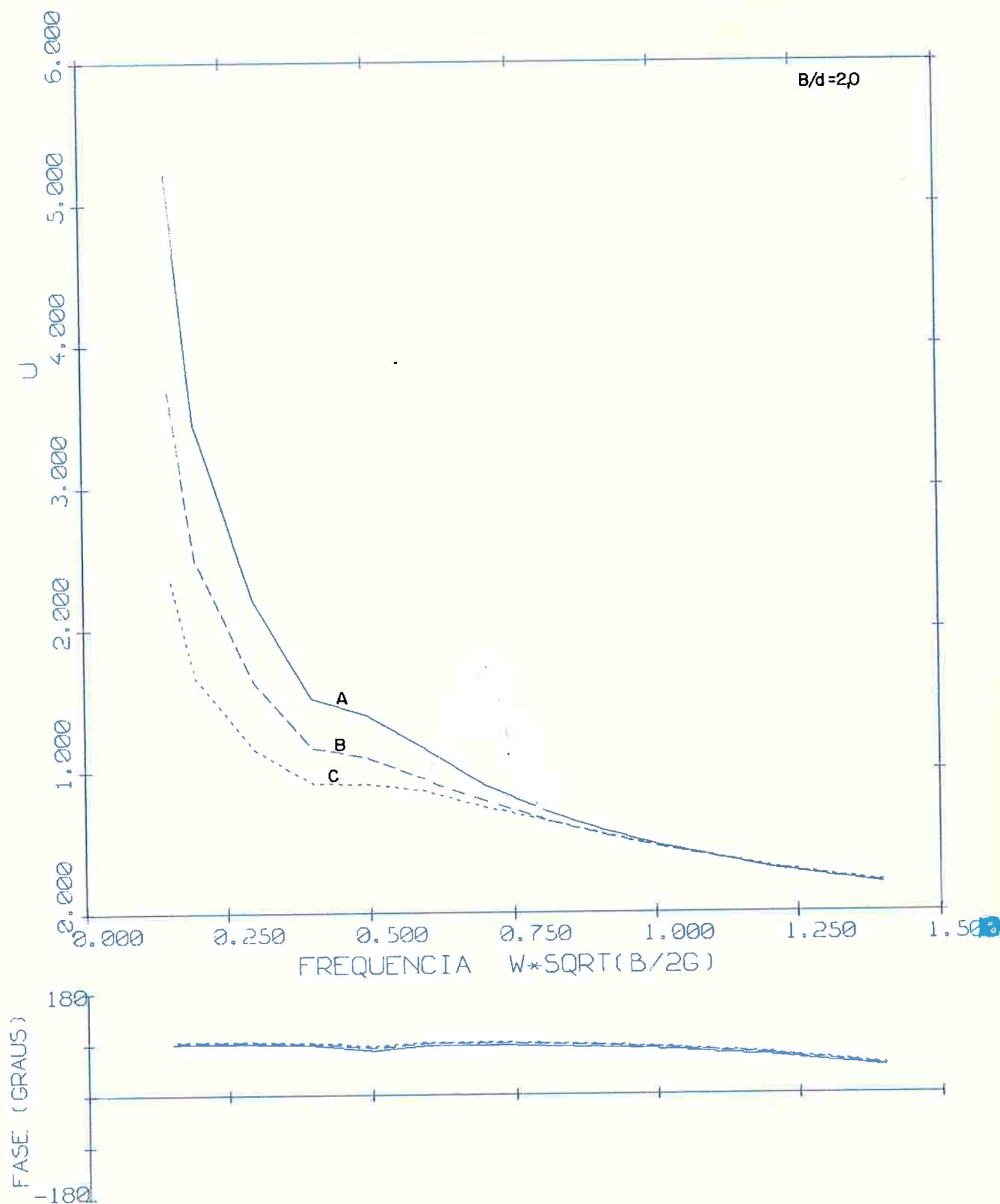
Graf. 8.29 - Coeficiente de amortecimento por radiação, b_{u0} , em "sway-roll". Seção retangular, casos A,D.



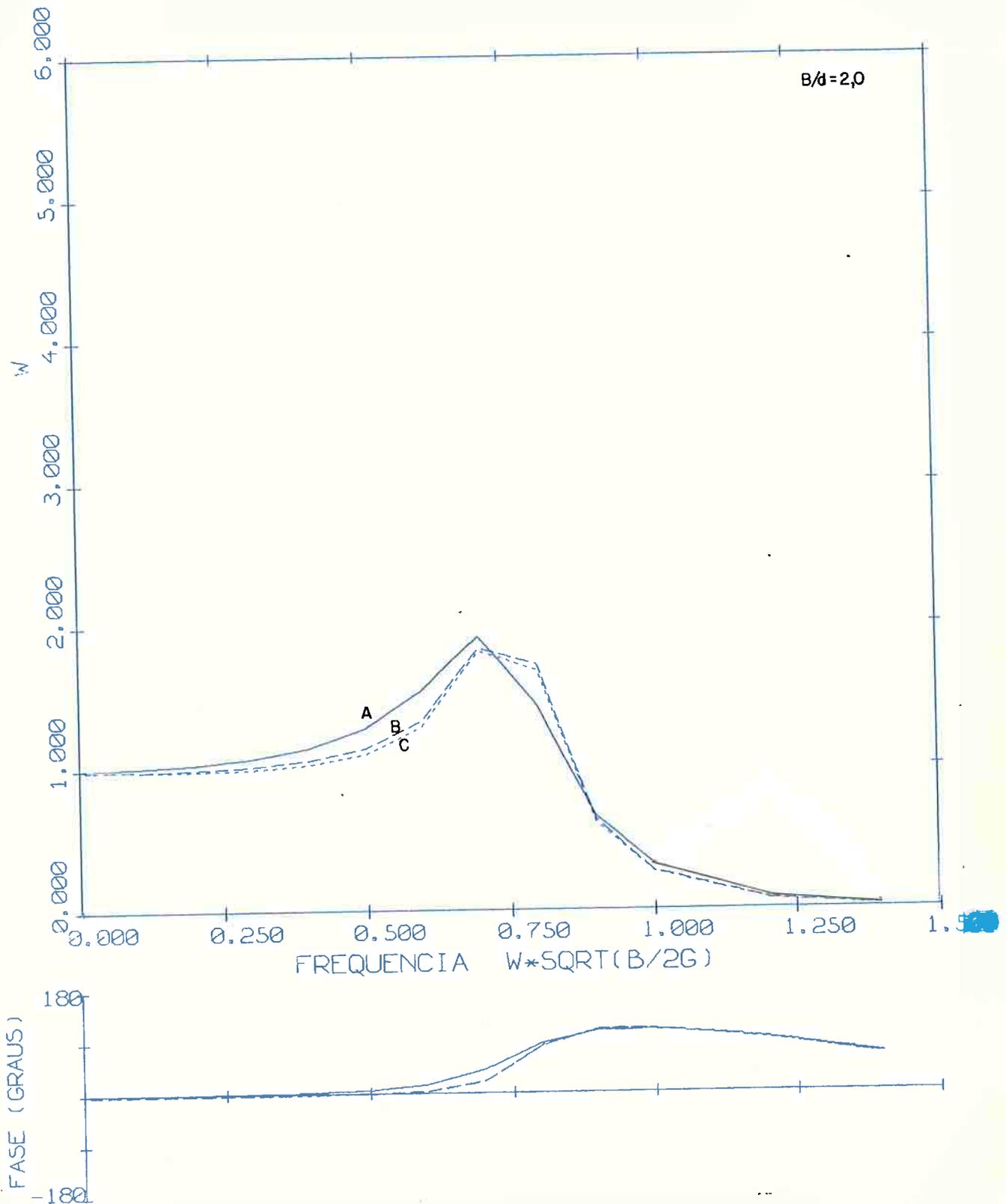
Graf. 8.30 - Coeficiente de amortecimento por radiação, b_{ww} , em "heave". Seção retangular, casos A,D.



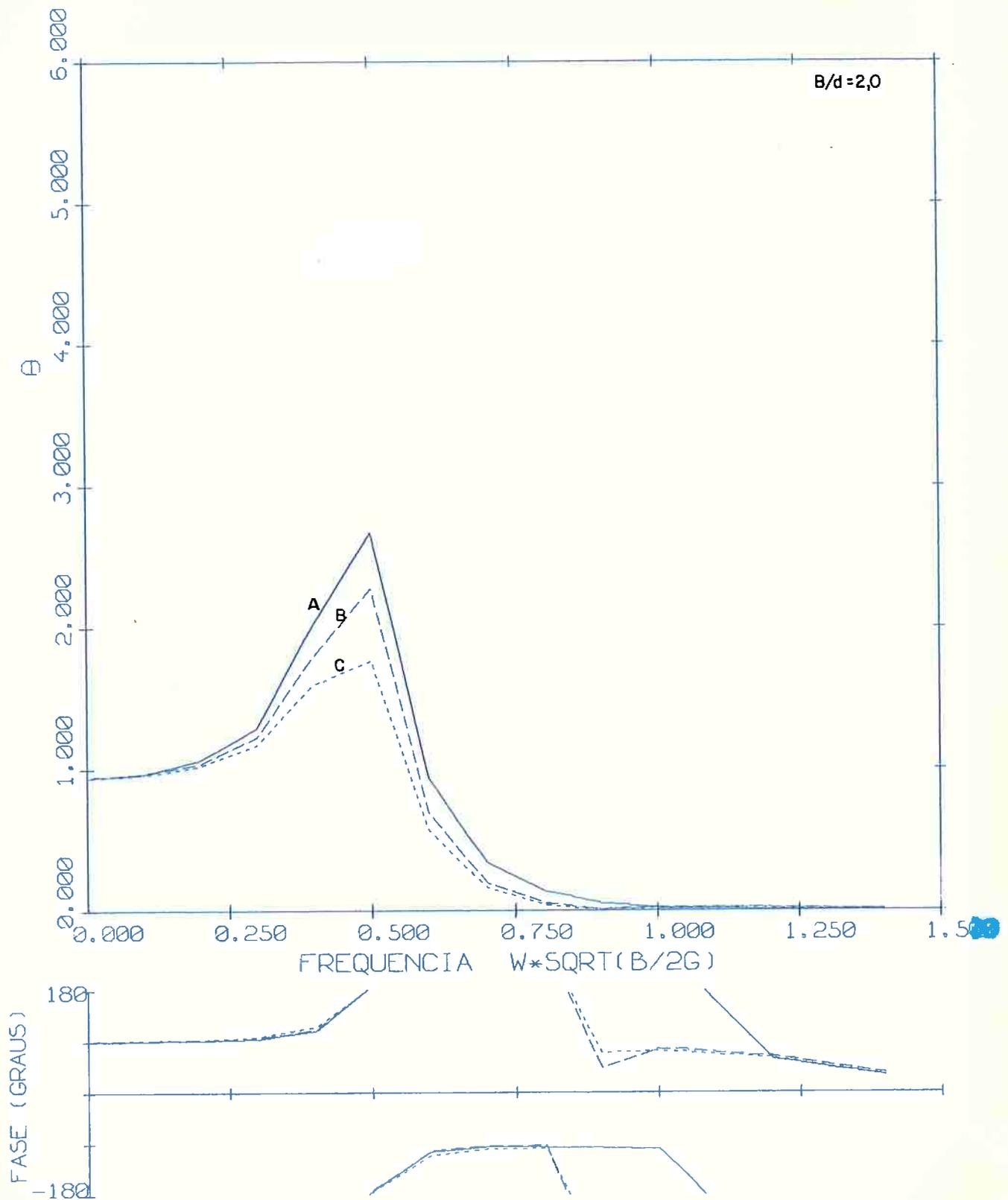
Graf. 8.31 - Coeficiente de amortecimento por radiação, b_{00} , em "roll". Seção retangular, casos A,D.



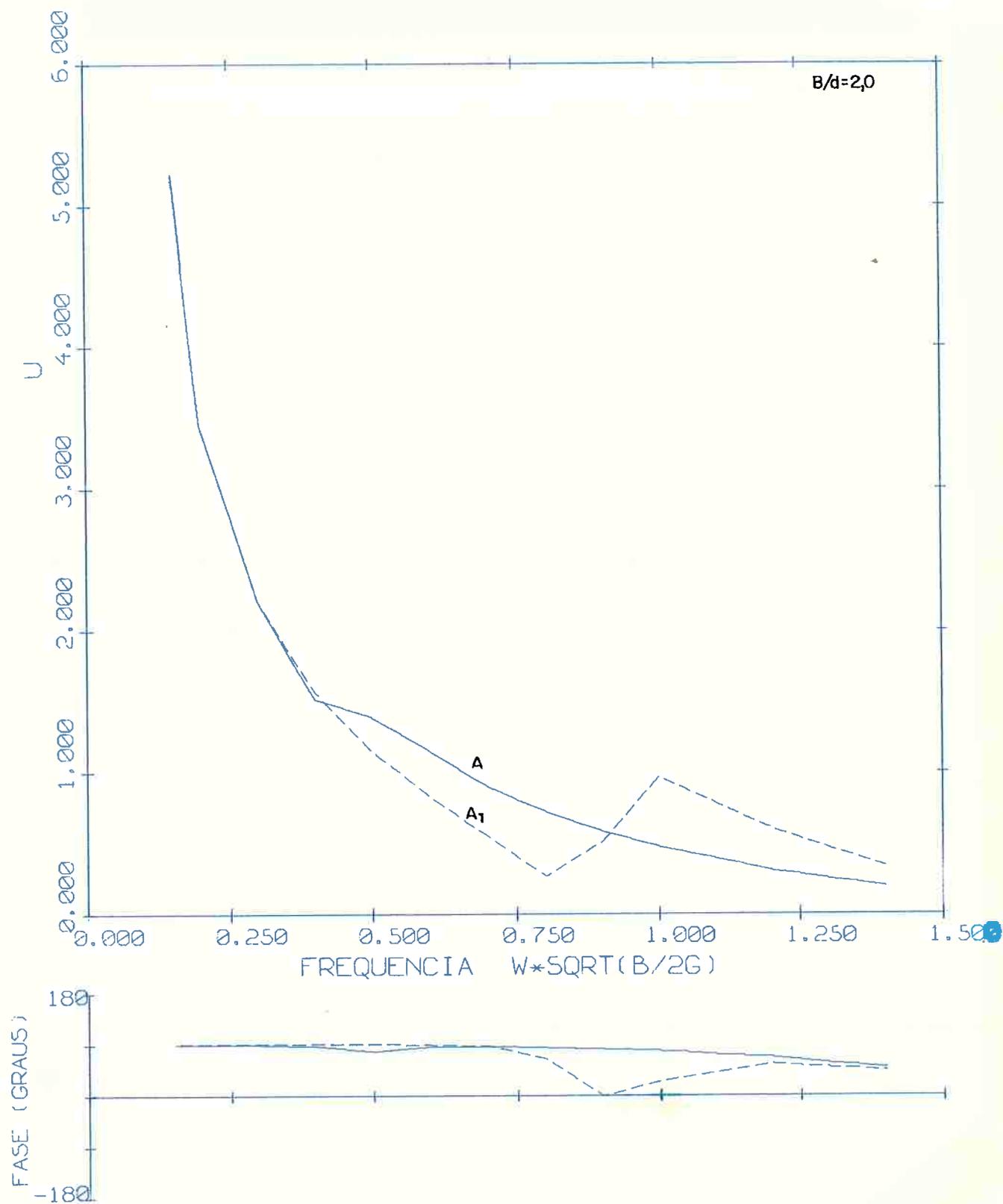
Graf. 8.32 - Função de transferência do movimento de "sway".
Seção retangular, casos A,B,C.



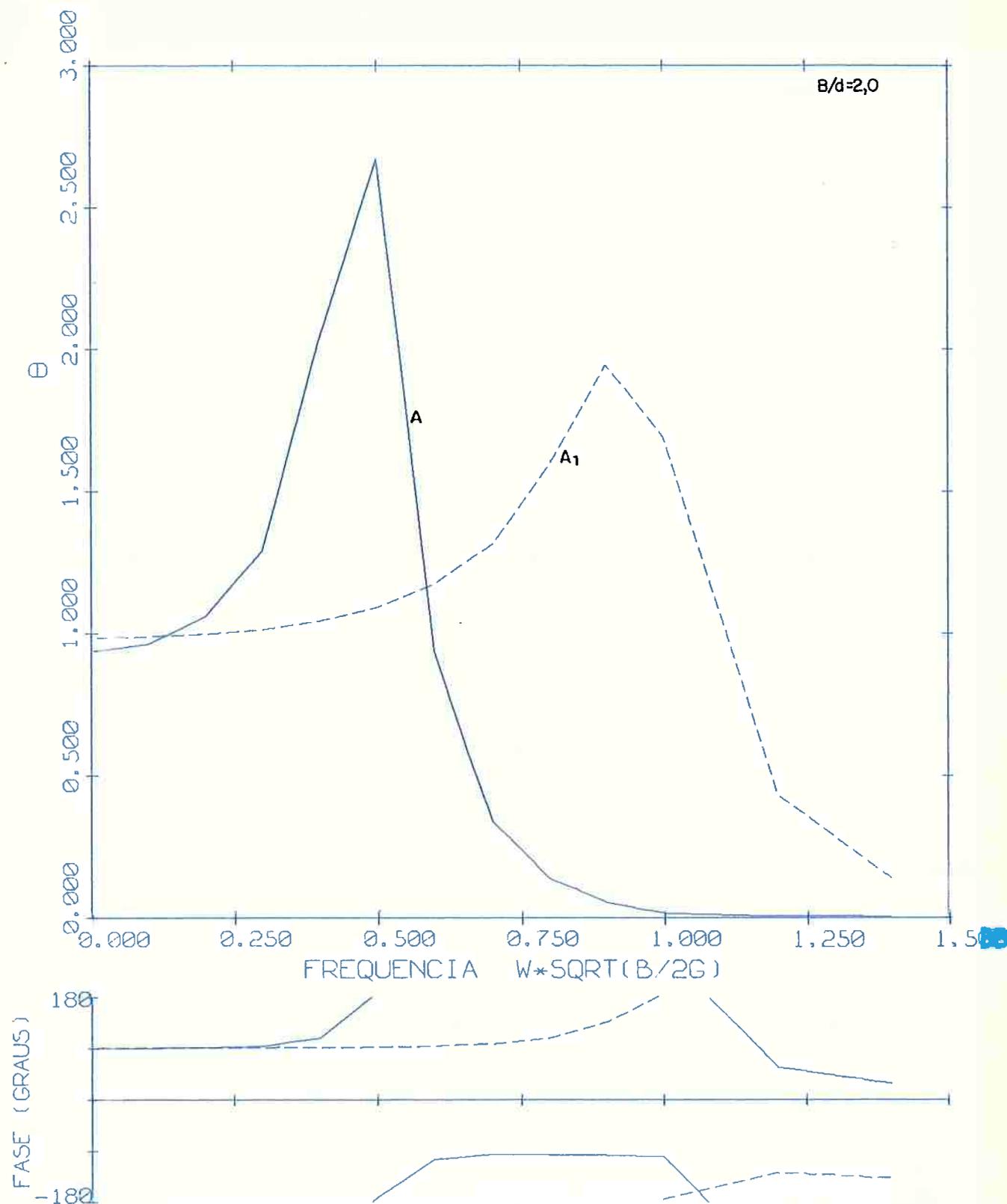
Graf. 8.33 - Função de transferência do movimento de "heave".
Seção retangular, casos A,B,C.



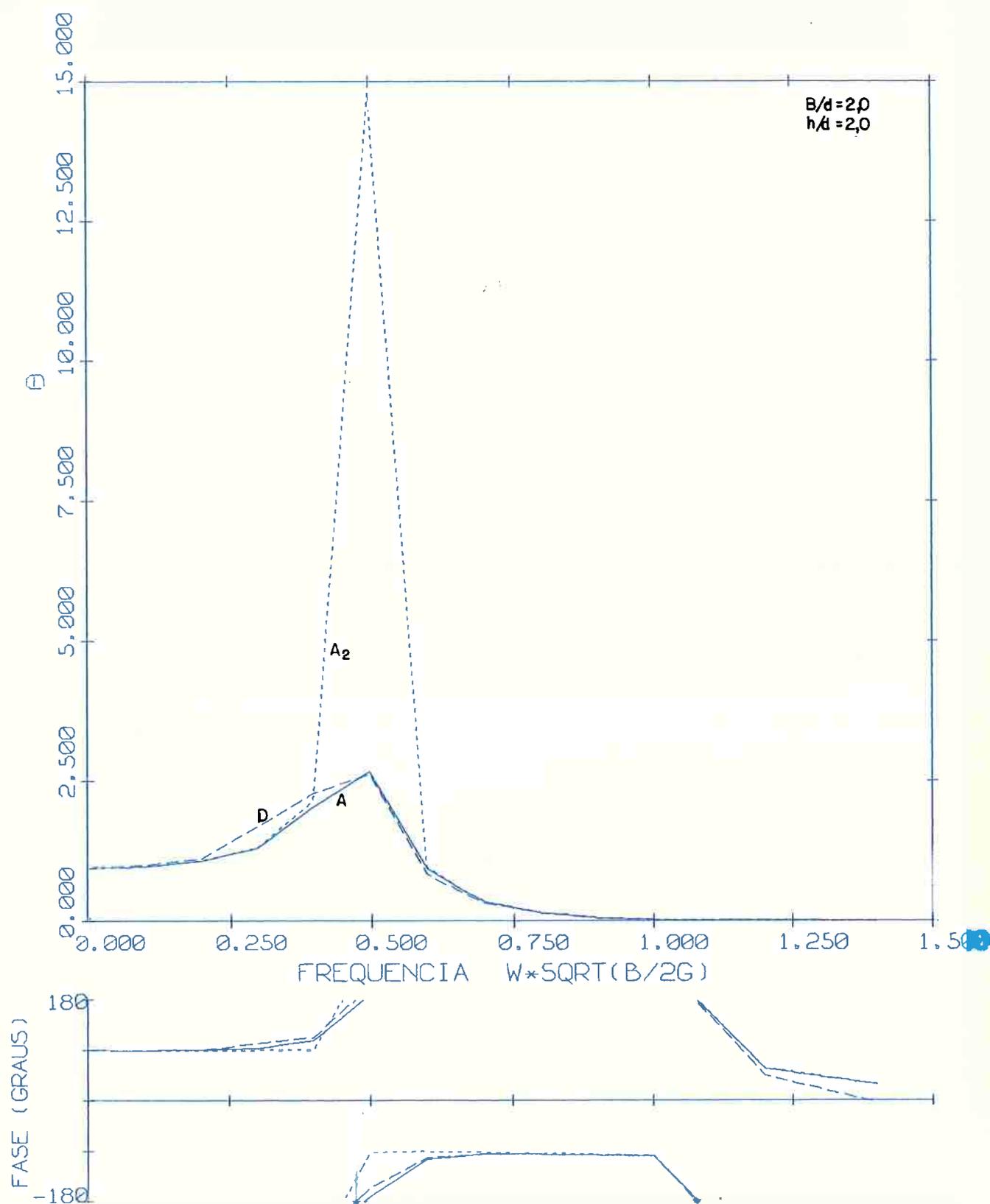
Graf. 8.34 - Função de transferência do movimento de "roll".
Seção retangular, casos A,B,C.



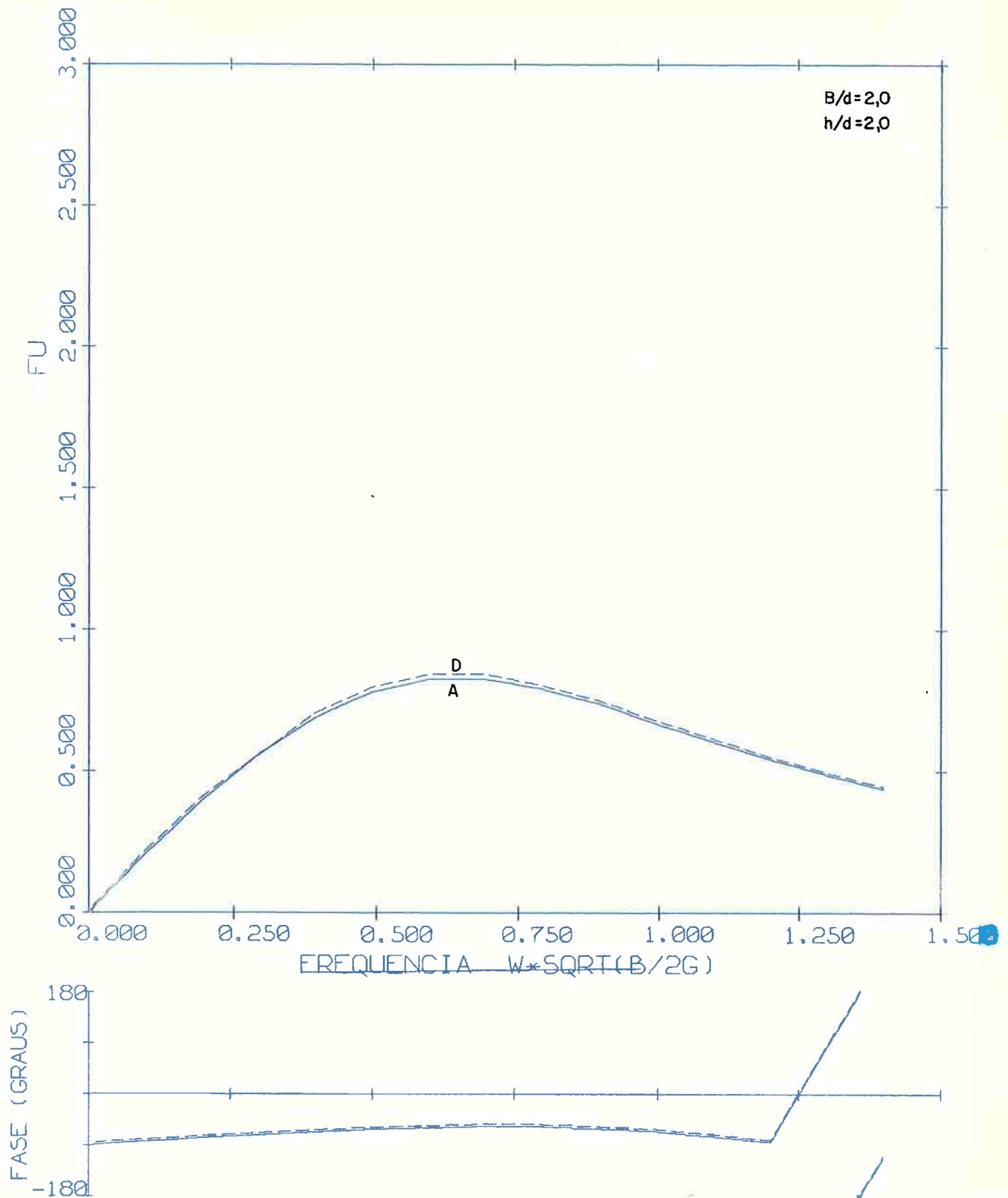
Graf. 8.35 - Função de Transferência do movimento de "sway". Seção retangular, casos A, A₁.



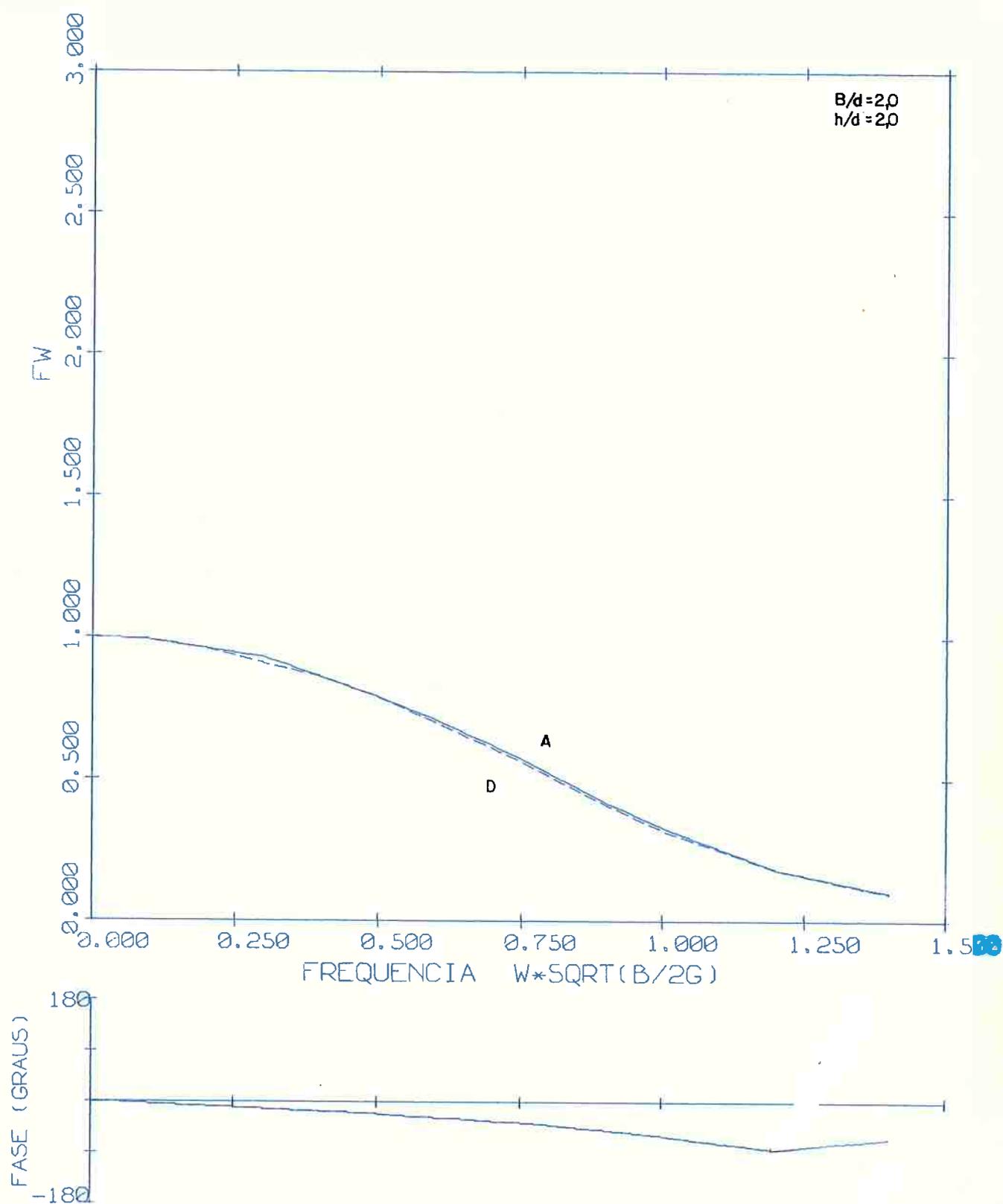
Graf. 8.36 - Função de transferência do movimento de "roll".
Seção retangular, casos A, A₁



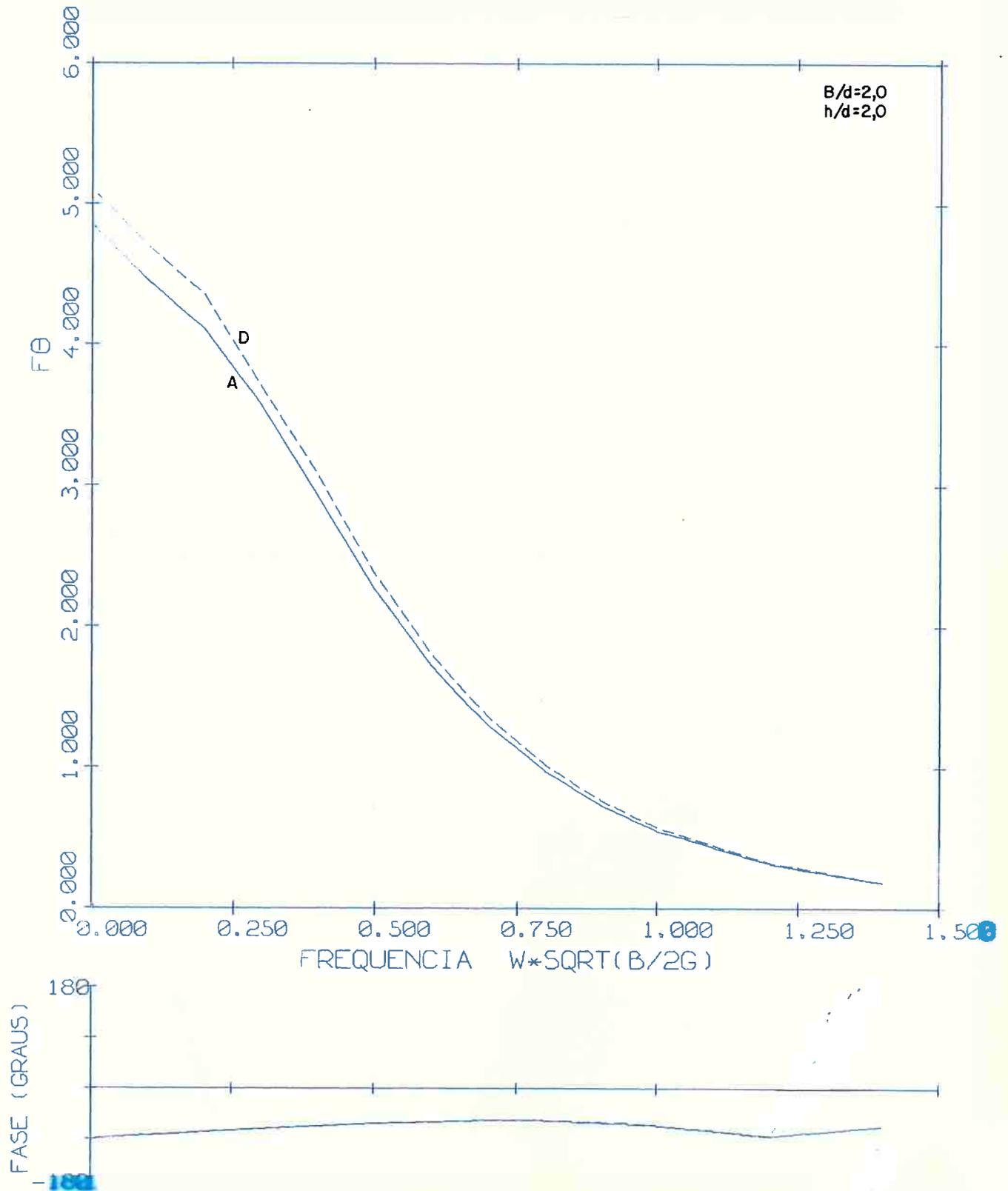
Graf. 8.37 - Função de Transferência do movimento de "roll".
Seção retangular, casos A, A₂, D.



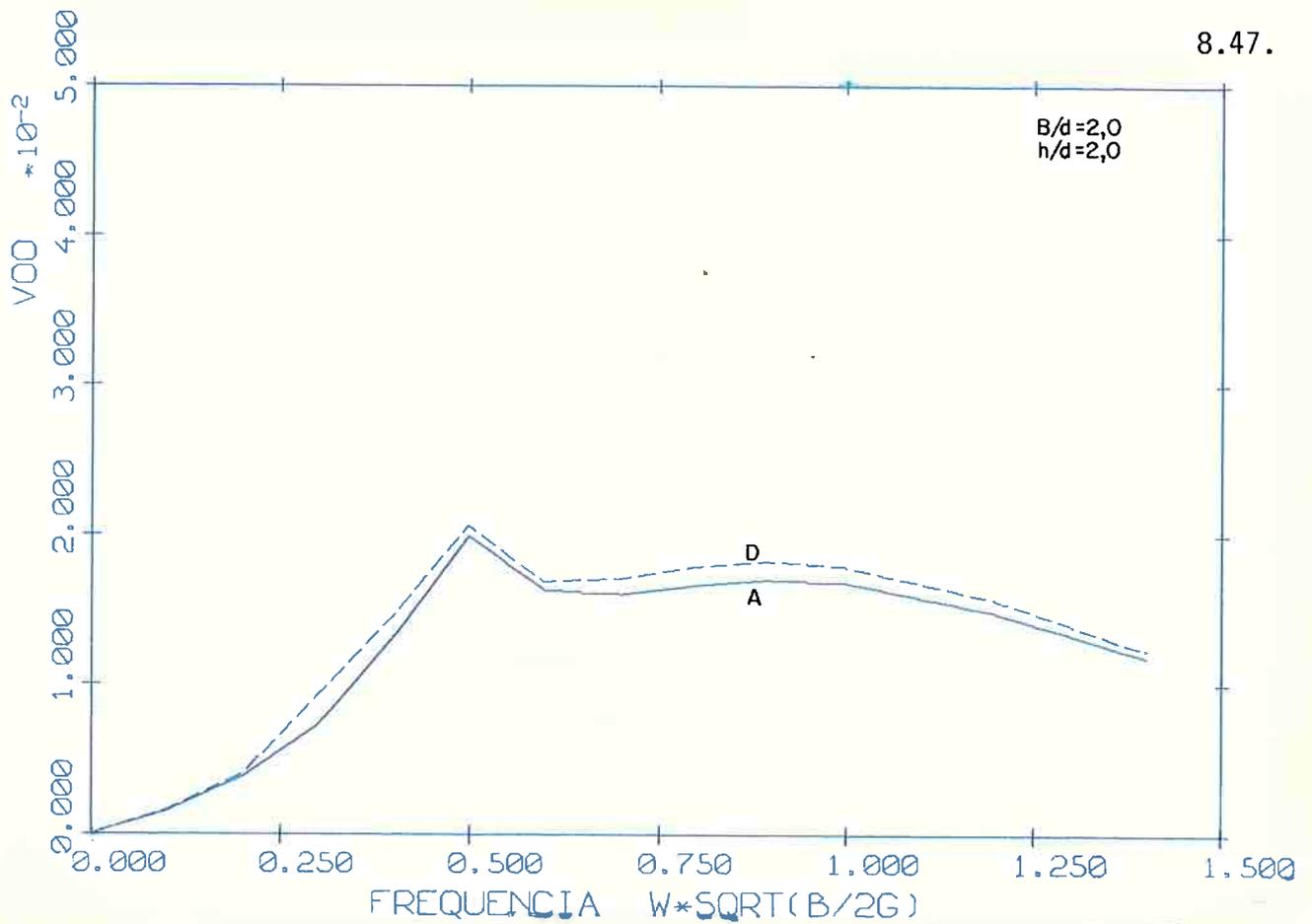
Gráf. 8.38 - Força excitante F_u , em "sway". Seção retangular, casos A,D.



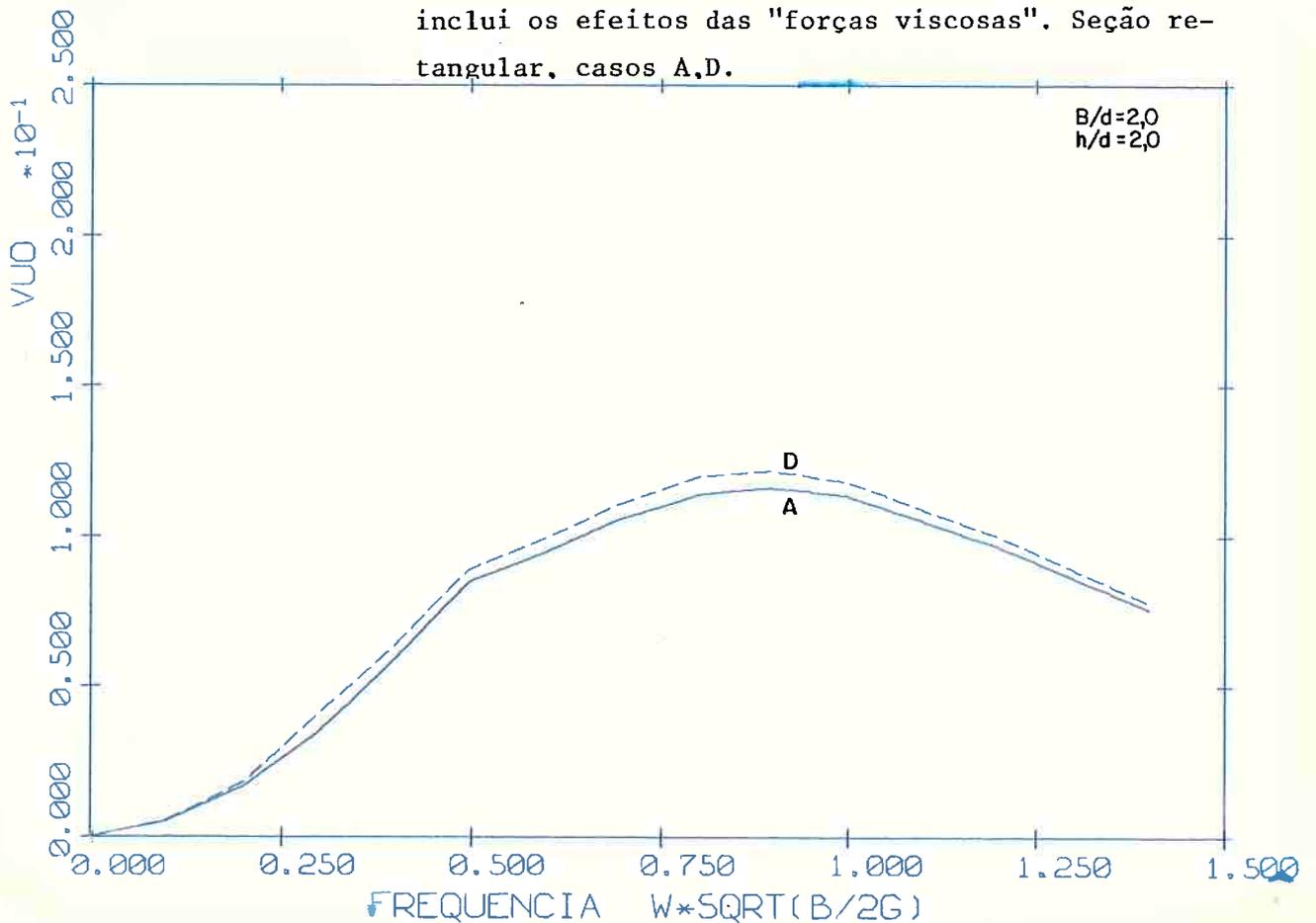
Gráf. 8.39 - Força excitante em "heave". Seção retangular, casos A,D.



Gráf. 8.40 - Momento excitante F_{θ} em "roll". Seção retangular, casos A,D.



Graf. 8.41 - Coeficiente de amortecimento total B_{00} , em "sway"- inclui os efeitos das "forças viscosas". Seção retangular, casos A,D.



Graf. 8.42 - Coeficiente de amortecimento total B_{u0} , em "sway-roll" - inclui os efeitos das forças viscosas. Seção retangular, casos A,D.

9. CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho apresentou uma cuidadosa revisão do fenômeno de oscilação lenta de corpos fundeados, suas causas e particularidades e desenvolveu um método teórico para o cálculo das forças de deriva em ondas aleatórias. Embora restrito ao caso de corpos cilíndricos infinitamente longos o método desenvolvido tem a virtude de considerar aspectos de extrema relevância no problema em estudo; o efeito da profundidade da lâmina d'água e a contribuição do potencial de segunda-ordem, usualmente desprezados.

O desenvolvimento teórico apresentado redundou em uma expressão relativamente simples para o cálculo da força de deriva em ondas aleatórias, no domínio do tempo.

Tal expressão (5.14) agrega as contribuições dos potenciais de primeira e segunda-ordem através de dois coeficientes. Estes coeficientes resultam diretamente da solução do problema linearizado de perturbação de uma onda monocromática (de frequência ω) por um corpo difrator, livre para oscilar no campo ondulatorio.

O primeiro coeficiente $Q_2^{(1)}$, correspondente à força média de deriva em ondas monocromáticas, é calculado através da extensão do método de Maruo para o caso de lâminas d'água de profundidade arbitrária. Nesta extensão são incluídos os efeitos dissipativos devido às forças de natureza viscosa agentes sobre a superfície do corpo.

O segundo coeficiente $Q_2^{(2)}$ corresponde às pressões de segunda-ordem associadas à parcela independente do tempo do potencial de segunda-ordem em ondas monocromáticas. É calculado através da aplicação de uma extensão da relação de Haskind a este potencial, tornando desnecessária a solução do problema de difração não-linear, em segunda-ordem.

Cabe enfatizar que este procedimento torna imediato o cálculo das forças de deriva em contraposição ao método direto de Faltinsen & Locken que se utiliza do conceito de funções de transferência quadráticas para o mesmo fim. Constitui-se ainda em uma melhoria da aproximação assintótica introduzida por Newman porquanto inclui o efeito da profundidade da lâmina d'água e a contribuição do potencial de segunda-ordem.

O método desenvolvido foi implementado através de programas computacionais elaborados para esse fim e que constituem o sistema DERIV. Como resultados intermediários o sistema DERIV fornece o cálculo dos coeficientes hidrodinâmicos, forças excitantes, pressões em todo o campo ondulatório e as funções de transferência dos movimentos do corpo cilíndrico.

A solução do problema linear de perturbação do campo ondulatório potencial é realizada pelo Método Compatibilizado de Elementos Finitos, cuja aplicação é brevemente discutida no presente texto.

Os exemplos de processamento abordam o caso de um corpo de seção retangular, analisando os efeitos da variação da

profundidade, da exclusão das forças dissipativas de natureza viscosa, da variação da posição do centro de gravidade e do grau de refinamento local da malha de discretização.

Cabe por fim enfatizar algumas conclusões extraídas de considerações feitas em todo o decorrer do texto e estabelecer sugestões julgadas relevantes para trabalhos futuros.

i) Conclusões:

- . condições necessárias para ocorrência do fenômeno de oscilação lenta:
 - a) incidência de ondas aleatórias
 - b) espectro de potência de onda com largura de banda estreita
 - c) pequeno poder de restauração em um dos modos de oscilação, ocasionando frequências naturais de valor baixo quando comparadas à frequência central do espectro da onda;
 - d) baixo amortecimento (por radiação e viscoso)
- . o valor da profundidade afeta significativamente o cálculo das forças de deriva;
- . a contribuição do potencial de segunda-ordem nas forças de deriva em ondas aleatórias não é desprezível em águas de profundidade finita podendo mesmo se constituir em seu termo principal;
- . a força média de deriva em ondas monocromáticas se deve unicamente à contribuição do potencial de primeira-ordem;

- . os movimentos de "heave" e "roll" afetam significativamente o cálculo dos coeficientes de força de deriva; é então de fundamental importância a correta estimativa dos efeitos de "dissipação viscosa" nos movimentos de "roll" e "sway"; a adoção do método semi-empírico de Ikeda e Tanaka apresentou resultados bastante satisfatórios;
- . os resultados numéricos correspondentes ao coeficiente de força de deriva $Q_2^{(1)}$ foram verificados através da contraposição com dados constantes da bibliografia pesquisada mostrando excelente concordância; o coeficiente $Q_2^{(2)}$ não pôde ser verificado diretamente dada sua introdução original; no entanto uma ampla e satisfatória correlação de resultados intermediários com valores obtidos na bibliografia, tais como coeficientes hidrodinâmicos e forças excitantes, atesta a confiabilidade dos valores numéricos obtidos para o coeficiente $Q_2^{(2)}$.
- . os resultados numéricos apresentaram alguma sensibilidade à variação do grau de refinamento da malha de discretização junto às quinas da seção, notadamente as grandezas diretamente associadas ao movimento de "roll";
- . a condição de contorno na superfície do corpo foi desenvolvida para o caso bi-dimensional, de forma consistente em aproximação de segunda-ordem;
- . foi feita um breve apanhado do equacionamento do problema linearizado de perturbação do campo ondulatório potencial, apresentando-se a aplicação do Método Compatibilizado de Elementos

tos finitos em sua soluçãõ;

- . foram discutidos e analisados os limites assintóticos dos potenciais de radiação quando $\omega \rightarrow 0$;
- . o fenômeno de transporte de massa foi revisto e resulta naturalmente da análise matemática da condição de radiação do potencial de segunda-ordem;
- . aplicou-se um modelo de modulação em amplitude e fase à representação de um trem de ondas aleatórias resultando uma expressão extremamente simples para o cálculo das forças de deriva; paralelamente deduziu-se uma expressão para estimativa do espectro de potência destas forças;
- . foram revistos alguns modelos semi-empíricos para o cálculo dos coeficientes linearizados de dissipação viscosa no movimento de roll; o método de Ikeda e Tanaka foi empregado com resultados bastante satisfatórios.

ii) Sugestões para trabalhos futuros:

- . conduzir experimentos em tanque de provas com o fim específico de verificar os resultados numéricos obtidos; entre outros tópicos, devem ser investigados:
 - o efeito da variação da profundidade
 - o efeito da variação da dissipação viscosa
 no cálculo dos coeficientes de força de deriva $Q_2^{(1)}(\omega, h)$ e $Q_2^{(2)}(\omega, h)$.

- . estender a presente teoria para o caso tridimensional abordando inicialmente corpos esbeltos através da aplicação de métodos assintóticos como a Teoria de Faixas ("Strip-theory") e a Teoria Unificada do Corpo Esbelto ("Unified Slender-body Theory");
- . desenvolver cálculos sistemáticos para seções típicas, variando-se os parâmetros geométricos e a forma típica das seções;
- . incluir os coeficientes de amortecimento viscosos associados ao movimento de "sway" e "roll"-devido-a-"sway" no presente modelo;
- . adaptar o programa SICNA [24]-simulação do comportamento de um navio amarrado - , desenvolvido na Divisão de Engenharia Naval do Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo, e que se baseia em modelos semi-empíricos de comportamento dinâmico, à utilização dos resultados advindos da presente teoria;
- . aprofundar-se o estudo do fenômeno de oscilação lenta nos modos de "heave" e "roll", relevantes na análise do comportamento dinâmico de plataformas semi-submersíveis, navios catamarãs com pequena área de linha d'água ("swath's"), bóias meteo-oceanográficas, etc.;
- . desenvolver estudos sistemáticos para verificação da sensibilidade numérica da solução ao grau de refinamento da malha de discretização;

9.7.

- . elaborar e desenvolver um programa de pesquisa para o estudo do comportamento dinâmico de amarras elásticas;
- . conferir maior operacionalidade ao sistema DERIV.

o0o

10. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ADVANCES in research on stability and rolling of ships:
The Society of Naval Architects of Japan - 60 th Anniversary Series, V. 60, cap. 1, p.5-8, 1960.
2. ANDERSEN, P. Ship Motions and Sea loads in restricted water depth. *Ocean Engineering* 16: 557-569, 1979.
3. ARANHA, J.A.P. *Mathematical analysis of the two dimensional water wave problem.* São Paulo, 1982. 123 p. (a ser publicado)
4. ARANHA j.A.P. *Análise de corpos alongados em águas rasas; problema de difração.* São Paulo, 1983, 103 p. (notas de aula).
5. BAI, K.J. & YEUNG, R. Numerical solutions of free surface flow problems, In: ONR Symposium, Cambridge, Mass., 1974.
6. BECK, R.F. & TUCK, E.E. Computation of shallow water ship motions. In: SYMPOSIUM on NAVAL HYDRODYNAMICS, 99, Paris, August 20-25, 1972. 50 p.
7. BISHOP, R.D. & PRICE, W.G. Probabilistic theory of ship dynamics

8. BISHOP, R.E.D. & PRICE, W.G. On the truncation of spectra. *International Shipbuilding Progress*, 25 (281): 3-6, Jan. 1978.
9. BRACEWELL, R.N. *The fourier transform and its applications*. 2 ed., Tokyo, Mcgraw-Hill Kogakusha, 1978. 444 p.
10. BRONSHTEIN, I. & SEMENDIAEV, K. *Manual de Matemática para ingenieros y estudiantes; Versión Española de Inés Handing Rojas, trad. de Emiliano Aparicio Bernardo*. 2 ed. Moscú, Editorial MIR, 1974. 696 p.
11. BROWN, S.H. & ALVESTAD, R. Simulation of maneuvering control during underway replenishment. *Journal of Hydronautics*, 12(3): 109-117, Jul. 1978.
12. CONTI, M.B. *Cálculo de carregamento em plataformas semi-submersíveis submetidas a excitação de mar real*. Dissertação de mestrado, Escola Politécnica da USP, S. Paulo, 1983.
13. CHUNG, T.J. *Finite element analysis in fluid dynamics*, New York, Mcgraw-Hill, 1978. 378p.
14. DALZELL, J.F. A note on the form of ship roll damping. *Journal of Ship Research*, 22(3): 178-185, Sept. 1978.

15. DEN HARTOG, J.P. *Vibrações nos sistemas mecânicos*; trad. de Mauro O.C. Amorelli. São Paulo, Edgard Blucher/EDUSP, 1972. 366p.
16. FALTINSEN, O.M. & LØKENS, A.E. Slow drift oscillations of a ship in irregular waves. *Modeling, Identification and Control*, 1(4): 195-213, 1980.
17. FLAGG, C.N. & NEWMAN, J.N. Sway added-mass coefficients for rectangular profiles in shallow water. *Journal of Ship Research* 15(4): 257-265, Dec. 1971.
18. FRANCO, Alberto dos Santos. Frequência de corte no modelo matemático de Pierson-Moskowitz. In: SIMPOSIO BRASILEIRO DE HIDROLOGIA E RECURSOS HIDRICOS, 5º, Blumenau, 13-18 nov. 1983. Fortaleza, ABHRH, 1983. V.4, p. 257-262.
19. HAVELOCK, T.H., The pressure of water waves upon a fixed obstacle, *Proceeding of the Royal Society*, London, England, series A, vol. 175, 1940.
20. HILDEBRAND, F.B. *Advanced calculus for applications*. 2 ed. Englewood Cliffs, N.J., Prentice-Hall, 1976. 733p.

21. HSU F.H. & BLENKARN, K.A. Analysis of peak mooring force caused by slow vessel drift oscillation in random seas. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 2^o Houston, Apr. 22-24, 1970 V.1, p. 135-146.
22. IKEDA, Y. & TANAKA, N. On eddy making component of roll damping force on naked hull. *Journal of the Society of Naval Architects of Japan*, 142: 54-64, Dec. 1977.
23. IKEDA, Y. & TANAKA, N. Viscous effect on damping forces of ship in sway and roll coupled motion. *Naval Architecture and Ocean Engineering*, 19:44-53, 1981.
24. INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO S/A. Divisão de Engenharia Naval. *Estudo do sistema do "Quadro de Bóias de Curimã"*; etapas I e II. São Paulo, 1981, (Relatórios nº 14900 e 16301).
25. INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO S/A. Divisão de Engenharia Civil. *Análise de Ondas Bidimensionais*, S. Paulo, 1983, p. (Relatório nº
26. INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO. Divisão de Engenharia Naval, *Ângulos de "pitch", "roll" e "yaw"*; definição e métodos de medição. São Paulo, 1982. 31p. (Relatório nº 16.310).

27. INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO E.S.PAULO S/A. Divisão de Engenharia Naval. Sistema DERIV - manual de utilização e listagens dos programas computacionais. S. Paulo, 1984, (Relatório nº 20.300)
28. INSTITUTO DE PESQUISAS TECNOLÓGICAS DO ESTADO DE SÃO PAULO. Divisão de Engenharia Naval - *um modelo matemático de simulação do comportamento de um navio amarrado sujeito à ação de ondas, vento e correnteza; desenvolvimento teórico e manual de utilização*. São Paulo, 1983. 297p. (Relatório nº 17.468).
29. KIM, C.H. Hydrodynamic forces and moments for heaving swaying, and rolling cylinders on water of finite depth, *Journal of Ship Research* 13(2): 137-154, June, 1969.
30. KIM, C.H. Effect of mesh size on the accuracy of finite-water added mass. *Journal Hydronautics, engineering notes*, 9(7): 125-126, July 1975.
31. KIM, C.H. *Calculation of hydrodynamic forces for cylinders oscillating in shallow water*. Gothenburg, Chalmers University of Technology, 1967. 34p. (Chalmers University of Technology - Department of Naval Architecture and Marine Engineering - Division of Ship Hydromechanics - Report nº 36).

32. KIM, C.H., & DALZELL, J.F. An analysis of the quadratic frequency response for lateral drifting force and moment. *Journal of Ship Research* 25(2): 117-118, June, 1981.
33. KIM, Y.C.; KHADRA, L.; POWERS, E.J. Wave modulation in a nonlinear dispersive medium. *Phys. Fluids*, 23(11), 2250-2257, Nov. 1980.
34. KOKKINOWRACHOS, K. & BARDIS, L. Hydrodynamic characteristics for the design of rectangular barges in restricted water depth. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON OCEAN ENGINEERING AND SHIP HANDLING, 29, Gothenburg, Sweden, 1983, p. 97-124.
35. LE MEHAUTE, B. *An introduction to hydrodynamics and water waves*. New York, Spring Verlag, 1976.
36. LEWIS, F.M. The inertia of the water surrounding a vibrating ship. *Transactions of the society of Naval Architects and Marine Engineers*, 37:1-20, 1929.
37. MARUO, H. The drift of a body floating on waves. *Journal of Ship Research*, 4(3): 1-10, Dec. 1960.

38. MIKSAD, R.W. et alii. Applications of digital time series techniques to determine nonlinear drift forces. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON OFFSHORE ENGINEERING, 39, Rio de Janeiro, Sept 14-18, 1981. *Proceedings*. London, Pentech Press, 1982. p.273-289.
39. MYRHAUG, D. & SAND, I.O. On the frictional damping of the rolling of a circular cylinder. *Journal of Ship Research*, 24(4): 244-255, Dec, 1980.
40. NEWLAND, D.E. *An introduction to random vibration and spectral analysis*. 3,ed, London, Longman, 1980. 285p.
41. NEWMAN, J.N. *Marine Hydrodynamics*; Cambridge. M.I.T., 1978. 402p.
42. NEWMAN, J.N. The drift force and moment on ships in waves. *Journal of Ship Research*, 11(1): 51- March, 1967.
43. NEWMAN, J.N. Second-order, slowly-varying forces on vessels in irregular waves. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM on the DYNAMICS of MARINE VEHICLES and STRUCTURES in WAVES, London, Apr. 1-5, 1974. London, IME, 1975. p.182-186.

44. NOLTE, K.G. & HSU, F.H. Statistics of ocean wave groups. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 49, Houston, Tex., May 1-3, 1972. v.1, p. 637-644.
45. NUNES, DANTON et alii. Low frequency motions of an offshore moored vessel: a time domain simulation procedure. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM on OFFSHORE ENGINEERING, Rio de Janeiro, Sept. 12-16, 1983. 18p.
46. NUNES, DANTON. Random wave generation by linear digital filtering of Gaussian white noise. In: SECOND INTERNATIONAL CONGRESS OF THE IMAEM, Trieste, Sep. 21-26, 1981.
47. PESCE, CELSO P. et alii. Numerical simulation of the low frequency motions and mooring line tensions of an offshore moored vessel. In: CONGRESSO PAN-AMERICANO de ENGENHARIA NAVAL, TRANSPORTE MARITIMO e ENGENHARIA PORTUARIA, 89, Washington, D.C., 11-17, set. 1983, 34p.
48. PESCE, CELSO P. *Medições em escala real das tensões agentes nas amarras de um navio cisterna. São Paulo, IPT/DINAV, 1981. 29p. (Trab. apres. ao 79 Congresso Pan-Americano de Engenharia, Transportes Marítimos e Engenharia Portuária, Viña del Mar, out. 1981).*

49. PESCE, CELSO P. *Aspectos teóricos e experimentais do comportamento dinâmico de uma embarcação fundeada em mar aberto.* Escola Politécnica da USP - Seminário . apresentado na Área de Hidrodinâmica do D.E.N. 1981.
50. PINKSTER, J.A. Low-frequency phenomena associated with vessels moored at sea. *Society of Petroleum Engineers Journal*: 487-494. Dec. 1975.
51. PINKSTER, J.A. Mean and low frequency wave drifting forces on floating structures. *Ocean Engineering*, 6(6): 593-615, 1979.
52. POTASH, R.L. Second order theory of oscillating cylinders. *Journal of Ship Research*, 15(4): 295-324, Dec. 1971.
53. REMERY, G.F.M. & HERMANS, A.J. The slow drift oscillations of a moored object in random seas. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 39 Houston, Apr. 19-21, 1971. V.2, p. 829-838.
54. ROBERTS, J.B. Nonlinear analysis of slow drift oscillations of moored vessels in random seas. *Journal of Ship Research*, 25(2): 130:140, Jun. 1981.

55. SALVESEN, N.; TUCK, F.O.; FALTINSEN, O.M. Ship motions and sea loads. *Transactions of the Society of Naval Architects and Marine Engineers*, 78: 250-287, 1970.
56. SALVESEN, N. Second-order steady forces and moments on surface ships in oblique regular waves. In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM on the DYNAMICS of MARINE VEHICLES and STRUCTURES in WAVES, London, Apr. 1-5, 1974. London, IME, 1975. p. 212-226.
57. SCHLICHTING, H. *Boundary-layer theory*, trad. de J. Kestin. 6.ed. New York, McGraw-Hill Book, 1968. 748p. (Mcgraw-Hill Series in Mechanical Engineering).
58. SHANMUGAM, K.S. *Digital and analog communication systems*. New York, John Wiley & Sons, 1979. 600 p.
59. SIDIROPOULOS, E. & MUGA, B.J. Evaluation of drift force computation methods. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 129, Houston, Tex., May 5-8, 1980. v.4, p. 395-400.
60. STOKER, J.J. *Water waves; the mathematical theory with applications*. New York, Interscience Publishers, 1957. 567p. (Pure and Applied Mathematics, 4).

61. SUEHIRO, K., On the drift of ships caused by rolling among waves. *Transactions INA*, vol. 66, 1924.
62. TIJONOV, A. & SAMARSKY, A. *Equaciones de la física matematica*. Tradução de Juan José Tolosa, Moscou, Mir, 1972.
63. TRIANFATYLLOU, M.S. Preliminary design of mooring systems. *Journal of Ship Research*, 26(1): 25-35, Mar. 1982.
64. VAN DYKE, M. *Perturbation methods in fluid mechanics*. Stanford, Cal., Parabolic Press, 1975. 271 p.
65. VINJE, T. On the statistical distribution of second-order forces and motion. *International Shipbuilding Progress*, 30(343): 58-68, Mar. 1983.
66. VUGTS, J.H. The hydrodynamic coefficients for swaying, heaving and rolling cylinders in a free surface. *International Shipbuilding Progress*, 15(167): 251-276, Jul. 1968.
67. WATANABE, Y. Some contributions to the theory of rolling, *Transactions INA*, vol. 80, 1938.

68. WEHAUSEN, J.V. & LAITONE, E.V. Surface waves. In: FLÜGGE, S. & TRUESDELL, C., ed. *Encyclopedia of physics*, Berlin, Springer-Verlag, 1960. v.9, p. 447-814.
69. ZIENKIEWICZ, O.C. Why Finite elements? In: *Finite elements in fluids*. London, Wiley & Sons, 1975, v.1, cap.1.
70. KEULEGAN, G.H. & CARPENTER, L.H. Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 60(5); 423-440, May 1958.
71. SARPKAYA, T. Wave forces on inclined smooth and rough circular cylinders. In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE, 140, Houston, Tex, May 3-6, 1982, v. 3, p. 731-736.

ANEXO I. DEDUÇÃO DA CONDIÇÃO DE CONTORNO NA SUPERFÍCIE LIVRE**I.1. Dedução da condição exata**

Dentro da hipótese de fluido ideal, ou seja invíscido e incompressível, a condição de contorno na superfície livre é construída a partir de uma condição cinemática e uma dinâmica.

A primeira estabelece a compatibilidade de fluxo junto à superfície, incôgnita do problema. A segunda estabelece a compatibilidade de pressão com a pressão atmosférica assumida invariante no tempo e no espaço.

Ambas as condições são equivalentes a dizer que a derivada total da pressão junto à superfície é nula. Ou seja:

$$\left. \frac{D}{Dt}(p(x,y,z,t)) \right|_{z=\eta(x,y,t)} = 0 \quad (I.1)$$

Tomando a equação de Bernoulli:

$$p = -\rho \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \nabla \Phi + gz \right) - p_a \Big|_{z=\eta} \quad (I.2)$$

e aplicando-se (I.1) em (I.2) e lembrando ainda que o operador $\frac{D}{Dt}$ é definido por:

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \right) \quad (I.3)$$

e que \vec{v} derivado de campo potencial de velocidades tem-se:

I.2.

$$\lim_{z \rightarrow \eta(x,y,z,t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \Phi \cdot \nabla \right) \left[-\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla \Phi + gz \right) - p a \right] = 0 \quad (I.4)$$

como pa é invariante, obtemos:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) + \nabla \Phi \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) + \nabla \Phi \cdot \nabla (gz) \right|_{z \rightarrow \eta(x,y,t)} = 0$$

desenvolvendo:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \nabla \Phi \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \Phi) + \nabla \Phi \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \nabla \Phi \cdot \nabla (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z \rightarrow \eta} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} + 2 \nabla \Phi \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \nabla \Phi \cdot \nabla (\nabla \Phi \cdot \nabla \Phi) \right|_{z \rightarrow \eta} = 0 \quad (I.5)$$

A expressão (I.5) constitui-se na condição "exata" (dentro da teoria potencial) que deve ser aplicada à superfície livre

I.2. Aproximação por série assintótica

Seja a série assintoticamente convergente⁽¹⁾ em ϵ :

$$\Phi = \Phi_1 + \epsilon \Phi_2 + \dots \quad (I.6)$$

onde ϵ é o parâmetro de magnitude de amplitude de onda definido como:

(1) A convergência da série para ondas de amplitude infinitesimal é comentada em [Wehausen, 462] e pode ser apreciada em [Levi-Civita].

$$\epsilon = \frac{\omega^2}{g} A$$

com

A - amplitude de onda

ω - frequência da onda.

Na realidade, de acordo com Van Dike (p. 30), convergência não é necessariamente um requisito básico para uma boa aproximação da solução. Há séries divergentes que fornecem, se tomados os primeiros termos da expansão, excelente aproximação, enquanto expressões assintóticas baseadas em séries convergentes podem requerer a inclusão de muitos termos para uma razoável avaliação da função.

Considerem-se ainda as séries

$$\vec{V}(x, y, z, t, \epsilon) = \vec{V}_1 + \epsilon \vec{V}_2 + \dots$$

$$p(x, y, z, t, \epsilon) = p_1 + \epsilon p_2 + \dots \quad (I.7)$$

$$\eta(x, y, z, t, \epsilon) = \eta_1 + \epsilon \eta_2 + \dots$$

Continuam também válidas quaisquer expansões em série de Taylor junto à superfície livre:

$$\Phi(x, y, \eta, t) = \Phi(x, y, 0, t) + \eta \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{z=0} + \frac{1}{2} \eta^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right)_{z=0} + \dots \quad (I.8)$$

ou

$$\phi(x,y,\eta,t) = \phi_1(x,y,0,t) + \epsilon[\phi_2(x,y,0,t) + \frac{\eta\partial\phi_1}{\partial z}(x,y,0,t)] + \dots \quad (\text{I.8.a})$$

Utilizando-se tais expressões em (I.5) e agrupando-se os termos de mesma ordem de magnitude (ϵ , ϵ^2 , ϵ^3 , ...) obtém-se uma sequência de condições de contorno válidas na superfície conhecida dada por $z = 0$.

Assim:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left\{ \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + \epsilon \left[\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial z \partial t^2} \right] + 0(\epsilon^2) \right\}_{z=0} \quad (\text{I.9.1})$$

$$g \frac{\partial \phi}{\partial z} = g \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \epsilon \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} \right] + 0(\epsilon^2) \right\}_{z=0} \quad (\text{I.9.2})$$

$$\nabla \phi = \left\{ \nabla \phi_1 + \epsilon \left[\nabla \phi_2 + \eta \frac{\partial}{\partial z} \nabla \phi_1 \right] + 0(\epsilon^2) \right\}_{z=0} \quad (\text{I.9.3})$$

$$\nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left\{ \frac{\nabla \partial \phi_1}{\partial t} + \epsilon \left[\frac{\nabla \partial \phi_2}{\partial t} + \eta \nabla \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z \partial t} \right] + 0(\epsilon^2) \right\}_{z=0} \quad (\text{I.9.4})$$

$$\nabla \phi \cdot \nabla \frac{\partial \phi}{\partial t} = \left\{ \epsilon \nabla \phi_1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) + 0(\epsilon^2) \right\}_{z=0} \quad (\text{I.9.5})$$

$$\nabla \phi \cdot \nabla \phi = \left\{ \epsilon \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1 + 0(\epsilon^2) \right\}_{z=0} \quad (\text{I.9.6})$$

$$\nabla \phi \cdot \nabla (\nabla \phi \cdot \nabla \phi) = \left\{ \epsilon^2 \nabla \phi_1 \cdot \nabla (\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1) + 0(\epsilon^3) \right\}_{z=0} \quad (\text{I.9.7})$$

$$\eta = -\frac{1}{g} \left\{ \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \epsilon \left[\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} + 0(\epsilon) \right) \frac{\partial \phi_1}{\partial z} + \frac{1}{2} (\epsilon \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1) + 0(\epsilon) \right] \right\}_{z=0} \quad (\text{I.9.8})$$

Resultando, com erros tomados em relação a $\phi_1(x,y,z,t)$:

- aproximação linear:

$$\left. \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 + 0(\epsilon) \quad (1.10)$$

- aproximação em segunda ordem:

$$\left. \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + \eta \frac{\partial^3 \phi_1}{\partial z \partial t^2} + g \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \eta g \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} - 2\nabla \phi_1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) \right|_{z=0} = 0 + 0(\epsilon^2)$$

rearranjando-se os termos:

$$\frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_2}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) + 2\nabla \phi_1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) = 0 + 0(\epsilon^2)$$

utilizando-se a expressão (I.9.8), tem-se, em $z=0$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \left[\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) - 2\nabla \phi_1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) \right]_{z=0} + 0(\epsilon^2) \quad (I.11)$$

Note-se que o segundo membro da expressão (I.11) contém apenas termos quadráticos em ϕ_1 ou em operações lineares sobre ϕ_1 . Pode-se dizer que o potencial em segunda ordem ϕ_2 é excitado por tais termos. Caso ϕ_1 seja o potencial resultante de uma excitação harmônica de frequência ω , o potencial ϕ_2 será excitado por um termo constante adicionado a um termo pulsante em 2ω . Na realidade o potencial ϕ_2 pode, matematicamente, ser encarado como uma solução particular da equação homogênea linearizada, com a excitação dada como função quadrati-

ca da solução da homogênea.

Veremos, no anexo II, que condições de contorno análogas se aplicarão na superfície de um corpo eventualmente presente no meio fluido. Nesse caso os termos quadráticos da velocidade do corpo se constituirão em excitações de segunda ordem do potencial Φ_2 .

I.3. O potencial de segunda ordem e a condição de contorno na superfície livre

No caso da propagação de ondas livres sem a presença de um corpo difrator o potencial na segunda ordem fica então equacionado (com erro de ordem ϵ^2):

- $\nabla^2 \phi_2 = 0$ no domínio fluido

- $$\left. \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_2}{\partial z} \right|_{z=0} = \left[\frac{1}{g} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right) - 2 \nabla \phi_1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) \right]_{z=0} \quad (\text{I.12})$$

- $\left. \nabla \phi_2 \cdot \vec{n} \right|_{\partial H} = 0$; na superfície do fundo de contorno ∂H

onde ϕ_1 é a solução do problema linear:

$$\nabla^2 \phi_1 = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad (\text{I.13})$$

$$\left. \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0$$

É interessante analisarmos o segundo termo da condição de contorno na superfície em $z=0$. Tal termo, por ser quadrático em Φ_1 , suposto harmônico em ω , pode ser expresso por:

$$-\left[2\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right) - \frac{1}{g}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right)\right]_{z=0} = L_{20}(x) + \left[L_{22}(x)e^{-2i\omega t} + (\star)\right]^{(1)} \quad (I.14)$$

onde admitimos, por simplicidade, tratarmos do problema bidimensional. Desenvolvendo o primeiro membro da expressão acima

$$\begin{aligned} & - \left\{ -\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right) - \frac{1}{g} \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\right) \right\}_{z=0} = \\ & = \left\{ -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_1) + \frac{1}{g} \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z}\left(-\omega^2\Phi_1 + g\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}\right) \right\}_{z=0} = \\ & = \left\{ -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\Phi_1)^2 - \frac{1}{g}\left[\omega^2\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - g\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}\right] \right\}_{z=0} = \\ & = \left\{ -\frac{\partial}{\partial t}\left[(\nabla\Phi_1)^2 + \frac{i\omega^2}{2}\Phi_1^2\right] - \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2} \right\}_{z=0} \quad (I.15) \end{aligned}$$

onde foram utilizadas a equação da continuidade e a condição linearizada na superfície livre.

Os termos pulsantes em 2ω não apresentam interesse no presente trabalho visto que o foco das atenções é a análise dos movimentos em baixa frequência de corpos fundeados. Centraremos a atenção no cálculo de $L_{20}(x)$.

(1) - (*) significa complexo conjugado.

I.8.

A primeira parcela de (I.15) não colabora em $L_{20}(x)$ visto que contém derivada em relação ao tempo. A segunda parcela no entanto deve ser desenvolvida. Para isso tomamos:

$$\phi_1(x, z, t) = \phi_1(x, z) e^{-i\omega t} + \phi_1^*(x, z) e^{i\omega t} \quad (I.16)$$

então

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \phi_1}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} &= -i\omega(\phi_1^* e^{i\omega t} - \phi_1 e^{-i\omega t}) \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} e^{-i\omega t} + \frac{\partial^2 \phi_1^*}{\partial x^2} e^{i\omega t} \right) = \\ &= -i\omega \left(\phi_1^* \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1^*}{\partial x^2} + \phi_1^* \frac{\partial^2 \phi_1^*}{\partial x^2} e^{2i\omega t} - \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} e^{-2i\omega t} \right) \end{aligned}$$

As parcelas em $2i\omega t$ devem também ser esquecidas e, portanto:

$$L_{20}(x) = i\omega \left(\phi_1^* \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1^*}{\partial x^2} \right)$$

porém

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_1^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \phi_1 \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} \right) = \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} + \phi_1^* \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} - \phi_1 \frac{\partial^2 \phi_1^*}{\partial x^2}$$

logo

$$L_{20}(x) = i\omega \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_1^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \phi_1 \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} \right) \quad (I.17)$$

ANEXO II. DEDUÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO NO FUNDO E NA SUPERFÍCIE DO CORPO

Seja um sistema cartesiano (x,y,z) com origem no plano da superfície tranquila da água e o eixo z orientado para cima. Seja também um corpo de superfície impermeável descrita pela equação $F(x,y,z,t) = 0$, tal que $\nabla F = \vec{N}$ é o versor normal à superfície do corpo apontando para seu interior.

Analisaremos a condição de compatibilização cinemática do escoamento de um fluido invíscido junto a cota superfície. Tal condição pode ser estabelecida através da invariância da derivada substancial de $F(x,y,z,t)$ [Wehausen, p.649]

$$\left. \frac{D}{Dt} F(x,y,z,t) \right|_{(x,y,z) \in F} = 0 \quad (\text{II.1})$$

ou seja

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \nabla F \right|_{(x,y,z) \in F} = 0 \quad (\text{II.1a})$$

ou ainda

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \phi \cdot \vec{N} \right|_{(x,y,z) \in F} = 0 \quad (\text{II.1b})$$

com

$$\vec{N} = \vec{N}(x,y,z) \Big|_{(x,y,z) \in F}$$

No caso da superfície ser o fundo

$$\left. \nabla\phi \cdot \vec{N} \right|_{(x,y,z) \in F} = 0 \quad (\text{II.2})$$

Mais particularmente, quando o fundo tem cota constante ou seja $z_F = -h$ a expressão (II.2) fica:

$$\left. \frac{\partial\phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \quad (\text{II.2.a})$$

Embora as expressões acima sejam classicamente adotadas, alguns aspectos de sua dedução seriam relevantes ao presente trabalho, o que faremos a seguir, aproveitando seu desenvolvimento para explicitar as condições de contorno na superfície de um corpo como erro de ordem $[1+O(\epsilon^2)]$, para o caso de escoamento bidimensional.

II.1. Condição de contorno na superfície de um corpo. Caso bidimensional

Sejam dois sistemas de coordenadas cartesianas conforme figura (II.1):

$(0, x, z)$ - sistema inercial fixo no espaço
deversores \vec{i} e \vec{k}

$(G, \tilde{x}, \tilde{z})$ - sistema fixo no corpo de versores \vec{e}_1 e \vec{e}_2

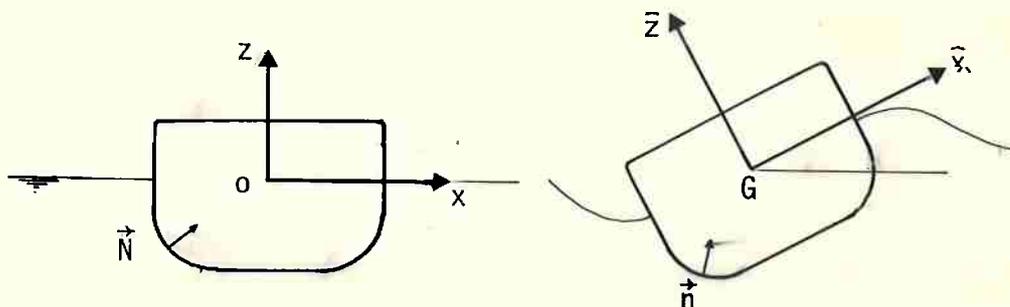


Figura II.1 - Sistemas de referências

A matriz de mudança de base $[P]$ do sistema inercial para o sistema fixo no corpo é dado por

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos\theta(t) & \text{sen}\theta(t) \\ -\text{sen}\theta(t) & \cos\theta(t) \end{bmatrix}$$

Sejam ainda $u(t)$ e $v(t)$ as coordenadas do centro G em relação ao sistema inercial. O vetor de posição de qualquer ponto particular $\{R_p\} = \{x_p, z_p\}^T$ será dado por

$$\{R_p\} = \{R_G\} + [P]^T \{\hat{R}_p\} \quad (\text{II.4})$$

ou explicitamente

$$x_p = u(t) + \cos\theta(t) \hat{x}_p - \text{sen}\theta(t) \hat{z}_p \quad (\text{II.4.a})$$

$$z_p = w(t) + \text{sen}\theta(t) \hat{x}_p + \cos\theta(t) \hat{z}_p$$

e também

II.4.

$$\{\tilde{R}_p\} = [P]\{R_p\} - \{R_G\} \quad (\text{II.5.a})$$

$$\tilde{x}_p = \cos\theta(t)(x_p - u(t)) + \sin\theta(t)(z_p - w(t)) \quad (\text{II.5.b})$$

$$\tilde{z}_p = -\sin\theta(t)(x_p - u(t)) + \cos\theta(t)(z_p - w(t))$$

Seja agora a função descrita da superfície do corpo $F(x,z,t) = 0$. A expressão (II.1) somente poderá ser aplicada dentro do domínio fluido na ocorrência do seguinte enunciado:

"Se uma partícula fluida está na superfície sólida do corpo em um certo instante então lá permanecerá indefinidamente".

O enunciado acima é equivalente a dois axiomas:

- Axioma de identidade: as partículas preservam sua identidade através do tempo
- Axioma topológico. Existe um mapeamento contínuo que associa a posição de uma partícula P no instante t a posição de P no instante $(t+\Delta t)$

Definimos $F_B(\tilde{x}, \tilde{z}, t) = 0$ como a função descrita do corpo em seu referencial e o versor normal a esta superfície $\{n(\tilde{x}, \tilde{z}, t)\}$ como:

$$\{n(\tilde{x}, \tilde{z}, t)\} = \left[\frac{\partial F_B}{\partial \tilde{x}}, \frac{\partial F_B}{\partial \tilde{z}} \right]^T = [n_x, n_z]^T \quad (\text{II.6})$$

II.5.

e então

$$\{N(x, z, t)\} = [P]^T(t) \{n(\hat{x}, \hat{z}, t)\} \quad (\text{II.7})$$

ou explicitamente

$$\begin{aligned} N_x &= \cos\theta(t) \frac{\partial F_B}{\partial \hat{u}} - \sin\theta(t) \frac{\partial F_B}{\partial \hat{z}} \\ N_z &= \sin\theta(t) \frac{\partial F_B}{\partial \hat{x}} + \cos\theta(t) \frac{\partial F_B}{\partial \hat{z}} \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

Em um instante t qualquer e para quaisquer pontos pertencentes a $F(x, z, t) \equiv F_B(\hat{x}, \hat{z})$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \left. \frac{\partial F_B}{\partial \hat{u}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} + \frac{\partial F_B}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} \right|_{(\hat{x}, \hat{z}) \in F_B(\hat{x}, \hat{z})} \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \left. \frac{\partial F_B}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} + \frac{\partial F_B}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} \right|_{(\hat{x}, \hat{z}) \in F_B(\hat{x}, \hat{z})} \\ \frac{\partial F}{\partial t} &= \left. \frac{\partial F_B}{\partial \hat{t}} \frac{\partial \hat{x}}{\partial t} + \frac{\partial F_B}{\partial \hat{z}} \frac{\partial \hat{z}}{\partial t} \right|_{(\hat{x}, \hat{z}) \in F_B(\hat{x}, \hat{z})} \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Então, tomando de (II.5.b) as derivadas parciais, e calculando-as sobre a superfície do corpo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{x}}{\partial x} &= \cos\theta(t) & \frac{\partial \hat{x}}{\partial z} &= \sin\theta(t) \\ \frac{\partial \hat{z}}{\partial x} &= -\sin\theta(t) & \frac{\partial \hat{z}}{\partial z} &= \cos\theta(t) \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

II.6.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial t} &= -\cos\theta(t) \frac{du}{dt} - \sin\theta(t) \frac{dw}{dt} + \\ &+ (-\sin\theta(t)(x-ut)) + \cos\theta(t)(z-w(t)) \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (II.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{z}}{\partial t} &= \sin\theta(t) \frac{du}{dt} - \cos\theta(t) \frac{dw}{dt} + \\ &+ (-\cos\theta(t)(x-u(t)) - \sin\theta(t)(z-w(t))) \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

substituindo (II.5.b) em (II.11) obtemos

$$\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} = -\cos\theta(t) \frac{du}{dt} - \sin\theta(t) \frac{dw}{dt} + \bar{z} \frac{d\theta}{dt} \quad (II.12)$$

$$\frac{\partial \bar{z}}{\partial t} = \sin\theta(t) \frac{du}{dt} - \cos\theta(t) \frac{dw}{dt} + \bar{x} \frac{d\theta}{dt}$$

então comparando-se (II.8) e (II.9) com auxílio de (II.10) e (II.12) vem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = N_x \quad (II.13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z} = N_z$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} &= -n_x \left[\cos\theta(t) \frac{du}{dt} - \bar{z} \frac{d\theta}{dt} + \sin\theta(t) \frac{dw}{dt} \right] - \\ &- n_z \left[\cos\theta(t) \frac{dw}{dt} + \bar{x} \frac{d\theta}{dt} - \sin\theta(t) \frac{du}{dt} \right] \end{aligned} \quad (II.14)$$

Correto até segunda ordem é assumindo pequenos deslocamentos pode-se escrever

$$\cos\theta = 1 + 0(\varepsilon^2) \quad (II.15)$$

$$\text{sen}\theta = \theta + 0(\varepsilon^2)$$

e então:

$$N_x \Big|_{(x,z) \in F} = nx - \theta nz + 0(\varepsilon^2) \quad (II.16)$$

$$N_z \Big|_{(x,z) \in F} = nz + \theta nx + 0(\varepsilon^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{(x,z) \in F} = -nx \left[\frac{du}{dt} - \underbrace{\bar{z} \frac{d\theta}{dt} + \theta(t) \frac{dw}{dt}}_{0(\varepsilon)} \right] - nz \left[\frac{dw}{dt} + \underbrace{\bar{x} \frac{d\theta}{dt} - \theta(t) \frac{du}{dt}}_{0(\varepsilon)} \right] + 0(\varepsilon^2) \quad (II.17)$$

$$\begin{aligned} \nabla\phi \Big|_{(x,z) \in F} &= \nabla\phi \Big|_{(\hat{x}, \hat{z}) \in F_{B_0}} + \frac{\partial}{\partial x}(\nabla\phi) \Big|_{(\hat{x}, \hat{z}) \in F_{B_0}} (u(t) - \theta(t)\bar{z}B) + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z}(\nabla\phi) \Big|_{(\hat{x}, \hat{z}) \in F_{B_0}} (w(t) + \theta(t)\bar{x}B) + 0(\varepsilon^2) \quad (II.18) \end{aligned}$$

onde $F_{B_0}(\bar{x}, \bar{z}) = 0$ explicita a superfície do corpo no instante $t=0$. Assumindo os referenciais $(0, x, z)$ e (G, x, z) coincidentes no instante inicial, e aplicando-se as expressões acima em (II.1), fica explicita, com erro de ordem $[1+0(\varepsilon^2)]$ a condição de contorno cinemática de sua posição de equilíbrio, inicial; indicada como ∂_{B_0}

$$\begin{aligned}
\nabla\Phi\bar{n}\Big|_{\partial B_0} &= \left\{ nx \left(\frac{du}{dt} - z \frac{d\theta}{dt} \right) + nz \left(\frac{dw}{dt} + x \frac{d\theta}{dt} \right) + \right. \\
&+ \left[\theta(t) \left(\frac{dw}{dt} + x \frac{d\theta}{dt} \right) - (w(t) + x\theta(t)) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x} \right) \right] nx + \\
&- \left[\theta(t) \left(\frac{du}{dt} - z \frac{d\theta}{dt} \right) + (u(t) - z\theta(t)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} \right) \right] nz - \\
&- \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\theta^2(t)) \cdot (nx + nz) + \\
&+ \left[-\theta \frac{\partial\theta}{\partial z} + (u(t) - \theta(t)z) \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \right] nz + \\
&+ \left. \left[\theta \frac{\partial\Phi}{\partial x} + (w(t) + \theta(t)x) \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} \right] nz \right\}_{\partial B_0} + O(\epsilon^2)
\end{aligned} \tag{II.19}$$

Na construção da expressão (II.19) foram desprezados termos de ordem superior e foi utilizada a equação de Laplace na permutação dos termos $\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2}$ e $\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial x^2}$. Considerou-se também a expressão (I.6).

Como veremos adiante, na aplicação da condição (II.19), é conveniente sua simplificação.

Primeiramente analisaremos os 3º e 4º termos da expressão. Visto que a expressão (II.19) é correta até segunda ordem é lícito substituir:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\Phi}{\partial x}\Big|_{\partial B_0} &= \frac{du}{dt} - z \frac{d\theta}{dt}\Big|_{\partial B_0} + O(\epsilon^2) \\
\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{\partial B_0} &= \frac{dw}{dt} + x \frac{d\theta}{dt}\Big|_{\partial B_0} + O(\epsilon^2)
\end{aligned}$$

e assim o terceiro termo é expresso:

$$\begin{aligned}
 & \left[\theta(t) \left(\frac{dw}{dt} + x \frac{d\theta}{dt} \right) - (w(t) + x\theta(t)) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{du}{dt} - z \frac{d\theta}{dt} \right) \right] \Big|_{\partial B_0} n_x = \\
 & = \left[\theta(t) \left(\frac{dw}{dt} + \frac{d\theta}{dt} \right) + (w(t) + x\theta(t)) \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \right] \Big|_{\partial B_0} n_x = \\
 & = \frac{d}{dt} \left\{ \theta(t) (w(t) + x\theta(t)) \right\} \Big|_{\partial B_0} n_x \quad (\text{II.20.a})
 \end{aligned}$$

e analogamente o quarto termo fica:

$$\begin{aligned}
 & \left[\theta(t) \left(\frac{du}{dt} - z \frac{d\theta}{dt} \right) + (u(t) - z\theta(t)) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right) \right] \Big|_{\partial B_0} n_z = \\
 & = \frac{d}{dt} \left\{ \theta(t) (u(t) - z\theta(t)) \right\} \Big|_{\partial B_0} n_z \quad (\text{II.20.b})
 \end{aligned}$$

Os dois últimos termos serão expressos em coordenadas curvilíneas ao longo do contorno da superfície do corpo, de acordo com a figura (II.2)

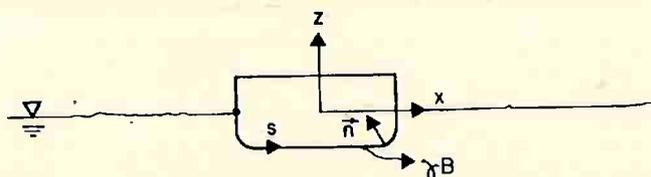


Figura II.2 - Coordenada Curvilínea ao longo de ∂B

Rearranjando os termos:

$$\begin{aligned}
 & \left[-\theta \frac{\partial \Phi}{\partial z} + (u(t) - \theta(t)z) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right] n_x \Big|_{\partial B_0} + \left[\theta \frac{\partial \Phi}{\partial x} + (w(t) + \theta(t)x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right] n_z \Big|_{\partial B_0} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial z} \left[-(u(t) - \theta(t)z) \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] n_x \Big|_{\partial B_0} + \frac{\partial}{\partial x} \left[(w(t) + \theta(t)x) \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right] n_z \Big|_{\partial B_0} = \\
 & = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[(u(t) - \theta(t)z(s)) n_x(s) + (w(t) + \theta(t)x(s)) n_z(s) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right\} \Big|_{\partial B_0} \quad (II.21)
 \end{aligned}$$

Introduzindo as expressões (II.20) e (II.21) em (II.19) resulta a condição de contorno na superfície do corpo, correta em segunda ordem, a que deve satisfazer o potencial Φ .

$$\begin{aligned}
 \nabla \Phi \bar{n} \Big|_{\partial B_0} & = n_x \left(\frac{du}{dt} - z \frac{d\theta}{dt} \right) + n_z \left(\frac{dw}{dt} + x \frac{d\theta}{dt} \right) + \\
 & + \frac{d}{dt} \left\{ \left[\theta(t)(w(t) + x\theta(t)) - \frac{1}{2}\theta^2 x \right] n_x - \left[\theta(t)(u(t) - z\theta(t)) + \frac{1}{2}\theta^2 z \right] n_z \right\} + \\
 & + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[(u(t) - z(t)) n_x + (w(t) + x\theta(t)) n_z \right] \frac{\partial \Phi}{\partial s} \right\} \Big|_{\partial B_0} \quad (II.22)
 \end{aligned}$$

II.2. Aproximação assintótica da condição de contorno no corpo em segunda ordem

Introduzindo as seguintes aproximações assintóticas:

$$\begin{aligned}
 u & = u_1 + \epsilon u_2 \dots \\
 w & = w_1 + \epsilon w_2 \dots \\
 \theta & = \theta_1 + \epsilon \theta_2 \dots
 \end{aligned} \quad (II.23)$$

e utilizando-se da expressão (I.6) a condição de contorno dada por (II.22) pode ser separada em duas aproximações, analogamente à condição de contorno na superfície livre:

• aproximação livre:

$$\nabla\Phi_1\bar{n}\Big|_{\partial B_0} = \left(\frac{du_1}{dt} - z\frac{d\theta_1}{dt}\right)n_x + \left(\frac{dw_1}{dt} + x\frac{d\theta_1}{dt}\right)nz \Big|_{\partial B_0} \quad (\text{II.24})$$

• aproximação em segunda ordem:

$$\begin{aligned} \nabla\Phi_2\bar{n}\Big|_{\partial B_0} &= \left(\frac{du_1}{dt} - z\frac{d\theta_2}{dt}\right)n_x + \left(\frac{dw_2}{dt} + x\frac{d\theta_2}{dt}\right)nz + \\ &+ \frac{d}{dt}\left\{\left[\theta_1(t)(w_1(t)+x\theta_1(t)) - \frac{1}{2}\theta_1^2x\right]n_x - \left[\theta_1(t)(u_1(t)-z\theta_1(t)) + \frac{1}{2}\theta_1^2z\right]nz\right\} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial s}\left\{\left[(u_1(t)-z\theta_1(t))n_x + (w_1(t)+x\theta_1(t))n_z\right]\frac{\partial\Phi_1}{\partial s}\right\} \Big|_{\partial B_0} \end{aligned} \quad (\text{II.25})$$

II.3. O potencial de segunda ordem e a condição de contorno na superfície do corpo

Analogamente à condição de contorno na superfície livre a condição de contorno no corpo, dada pela expressão (II.25) pode ser explicitada como:

$$\nabla\Phi_2\bar{n}\Big|_{\partial B_0} = B_{20}(x,z)\Big|_{\partial B_0} + \left[B_{22}(x,z)e^{-2i\omega t} + (*)\right]\Big|_{\partial B_0} \quad (\text{II.26})$$

A hipótese utilizada é a natureza harmônica, de frequência ω , da solução do problema linear Φ_1 e dos movimentos

em primeira ordem. O interesse reside no termo B_{20} constante no tempo.

Analisando a expressão (II.25) é imediato verificar que os termos dependentes dos movimentos em segunda ordem e o termo explícito como derivada no tempo de termos quadráticos em primeira ordem (pulsantes em 2ω) não contribuem em $B_{20}(x,z)$. Assim sendo:

$$B_{20}(x,z) \Big|_{\partial B_0} = \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[(u_{10} - z\theta_{10})n_x + (w_{10} + x\theta_{10})n_z \right] \frac{\partial \phi_1^*}{\partial s} \right\} \Big|_{\partial B_0} + (*) \quad (\text{II.27})$$

onde u_{10} , θ_{10} e w_{10} são as amplitudes complexas $u_1(t)$, $\theta_1(t)$ e $w_1(t)$.

Das expressões (I.17) e (II.27) é fácil verificarmos que o potencial $\phi_{20}(x,z)$ é equacionado por:

- $\nabla^2 \phi_{20} = 0$
- $\frac{\partial \phi_{20}}{\partial z} \Big|_{z=0} = L_{20}(x)$; na superfície livre tranquila
- $\nabla \phi_{20} \bar{n} \Big|_{\partial B_0} = B_{20}(x,z) \Big|_{\partial B_0}$; na superfície do corpo em sua posição média de equilíbrio
- $\nabla \phi_{20} \Big|_{\partial F} = 0$; no fundo
- condição de radiação

ANEXO III. SOLUÇÃO GERAL DO PROBLEMA DE DIFRAÇÃO E RADIAÇÃO DE ONDAS DE SUPERFÍCIE COM CONDIÇÕES DE CONTORNO LINEARIZADAS. CASO BIDIMENSIONAL

A determinação dos coeficientes de força de deriva em ondas de superfície (monocromáticas ou aleatórias) depende, como visto nos capítulos 4, 5 e 6, do conhecimento do potencial total em primeira ordem resultante da perturbação, causada pela presença do corpo, no potencial de onda incidente.

O presente anexo procura desenvolver de forma sucinta a formulação do problema considerado e, paralelamente, introduzir o método numérico de solução adotado: o "Método Compatibilizado de Elementos Finitos".

Inicialmente apresentaremos as equações de movimento de um corpo genérico sujeito à ação de forças externas quaisquer, introduzindo sua forma linearizada decorrente das hipóteses de pequenos movimentos em torno da posição de equilíbrio. A seguir, o problema de escoamento potencial será formulado sob hipóteses linearizadoras e resolvido pelo MCEF.

III.1. Cálculo da Resposta Cinemática de um corpo cilíndrico à ação de ondas monocromáticas

É bastante conhecida a formulação linearizada do problema em questão (ver p.ex. Faltinsen, Tuck & Salvensen (1970)

[55], Olgive & Tuck [1969], Newman [41], etc.). Cabe-nos portanto apenas apresentá-la de uma forma sucinta tecendo-lhe breves considerações.

III.1.1. Equação geral do movimento

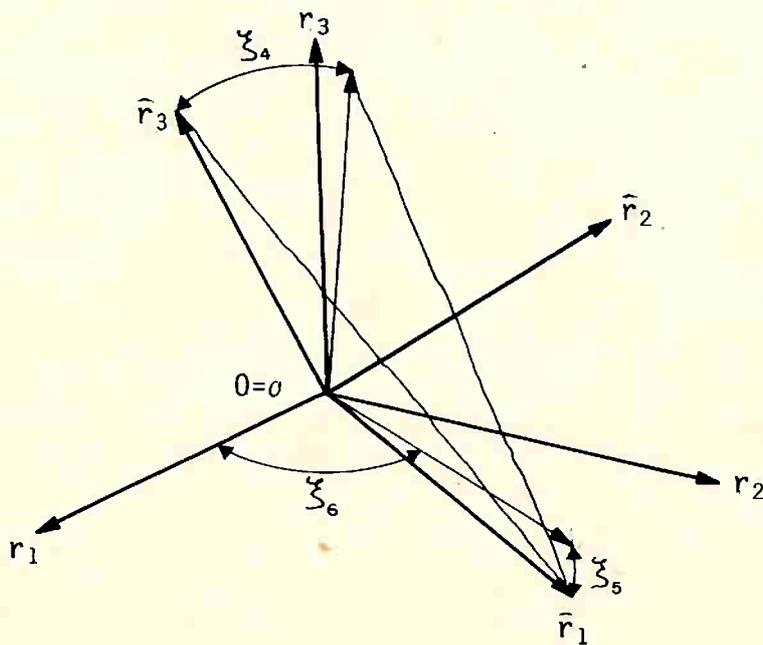
Considere-se um corpo cilíndrico rígido e imerso em dois meios fluidos distintos caracterizados pela presença de uma interface sob efeito de um campo gravitacional constante. Considere-se também dois sistemas cartesianos de referência, de eixos $or_1r_2r_3$ e $O\hat{r}_1\hat{r}_2\hat{r}_3$. As bases associadas a cada sistema são ortonormais de versores i, j, k e $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ respectivamente. O sistema $or_1r_2r_3$ é suposto inercial e os eixos r_1 e r_2 coincidem com o plano da superfície livre quando em repouso, associando-se ao eixo r_3 o sentido oposto ao vetor da aceleração da gravidade. O sistema $O\hat{r}_1\hat{r}_2\hat{r}_3$ é móvel e solidário ao corpo.

Seja $[P]$ a matriz de transformação do sistema móvel para o sistema fixo. Denotando $\{v\}$ um vetor representado no sistema inercial e $\{\hat{v}\}$ o mesmo vetor no sistema móvel tem-se:

$$\{v\} = [P]\{\hat{v}\} \quad (\text{III.1})$$

Considere-se a definição clássica dos ângulos de "roll" (banda) (ξ_4) "pitch" (trim) (ξ_5) e "yaw" (rumo) (ξ_6) associan-

do ξ_4 ao eixo \hat{r}_1 , ξ_5 ao eixo \hat{r}_2 e ξ_6 ao eixo \hat{r}_3 [27]



⊥

Figura III.1 - Definição dos ângulos de banda, trim e rumo.

A matriz [P] pode ser escrita em termos das definições acima

$$[P] = \begin{bmatrix} \cos \xi_5 \cos \xi_6 & \cos \xi_5 \sin \xi_5 \sin \xi_4 - \sin \xi_6 \cos \xi_4 & \cos \xi_6 \sin \xi_5 \cos \xi_4 + \sin \xi_6 \sin \xi_4 \\ \cos \xi_5 \sin \xi_6 & \sin \xi_5 \sin \xi_6 \sin \xi_4 + \cos \xi_6 \cos \xi_4 & \sin \xi_5 \sin \xi_6 \cos \xi_4 - \cos \xi_6 \sin \xi_4 \\ -\sin \xi_5 & \sin \xi_4 \cos \xi_5 & \cos \xi_5 \cos \xi_4 \end{bmatrix}$$

III.4.

Sejam $\{u\}$ e $\{v\}$ dois vetores, representados no sistema $(or_1r_2r_3)$. Definindo-se a matriz:

$$[V] = \begin{bmatrix} 0 & -v_3 & v_2 \\ v_3 & 0 & -v_1 \\ -v_2 & v_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{III.3})$$

o produto vetorial $\{v\} \wedge \{u\}$ pode ser escrito:

$$\{v\} \wedge \{u\} = [V]\{u\} \quad (\text{III.4})$$

Assim, sendo $\vec{\omega} = \{\omega\}$ o vetor velocidade angular do corpo define-se a operação $\vec{\omega} \wedge$ como a prē multiplicação de um vetor pela matriz $[W]$:

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja $\{\hat{\omega}\}$ o vetor velocidade angular do corpo tomado em seu referencial. Verifica-se facilmente que:

$$\{\hat{\omega}\} = \begin{bmatrix} \dot{\xi}_4 - \dot{\xi}_6 \text{sen} \xi_5 \\ \dot{\xi}_5 \cos \xi_4 - \dot{\xi}_6 \text{sen} \xi_4 \text{sen} \xi_5 \\ \dot{\xi}_6 \cos \xi_4 \cos \xi_5 + \dot{\xi}_5 \text{sen} \xi_4 \end{bmatrix} \quad (\text{III.5})$$

Sejam $\{F\}$ vetor resultante das forças externas apli-

III.5.

das ao corpo e $\{M_0\}$ o somatório dos momentos externos em relação ao polo 0. Sejam ainda m a massa do corpo, $[I_G]$ sua matriz de inércia em relação ao centro de gravidade G e $[I_0]$ a matriz de inércia em relação a 0.

Não é difícil verificar que segundo as Leis de Newton, as equações de movimento do corpo rígido são escritas no referencial inercial:

$$\{F\} = m\{\ddot{r}_0\} + m([\dot{W}] + [W][W])\{r_G\} \quad (\text{III.6})$$

$$\{M_0\} = m[R_G]\{\dot{r}_0\} + m[\dot{R}_G]\{r_0\} + [I_0]\{\dot{\omega}\} + [W][I_0]\{\omega\}$$

ou

$$\{F\} = m\{\dot{r}_0\} + m([\dot{W}] + [W][W])[P]\{\hat{r}_G\} \quad (\text{III.6.a})$$

$$\begin{aligned} \{M_0\} &= m[P][\hat{R}_G][P]^T\{\dot{r}_0\} + m[P][\dot{\hat{R}}_G][P]^T\{r_0\} + \\ &+ [P][\hat{I}_0][P]^T\{\dot{\omega}\} + [\dot{W}][P][\hat{I}_0][P]^T\{\omega\} \end{aligned}$$

onde:

$$\{\omega\} = [P]\{\hat{\omega}\}$$

$$[W] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix} = [P][\hat{W}][P]^T$$

$$[\hat{R}_G] = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{r}_{G3} & \hat{r}_{G2} \\ \hat{r}_{G3} & 0 & -\hat{r}_{G1} \\ -\hat{r}_{G2} & \hat{r}_{G1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\{r_0\} = (0-0)$$

$$\{\hat{r}_G\} = (G-0)$$

e onde se utilizou o fato de que $[P]$ é ortogonal, de tal sorte que $[P]^{-1} = [P]^T$.

Assumindo-se pequenos deslocamentos angulares as expressões (III.6.a) podem ser expandidas assintoticamente. Assim, definindo-se:

$$[P] = [P^{(1)}] + [P^{(2)}] + O(3)$$

$$[W] = [W^{(1)}] + [W^{(2)}] + O(3)$$

(III.7)

$$\{\omega^{(1)}\} = \{\omega^{(1)}\} + \{\omega^{(2)}\} + O(3)$$

$$\{r_0\} = \{r_0^{(1)}\} + \{r_0^{(2)}\} + O(3)$$

onde (k) indica a ordem de magnitude do termo tem-se, de (III.2),

(III.3) e (III.5):

$$[P^{(1)}] = \begin{bmatrix} 1 & -\xi_6 & \xi_5 \\ \xi_6 & 1 & -\xi_4 \\ -\xi_5 & \xi_4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\{\omega^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_5 \\ \dot{\xi}_6 \end{Bmatrix}; [W^{(1)}] = [\dot{P}^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\xi}_6 & \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_6 & 0 & -\dot{\xi}_4 \\ -\dot{\xi}_5 & \dot{\xi}_4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[P^{(2)}] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(\xi_5^2 + \xi_6^2) & \xi_5 \xi_4 & \xi_6 \xi_4 \\ 0 & -\frac{1}{2}(\xi_6^2 + \xi_4^2) & \xi_5 \xi_6 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\xi_5^2 + \xi_4^2) \end{bmatrix}$$

$$\{\omega^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} -\dot{\xi}_6 \xi_5 \\ 0 \\ \dot{\xi}_5 \xi_4 \end{Bmatrix}; [W^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{\xi}_5 \xi_4 & 0 \\ \dot{\xi}_5 \xi_4 & 0 & \dot{\xi}_6 \xi_5 \\ 0 & -\dot{\xi}_6 \xi_5 & 0 \end{bmatrix}$$

Define-se ainda a matriz de perturbação [Q] como:

$$[Q] = [P^{(1)}] - [I] \quad (\text{III.8})$$

onde [I] é a matriz identidade de ordem 3.

Assim, as expressões (III.6.a) podem ser aproximadas:

$$\begin{aligned} \{F\} = & \frac{m\{\ddot{r}_0^{(1)}\}}{0(1)} + \frac{m\{\ddot{r}_0^{(2)}\}}{0(2)} + \frac{m[\dot{W}^{(1)}][\dot{\tilde{r}}_G]}{0(1)} + \frac{m[\dot{W}^{(1)}][Q]\{\tilde{r}_G\}}{0(2)} + \\ & + \frac{m[W^{(1)}][W^{(1)}]\{\tilde{r}_G\}}{0(1)} + \frac{m[\dot{W}^{(2)}]\{\dot{\tilde{r}}_G\}}{0(2)} + 0(3) \quad (\text{III.6.a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\{M_0\} = & \frac{m[\hat{R}_G]\{\ddot{r}_0^{(1)}\}}{0(1)} + \frac{m[\hat{R}_G]\{\ddot{r}_0^{(1)}\}}{0(2)} + \frac{m[Q][\hat{R}_G]\{\ddot{r}_0^{(1)}\}}{0(2)} + \frac{m[\hat{R}_G][Q]^T\{\ddot{r}_0^{(1)}\}}{0(2)} + \\
& + \frac{[\hat{I}_0]\{\dot{\omega}^{(1)}\}}{0(1)} + \frac{[\hat{I}_0]\{\dot{\omega}^{(2)}\}}{0(2)} + \frac{[Q][\hat{I}_0]\{\dot{\omega}^{(1)}\}}{0(2)} + \frac{[\hat{I}_0][Q]^T\{\dot{\omega}^{(1)}\}}{0(2)} + \\
& + \frac{[W^{(1)}][\hat{I}_0]\{\omega^{(1)}\}}{0(2)} + \frac{m[\dot{\hat{R}}_G]\{\dot{r}_0\}}{0(1)} + \frac{m[Q][\dot{\hat{R}}_G]\{\dot{r}_0\}}{0(2)} + \frac{m[\dot{\hat{R}}_G][Q]^T\{\dot{r}_0\}}{0(2)}
\end{aligned}$$

Lembrando ainda que:

$$\{v\} \wedge \{u\} = -\{u\} \wedge \{v\} = [V]\{u\} = [U]^T\{v\}$$

então

$$[W^{(1)}][\hat{r}_G] = [\hat{R}_G]^T\{\dot{\omega}^{(1)}\}$$

e

$$[W^{(1)}][W^{(1)}][\hat{r}_G] = [W^{(1)}][\hat{R}_G]^T\{\omega^{(1)}\}$$

Portanto, tomando

$$\{F\} = \{F^{(1)}\} + \{F^{(2)}\} + 0(3)$$

(III.9)

$$\{M\} = \{M^{(1)}\} + \{M^{(2)}\} + 0(3)$$

tem-se, em primeira-ordem:

$$\{F^{(1)}\} = m\{\ddot{r}_0^{(1)}\} + m[\widehat{R}_G]^T\{\dot{\omega}^{(1)}\}$$

(III.6.b.1)

$$\{M_0^{(1)}\} = m[\widehat{R}_G]\{\ddot{r}_0^{(1)}\} + [\widehat{I}_0]\{\dot{\omega}^{(1)}\} + m[\dot{\widehat{R}}_G]\{\dot{r}_0\}$$

e, em segunda-ordem:

$$\{F^{(2)}\} = m\{\ddot{r}_0^{(2)}\} + m[\dot{W}^{(1)}][Q]\{\widehat{r}_G\} + m[W^{(1)}][\widehat{R}_G]^T\{\omega^{(1)}\} +$$

$$+ m[\widehat{R}_G]^T\{\dot{\omega}^{(2)}\}$$

$$\{M_0^{(2)}\} = m[\widehat{R}_G]\{\ddot{r}_0^{(2)}\} + m[Q][\widehat{R}_G]\{\ddot{r}_0^{(1)}\} + m[\widehat{R}_G][Q]^T\{\ddot{r}_0^{(1)}\} +$$

$$+ m[Q][\dot{\widehat{R}}_G]\{\dot{r}_0^{(1)}\} + m[\widehat{R}_G][Q]^T\{\dot{r}_0^{(1)}\} + [\widehat{I}_0]\{\dot{\omega}^{(2)}\} +$$

$$+ [Q][\widehat{I}_0]\{\dot{\omega}^{(1)}\} + [\widehat{I}_0][Q]^T\{\dot{\omega}^{(1)}\} + [W^{(1)}][\widehat{I}_0]\{\omega^{(1)}\}$$

(III.6.b.2)

Definindo-se a matriz de massa (6×6):

$$[m] = m \begin{bmatrix} [1] & [\widehat{R}_G]^T \\ [\widehat{R}_G] & \frac{1}{m}[\widehat{I}_0] \end{bmatrix}$$

e os vetores de força generalizada $\{E^{(1)}\}$ e de movimento $\{\xi^{(1)}\}$ no espaço de configuração 6 dimensional, tal que

$$\{E^{(1)}\} = \begin{Bmatrix} \{F^{(1)}\} \\ \{M^{(1)}\} \end{Bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

e

$$\left\{ \dot{\omega}^{(1)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \left\{ \dot{r}_0^{(1)} \right\} \\ \left\{ \omega^{(1)} \right\} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \\ \dot{\xi}_3 \\ \dot{\xi}_4 \\ \dot{\xi}_5 \\ \dot{\xi}_6 \end{array} \right\} \quad (\text{III.11})$$

tem-se, em primeira-ordem:

$$\left\{ E^{(1)} \right\} = [m] \left\{ \ddot{\xi}^{(1)} \right\} \quad (\text{III.12})$$

Caso assumamos que o ponto 0 coincida com o centro de gravidade G a expressão (III.10), e por conseguinte (III.12), e (III.6.b.1) ficam extremamente simplificadas:

$$[m_G] = m \begin{bmatrix} [1] & [0] \\ [0] & \frac{1}{m} [\hat{I}_G] \end{bmatrix} \quad (\text{III.10.a})$$

$$\left\{ F^{(1)} \right\} = m \left\{ \ddot{r}_0^{(1)} \right\} \quad (\text{III.6.c.1})$$

$$\left\{ M_G^{(1)} \right\} = [\hat{I}_G] \left\{ \dot{\omega}^{(1)} \right\}$$

Também as expressões (III.6.b.2) ficam simplificadas:

$$\{F^{(2)}\} = m\{\ddot{r}_0^{(2)}\}$$

(III.6.c.2)

$$\begin{aligned} \{M_G^{(2)}\} &= [\hat{I}_G]\{\dot{\omega}^{(2)}\} + [Q][\hat{I}_G]\{\dot{\omega}^{(1)}\} + [\hat{I}_G][Q]^T\{\dot{\omega}^{(1)}\} + \\ &+ [W^{(1)}][\hat{I}_G]\{\omega^{(1)}\} \end{aligned}$$

e podem ser escritas alternativamente:

$$\{E^{(2)}\} = [m_G]\{\ddot{\xi}^{(2)}\} + [T]\{\dot{\xi}^{(1)}\} + [S]\{\ddot{\xi}^{(1)}\} \quad (\text{III.6.d.2})$$

com

$$[T] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [W^{(1)}][\hat{I}_G] \end{bmatrix}$$

$$[S] = \begin{bmatrix} [0] & [0] \\ [0] & [Q][\hat{I}_G] + [\hat{I}_G][Q]^T \end{bmatrix}$$

Note-se que quando o polo 0 coincide com o centro de gravidade G do corpo as forças e momentos inerciais são desacopladas entre si.

Nas forças externas devem ser consideradas as forças de natureza hidrodinâmica, hidrostática, de restauração elástica e eventualmente de dissipação viscosa. É importante notar que se $\{\omega\}$ for harmônico de frequência ν os termos bili-

III.12.

lineares em $\{\omega\}$ darão origem a forças e momentos de segunda ordem pulsantes em 2ν e de média não nula. Caso a amplitude e frequência de $\{\omega\}$ variem muito lentamente com o tempo a parcela constante das forças e momentos de (III.6.b.2) oscilarão lentamente e poderão por si sô ocasionar a ressonância em baixa frequência de um corpo amarrado.

III.1.1.1. Caso Bidimensional em Primeira-Ordem

A equação (III.12), para o caso de uma seção bidimensional se movimentando em seu plano xz segundo as variáveis de configuração u, w, θ , fica, com $x \equiv r_2$ e $z \equiv r_3$

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \\ F_\theta \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 1 & 0 & -g_G \\ 0 & 1 & x_G \\ -z_G & x_G & (r_\theta^2 + r_G^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} \quad (\text{III.13})$$

onde:

r_θ é o raio de giração segundo θ

r_G é a distância de G ao polo 0.

Seja agora $[C^{(1)}]$ a matriz de restrição do sistema associada a forças de natureza hidrostática e elástica (amar-
ras). Supondo que o vetor de forças $\{E^{(1)}\}$ seja harmônico de frequência ω , que $[C^{(1)}]$ seja constante para cada ω e representando:

$$\{E^{(1)}\} = \{E_0^{(1)}\}e^{-i\omega t}$$

a equação (III.11) é escrita:

$$(-\omega^2[m] + [C^{(1)}])\{\xi^{(1)}\} = \{E_0^{(1)}\}e^{-i\omega t}$$

e portanto

$$\{\xi^{(1)}\} = (-\omega^2[m] + [C^{(1)}])^{-1}\{E_0^{(1)}\}e^{-i\omega t} \quad (\text{III.14})$$

é a solução da equação do movimento do corpo.

A determinação da resposta cinemática do corpo à ação de ondas monocromáticas de pequena amplitude se faz sob a expressão (III.14) após calcular-se as forças de natureza hidrodinâmica $\{E_0^{(1)}\}$ associadas à perturbação da onda incidente.

III.1.2. Equacionamento geral do Problema de Perturbação de uma onda monocromática

Considerem-se os sistemas de referência estabelecidas no item interior e neles um corpo arbitrário flutuante sujeito à ação de ondas monocromáticas, de frequência ω , descritas pela função potencial $\Phi(r_1, r_2, r_3, t)$ e pela oscilação da superfície $\eta(r_1, r_2, t)$:

$$\phi(r_1, r_2, r_3, t) = -\frac{1}{2} \frac{gA}{\omega} \frac{\cosh k(r_3+h)}{\cosh kh} [e^{i(k \cos \alpha r_1 + k \sin \alpha r_2 - \omega t)} + (*)] \quad (\text{III.15})$$

$$\eta(r_1, r_2, r_3, t) = -\frac{i}{2} A [e^{i(k \cos \alpha r_1 + k \sin \alpha r_2 + \omega t)} + (*)]$$

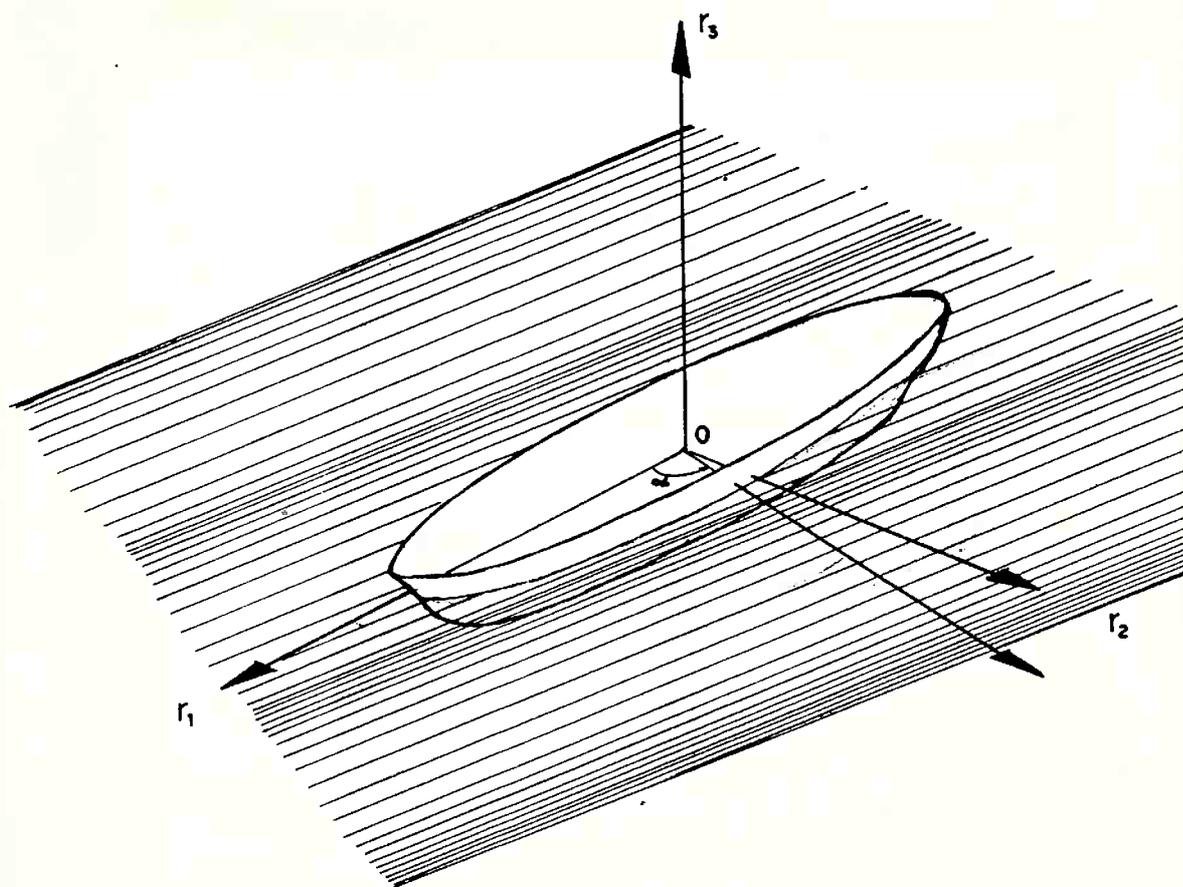


Figura III.2 - Sistemas de referência

Tais expressões constituem-se na solução em regime permanente do problema de propagação livre de ondas de superfície sob hipóteses lineares, em lâmina d'água de profundidades h constante, dentro da teoria de ondas de pequena amplitude. Por se constituírem em soluções clássicas (ver p.ex. Le Mehauté, Newman, Lamb, Wehausen, etc.) são aqui reproduzidas

sem maiores considerações.

Conforme visto nos anexos I e II a formulação linearizada do problema de perturbação do potencial de onda incidente é dada pela equação de Laplace (3.3) e por condições de contorno linearizadas na superfície livre média (I.10), na superfície do corpo em sua posição média de equilíbrio (II.19) e no fundo (II.2). Assim; chamando $\phi_1(r_1, r_2, r_3, t)$ o potencial complexo de perturbação em aproximação de primeira ordem, tem-se

- $\nabla^2 \phi_1(r_1, r_2, r_3, t) = 0$
- $\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \phi_1}{\partial r_3} \Big|_{r_3=0} = 0$; na superfície livre (III.16)
- $\nabla \phi_1 \cdot \vec{n} \Big|_{(r_1, r_2, r_3) \in \partial B} = v(r_1, r_2, r_3) \Big|_{(r_1, r_2, r_3) \in \partial B}$;
na superfície do corpo
- $\nabla \phi_1 \cdot \vec{n} \Big|_{r_3=-h} = 0$; no fundo
- condição de radiação.

Invocando a hipótese de linearidade de solução é usual separar-se o problema acima em dois sub-problemas lineares distintos: difração e radiação. O potencial de difração ϕ_D é definido como a soma do potencial incidente com o potencial espalhado pelo corpo quando impedido de se movimentar. O potencial de radiação, por sua vez se deve às oscilações do corpo

em todos seus graus de liberdade. Chamando Φ_j o potencial de radiação decorrente de oscilação do corpo segundo o modo ξ_j (com velocidade de amplitude unitária) e admitindo que os movimentos sejam harmônicos com mesma frequência ω da onda incidente tem-se:

$$\Phi_1(r_1, r_2, r_3, t) = \Phi_D(r_1, r_2, r_3, t) - i\omega \sum_{j=1}^6 \Phi_j \xi_j \quad (\text{III.17})$$

A aplicação de (III.16) em (III.17) leva a

- $\nabla^2 \Phi_D = 0$
- $\left. \frac{\partial^2 \Phi_D}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_D}{\partial r_3} \right|_{r_3=0} = 0$; na superfície livre em repouso
- $\left. \nabla \Phi_D \cdot \vec{n} \right|_{(r_1, r_2, r_3) \in \partial B} = 0$; na superfície do corpo
- $\left. \nabla \Phi_D \cdot \vec{n} \right|_{r_3=-h} = 0$; no fundo (III.18)
- condição de radiação

e

- $\nabla \Phi_j^2 = 0$
- $\left. \frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_j}{\partial r_3} \right|_{r_3=0} = 0$; na superfície livre (III.19)
- $\left. \nabla \Phi_j \cdot \vec{n} \right|_{(r_1, r_2, r_3) \in \partial B} \begin{cases} n_j & j=1,2,3 \\ (\vec{r} \wedge \vec{n})_{j-3} & j=4,5,6 \end{cases}$; na superfície do corpo

$$\cdot \nabla \phi_j \cdot \vec{n} \Big|_{r_3 = -h} = 0; \text{ no fundo}$$

De (III.17) a (III.19) e da equação de Bernoulli, preservando-se apenas a pressão em primeira ordem, as forças hidrodinâmicas podem ser calculadas (Newman, [41], pg.132):

$$F_j(t) = -\rho \int_{\partial B} \frac{\partial \phi_j}{\partial t} \begin{cases} n_j & j=1,2,3 \\ (\vec{r} \times \vec{n})_{j-3} & j=4,5,6 \end{cases} d\partial B \quad (\text{III.20})$$

Chamando-se forças excitantes $F_{e_j}(t)$ às componentes da força de pressão associada ao potencial ϕ_D e forças resistentes $F_{B_j}(t)$ aquelas decorrentes do movimento do corpo, tem-se:

$$F_{e_j}(t) = -\rho \int_{\partial B} \frac{\partial \phi_D}{\partial t} \begin{cases} n_j & j=1,2,3 \\ (\vec{r} \times \vec{n})_{j-3} & j=4,5,6 \end{cases} d\partial B \quad (\text{III.20.a})$$

$$F_{B_j}(t) = -\rho \int_{\partial B} \frac{\partial \phi_B}{\partial t} \begin{cases} n_j & j=1,2,3 \\ (\vec{r} \times \vec{n})_{j-3} & j=4,5,6 \end{cases} d\partial B \quad (\text{III.20.b})$$

É comum utilizar-se da relação de Haskind para expressar-se as forças excitantes em função tão somente dos potenciais da onda incidente e de radiação, prescindindo-se do cálculo do potencial difratado.

III.18.

Assim, assumindo-se movimentos harmônicos de frequência ω : (ver Faltinsen, Tuck, Salvensen (1970))

$$F_{e_j} = -\rho i \omega \int_{\partial B} \left(\Phi_I \frac{\partial \phi_j}{\partial n} - \phi_j \frac{\partial \Phi_I}{\partial n} \right) d\partial B \quad (\text{III.21})$$

III.1.3. Massas Adicionais e Amortecimento por radiação

A expressão (III.20.b) corresponde às forças aplicadas ao corpo decorrentes do campo potencial originado pelo seu próprio movimento.

Assumindo:

$$\phi_j(r_1, r_2, r_3, t) = \phi_j(r_1, r_2, r_3) e^{-i\omega t} \quad (\text{III.22})$$

a expressão (III.20.b) fica

$$F_{Bj} = -\rho \omega^2 \int_{\partial B} \left\{ \sum_{k=1}^6 \phi_k \xi_k \right\} \begin{cases} n_j & j=1, 2, 3 \\ (\vec{r} \times \vec{n})_{j-3} & j=4, 5, 6 \end{cases} d\partial B \quad (\text{III.23})$$

escrevendo (III.23) como:

$$F_{Bj} = \sum_{k=1}^6 T_{jk} \xi_k, \quad j=1, \dots, 6 \quad (\text{III.24})$$

e definindo:

$$T_{jk} = \omega^2 a_{jk} + i\omega b_{jk} \quad (\text{III.25})$$

tem-se:

$$a_{jk} = \rho \int_{\partial B} \text{Re}(\phi_k) \begin{cases} n_j & j=1,2,3 \\ (\vec{r} \times \vec{n})_{j-3} & j=4,5,6 \end{cases} d\partial B \quad (\text{III.26})$$

$$b_{jk} = \rho\omega \int_{\partial B} \text{Im}(\phi_k) \begin{cases} n_j & j=1,2,3 \\ (\vec{r} \times \vec{n})_{j-3} & j=4,5,6 \end{cases} d\partial B$$

A matriz $[A] = [a_{jk}]$ é chamada matriz de massa adicional e a matriz $[B] = [b_{jk}]$ matriz de amortecimento por radiação.

III.1.4. Resposta Cinemática do Corpo a uma onda de amplitude unitária

Considere-se uma onda incidente de amplitude unitária.

Fazendo na equação (III.14):

$$\{E_0\} e^{-i\omega t} = \{F_j(t)\} \quad (\text{III.27})$$

e nela substituindo as expressões (III.20,a),(III.20.b),(III.23), (III.24) e (III.25) sucessivamente tem-se:

$$(-\omega^2([m]+[A]) - i\omega[B] + [C])\{\xi\} = \{F_j(t)\} \quad (\text{III.28})$$

que solucionada fornece a resposta cinemática do corpo a uma onda de amplitude unitária na frequência ω .

III.1.5. Comentários Adicionais

Tomando o problema bidimensional no plano xz tal que $x \equiv r_2$ e $z \equiv r_3$ e definindo $R_D(\omega)$ e $T_D(\omega)$ como os coeficientes complexos de reflexão e transmissão da onda incidente associados ao potencial da difração e $R_j(\omega)$ e $T_j(\omega)$ as amplitudes complexas de onda geradas pelas oscilações segundo os modos ξ_j (com velocidade de amplitude unitária), as condições associadas aos problemas potenciais em questão podem ser escritas:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_D(x, z) = -\frac{gA}{2\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} (e^{ikxsen\alpha} + R_D(\omega)e^{-ikxsen\alpha}) \quad (\text{III.29})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_D(x, z) = -\frac{gA}{2\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} (T_D(\omega)e^{ikxsen\alpha})$$

e analogamente para os potenciais associados aos movimentos.

É então interessante explicitar os coeficientes totais de transmissão e reflexão relativos ao problema completo de perturbação do potencial de onda incidente, ou seja, relativo ao potencial $\phi_1(x, z)$:

$$R(\omega) = R_D(\omega) - i\omega \left\{ R_u(\omega)u_{10} + R_w(\omega)w_{10} + R_\theta(\omega)\theta_{10} \right\} \quad (\text{III.30})$$

$$T(\omega) = 1 + T_D(\omega) - i\omega \left\{ T(\omega)u_{10} + T_w(\omega)w_{10} + R_\theta(\omega)\theta_{10} \right\}$$

A condição de radiação pode então ser explicitada:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi_1(x, z, t) = -\frac{gA}{2\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \left\{ T e^{i(kx \operatorname{sen} \alpha - \omega t)} \right\} \quad (\text{III.29.1})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi_1(x, z, t) = -\frac{gA}{2\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \left\{ (e^{i \cdot x \operatorname{sen} \alpha} + R e^{-ikx \operatorname{sen} \alpha}) e^{-i\omega t} \right\}$$

Por fim vale comentar brevemente sobre o efeito da dissipação viscosa na resposta dinâmica do corpo em primeira-ordem.

Métodos diversos tem sido sugeridos para inclusão destes efeitos, todos eles porém de natureza semi-empírica ou empírica. O anexo IX cuida de apresentar tais métodos detalhadamente. Em geral são assumidas leis quadráticas de proporcionalidade com a velocidade para o cálculo dos coeficientes de amortecimento. Estudos mais modernos, no entanto, sugerem leis cúbicas (Dalzell). De qualquer forma, como tratamos do problema linearizado o sistema deve apresentar parâmetros constantes. Faz-se necessário portanto, dentro de hipóteses de pequena amplitude de movimentos, calcular-se parâmetros linearizados equivalentes de forma a conservar-se a potência dissipada em um ciclo. Não obstante, tais coeficientes permanecem funções lineares da amplitude dos movimentos respectivos (ver anexo IX). Tal fato condiciona a solução de (III.28) de forma iterativa, iniciando-se a solução com o caso onde o amortecimento viscoso é nulo e computando-se sucessivamente as respostas do sistema, tomando, em cada passo, o coeficiente vis-

coso proporcional à amplitude de movimento resultante da solução do passo anterior. O processo converge rapidamente, podendo-se citar da ordem de 25 iterações para erros inferiores a 1% em frequências ressonantes, onde a sensibilidade da solução é inúmeras vezes mais acentuada.

III.2. Solução do Problema linear Bidimensional pelo Método Compatibilizado de Elementos Finitos

Viu-se que a solução do problema de perturbação do potencial de uma onda incidente por um corpo flutuante, em aproximação de primeira ordem, equivale a resolver-se as equações (III.18) e (III.19) associadas aos problemas de difração e radiação respectivamente.

As equações (III.18) e (III.19) são do ponto de vista matemático absolutamente equivalentes e portanto o mesmo método de solução pode ser empregado.

No presente item apresentaremos a formulação do Método Compatibilizado de Elementos Finitos para o caso bidimensional de escoamento. O desenvolvimento é feito de forma sucinta e pede-se que se consulte a referência [3] (Aranha, 1982) para os aspectos formais do método, do ponto de vista matemático.

O presente método supõe a região fluida infinita dividida em três domínios conforme figura (III.3). O domínio A_I chamado região de discretização ou região interna é delimita-

do pela superfície do corpo, pela superfície livre, pelo fundo e pelas verticais V^+ e V^- . Os domínios A_{II}^\pm , semi-infinitos, são delimitados pela superfície livre, pelo fundo e pelas verticais V^\pm respectivamente, e chamados regiões externas.

A técnica de solução consiste em resolver o problema de forma analítica nas regiões externas A_{II}^\pm e de forma numérica no interior da região de discretização. Na região externa a solução é dada na forma de série de Fourier cujos coeficientes são determinados através da compatibilização de fluxo e pressão nas fronteiras V^\pm com a solução numérica interior.

Para tanto a região interna é discretizada em uma malha de elementos finitos plana, de elementos quadrangulares ou triangulares, e neste domínio as equações (III.18) e (III.19) são integradas. A única condição a ser imposta a A_I é que seja conexa e portanto casos de corpos parcial ou totalmente submersos são considerados. Ressalte-se no entanto que para os casos em que a boca máxima da seção é maior que sua boca na linha d'água (inclue-se o caso da seção totalmente submersa) a unicidade da solução do problema ondulatório não é garantida (F. John, 1950).

Consideraremos, no que segue, um corpo cilíndrico de seção arbitrária imerso ou parcialmente imerso em águas de profundidade finita. Considera-se que fora da região A_I a profundidade é constante. Tomaremos os eixos Oxz de referência com Ox na superfície livre em repouso e o eixo z vertical aponta-

III.25.

$$\begin{aligned}
 & \cdot \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \text{ na superfície} \\
 & \cdot \left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0; \text{ no fundo} \\
 & \cdot \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=\pm x_0} = U^\pm(z); \text{ na vertical } x = \pm b.
 \end{aligned}
 \tag{III.31}$$

Supondo solução harmônica de frequência ω , do tipo:

$$\Phi(x, z, t) = \phi(x, z) e^{-i\omega t} + (*) \tag{III.32}$$

e aplicando-a a (III.25), o problema se reduz a determinar $\phi(x, z)$ sob as seguintes condições:

$$\begin{aligned}
 & \cdot \nabla^2 \phi(x, z) = 0 \\
 & \cdot \left. \left(\frac{\omega^2}{g} - \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi \right|_{z=0} = 0 \\
 & \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \\
 & \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=\pm x_0} = U^\pm(z); \text{ nas verticais } V^\pm \text{ dadas por} \\
 & \quad \{(x, y) : x = \pm b\}
 \end{aligned}
 \tag{III.31.a}$$

O problema em questão é um problema de valor característico a condições de contorno. Solucionando-se (III.31.a) por separação de variáveis chega-se à tradicional equação de onda ou equação de Helmholtz, com as respectivas condições de

contorno:

$$\bullet \begin{cases} \left(\frac{d}{dz^2} + \lambda \right) Z(z) = 0 \\ \left(\frac{d}{dx^2} - \lambda \right) X(x) = 0 \end{cases} \quad (\text{III.31.b})$$

$$\bullet \left. \left(\frac{d}{dz} - \frac{\omega^2}{g} \right) Z(z) \right|_{z=0} = 0; \text{ na superfície livre}$$

$$\bullet \left. \frac{d}{dz} Z(z) \right|_{z=-h} = 0; \text{ no fundo}$$

$$\bullet \left. \frac{d}{dx} X(x) \cdot Z(z) \right|_{x=\pm b} = U^\pm(z); \text{ nas verticais, } x = \pm b$$

onde

$$\phi(x, z) = X(x) \cdot Z(z)$$

Tomando (III.25.b.1) tem-se dois casos possíveis a analisar:

$$\bullet \lambda < 0; k = \sqrt{-\lambda}$$

a solução é do tipo

$$Z(z) = C \cosh k(z+h) \quad (\text{III.32.1})$$

$$\bullet \lambda > 0; k = \sqrt{\lambda}$$

a solução é do tipo

$$Z(z) = C \cos k(z+h) \quad (\text{III.32.2})$$

Aplicando-se a condição de contorno na superfície em (III.31.1) e (III.31.2) vem:

$$\bullet \lambda < 0; K_0^2 = -\lambda \quad (\text{III.33.1})$$

$$k_0 \tanh k_0 h = \omega^2/g$$

$$\bullet \lambda > 0; K_n^2 = \lambda_n \quad (\text{III.33.2})$$

$$k_n \tanh k_n h = -\omega^2/g$$

onde foram descartadas as soluções triviais ($C=0$).

É fácil demonstrar que funções do tipo

$$f_0(z) = F_0 \cosh k_0(z+h) \quad (\text{III.34})$$

$$f_n(z) = F_n \cos K_n(z+h), \quad n=1,2,\dots$$

$$\int_{-h}^0 f_n^2(z) dz = 1, \quad n=0,1,2,\dots$$

constituem uma base ortonormal infinito-dimensional onde qual-

III.28.

quer função $g(z)$, quadrado integrável em $[-h,0]$ pode ser expressa como

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n f_n(z) \quad (\text{III.35})$$

Da condição de normalidade segue que:

$$F_0^2 = \frac{2k_0}{\sinh k_0 h \cosh k_0 h + k_0 h} \quad (\text{III.36})$$

$$F_n^2 = \frac{2k_n}{k_n h + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2k_n h}$$

Tomando a equação (III.30.b.2) de forma análoga é fácil verificar que a solução $\phi(x,z)$ é dada por:

$$\phi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) \cdot f_n(z) \quad (\text{III.37})$$

A equação de Laplace aplicada em (III.37) leva a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 X_n}{dx^2}(x) f_n(z) + X_n \frac{d^2 f_n}{dz^2}(z) \right\} = 0 \quad (\text{III.38})$$

Tomando (III.7) e substituindo em (III.38) vem:

$$\left\{ \frac{d^2 X_0}{dx^2}(x) + k_0^2 X_0(x) \right\} f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{d^2 X_n}{dx^2}(x) - k_n^2 X_n(x) \right\} f_n(z) = 0 \quad (\text{III.39})$$

Decompondo a função acima na base ortonormal adotada, ou seja tomando-se o produto interno da função com $f_0, f_n,$

$n=1,2,\dots$, vem de imediato:

$$\frac{d^2 X_0}{dx^2}(x) + k_0^2 X_0(x) = 0 \quad (\text{III.40})$$

$$\frac{d^2 X_n}{dx^2}(x) - k_n^2 X_n(x) = 0$$

Note-se que (III.40) é a própria expressão (III.30.b.2) apenas explicitada em termos dos auto valores λ_n .

A solução geral da primeira equação (III.40.1) é do tipo:

$$X_0(x) = A_0^+ e^{ik_0(x-x_0^+)} + A_0^- e^{-ik_0(x-x_0^-)} \quad (\text{III.41})$$

Já a solução geral da segunda equação (III.40.2) é do tipo:

$$X_n(x) = A_n^+ e^{-k_n(x-x_{0+})} + A_n^- e^{k_n(x-x_{0-})} \quad (\text{III.42})$$

Uma condição a ser imposta em (III.42) é que a solução seja finita para qualquer x e em particular para $x \rightarrow \infty$. Assim sendo:

$$A_n^- = 0, \quad n=1,2,\dots \quad \text{se } x > x_0^+$$

$$A_n^+ = 0, \quad n=1,2,\dots \quad \text{se } x < x_0^-$$

De forma análoga, visto que $ik_0 x$ indica uma onda se pro-

pagando da esquerda para a direita (tomando função do tempo como $-i\omega t$) teremos:

$$A_0^+ = 0 \text{ se } x > x_0^+$$

$$A_0^- = 0 \text{ se } x < x_0^-$$

É interessante notar que a condição de radiação foi imposta de forma implícita, resultando:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x, z) = A_0^\pm e^{\pm ik_0(x-x_{0+})} f_0(z) \quad (\text{III.43})$$

Tomemos, a seguir, a solução geral para o caso $x_0 = +b$:

$$\phi^+(x, z) = A_0^+ e^{ik_0(x-x_{0+})} f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^+ e^{-k_n(x-x_{0+})} f_n(z) \quad (\text{III.44})$$

Aplicando-se a condição de contorno na vertical v^+ dada por:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=x_0} = U^+(z)$$

e considerando-se $U^+(z)$ quadrado-integrável em seu domínio, de tal sorte que vale sua representação na forma dada em (III.44), resulta:

$$\begin{aligned} ik_0 A_0^+ e^{ik_0(x-x_{0+})} f_0(z) - \sum_{n=1}^{\infty} k_n A_n^+ e^{-k_n(x-x_{0+})} &= \\ = U_0^+ f_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} U_n^+ f_n(z) & \quad (\text{III.45}) \end{aligned}$$

III.31.

Tomando-se os produtos internos de (III.44) na base f_n , e lembrando que:

$$\int_{-h}^0 U(z) \cdot f_n(z) = \sum_{m=0}^{\infty} U_m \int_{-h}^0 f_n(z) f_m(z) dz = U_n$$

resulta:

$$A_0^+ = -\frac{i}{k_0} \int_{-h}^0 U^+(z) f_0(z) dz$$

$$A_n^+ = -\frac{1}{k_n} \int_{-h}^0 U^+(z) f_n(z) dz$$
(III.46)

As expressões (III.46) completam portanto a solução do problema de propagação de ondas de superfície uma vez conhecidas as condições de contorno em uma vertical.

É fácil verificar que a solução apresentada pode ser considerada como caso particular daquele em que o ângulo de propagação α do trem de ondas em relação ao plano considerado é diferente de $\bar{0}$. Nessa situação a equação de Laplace tomaria a forma

$$\nabla^2 \Phi(x, z, t) - (k_0 \text{sen} \alpha)^2 \Phi(x, z, t) = 0$$
(III.47)

e resultaria, no plano x, z , com $x_0^+ = -x_0^- = x_0$

$$\begin{aligned} \Phi^\pm(x, z) = & A_0^\pm e^{\pm i k_0 \cos \alpha (x \mp x_0)} f_0(z) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^\pm e^{\mp i \beta_n (x \mp x_0)} f_n(z) \end{aligned}$$
(III.48)

com

$$\beta_n(\alpha) = (k_n^2 + k_0^2 \sin^2 \alpha)^{\frac{1}{2}}$$

Na realidade a solução (III.48) deve incluir um termo adicional quando $\alpha = \pi/2$ (Aranha, 1982):

$$\begin{aligned} \phi^\pm(x, z) = & [A_0^\pm \pm U_0^\pm(x \pm x_0)] f_0(z) e^{\pm i k_0 \cos \alpha (x \mp x_0)} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^\pm \cdot e^{\pm \beta_n (x \mp x_0)} f_n(z) \end{aligned} \quad (\text{III.48.a})$$

Os coeficientes U_0^\pm estão diretamente relacionados à condição de radiação a ser imposta no caso do aprornamento se der paralelo ao corpo.

Finalmente é imediato verificar que:

$$A_n^\pm = \int_{-h}^0 \phi(\pm x_0, z) f_n(z) dz; \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.49})$$

tornando conveniente definir os operadores lineares $L_n^\pm(\psi)$ tal que:

$$L_n^\pm(\psi) = \int_{-h}^0 \psi(\pm x_0; z) f_n(z) dz, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (\text{III.50})$$

III.2.1.1. Os coeficientes de Transmissão e Reflexão

É conveniente expressar-se os coeficientes de reflexão e

transmissão em função dos coeficientes A_0^\pm .

Para tanto, tomando-se os potenciais de difração e radiação na forma (III.44), identificando-os a (III.29) e substituindo-os em (III.30) resulta:

$$R = -2\omega e^{ikx_0} \left(A_{0D}^- - i\omega (A_{0u}^- u_{10} + A_{0w}^- w_{10} + A_{0\theta}^- \theta_{10}) \right) F_0 \cosh kh \quad (\text{III.30.a})$$

$$T = 1 - 2\omega e^{ikx_0} \left(A_{0D}^+ - i\omega (A_{0u}^+ u_{10} + A_{0w}^+ w_{10} + A_{0\theta}^+ \theta_{10}) \right) F_0 \cosh kh$$

III.2.2. Solução pelo Método dos Elementos Finitos na Região discretizada

Qualquer dos subproblemas mencionados: difração ou radiação (associado aos movimentos do corpo) tem o mesmo equacionamento básico, diferindo apenas nas condições de contorno no corpo. Visto isto, é conveniente tratarmos o problema da forma mais geral sob o seguinte equacionamento:

$$\begin{aligned} & \cdot \nabla^2 \phi(x, z) - (k_0 \operatorname{sen} \alpha)^2 \phi(x, z) = 0 \\ & \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g} \phi \right|_{z=0} = 0 \\ & \cdot \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-h} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.51})$$

$$\bullet \left. \nabla\phi \cdot \vec{n} \right|_{(x,z) \in \partial B} = v(x,z)$$

- condição de radiação

A seção anterior tratou o problema nas regiões exteriores A_{II}^{\pm} . A presente seção soluciona a equação (III.24) no interior da região A delimitada (ver fig.III.1) pelas verticais V_{\pm} , pelo fundo ∂H , pela superfície do corpo ∂B e pela superfície livre ∂F . Desta forma a fronteira ou contorno da região A_I é dada por:

$$\partial A_I = \partial B \cup \partial F^+ \cup \partial F^- \cup \partial H \cup \partial V^+ \cup \partial V^-$$

Sem perda de generalidade suporemos o fundo plano dado por

$$\partial H = \left\{ (x,z); z=-h; -x_0 \leq x \leq x_0 \right\}$$

É interessante ainda especificar-se a condição de radiação. Tal condição compatibiliza a solução na região A_I com a solução nas regiões A_{II}^{\pm} . Assim igualando o fluxo em V^{\pm} :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(\pm b, z) = \pm i k_0 \operatorname{sen} \alpha A_0^{\pm} f_0(z) \mp \sum_n \beta_n L_n^{\pm}(\phi) f_n(z) \quad (\text{III.52})$$

onde supôs-se ser $\alpha \neq \pi/2$ com o intuito de fugir-se a uma singularidade inoportuna (Aranha [3], 1982).

III.2.2.1. Equacionamento fraco

Considere um espaço funcional $w_2^{(1)}(A_I)$ definido em A_I tal que:

$$w_2^{(1)}(A_I) = \left\{ \psi(x, z) : \|\psi\|_w^2 < \infty \right\}$$

$$\|\psi\|_w^2 = \iint_{A_I} [(\nabla\psi)^2 + k_0^2\psi^2] dA_I$$

Tomemos uma função $\psi(x, z)$ arbitrária pertencente a $w_2^{(1)}(A_I)$ e uma função $\phi(x, z)$ pertencente a $\dot{w}_2^{(1)}(A_I)$, subespaço de $w_2^{(1)}(A_I)$ definido como:

$$\dot{w}_2^{(1)}(A_I) = \left\{ \psi(x, z) \in w_2^{(1)}(A_I) : \nabla^2\psi \text{ é contínua em } A_I \right\}$$

O produto interno da equação (III.24.1) com $\psi(x, z)$ constituir-se-á em sua formulação fraca associada a $w_2^{(1)}$. Assim:

$$\iint_{A_I} \nabla^2\phi \cdot \psi dA_I - (k_0 \text{sen}\alpha)^2 \iint_{A_I} \phi \cdot \psi dA_I = 0 \quad (\text{III.53})$$

Integrando (III.53) por partes e utilizando o teorema da divergência aplicado em A_I segue:

$$\oint_{\partial A_I} (\nabla\phi \cdot \vec{n})\psi dA_I - \iint_{A_I} \nabla\phi \cdot \nabla\psi dA_I - (k_0 \text{sen}\alpha)^2 \iint_{A_I} \phi \cdot \psi dA_I = 0 \quad (\text{III.53.a})$$

e então das condições de contorno em ∂A :

$$\begin{aligned}
& \iint_{A_I} \nabla \phi \cdot \nabla \psi dA_I + (k_0 \operatorname{sen} \alpha)^2 \iint_{A_I} \phi \cdot \psi dA_I - \frac{\omega^2}{g} \int_{\partial F} \phi(x,0) \psi(x,0) dx - \\
& - i(k_0 \operatorname{cos} \alpha) \left\{ A_0^+ L_0^+(\psi) - A_0^- L_0^-(\psi) \right\} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(\alpha) \left\{ L_n^+(\phi) L_n^+(\psi) - L_n^-(\phi) L_n^-(\psi) \right\} = \\
& = V(\psi) \qquad \qquad \qquad \text{(III.53.b)}
\end{aligned}$$

onde

$$V(\psi) = \int_{\partial B} v(x,z) \psi(x,z) d\partial B \qquad \text{(III.54)}$$

Definimos o funcional $G(\phi, \psi)$ como:

$$\begin{aligned}
G(\phi, \psi) &= \iint_{A_I} \nabla \phi \cdot \nabla \psi dA_I + (k_0 \operatorname{sen} \alpha)^2 \iint_{A_I} \phi \cdot \psi dA_I - \\
& - \frac{\omega^2}{g} \int_{\partial F} \phi(x,0) \psi(x,0) dx + \\
& + \sum_{n=1}^S \beta_n(\alpha) \left\{ L_n^+(\phi) L_n^+(\psi) - L_n^-(\phi) L_n^-(\psi) \right\} \qquad \text{(III.55)}
\end{aligned}$$

onde a s\u00e9rie infinita foi truncada em um n\u00famero finito S de termos.

A solução $\phi(x,z,S)$ é estabelecida através da seguinte equação fraca

$$G(\phi_s, \psi) - i(k_0 \cos \alpha) \left\{ A_0^+ L_0^+(\psi) - A_0^- L_0^-(\psi) \right\} = V(\psi) \quad (\text{III.55.a})$$

para todo $\psi(x,z) \in w_2^{(1)}(A_I)$.

III.2.2.2. O Método dos Elementos Finitos

É conveniente traduzirmos a função (III.47.a) em termos discretos.

Defina-se então uma malha genérica (M) de elementos triangulares ou retangulares sobre a região (A_I) . N_T é o número total de nós e E_T o número de elementos. Sejam ainda:

(x_j, z_j) coordenadas do nó j , $j=1,2,\dots,N_T$

$e_p^{(i)}$ região definida pelo elemento p , $p=1,2,\dots,E_T$ que contém o nó i

λ_i número de elementos que concorrem no nó i

E_i região de influência do nó i .

É correto afirmar que a função $\phi(x,z)$ pode ser aproximada em um subespaço $w_M(A_I) \subset w_2^{(1)}(A_I)$, N_T -dimensional:

$$\phi(x,z) \approx \phi_M(x,z) = \sum_{j=1}^{N_T} \phi_j(x_j, z_j) h_j(x,z) \quad (\text{III.56})$$

caso $h_j(x,z)$ pertença ao espaço $w_2^{(1)}(A_I)$.

A função $h_j(x,z)$ é chamada função característica do nó j ou função de interpolação. Adotando-se uma lei linear de interpolação tal que

$$i) h_j(x_k, z_k) = \delta_{jk}$$

$$ii) h_j(x,z) = 0 \text{ caso } (x,z) \notin E_j \quad (III.57)$$

iii) $h_j(x,z)$ é uma função linear de forma triangular ou retangular para todo $(x,z) \in e_p^{(1)}$

não é difícil verificar que, por ser $h_j(x,z)$ contínua, então pertence ao espaço $w_2^{(1)}(A_I)$.

A título de ilustração considere um elemento triangular de nós ijk . Considere também um sistema local de referências (j, \hat{x}, \hat{z}) centrado no nó j . A função de interpolação linear $h_j(\hat{x}, \hat{z})$ seria dada por:

$$h_j(\hat{x}, \hat{z}) = \left[1 + \frac{\hat{z}_j - \hat{z}_k}{\Delta s} \hat{x} + \frac{\hat{x}_k - \hat{x}_j}{\Delta s} \hat{z} \right] \quad (III.58)$$

onde

$$\Delta s = \hat{x}_j \hat{z}_k - \hat{x}_k \hat{z}_j$$

A equação (III.25.c) fica então descrita no subespaço $w_M(A_I)$ pelas funções características $h_j(x, \underline{j})$, expressas agora no sistema global de referências $(0, x, z)$. Para tanto es-

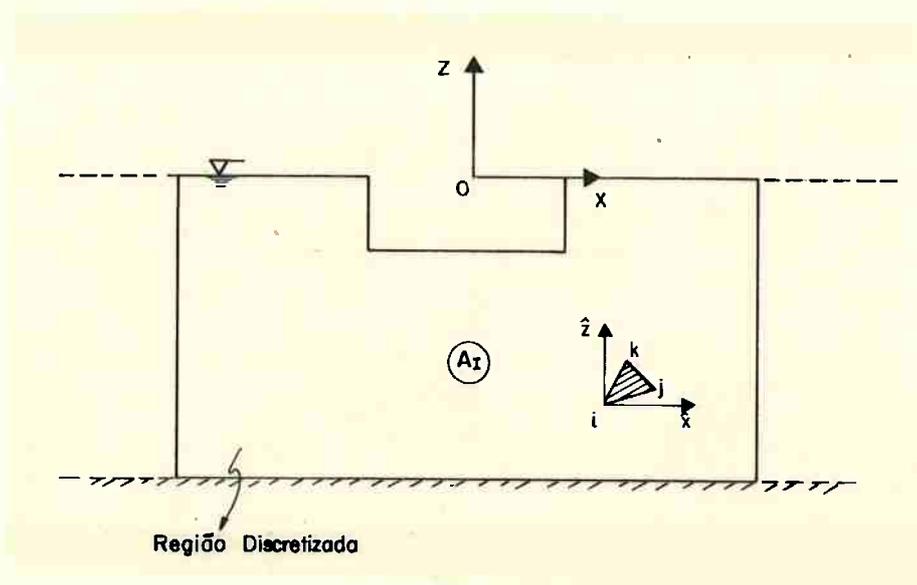


Figura III.4 - Elementos da região discretizada

creve-se:

$$i) \int\int_A \nabla \phi_M \cdot \nabla \psi_M = \{\psi_M\}^T [K_1] \{\phi_M\}$$

$$ii) \int\int_A \phi_M \psi_M = \{\psi_M\}^T [K_2] \{\phi_M\}$$

$$iii) \int_F \phi_M(x,0) \psi_M(x,0) = \{\psi_M\}^T [K_3] \{\phi_M\} \quad (III.59)$$

$$iv) -k_0 \cos \alpha \left\{ L_0^+(\phi_M) L_0^+(\psi_M) - L_0^-(\phi_M) L_0^-(\psi_M) \right\} = \{\psi_M\}^T [G_1] \{\phi_M\}$$

$$v) \sum_{n=1}^S \beta_n \left\{ L_n^+(\phi_M) L_n^+(\psi_M) - L_n^-(\phi_M) L_n^-(\psi_M) \right\} = \{\psi_M\}^T [K_4] \{\phi_M\}$$

III.40.

$$vi) \int_{\partial B} (\nabla \phi_M \cdot \vec{n}) \psi_M = V(\psi_M) = \{\psi_M\}^T \{V_0\} \quad (III.59)$$

Desta forma definindo-se

$$[G_2] = [K_1] + (k_0 \text{sen} \alpha)^2 [K_2] - \frac{\omega^2}{g} [K_3] + [K_4] \quad (III.60)$$

$$[G\alpha] = [G_2] - i[G_1]$$

A equação (III.30.c) fica expressa na forma discreta em elementos finitos:

$$\{\psi_M\}^T [G\alpha] \{\phi_M\} = \{\psi\}^T \{V_0\} \quad (III.61)$$

Desde que $\psi(x,z)$ é arbitrária e uma vez que $[G\alpha]$ seja não singular teremos:

$$\{\phi_M\} = [G\alpha]^{-1} \{V_0\} \quad (III.62)$$

Casos há em que $[G\alpha]$ é singular (p.ex. quando $\alpha = \pi/2$ ou $k_0 = 0$). Nesses casos é necessário recorrer-se a subespaços auxiliares (ver anexo VI).

ANEXO IV. ADIMENSIONALIZAÇÃO DE VARIÁVEIS

A adimensionalização de variáveis é inquestionavelmente bastante conveniente no tratamento de problemas físicos. Sua adoção permite uma melhor compreensão dos fenômenos, principalmente no que diz respeito à avaliação da ordem de magnitude e portanto da importância relativa dos termos envolvidos em seu equacionamento.

A escolha das escalas dimensionais deve se basear nas dimensões típicas envolvidas no fenômeno físico, de forma que as variáveis adimensionais envolvidas tenham ordem de magnitude 1.

No caso dos problemas de contorno associados ao fenômeno de ondas gravitacionais de superfície as escalas de comprimento típicos são o comprimento da onda e a profundidade local.

A equação de dispersão linear por sua vez relaciona o comprimento de onda com sua frequência de oscilação:

$$\frac{\hat{\omega}^2}{g} = \hat{k} \tanh \hat{k} \hat{h} \quad (\text{IV.1})^{(1)}$$

onde

$$\hat{k} = 2\pi/\hat{\lambda} - \text{número de onda}$$

(1) - no presente anexo o sobrescrito ($\hat{}$) designa variáveis dimensionais.

$\hat{\lambda}$ - comprimento da onda

\hat{h} - profundidade

É conveniente tomarmos k^{-1} como escala de comprimento de tal sorte que um parâmetro pequeno referente à amplitude da onda e amplitudes de oscilação de um corpo nela presente possa ser expresso por:

$$\epsilon_h = \frac{\hat{k}\hat{A}}{\tanh \hat{k}\hat{h}} \quad (\text{IV.2})$$

Por outro lado, na presença de um corpo difrator flutuante, sua dimensão característica deve ser necessariamente levada em consideração. No caso do problema bidimensional em estudo uma possível dimensão característica do corpo é sua boca \hat{B} . O parâmetro adimensional é portanto uma medida da interação entre corpo e sistema de ondas. Quando $\hat{k}\hat{B} \ll 1$ é intuitivo afirmar que o corpo pouco interfere no sistema ondulatório. No caso $\hat{k}\hat{B} \gg 1$, por outro lado, o corpo embora perturbe totalmente o sistema de ondas pouco é afetado por ele. A "máxima" interação ocorre quando $\hat{k}\hat{B} \sim 0(1)$, ou seja quando corpo e onda tem dimensões de comprimento características equivalentes. É comum, na literatura (Vugts [66]) tomar-se como comprimento típico de onda $\hat{\lambda}_a = 2\pi/\hat{k}_a$ de tal sorte que:

$$\hat{k}_a \hat{B} = 2$$

ou seja

$$(\text{IV.3})$$

$$\frac{\hat{\lambda}}{a} = \pi$$

Considerando a relação de dispersão em águas profundas a escala típica de tempo fica então:

$$\omega_a^{-1} = \sqrt{\frac{\hat{B}}{2g}} \quad (IV.4)$$

A nível de representação do problema bidimensional de difração e radiação de ondas de superfície pode-se adotar:

- escala de comprimento: $\hat{k}_a^{-1} = \frac{\hat{B}}{2}$

- escala de tempo: $\hat{\omega}_a^{-1} = \sqrt{\frac{\hat{B}}{2g}}$

com:

$$\frac{\hat{\omega}_a^2}{g} = \hat{k}_a \quad (IV.5)$$

Portanto são os seguintes os parâmetros de adimensionalização adotados, apresentados na tabela IV.1

A partir da tabela IV.1 e das considerações feitas até o momento é imediata a adimensionalização do problema através de suas variáveis, relações e equações. No que segue as variáveis adimensionais são desprovidas de qualquer superescrito.

Tabela IV.1 - Parâmetros de Adimensionalização

Dimensão	Parâmetro de Adimensionalização	Relação	Aplicação
comprimento	$\hat{k}_a^{-1} = \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{\omega}_a^2}{g}$	onda típica	variáveis geométricas
comprimento	\hat{A}	amplitude de onda	movimentos translacionais de corpo rígido
tempo	$\hat{\omega}_a = \sqrt{\frac{\hat{B}}{2g}}$	onda típica	tempo e frequência
massa por unidade de comprimento	$\hat{m} = \rho \left(\frac{g}{\hat{\omega}_a^2} \right)^2$	inércia típica	massa
força por unidade de comprimento	$\hat{F}_a = \rho g \hat{A} \left(\frac{g}{\hat{\omega}_a^2} \right)$	força inercial típica	forças em geral

IV. Variáveis Geométricas de Movimentos, tempo e relação de dispersão

É imediato da Tabela IV.1 a seguinte adimensionalização:

- coordenadas: $(x, z) = (\hat{\omega}_a^2/g)(\hat{x}, \hat{z}) = \hat{k}_a(\hat{x}, \hat{z})$
- boca: $B = (\hat{\omega}_a^2/g)\hat{B} = \hat{k}_a\hat{B}$
- calado: $D = (\hat{\omega}_a^2/g)\hat{D} = \hat{k}_a\hat{D}$
- profundidade: $h = (\hat{\omega}_a^2/g)\hat{h} = \hat{k}_a\hat{h}$
- movimentos:

IV.5.

$$\begin{aligned} \text{translacionais: } u &= (1/\hat{A})\hat{u} \\ w &= (1/\hat{A})\hat{w} \\ \text{rotacionais: } \theta &= (\hat{k}_a \hat{A})^{-1}\hat{\theta} \end{aligned} \quad (\text{IV.7})$$

• variáveis de tempo e comprimento de onda

$$\text{tempo: } t = \frac{\hat{\omega}}{\omega_a} \hat{t} \quad (\text{IV.8})$$

$$\text{frequência: } \omega = \frac{\hat{\omega}}{\omega_a} \hat{\omega}$$

$$\text{comprimento: } (1/k) = \frac{\hat{k}_a}{\hat{k}} = \frac{\hat{\omega}_a^2}{g} \frac{1}{\hat{k}} \quad (\text{IV.9})$$

• relação de dispersão adimensional

$$\text{comprimento de onda/profundidade: } kh = \hat{k}\hat{h} \quad (\text{IV.10})$$

$$k_n h = \hat{k}_n \hat{h} \quad (\text{IV.10.a})$$

relação de dispersão

$$\omega^2 = k \tanh kh \quad (\text{IV.11})$$

$$\omega^2 = k_n \tanh k_n h \quad (\text{IV.11.a})$$

velocidade de fase:

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\tanh kh}{k} \right)^{\frac{1}{2}}$$

base ortonormal:

$$f_0(z) = F_0 \cos kh(z+h) \quad (\text{IV.12})$$

$$f_n(z) = F_n \cos k_n(z+h)$$

com

IV.6.

$$F_0^2 = \frac{2k}{\sinh kh \cosh kh + kh}$$

(IV.12.a)

$$F_n^2 = \frac{4k_n}{2k_n h + \sin(2k_n h)}$$

IV.2. Pressão e função potencial

Da definição de pressão e do parâmetro adimensionalizador de força

$$\hat{F}_a = \rho g \hat{A} \left(\frac{\hat{\omega}_a^2}{g} \right)^2$$

é imediato verificar-se que o parâmetro de adimensionalização de pressão é

$$\hat{p}_a = \rho g \hat{A} \quad (\text{IV.13})$$

Seria razoável termos obtido \hat{F}_a a partir de \hat{p}_a cuja definição partiria dos termos hidrostáticos da pressão na equação de Bernoulli associados aos movimentos do corpo. Tais movimentos tiveram \hat{A} , amplitude da onda, como parâmetro adimensionalizador.

Tomando agora o termo de pressão $\rho \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \hat{t}}$ da equação de Bernoulli segue o adimensionalizador da função potencial $\hat{\phi}_a$.

$$\hat{\phi}_a = \frac{g \hat{A}}{\hat{\omega}_a} \quad (\text{IV.14})$$

Portanto as variáveis pressão e função potencial terão a seguinte adimensionalização:

$$p = (1/\rho g \hat{A}) \hat{p} \quad (\text{IV.15})$$

$$\phi = (\hat{\omega}_a / g \hat{A}) \hat{\phi} \quad (\text{IV.16})$$

ou ainda expandindo (IV.15) e (IV.16) até segunda ordem em $\varepsilon = \frac{\hat{\omega}_0^2 \hat{A}}{g}$:

$$p(x, z, t) = (p_1(x, z, t) + \left\{ \frac{\hat{\omega}_0^2 \hat{A}}{g} \right\} p_2(x, z, t)) (1 + O(\varepsilon^2)) \quad (\text{IV.15.a})$$

$$\phi(x, z, t) = (\phi_1(x, z, t) + \left\{ \frac{\hat{\omega}_0^2 \hat{A}}{g} \right\} \phi_2(x, z, t)) (1 + O(\varepsilon^2)) \quad (\text{IV.16.a})$$

com

$$p_1(x, z, t) = (1/\rho g \hat{A}) \hat{p}_1(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) \quad (\text{IV.17})$$

$$p_2(x, z, t) = (1/\rho g \hat{A}) \hat{p}_2(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t})$$

$$\phi_1(x, z, t) = (\omega_a / g \hat{A}) \hat{\phi}_1(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t}) \quad (\text{IV.18})$$

$$\phi_2(x, z, t) = (\omega_a / g \hat{A}) \hat{\phi}_2(\hat{x}, \hat{z}, \hat{t})$$

Definiremos ainda $\zeta = \hat{z} / \hat{A}$ a cota adimensional correspondente à pressão hidrostática.

IV.8.

Assim, a equação de Bernoulli, em sua forma adimensional, fica:

$$p(x, z, t) = -\zeta - \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\frac{\hat{\omega}_0^2 \hat{A}}{g} \right) \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.19})$$

e os termos corretos até primeira e segunda ordem em sua aproximação assintótica:

$$p_1(x, z, t) = -\zeta_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \quad (\text{IV.20})$$

$$p_2(x, z, t) = -\zeta_2 - \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)^2 \right] \quad (\text{IV.21})$$

IV.3. Potencial de onda incidente (aproximação linear) e equação do problema de difração e irradiação

Das expressões (IV.6), (IV.8 a IV.11) e (IV.18) é fácil mostrar que a aproximação linear da função potencial de uma onda de superfície se propagando livremente em lâmina de água de profundidade h é dada na forma adimensional por:

$$\Phi_I(x, z, t) = -\frac{1}{2\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \left(e^{i(kx-\omega t)} + e^{-i(kx-\omega t)} \right) \quad (\text{IV.22})$$

e seu perfil na superfície por:

$$\eta_I(x, z, t) = -\frac{i}{2\omega} \left(e^{i(k_x x - \omega t)} - e^{-i(k_x x - \omega t)} \right) \quad (\text{IV.23})$$

As equações (3.10) e (3.11) referentes às aproxima-

ções linear e de segunda ordem do problema de difração e radiação associados \tilde{a} (IV.22) ficam respectivamente, na forma adimensional:

$$\begin{aligned}
 & \cdot \nabla^2 \Phi_1 = 0 \\
 & \cdot \left. \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \text{ na superfície em seu plano médio} \\
 & \cdot \left. \nabla \Phi_1 \cdot \vec{n} \right|_{\partial H} = 0; \text{ no fundo (contorno } \partial H) \\
 & \cdot \left. \nabla \Phi_1 \cdot \vec{n} \right|_{\partial B} = \left(\frac{du_1}{dt} - z \frac{d\theta_1}{dt} \right) n_x + \left(\frac{dw_1}{dt} + x \frac{d\theta_1}{dt} \right) n_z; \text{ na superfície do corpo} \\
 & \cdot \text{ condição de radiação}
 \end{aligned} \tag{IV.24}$$

e

$$\begin{aligned}
 & \cdot \nabla^2 \Phi_2 = 0 \tag{IV.25} \\
 & \cdot \left. \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} \right|_{z=0} - \left[2 \nabla \Phi_1 \cdot \nabla \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right) - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right) \right] \Big|_{z=0}; \text{ na} \\
 & \quad \text{superfície em seu plano médio} \\
 & \cdot \left. \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n} \right|_{\partial H} = 0; \text{ no fundo} \\
 & \cdot \left. \nabla \Phi_2 \cdot \vec{n} \right|_{\partial B} = \left(\frac{du_2}{dt} - z \frac{d\theta_2}{dt} \right) n_x + \left(\frac{dw_2}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt} \right) n_z + \\
 & \quad + \frac{d}{dt} \left\{ \left[\theta_1(t) \cdot (w_1(t) + x\theta_1(t)) - \frac{1}{2} \theta_1^2(t)x \right] n_x - \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (\theta_1(t) (u_1(t) - z\theta_1(t)) + \frac{1}{2}\theta_1^2(t)z)n_z \} + \\
& + \frac{\partial}{\partial s} \left\{ \left[(u_1(t) - z\theta_1(t))n_x + (w_1(t) + x\theta_1(t))n_z \right] \frac{\partial \Phi_1}{\partial s} \right\};
\end{aligned}$$

na superfície do corpo

- condição de radiação.

É importante observar que a adimensionalização utilizada para a função potencial leva a uma amplitude adimensional de onda unitária não preservando a inclinação da onda $\gamma = \hat{k}\hat{A}$. No entanto, é evidente que, sob equacionamento linear, tal adimensionalização não só não interfere nos resultados, como traz benefícios computacionais, uma vez que as funções de transferência e curvas de resposta em frequência são nesse caso numericamente iguais aos valores calculados das variáveis adimensionais.

Há que se tomar cuidado, no entanto, durante a solução de sistemas não lineares ou quasi-lineares. Um exemplo típico é a consideração do amortecimento viscoso nos movimentos de "roll" e "sway". A inclusão das forças viscosas, de natureza sabidamente não linear, se faz através de uma linearização equivalente do sistema de equações de movimento, conseguida igualando-se a potência média dissipada por atrito viscoso (anexo X). O coeficiente de amortecimento linearizado é linearmente proporcional a amplitude do movimento e a solução se processa ite-

rativamente. Faz-se necessário, nessa ocasião, corrigir-se o cálculo dos coeficientes de amortecimentos, preservando-se o parâmetro de inclinação de onda; através da seguinte relação:

$$b^* = \frac{\hat{k}\hat{A}}{k} b \quad (\text{IV.26})$$

onde:

b^* é o coeficiente de amortecimento adimensional corrigido, correspondente à incidência de uma onda de inclinação $\gamma = \hat{k}\hat{A}$ e b é o coeficiente de amortecimento adimensional correspondente à incidência de uma onda de inclinação $\gamma = k$.

IV.4. Outras variáveis dimensionais

A título de clareza apresentamos a seguir as expressões bidimensionais de algumas outras variáveis presentes no problema em estudo.

- inércia de massa (por unidade de comprimento):

$$I = \frac{\hat{1}}{\hat{m}_a \left(\frac{\hat{g}}{\hat{\omega}_a^2} \right)^2} = \left(\frac{\hat{\omega}_a^2}{\hat{g}} \right)^4 \frac{1}{\rho} \hat{1} \quad (\text{IV.27})$$

- coeficientes de amortecimento por radiação translacionais

$$b = \frac{1}{\rho \hat{\omega}_a} \left(\frac{\hat{\omega}_a^2}{\hat{g}} \right)^2 \hat{b} \quad (\text{IV.28})$$

rotacionais

$$b_{\theta} = \frac{1}{\rho \hat{\omega}_a^2} \left(\frac{\hat{\omega}_a^2}{g} \right)^4 \hat{b}_{\theta} \quad (\text{IV.29})$$

- coeficientes de restauração hidrostática translacionais;

$$c = \frac{1}{\rho \hat{\omega}_a^2} \left(\frac{\hat{\omega}_a^2}{g} \right)^2 \hat{c} \quad (\text{IV.30})$$

rotacionais

$$c_{\theta} = \frac{1}{\rho \hat{\omega}_a^2} \left(\frac{\hat{\omega}_a^2}{g} \right)^4 \hat{c}_{\theta} \quad (\text{IV.31})$$

- momento de uma força:

$$M = \frac{\hat{M}}{\hat{F}_a \cdot \left(\frac{g}{\hat{\omega}_a^2} \right)} = \frac{1}{\rho g \hat{A}} \left(\frac{\hat{\omega}_a^2}{g} \right)^2 \hat{M} \quad (\text{IV.32})$$

IV.5. Relação dos adimensionais utilizados com os adimensionais comumente encontrados na literatura

A título de objetividade no que concerne à futura comparação dos resultados do presente trabalho a resultados presentes na literatura, relaciona-se na tabela IV.2 abaixo, os adimensionais utilizados àqueles definidos por Vugts (1969) e que tem sido objeto de frequentes referências.

Definindo-se a área seccional como A_s tem-se:

Tabela IV.2

Adimensional	Presente trabalho	Vugts	Vugts/Presente
a_{uu}	$\frac{\hat{a}_{uu}}{\rho} \hat{k}_a^2$	$\frac{\hat{a}_{uu}}{\rho \hat{A}_s}$	A_s^{-1}
a_{ww}	$\frac{\hat{a}_{ww}}{\rho} \hat{k}_a^2$	$\frac{\hat{a}_{ww}}{\rho \hat{A}_s}$	A_s^{-1}
$a_{\theta\theta}$	$\frac{\hat{a}_{\theta\theta}}{\rho} \hat{k}_a^4$	$\frac{\hat{a}_{\theta\theta}}{\rho \hat{A}_s \hat{B}^2}$	$A_s^{-1} B^{-2}$
$a_{u\theta}$	$\frac{\hat{a}_{u\theta}}{\rho} \hat{k}_a^3$	$\frac{\hat{a}_{u\theta}}{\rho \hat{A}_s \hat{B}}$	$A_s^{-1} B^{-1}$
b_{uw}	$\frac{\hat{b}_{uw}}{\rho \hat{\omega}_a} \hat{k}_a^2$	$\frac{\hat{b}_{uw}}{\rho \hat{\omega}_a \hat{A}_s}$	A_s^{-1}
b_{ww}	$\frac{\hat{b}_{ww}}{\rho \hat{\omega}_a} \hat{k}_a^2$	$\frac{\hat{b}_{ww}}{\rho \hat{\omega}_a \hat{A}_s}$	A_s^{-1}
$b_{u\theta}$	$\frac{\hat{b}_{u\theta}}{\rho \hat{\omega}_a} \hat{k}_a^3$	$\frac{\hat{b}_{u\theta}}{\rho \hat{\omega}_a \hat{A}_s \hat{B}}$	$A_s^{-1} B^{-1}$
$b_{\theta\theta}$	$\frac{\hat{b}_{\theta\theta}}{\rho \hat{\omega}_a} \hat{k}_a^4$	$\frac{\hat{b}_{\theta\theta}}{\rho \hat{\omega}_a \hat{A}_s \hat{B}^2}$	$A_s^{-1} B^{-2}$
F_u	$\frac{\hat{F}_u}{\rho g \hat{A}} \hat{k}_a$	$\frac{\hat{F}_u}{\rho g \hat{B} \hat{A}}$	B^{-1}
F_w	$\frac{\hat{F}_w}{\rho g \hat{A}} \hat{k}_a$	$\frac{\hat{F}_w}{\rho g \hat{B} \hat{A}}$	B^{-1}
F_θ	$\frac{\hat{F}_\theta}{\rho g \hat{A}} \hat{k}_a^2$	$\frac{F_\theta}{\rho g \frac{\hat{B}^3}{12} \hat{k}_a \hat{A}}$	$\frac{12}{B^3} k^3$

ANEXO V. COMPLEMENTO ALGÉBRICO DEDUTIVO DA FÓRMULA DA FORÇA DE DERIVA EM ONDAS MONOCROMÁTICAS

O presente anexo destina-se a complementar as passagens algébricas não explicitadas no Capítulo 4, item 4.2.

Tomemos a expressão (4.16.a) que determina a força média de deriva em ondas monocromáticas como função de termos bilineares das derivadas parciais do potencial total em primeira ordem e da derivada parcial no tempo do potencial de segunda ordem

$$\begin{aligned}
 \langle D(\omega) \rangle = & \frac{\epsilon^2}{2} \rho \left\langle \int_{-h}^{\infty} \eta(x,t) \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right\rangle - \frac{\epsilon^2}{2} \rho \left\langle \int_{-h}^{\infty} \eta(x,t) \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right\rangle + \\
 & + \epsilon \rho \left\langle \int_{-h}^{\infty} \eta(x,t) \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} dz \right\rangle - \rho g \left\langle \int_{-h}^{\infty} \eta(x,t) \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} dz \right\rangle + \rho g \left\langle \int_{-h}^{\infty} \eta(x,t) z dz \right\rangle - \\
 & - \rho g \left\langle \int_{-h}^{\infty} \eta(x,t) z dz \right\rangle + \epsilon^2 \rho \left\langle \int_{-h}^{\infty} \eta(x,t) \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} dz \right\rangle - \epsilon^2 \rho \left\langle \int_{-h}^{\infty} \eta(x,t) \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} dz \right\rangle
 \end{aligned}
 \tag{V.1}$$

com

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

indicando a média no tempo T de uma função f(t)

Sendo as funções $\phi_1(x,z,t)$ e $\phi_2(x,z,t)$ analíticas e invocando a hipótese de ondas de pequena amplitude os termos presentes em (V.1) podem ser expandidos em série de Taylor que se aproximada até segunda-ordem dá:

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad \epsilon \int_{-h}^{\eta(x,t)} \left\{ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dz &= \epsilon^2 \int_{-h}^0 \left\{ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dz + \\
 &0(\epsilon^2) \\
 &+ \epsilon^2 \left\{ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\}_{z=0} \eta(x,t) \\
 &0(\epsilon^3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad \epsilon \int_{-h}^{\eta(x,t)} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dz &= \epsilon \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dz + \epsilon \eta(x,t) \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} + 0(\epsilon^2) \\
 &0(\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii)} \quad \epsilon^2 \int_{-h}^{\eta(x,t)} \frac{\partial \phi_2}{\partial t} dz &= \epsilon^2 \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} dz + \epsilon^2 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \Big|_{z=0} \eta(x,t) \\
 &0(\epsilon^2) \quad 0(\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

Tomando a expressão (3.5.a), aplicando-a a (iii) de forma a preservar termos até segunda-ordem a expressão (V.1) fica

$$\begin{aligned}
 D(\omega) &= \frac{\epsilon^2}{2} \rho \left\langle \int_{-h}^0 \left\{ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right\rangle_{x \rightarrow +\infty} - \int_{-h}^0 \left\{ \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right\rangle_{x \rightarrow +\infty} + \\
 &+ \epsilon \rho \left\langle \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dz - g \eta^2(x,t) \right\rangle_{x \rightarrow +\infty} - \epsilon \rho \left\langle \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} dz - g \eta^2(x,t) \right\rangle_{x \rightarrow -\infty} + \\
 &+ \frac{\rho g}{2} \left\langle \eta^2(x,t) - h^2 \right\rangle_{x \rightarrow +\infty} - \frac{\rho g}{2} \left\langle \eta^2(x,t) - h^2 \right\rangle_{x \rightarrow -\infty} + \epsilon^2 \rho \left\langle \int_{-h}^0 \frac{\partial \phi_2}{\partial t} dz \right\rangle_{x \rightarrow +\infty} -
 \end{aligned}$$

$$-\epsilon^2 \rho \left\langle \int_{-h}^0 \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} dz \right\rangle_{x \rightarrow -\infty} + O(\epsilon^3) \quad (V.1.a)$$

As funções $\Phi_1(x, z, t)$ e $\eta(x, t)$ são aproximadas quando $x \rightarrow \pm\infty$ pelas expressões (III.2.a) e (III.2.b). Assim

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \epsilon \Phi_1(x, z, t) = -\frac{1}{2} \frac{gA}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \left\{ T e^{i(kx-\omega t)} + T^* e^{-i(kx-\omega t)} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \eta(x, t) = -\frac{i}{2} A \left\{ T e^{i(kx-\omega t)} - T^* e^{-i(kx-\omega t)} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \epsilon \Phi_1(x, z, t) = -\frac{1}{2} \frac{gA}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \left\{ (e^{ikx} + R e^{-ikx}) e^{-i\omega t} + (e^{-ikx} + R^* e^{ikx}) e^{i\omega t} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta(x, t) = -\frac{i}{2} A \left\{ (e^{ikx} + R e^{-ikx}) e^{-i\omega t} - (e^{-ikx} + R^* e^{ikx}) e^{i\omega t} \right\} \quad (V.2)$$

Ainda conforme visto nos anexos I e II a função $\Phi_2(x, z, t)$ pode ser decomposta em uma parcela independente do tempo e uma função harmônica de frequência 2ω . Assim, a média tomada em um período $T = \frac{2\pi}{\omega}$ faz com que os termos harmônicos evanesçam. A expressão (V.1.a) toma então a forma:

$$D(\omega) = \frac{\epsilon^2}{2} \rho \left\langle \int_{-h}^0 \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right\rangle_{x \rightarrow -\infty} - \int_{-h}^0 \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right\rangle_{x \rightarrow +\infty} +$$

$$+ \frac{1}{2} \rho g \left\langle \eta^2(x, t) \right\rangle_{x \rightarrow -\infty} - \frac{1}{2} \rho g \left\langle \eta^2(x, t) \right\rangle_{x \rightarrow +\infty}$$

Valendo-nos de (V.2) desenvolveremos os termos de (V.1.b) definindo:

$$q_1(z) = \frac{gA}{\omega} \frac{\cosh k(z+h)}{\cosh kh} \quad ; \quad q_2(z) = \frac{gA}{\omega} \frac{\sinh k(z+t)}{\cosh kh}$$

i) $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} &= -\frac{i}{2} q_1(z) k \left(T e^{i(kx-\omega t)} - T^* e^{-i(kx-\omega t)} \right) \\ \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= -\frac{1}{2} q_2(z) k \left(T e^{i(kx-\omega t)} + T^* e^{-i(kx-\omega t)} \right) \end{aligned} \quad (V.3)$$

então

$$\varepsilon^2 \left\langle \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\rangle_{x \rightarrow +\infty} = \frac{k^2}{2} \left\{ \left(q_1^2(z) - q_2^2(z) \right) |T|^2 \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{gkA}{\omega} \right)^2 \frac{|T|^2}{\cosh^2 kh} \quad (V.4)$$

onde evanesceram os termos harmônicos de frequência 2ω ; logo:

$$\varepsilon^2 \left\langle \int_{-h}^0 \left\{ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right\} dz \right\rangle_{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2} \left(\frac{gkA}{\omega} \right)^2 \frac{h}{\cosh^2 kh} |T|^2 \quad (V.5)$$

analogamente

$$\left\langle \eta^2(x, t) \right\rangle_{x \rightarrow +\infty} = \frac{1}{2} A^2 |T|^2 \quad (V.6)$$

ii) $x \rightarrow -\infty$

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} &= -\frac{i}{2} q_1(z) k \left\{ \left(e^{ikx} - R e^{-ikx} \right) e^{-i\omega t} - \left(e^{-ikx} - R^* e^{ikx} \right) e^{i\omega t} \right\} \\ \varepsilon \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} &= -\frac{1}{2} q_2(z) k \left\{ \left(e^{ikx} + R e^{-ikx} \right) e^{-i\omega t} + \left(e^{-ikx} + R^* e^{ikx} \right) e^{i\omega t} \right\} \end{aligned} \quad (V.7)$$

então, analogamente a (V.4):

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \left\langle \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial Z} \right)^2 \right\rangle_{x \rightarrow -\infty} &= \frac{1}{2} q_1^2(z) k^2 \left\{ 1 + |R|^2 - (R^2 e^{-2ikx} + (*)) \right\} - \\ &- \frac{1}{2} q_2^2(z) k^2 \left\{ 1 + |R|^2 + (R^2 e^{-2ikx} + (*)) \right\} \end{aligned}$$

e finalmente:

$$\begin{aligned} \epsilon^2 \int_{-h}^0 \left\langle \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial X} \right)^2 - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial Z} \right)^2 \right\rangle_{x \rightarrow -\infty} &= \frac{1}{2} \left(\frac{gkA}{\omega} \right)^2 \frac{h}{\cosh^2 kh} \left\{ (1 + |R|^2) - \right. \\ &\left. - \frac{\sinh kh \cosh kh}{kh} \left(R^2 e^{-2ikx} + R^{*2} e^{2ikx} \right) \right\}_{x \rightarrow -\infty} \end{aligned} \quad (V.8)$$

analogamente:

$$\left\langle \eta^2(x,t) \right\rangle_{x \rightarrow -\infty} = \frac{A^2}{2} \left\{ 1 + |R|^2 + (R^2 e^{-2ikx} + R^{*2} e^{2ikx}) \right\}_{x \rightarrow -\infty} \quad (V.9)$$

Tomando-se a relação de dispersão:

$$\frac{\omega^2}{g} = k \tanh kh$$

tem-se:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{gkA}{\omega} \right)^2 \frac{h}{\cosh^2 kh} = \frac{g}{2} A^2 \frac{kh}{\sinh kh \cosh kh} \quad (V.10)$$

Então substituindo (V.5), (V.6), (V.8) a (V.10) em (V.1.b):

$$D(\omega) = \frac{1}{4} \rho g A^2 \left\{ 1 + \frac{kh}{\sinh kh \cosh kh} \right\} (1 + |R|^2 - |T|^2) \quad (\text{V.11})$$

ANEXO VI. POTENCIAIS DE RADIAÇÃO EM FREQUÊNCIA NULA

Das condições de contorno na superfície livre é imediato verificar que com erro da ordem $(1+O(\Delta\omega)^2)$ pode-se aproximar o potencial de radiação linear na frequência nula. Explicitamente, chamando-se o potencial de radiação em frequência nula $\phi_k^0(x,z)$, tem-se:

$$\phi_k(x,z,\Delta\omega) = \phi_k^0(x,z)(1+O(\Delta\omega^2)) \quad (\text{VI.1})$$

A determinação de $\phi_k(x,z,\Delta\omega)$ objetiva o cálculo das massas adicionais e coeficientes de amortecimento por radiação, necessários à solução das equações de movimento em baixa frequência em ondas aleatórias. Embora a aproximação (VI.1) para o potencial $\phi_k(x,z,\Delta\omega)$ apresente nítidas vantagens, como a necessidade de um único processamento para cada problema, em contrapartida provoca alguns transtornos a nível de solução do método numérico, uma vez que, como será visto adiante, introduz uma singularidade que deve ser contornada.

No entanto a determinação de $\phi_k^0(x,z)$ traz paralelamente um benefício incontestável, na medida em que possibilita calcular-se o coeficientes de força de deriva $Q_2^{(2)}$ devido ao potencial de segunda-ordem, em ondas aleatórias, sem que seja necessário a solução do potencial de segunda-ordem ϕ_{20} . Isto se faz através de uma extensão da Relação de Haskind aplicada ao potencial ϕ_{20} , fazendo-se uso das condições de contor-

no de ϕ_k^0 , extremamente convenientes à resolução do problema (ver capítulo 6).

Por sua vez, determinado $\phi_k^0(x,z)$ os coeficientes hidrodinâmicos de massa adicional e amortecimento por radiação são imediatamente calculados. Em termos dimensionais (ver III.20 e III.21):

$$\begin{aligned}
 a_{jk}^0 &= \int_{\partial B} \text{Real}(\phi_k^0) \left\{ \begin{array}{l} n_j \\ \vec{r} \times \vec{n} \end{array} \right\} \Big|_{\partial B} d\partial B && \begin{array}{l} \dots j=i, w \\ \dots j=0 \end{array} \\
 b_{jk}^0 &= \int_{\partial B} \text{Imag}(\phi_k^0) \left\{ \begin{array}{l} n_j \\ \vec{r} \times \vec{n} \end{array} \right\} \Big|_{\partial B} d\partial B && \begin{array}{l} \dots j=i, w \\ \dots j=0 \end{array}
 \end{aligned} \tag{VI.2}$$

VI.1. Equacionamento e Condição de Radiação

O potencial de radiação em frequência nula $\phi_j^0(x,z)$ segue o equacionamento geral dado em (III.22), tomado no domínio fluido infinito conforme representado na figura (6.1). Visto que tratamos do problema limite quando $\omega \rightarrow 0$ tem-se:

$$\begin{aligned}
 &\bullet \nabla^2 \phi_j^0 = 0 \\
 &\bullet \left. \frac{\partial \phi_j^0}{\partial z} \right|_{z=0} = 0; \text{ na superfície livre em repouso} \\
 &\bullet \left. \nabla \phi_j^0 \cdot \vec{n} \right|_{\partial H} = 0; \text{ no fundo de contorno } \partial H
 \end{aligned} \tag{VI.3}$$

$$\left. \nabla \phi_j^0 \cdot \vec{n} \right|_{\partial B} = v(x,z); \text{ na superfície do corpo de contorno } \partial B$$

• condição de radiação

onde

$$v_j(x,z) = \begin{cases} n_j; & j=u,w \\ \vec{r} \times \vec{n}_x = -zn_x + xn_z; & j=\theta \end{cases} \quad (\text{VI.4})$$

A condição de radiação a ser especificada deve levar em conta que a única excitação presente é aquela dada pelas condições de contorno na superfície do corpo. É de se esperar que ϕ_j^0 seja uma função que não cresça exponencialmente com $|x|$. Em particular, verificando que

$$\left. \frac{\partial \phi_j^0}{\partial z} \right|_z = 0$$

uma expressão plausível é dada por:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi_j^0(x,z) \sim \left[A_{j0}^{\pm} \pm U_{j0}^{\pm}(x-x_0^{\pm}) \right] q(z), \quad j=u,\theta \quad (\text{VI.5.a})$$

Tal condição de radiação, veremos no anexo VII, é análoga a condição imposta no equacionamento de $\Phi_{20}(x,z)$. É fácil verificar, de forma idêntica à apresentada no anexo VII, que

$$q(z) = g_0(z) = h^{-\frac{1}{2}}.$$

Considere-se agora o seguinte funcional $V_j(\psi)$ definida ao longo da superfície do corpo por:

$$V_j(\psi) = \int_{\partial B} v_j(x, z) \psi(x, z) \Big|_{(x, z) \in \partial B} d\partial B \quad (\text{VI.6})$$

conforme (III.46.1) onde $\psi(x, z)$ é uma função pertencente ao espaço $W_2^{(1)}$ (ver anexo III).

Tomando-se a equação (VI.3) e integrando-a por partes em todo o domínio fluido S (ver fig. 6.1), após multiplicá-la pela função $\psi(x, z)$, e aplicando-se em seguida o teorema do divergente, utilizando-se então as condições de contorno e radiação de (VI.3), segue:

$$-\int_{A_\infty} \nabla \phi_j^0 \cdot \nabla \psi dS - \int_{-h}^0 U_{j0}^+ q(z) dz - \int_{-h}^0 U_{j0}^- q(z) dz - V_j(\psi) = 0 \quad (\text{VI.7})$$

Em particular se $\psi(x, z) = 1$ tem-se

$$-V_j(1) = (U_{j0}^+ + U_{j0}^-) \int_{-h}^0 q(z) dz \quad (\text{VI.8})$$

que traduz a equação de conservação de massa. Expressando-se $\phi_j^0(x, z)$ em série de Fourier generalizada conforme estabelecido no anexo III, segundo a base ortonormal $f_n(z)$, $n=0, 1, 2, \dots$, e notando-se que:

$$\lim_{kh \rightarrow 0} f_0(z) = g_0(z) = h^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{VI.9})$$

VI.5.

é bastante razoável tomar-se $q(z) = Cg_0(z)$, ou, em particular e sem perda de generalidade $q(z) = g_0(z)$, de tal forma que

$$U_{j0}^+ + U_{j0}^- = -\frac{V_j(1)}{\sqrt{h}} \quad (\text{VI.10})$$

É imediato verificar-se ainda que (ver fig.6.1)⁽¹⁾:

$$V_u(1) = V_0(1) = 0 \quad (\text{VI.11})$$

$$V_w(1) = 2b$$

e que portanto:

$$U_{u0}^+ = -U_{u0}^- \quad (\text{VI.12.a})$$

$$U_{\theta 0}^+ = -U_{\theta 0}^-$$

(VI.12.b)

$$U_{w0}^+ + U_{w0}^- = -\frac{2b}{\sqrt{h}}$$

Toma-se partido da natureza simétrica ou anti-simétrica do escoamento provocado pelo movimento do corpo em relação ao eixo vertical $x=0$. Para o caso de "sway" e "roll" as

(1) - independentemente da geometria da superfície do corpo

$$n_x = -\frac{dz}{ds} \text{ e } n_z = \frac{dx}{ds} \text{ e portanto } \int_{\partial B} -\frac{dz}{dj} dj = \int_0^0 -dz = 0$$

velocidades horizontais nas fronteiras serão anti-simétricas e então:

$$U_{u0}^+ = -U_{u0}^- \quad (\text{VI.13.a})$$

$$U_{\theta 0}^+ = -U_{\theta 0}^-$$

que confirma a expressão (VI.12.a) sem porém determinar U_{u0}^\pm e $U_{\theta 0}^\pm$. O seguinte argumento pode, no entanto, ser levantado:

Quando um corpo se movimenta segundo os graus de liberdade em "sway" ou "roll" não há deslocamento de volume adicional algum. Exceto no caso quando o calado do corpo é igual à lâmina d'água, há sempre a possibilidade do campo de velocidades horizontal gerado próximo ao corpo ser compensado por um campo de velocidades subjacente e de sentido oposto. Em outras palavras o fluxo gerado pelo corpo será compensado por um refluxo e de tal sorte que, em cada seção vertical o fluxo líquido será nulo. Os fluxos líquidos nas fronteiras verticais situadas no infinito são dados em módulo para $U_{u0}^\pm \sqrt{h}$ ou $U_{\theta 0}^\pm \sqrt{h}$ e portanto a única⁽¹⁾ forma de os fazermos nulos é ter-se:

(1) - O argumento de que $q(z)$ poderia ser uma função tal que

$$\int_{-h}^0 q(z) dz = 0$$

é facilmente refutável. Sim pois para um observador situado ao longo de uma vertical longe do corpo este é visto como um ponto, independentemente da posição vertical que se ocupe e portanto a função $q(z)$ deve ser constante. Outro argumento físico para impor $U_0^\pm = 0$ nos casos de *roll* e *sway* é o princípio do caminho de mínima energia. Como o domínio fluido é infinito, ter-se $U_0^\pm \neq 0$ significaria necessa-

VI.7.

$$U_{u0}^{\pm} = U_{\theta 0}^{\pm} = 0. \quad (\text{VI.14.a})$$

Já para o caso de radiação associado ao movimento em "heave" o escoamento é simétrico em relação a $x = 0$, e portanto:

$$U_{w0}^{+} = U_{w0}^{-} \quad (\text{VI.13.b})$$

Comparando-se (VI.13.b) a (VI.12.b) é imediato verificar que:

$$U_{w0}^{+} = U_{w0}^{-} = -bh^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VI.14.b})$$

ou seja, a um movimento de "heave" no sentido negativo (para baixo) corresponderá um efluxo simétrico e a um movimento no sentido positivo, um influxo também simétrico.

VI.2. Solução do potencial de Radiação em frequência nula pelo Método Compatibilizado de Elementos Finitos

Visto que o equacionamento de $\phi_j^0(x,z)$ é o limite do equa-

riamente movimentar-se todo o fluido, o que, obviamente, não se constitui no "caminho de mínima energia" para os casos de *roll* e *sway*.

cionamento de $\phi_1(x, z, \omega)$ quando ω tende a zero é natural que utilizemos o mesmo método de solução apresentado no anexo III. Tratamos apenas do problema de radiação de ondas causado pelos movimentos de corpos cilíndricos e portanto o ângulo ω definido no anexo III é nulo.

Como se viu no anexo III o método consiste em solucionar o problema em dois subdomínios conforme representado na figura VI.1 de referências. O domínio A_I , que contém o corpo, é discretizado em elementos finitos e nele a solução se processa numericamente. No domínio A_{II} , particionado em A_{II}^+ , à direita e A_{II}^- , à esquerda do corpo respectivamente, a solução é analítica e dada na forma de Série de Fourier generalizada. Ambas soluções são então compatibilizadas através da igualdade de fluxo e pressão nas fronteiras, resultando então um sistema linear cujas incógnitas, uma vez determinadas completam as soluções em ambos os domínios.

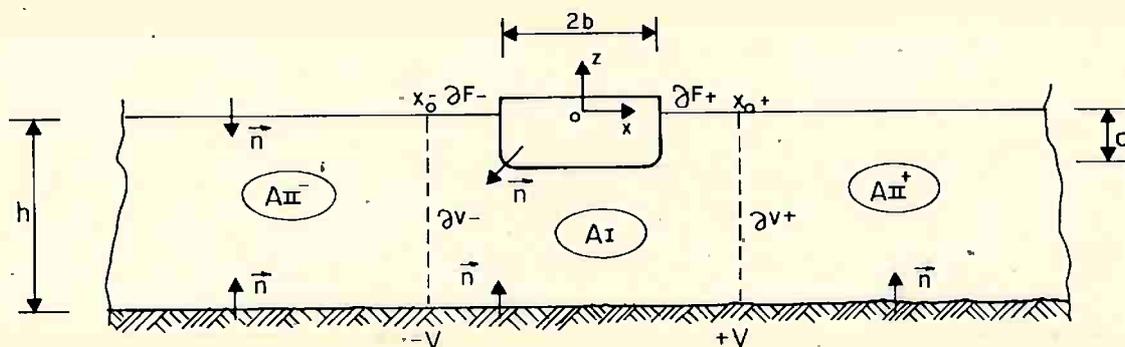


Figura VI.1 - O método compatibilizado de elementos finitos

VI.9.

Inicialmente verificamos de (III.44.a) que a solução nos domínios exteriores é dada, no limite quando ω tende a zero, por:

$$\begin{aligned} \phi^0(x, z) = & \left[A_0^\pm \pm U_0^\pm(x-x_0) \right] g_0(z) + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^\pm g_n(z) e^{\pm \lambda_n(x \pm x_0)} \end{aligned} \quad (\text{VI.15})$$

onde se omitiu o índice j , designativo do grau de liberdade, e considerou-se, sem perda de generalidade, $x_0^+ = x_0^- = x_0$.

Aqui:

$$\begin{aligned} g_0(z) &= \lim_{k_0 h \rightarrow 0} f_0(z) = h^{-\frac{1}{2}} \\ g_n(z) &= \lim_{k_0 h \rightarrow 0} f_n(z) = \left(\frac{2}{h} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \lambda_n(z+h) \end{aligned} \quad (\text{VI.16})$$

com

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{h}; \quad n=1, 2, 3, \dots$$

constituem a base ortonormal infinito dimensional do espaço $W_2^0(A_I)$.

A_0^\pm e A_n^\pm são as incógnitas finais do problema a serem determinadas.

Por sua vez o fluxo através das fronteiras verticais

que separam as regiões A_I e A_{II}^\pm é dado respectivamente por:

$$\left. \frac{\partial \phi^0}{\partial x} \right|_{x=\pm x_0} = \pm U_0^\pm g_0(z) \mp \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n A_n^\pm g_n(z) \quad (\text{VI.17})$$

Elaborando-se agora a formulação fraca associada ao problema dentro da região A_I , conforme o procedimento exposto no item (III.22.1), e lembrando-se das definições dos operadores lineares $L_n^\pm(\psi)$ dado por (III.44) tem-se:

$$\begin{aligned} \int_{A_I} \nabla \phi^0 \cdot \nabla \psi dA_I + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (A_n^+ L_n^+(\psi) + A_n^- L_n^-(\psi)) &= \\ &= V(\psi) + U_0^+ L_0^+(\psi) + U_0^- L_0^-(\psi) \end{aligned} \quad (\text{VI.18})$$

Analogamente ao anexo III definiremos aqui o operador $G_0(\phi^0, \psi)$ como:

$$\begin{aligned} G_0(\phi^0, \psi) &= \int_A \nabla \phi^0 \cdot \nabla \psi dA + \\ &+ \sum_{n=1}^{N_S} \lambda_n (L_n^+(\phi^0) L_n^+(\psi) + L_n^-(\phi^0) L_n^-(\psi)) \end{aligned} \quad (\text{VI.19})$$

e (VI.18) fica escrito na forma:

$$G_0(\phi^0, \psi) = V(\psi) + U_0^+ L_0^+(\lambda) + U_0^- L_0^-(\lambda) \quad (\text{VI.18.a})$$

A expressão (VI.18.a) constitui-se na formulação fraca do problema em estudo, no espaço $W_2^{(1)}(A_I)$ conforme anexo

III, e será resolvida, de forma aproximada, pelo Método dos Elementos Finitos⁽¹⁾.

Introduzindo a discretização da região A_I através do espaço N -dimensional $W_N(A_I)$ de funções características (no sentido global da malha de discretização) $h_j(x,j) \in W_2^{(1)}(A_I)$ e de E_T elementos cujos N nós são dados pelas coordenadas

$$(x_j, z_j) \in A_I:$$

$$W_N(A_I) = \left\{ \phi_N(x,z) \in W_2^{(1)}(A_I) : \phi_N(x,z) = \sum_{j=1}^N \phi_j h_j(x,z) \right\} \quad (\text{VI.20})$$

onde:

$$\phi_j = \phi_N(x_j, z_j) \text{ é o valor nodal de } \phi_N(x,z)$$

e lembrando que qualquer função $\psi(x,z) \in W_2^{(1)}(A_I)$ pode ser aproximada por $\psi_N(x,z) \in W_N(A_I)$ definimos:

$$[G_0] = [G_{0ij}] = [\nabla h_i \cdot \nabla h_j] + \sum_{n=1}^{N_s} \lambda_n [h_i f_n(z_i) \cdot h_j f_n(z_j)]; \text{ matriz } (N \times N)$$

$$\left\{ V_0 \right\} = \left\{ V_{0i} \right\} = \left\{ v_i h_i \right\}; \text{ vetor } (N \times 1), i=1, \dots, N \quad (\text{VI.21})$$

$$\left\{ L_0^\pm \right\} = \left\{ L_{0i}^\pm \right\} = \left\{ h_i \cdot f_0(z_i) \right\}; \text{ vetor } (N \times 1), i=1, \dots, N.$$

(1) - A solução associada à formulação fraca restrita ao espaço $W_2^{(1)}(A_I)$ não se garantiu a existência da segunda derivada contínua. No entanto a unicidade de solução de (VI.18.9) pode ser demonstrada (Aranha, 1982) e com isso mostrar-se que tal solução corresponde à solução de (VI.3).

É imediato verificar de (VI.18.a) e (VI.20) que:

$$\begin{aligned}
 G_0(\phi^0, \psi) &= \{\psi\}^T [G_0] \{\phi^0\} \\
 V(\psi) &= \{\psi\}^T \{V_0\} \\
 L_0^\pm(\psi) &= \{\psi\}^T \{L_0^\pm\}
 \end{aligned}
 \tag{VI.22}$$

e que portanto a equação (VI.18.a), enquanto restrita a $W_N(A_I)$, é dada na forma:

$$\{\psi\}^T [G_0] \{\phi^0\} = \{\psi\}^T \left[\{V_0\} + U_0^+ \{L_0^+\} + U_0^- \{L_0^-\} \right]
 \tag{VI.18.b}$$

válida para qualquer $\psi \in W_2^{(1)}(A_I)$ e portanto

$$[G_0] \{\phi^0\} + \{V_0\} + U_0^+ \{L_0^+\} + U_0^- \{L_0^-\}
 \tag{VI.18.c}$$

Aparentemente a solução é imediata. No entanto há que se verificar as expressões (VI.14) dos parâmetros U_0^\pm , deduzidas no item anterior de forma um tanto heurística, e atestar se $[G_0]$ é não singular.

VI.2.1. Singularidade de $[G_0]$ e Solução em um espaço funcional restrito

Conforme adiantado no anexo III o limite de equacio-

namento do potencial quando ω tende a zero faz $[G_0]$ singular. Tal fato não é difícil de se verificar. Basta tomarmos $\psi(x,z) = \phi^0(x,z) = 1$ em (VI.19) e segue de imediato que:

$$G_0(1,1) = 0$$

e que portanto de (VI.22)

$$\{1\}^T [G_0] \{1\} = 0$$

mostrando que a matriz $[G_0]$ é singular, e então (VI.18.c) não pode ser resolvida de imediato. O problema é contornado através da introdução de um subespaço $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(A_I) \subset W_2^{(1)}(A_I)$ e de duas funções auxiliares $q^\pm(x,z)$, definidas na região A_I (Aranha, 1982,[3]):

$$\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(A_I) = \left\{ \psi_R(x,z) \in W_2^{(1)}(A_I) : L_0^\pm(\psi_R) = 0 \right\} \quad (\text{VI.23})$$

$$q^\pm(x,z) = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{x}{x_0} \right] f_0(z) \quad (\text{VI.24})$$

É imediato verificar que qualquer que seja a função $\psi(x,z) \in W_2^{(1)}(A_I)$ pode ser representada por:

$$\psi(x,z) = L_0^+(\psi)q^+(x,z) + L_0^-(\psi)q^-(x,z) + \psi_R(x,z) \quad (\text{VI.25})$$

onde $\psi_R(x,z) \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(A)$. Para tanto basta aplicar-se os operado-

res $L_0^\pm(\psi)$ a (VI.25) e lembrar que

$$\int_{-h}^0 f_0^2(z) dz = 1.$$

Em particular, quando ω tende a zero a expressão (VI.24) fica:

$$q^\pm(x, z) = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{x}{x_0} \right) \frac{1}{\sqrt{h}} \quad (\text{VI.24.a})$$

Assim a função $\phi^0(x, z)$ é representada por:

$$\phi^0(x, z) = A_0^+ q^+(x, z) + A_0^- q^-(x, z) + \phi_R(x, z) \quad (\text{VI.26})$$

Voltando então à expressão (VI.18.a) e nela substituindo (VI.25) e (VI.26), aqui se utilizando notação indicial para brevidade de notação, resulta, com $i, j \equiv 1, 2 \equiv \pm$:

$$\begin{aligned} G_0(\phi_R, \psi_R) + A_{0_i} G_0(q_i, \psi_R) + A_{0_i} L_{0_i}(\psi) G_0(q_i, q_j) \\ + L_{0_i}(\psi) G_0(\phi_R, q_i) = V(\psi_R) + \\ + L_{0_i}(\psi) V(q_j) + U_{0_i} L_{0_i}(\psi) \end{aligned} \quad (\text{VI.27})$$

Como (VI.18.a) e portanto (VI.27) deve ser satisfeitas para qualquer $\psi(x, z) \in W_2^{(1)}(A_I)$, em particular se $\psi(x, z) = \psi_R(x, z)$, tal que $L_{0_i}(\psi) = 0$, tem-se:

VI.15.

$$G_0(\phi_R, \psi_R) = V(\psi_R) - A_{0_i} G_0(q_i, \psi_R) \quad (\text{VI.27.1})$$

Introduzindo agora os funcionais:

$$V_i(\psi_R) = -G_0(q_i, \psi_R) \quad (\text{VI.28})$$

a função potencial ϕ_R , restrita a $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(A_I)$, pode ser representada:

$$\phi_R(x, z) = \overline{\phi_R}(x, z) + A_{0_i} \phi_{R_i}(x, z) \quad (\text{VI.29})$$

onde $\overline{\phi_R}$ e ϕ_{R_i} são respectivamente soluções⁽¹⁾ de:

$$G_0(\overline{\phi_R}, \psi_R) = V(\psi_R) \quad (\text{VI.30})$$

$$G_0(\phi_{R_i}, \psi_R) = V_i(\psi_R)$$

Introduzindo (VI.29) em (VI.26) vem:

$$\phi^0(x, z) = \overline{\phi_R}(x, z) + A_{0_i} p_i(x, z) \quad (\text{VI.31})$$

onde se definiu:

$$p_i(x, z) = q_i(x, z) + \phi_{R_i}(x, z) \quad (\text{VI.32})$$

(1) - Note-se que a restrição imposta a $\psi_R(x, z)$ remove a singularidade dos operadores $G_0(\phi_{R_i}, \psi_R)$ e $G_0(\overline{\phi_R}, \psi_R)$.

É imediato notar-se de (VI.31) e (VI.28) que:

$$G_0(p_i, \psi_R) = 0 \text{ para todo } \psi_R(x, z) \in \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(A_I) \quad (\text{VI.33})$$

Portanto, a menos dos coeficientes A_{0_i} , ainda desconhecidos, o problema é determinado por (VI.30) e (VI.31) no subespaço $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(A_I)$.

Com o intuito de equacionar os coeficientes A_{0_i} impõe-se, para cada i , a condição $L_{0_i} \psi_R = 0$ de tal forma que $\psi(x, z) = L_{0_i}(\psi) q_i(x, z)$. Assim, a equação (VI.27) é escrita:

$$A_{0_i} G_0(q_i, q_j) + G_0(\phi_R, q_i) = V(q_i) + U_{0_i}$$

Utilizando-se (VI.29) vem:

$$A_{0_i} G_0(q_i, q_j) + G_0(\phi_R, q_i) + A_{0_i} G_0(\psi_{R_j}, q_i) = V(q_i) + U_{0_i}$$

Da definição de $p_j(x, z)$ em (VI.31) e da simetria do operador $G_0(\phi, \psi)$ o primeiro e terceiro termos são agrupados:

$$A_{0_i} G_0(p_j, q_i) + G_0(\overline{\phi_R}, q_i) = V(q_i) + U_{0_i} \quad (\text{VI.27.2})$$

Porém da relação (VI.33):

$$G_0(p_j, q_i) = G_0(p_j, q_i) - G_0(p_j, \phi_{R_i}) = G_0(p_j, p_i)$$

e a equação (VI.27.2) fica:

$$A_{0_i} G_0(p_j, p_i) + G_0(\overline{\phi_R}, q_i) = V(q_i) + U_{0_i} \quad (\text{VI.27.2.a})$$

Tomando-se agora a expressão (VI.28) e (VI.30.b) tem-se:

$$G_0(\overline{\phi_R}, q_i) = G_0(q_i, \overline{\phi_R}) = V_i(\overline{\phi_R}) = G_0(\phi_{R_i}, \overline{\phi_R}) = V(\phi_{R_i})$$

e portanto

$$A_{0_i} G_0(p_j, p_i) = V(\phi_{R_i}) + V(q_i) + U_{0_i}$$

e então de (VI.32):

$$A_{0_i} G_0(p_j, p_i) = V(p_i) + U_{0_i} \quad (\text{VI.27.2.b})$$

A equação (VI.27.2.b) pode ser apresentada na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} G_0(p_1, p_1) & G_0(p_1, p_2) \\ G_0(p_2, p_1) & G_0(p_2, p_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{0_1} \\ A_{0_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(p_1) \\ V(p_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0_1} \\ U_{0_2} \end{bmatrix} \quad (\text{VI.27.2.c})$$

onde $A_{0_{1,2}} = A_0^\pm$ e $U_{0_{1,2}} = U_0^\pm$.

As equações (VI.27.2.c) e (VI.30) uma vez resolvidas determinam o potencial $\phi^0(x, z)$.

No entanto, uma vez mais, deparamo-nos com a existência de uma equação singular. De fato, a matriz A definida como:

$$A = \begin{bmatrix} G_0(p_1, p_1) & G_0(p_1, p_2) \\ G_0(p_2, p_1) & G_0(p_2, p_2) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.34})$$

é singular.

Para demonstrar tal fato, face à natureza linear das funções $q_i(x, z)$ podemos representá-las pela soma de uma função simétrica e uma função antisimétrica em relação à vertical $x = 0$:

$$q_i(x, z) = q_s(x, z) \pm q_a(x, z), \quad i=1, 2, \quad (\text{VI.35})$$

onde

$$q_s = \frac{1}{2}g_0(z) = \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{VI.36})$$

$$q_a = \frac{1}{2}g_0(z) \frac{x}{x_0} = \frac{1}{2}h^{-\frac{1}{2}} \frac{x}{x_0}$$

Pode-se mostrar, de (VI.26), (VI.28) e (VI.38), que a elas associadas existem as funções potenciais $\phi_{R_s}(x, s)$ e $\phi_{R_a}(x, z)$ equacionadas por:

qualquer que seja a função $\psi(x,z) \in W_2^{(1)}(A_I)$. Tem-se então:

$$G_0(p_1, p_1) = G_0(p_a, p_a) \quad (\text{VI.42})$$

$$G_0(p_1, p_2) = G_0(p_2, p_1) = -G_0(p_a, p_a)$$

As expressões (VI.42) se levadas à matriz A , dada em (VI.34), provam que a equação (VI.27.2.c) é singular.

A equação (VI.27.2.c) só terá solução se:

$$\frac{1}{\sqrt{h}}(U_{0_1} + U_{0_2}) + V(p_1, p_2) = 0 \quad (\text{VI.43})$$

ou seja

$$U_{0_1} + U_{0_2} = U_0^+ + U_0^- - \frac{V(1)}{\sqrt{h}} \quad (\text{VI.44})$$

A expressão (VI.44) coincide com a própria expressão (VI.10) que exprime a conservação de massa e define os coeficientes U_0^\pm .

A determinação dos coeficientes A_0^\pm carece de condições adicionais que serão tomadas a partir da expressão limite da equação (VI.27.2.c) quando ω tende a zero. Repetindo-se os argumentos desenvolvidos neste item para o caso limite quando $\omega \rightarrow 0$ é possível mostrar-se (Aranha, 1982) que a equação análoga a (VI.27.2.c) é dada por:

VI.19.

$$G_0(\phi_{R_s}, \psi_R) = -G_0(q_s, \psi_R)$$

$$G_0(\phi_{R_a}, \psi_R) = -G_0(q_a, \psi_R)$$

(VI.37)

e portanto segue:

$$p_i(x, z) = p_s(x, z) \pm p_a(x, z), \quad i=1, 2 \quad (\text{VI.38})$$

onde

$$p_s(x, z) = \frac{1}{2}(p_1(x, z) + p_2(x, z))$$

$$p_a(x, z) = \frac{1}{2}(p_1(x, z) - p_2(x, z))$$

(VI.39)

Observando-se ainda que para todo $\psi(x, z) \in W_2^{(1)}(A_I)$ tem-se:

$$G_0(q_s, \psi) = 0 \quad (\text{VI.40})$$

e em particular para $\psi(x, z) = \psi_R(x, z) \in W_2^{(1)}(A_I) \subset \overset{\circ}{W}_2^{(1)}(A_I)$, a equação (VI.37.a) leva a

$$\phi_{R_s}(x, z) = 0 \quad (\text{VI.41})$$

e portanto:

$$G_0(p_s, \psi) = G_0(q_s + \phi_{R_s}, \psi) = G_0(q_s, \psi) + G_0(\phi_{R_s}, \psi) = 0,$$

VI.21.

$$\begin{bmatrix} G-ik & -G \\ -G & G-ik \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0^+(\omega) \\ A_0^-(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V(p_1) \\ V(p_2) \end{bmatrix} \quad (\text{VI.45})$$

onde $G = G_0(p_a, p_a)$.

Nessas condições, a condição de radiação associada seria escrita:

$$\phi(x, z, \omega) \sim A_0^\pm(\omega) e^{\pm ik(x-x_0^\pm)} f_0(z, \omega) \quad (\text{VI.46})$$

que, quando $k \rightarrow 0$, pode ser expandida em série de Taylor fornecendo:

$$\phi(x, z, \omega) \sim (1 \pm ik(x-x_0^\pm)) \frac{A_0^\pm(\omega)}{\sqrt{\hbar}} \quad (\text{VI.47})$$

A equação (VI.45) se resolvida fornece:

$$A_0^\pm(\omega) = \frac{1}{(G-ik)^2 - G^2} \frac{G}{\sqrt{\hbar}} V(1) - \frac{ik}{(G-ik)^2 - G^2} \cdot V(p^\pm) \quad (\text{VI.45.a})$$

que, se levada ao limite quando ω tende a zero, fica:

$$A_0^\pm(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} A_{0j}^\pm(\omega) = \lim_{k\sqrt{\hbar} \rightarrow 0} \left[\frac{i}{2k\sqrt{\hbar}} V(1) + \frac{1}{2G} V(p^\pm) \right] \quad (\text{VI.48})$$

Tal expressão completa o equacionamento do problema de radiação.

Comparando-se as expressões (VI.5.a) e (VI.47) resul-

ta quando ω tende a zero:

$$U_0^\pm = -\frac{1}{2\sqrt{h}}V(1) \quad (\text{VI.49})$$

e finalmente:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi^0(x, z) = \left[\frac{i}{2k\sqrt{h}}V(1) + V(p^\pm) \pm \left[-\frac{1}{2\sqrt{h}}V(1) \right] \right] \frac{1}{\sqrt{h}}$$

VI.2.2 Solução de $\phi^0(x, z)$ em $W_2^{(1)}(A_I)$.

É interessante resumir-se os resultados até então alcançados. A solução da equação (VI.18.c) em $W_2^{(1)}(A_I)$ equivale à seguinte sequência de soluções restritas a $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}$

$$\text{i) } G_0(\overline{\phi_R}, \psi_R) = V(\psi_R)$$

$$\text{ii) } G_0(\phi_{R_i}, \psi_R) = V_i(\psi_R), \quad i=1, 2$$

ou seja determinar $\overline{\phi_R}$ e ϕ_{R_i} pertencentes a $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(A_I)$ para todo $\psi_R(x, z)$ pertencente a $\overset{\circ}{W}_2^{(1)}(A_I)$. $V(\psi_R)$ e $V_i(\psi_R)$ são dados por (VI.6) e (VI.28) respectivamente.

Finalmente calcula-se:

$$\text{iii) } \phi^0(x, z) = \overline{\phi_R}(x, z) + A_{0_i} \cdot p_i(x, z)$$

com $p_i(x, z)$ e A_{0_i} dados respectivamente por (VI.32) e (VI.48).

VI.3. Massas Adicionais e Coeficientes de Amortecimento

Lembrando que para os casos de radiação correspondentes a "sway" e "roll" tem-se necessariamente (ver VI.10) $V_u(1) = V_\theta(1) = 0$ ⁽¹⁾, não é difícil verificar-se que $\phi^0(x,z)$ é real. Assim os coeficientes de amortecimento por radiação correspondentes são nulos:

$$b_{uu}^0 = b_{\theta\theta}^0 = b_{u\theta}^0 = 0 \quad (\text{VI.50})$$

No caso de radiação correspondente ao movimento de "heave", no entanto, a parte imaginária do potencial $\phi_w(x,z,\omega)$ tende a infinito quando ω tende a zero. Tal fato porém não leva à indeterminação do coeficiente de amortecimento associado, visto que em frequências muito baixas $\omega \sim k\sqrt{h}$. Pode-se então escrever:

$$b_{ww}^0 = \int_{\partial B} \lim_{\omega \rightarrow 0} (\omega \operatorname{Imag}(\phi_w^0(x,z)) n_z) \Big|_{(x,z) \in \partial B} \sim \int_{\partial B} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega V_w(1)}{2k\sqrt{h}} \frac{1}{\sqrt{h}} n_z d\partial B$$

e portanto espera-se que em águas de profundidade finita:

$$b_{ww}^0 \sim \frac{1}{2\sqrt{h}} V_w^2(1) = \frac{2b^2}{\sqrt{h}} = \frac{B^2}{2\sqrt{h}} \quad (\text{VI.51})$$

É razoável também inferir-se que $b_{ww}^0 = 0$ em águas in-

(1) - Admite-se para tanto que a vertical $x=0$ passa necessariamente pelo centro de gravidade do corpo, prática usual em engenharia naval.

finitamente profundas, confirmando resultados alcançados por outros autores (ver p. ex. Newman, Vugts, e outros).

Os coeficientes de massa adicional dependem exclusivamente da parte real do potencial de radiação e são prontamente calculados uma vez determinada a função $\phi^0(x,z)$.

ANEXO VII. O FUNCIONAL $J(\psi)$, O POTENCIAL ϕ_{20} E SUA CONDIÇÃO DE RADIAÇÃO

O objetivo do presente anexo é estabelecer a condição de radiação do potencial $\phi_{20}(x,z)$ de segunda ordem, desenvolvendo relações úteis ao cálculo do coeficiente de força de deriva $Q_2^{(2)}(\omega, h)$

VII.1. CONDIÇÃO DE RADIAÇÃO DE ϕ_{20}

No equacionamento de $\phi_{20}(x,z)$ feito no capítulo 6 em (6.1) impôs-se uma condição de radiação, sem contudo discutí-la. O argumento que a justifica é estabelecido a seguir.

O potencial ϕ_{20} é excitado pelas condições de contorno junto à superfície livre e junto ao corpo dadas pelas funções $L_{20}(x)$ e $B_{20}(x,z)|_{\partial B_0}$ respectivamente. Tomando a expressão (III), que especifica o potencial $\phi_1(x,z)$, e a expressão de $L_{20}(x)$, dada por (I.17), é imediato verificar que $L_{20}(x)$, tende exponencialmente para zero com $e^{-k_1|x-x_0|}$ quando $|x|$ tende a infinito, ou seja:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} L_{20}(x) \sim 0 \left(e^{-k_1|x-x_0|} \right) \quad (\text{VII.1})$$

Das condições de contorno na superfície livre

$$\frac{\partial \phi_{20}}{\partial z}(x, 0) = L_{20}(x) ,$$

e no fundo

$$\frac{\partial \Phi_{20}}{\partial z}(x, -h) = 0, \quad (VII.1)$$

pode-se escrever:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi_{20}(x, z) = [A_{20}^{\pm} + U_{20}^{\pm}(x - x_0^{\pm})]q(z) \quad (VII.2)$$

onde A_{20}^{\pm} , U_{20}^{\pm} e $q(z)$ devem ser determinados a partir de argumentos fundamentados na física do fenômeno auxiliados por alguma manipulação matemática.

Para tanto, considere-se uma função $\psi(x, z)$ definida no mesmo domínio fluido onde se equaciona $\Phi_{20}(x, z)$, domínio este representado graficamente na figura 6.1. Por conveniência supõe-se que $\psi(x, z)$ no máximo cresça linearmente com x e que seja Lebesgue-integrável. Define-se então o funcional $J(\psi)$ como:

$$J(\psi) = - \int_{\partial F} L_{20}(x) \psi(x, 0) dx - \int_{\partial B_0} B_{20}(x, z) \psi(x, z) \Big|_{\partial B_0} d\partial B_0 \quad (VII.3)$$

Assim tomando-se as expressões $L_{20}(x)$ e $B_{20}(x, z)$, (I.17) e (II.28) respectivamente, tem-se:

$$J(\psi) = -i\omega \int_{\partial F} \left[\phi_1 \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} - \phi_1^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \right] \psi \Big|_{z=0} dx - \int_{\partial B_0} \left[(u_{10} - z\theta_{10})n_x + (w_{10} + x\theta_{10})n_z \right] \frac{\partial \phi_1^*}{\partial s} + \\ + [u_{10}^* - z\theta_{10}^*]n_x + (w_{10}^* + x\theta_{10}^*)n_z \left] \frac{\partial \phi_1}{\partial s} \right\} \psi \Big|_{(x,y) \in \partial B_0} ds \quad (VII.3.a)$$

Integrando-se (VII.3.a) por partes:

$$\begin{aligned}
 J(\psi) = & -i\omega \int_{\partial E} \frac{\partial}{\partial x} \left(\phi_1 \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} \psi - \phi_1^* \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \psi \right) \Big|_{z=0} dx - \\
 & - \int_{\partial B} \frac{\partial}{\partial s} \left\{ [(u_{10} - z\theta_{10})n_x + (w_{10} + x\theta_{10})n_z] \frac{\partial \phi_1^*}{\partial s} \psi + \right. \\
 & \left. + [(u_{10}^* - z\theta_{10}^*)n_x + (w_{10}^* + x\theta_{10}^*)n_z] \frac{\partial \phi_1}{\partial s} \psi \right\} ds + \\
 & + 2\text{Real} \left\{ i\omega \int_{\partial F} \phi_1 \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=0} dx + \right. \\
 & \left. + \int_{\partial B_0} [(u_{10} - z\theta_{10})n_x + (w_{10} + x\theta_{10})n_z] \frac{\partial \phi_1^*}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \right\} ds \quad (\text{VII.3.b})
 \end{aligned}$$

O primeiro e segundo termos de (VII.3.b) são integrais de diferenciais exatas. Definindo, para facilidade de notação:

$$P(x) = i\omega \left\{ \phi_1^*(x,0) \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(x,0) - \phi_1(x,0) \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x}(x,z) \right\} \psi(x,0) \quad (\text{VII.4})$$

$$S(x,z) = -[(u_{10} - z\theta_{10})n_x + (w_{10} + x\theta_{10})n_z] \frac{\partial \phi_1^*}{\partial s} \psi(x,z) + (*) \Big|_{(x,z) \in \partial B}$$

a expressão (VII.3.b) fica:

$$\begin{aligned}
 J(\psi) = & \lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) + P(-b) - P(b) + \\
 & + S(b,0) - S(-b,0) + \bar{J}(\psi) \quad (\text{VII.5})
 \end{aligned}$$

onde foi definido adicionalmente:

$$\begin{aligned} \bar{J}(\psi) = & 2\text{Real} \left\{ i\omega \int_{\partial F} \phi_1 \frac{\partial \phi_1^*}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_{z=0} dx + \right. \\ & \left. + \int_{\partial B_0} [u_{10} - z\theta_{10}] n_x + (w_{10} + x\theta_{10}) n_z \right] \frac{\partial \phi_1^*}{\partial s} \frac{\partial \psi}{\partial s} ds \Big\} \quad (\text{VII.6}) \end{aligned}$$

Tomando agora os limites de $\phi_1(x,0)$ quando $x \rightarrow \pm\infty$ através das expressões (III.2.a) e (III.2.b) devidamente adimensionalizadas de acordo com o anexo IV, não é difícil mostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = -\frac{k}{2\omega} |T|^2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x,0) \quad (\text{VII.7})$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = -\frac{k}{2\omega} (1 - |R|^2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x,0)$$

e utilizando-se as condições de contorno de ϕ_1 nos pontos $(\pm b, 0)$ que:

$$P(b) = S(b,0) \quad (\text{VII.8})$$

$$P(-b) = S(-b,0)$$

e que portanto

$$J(\psi) = -\frac{k}{2\omega} \left[|T|^2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x,0) - (1 - |R|^2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x,0) \right] + \bar{J}(\psi) \quad (\text{VII.5.a})$$

Por outro lado tomando-se a equação (6.1), através do

Laplaciano de Φ_{20} , multiplicando-a por $\psi(x,z)$ e integrando-se o produto resultante por partes em todo o domínio fluido, designado por A_∞ , tem-se:

$$\int_{A_\infty} \nabla^2 \Phi_{20} \psi dA_\infty = \int_{A_\infty} \nabla \cdot (\nabla \Phi_{20} \psi) dA_\infty - \int_{A_\infty} \nabla \Phi_{20} \cdot \nabla \psi dA_\infty = 0 \quad (\text{VII.9})$$

Aplicando-se o teorema da divergência no primeiro termo da identidade acima vem:

$$\oint_{\partial A_\infty} \nabla \Phi_{20} \cdot \vec{n} \psi d\partial A_\infty - \int_{A_\infty} \nabla \Phi_{20} \cdot \nabla \psi dA_\infty = 0 \quad (\text{VII.9.a})$$

Utilizando-se agora as condições de contorno ao longo de $\partial A_\infty = \partial F \cup \partial B \cup \partial H \cup \partial V_\infty^+ \cup \partial V_\infty^-$, segundo nomenclatura adotada na figura (6.1):

$$\begin{aligned} & - \int_{\partial F} L_{20}(x) \psi(x,0) dx - \int_{\partial B_0} B_{20}(x,z) \psi(x,z) \Big|_{(x,z) \in \partial B} d\partial B_0 \\ & - U_{20}^+ \int_{-h}^0 \psi(\infty,0) q(z) dz + U_{20}^- \int_{-h}^0 \psi(-\infty,0) q(z) dz = \\ & = \int_{A_\infty} \nabla \Phi_{20} \cdot \nabla \psi dA_\infty \end{aligned} \quad (\text{VII.9.b})$$

e portanto

$$- \int_{A_\infty} \nabla \Phi_{20} \cdot \nabla \psi dA_\infty = -J(\psi) + U_{20}^+ \int_{-h}^0 q(z) \psi(\infty,0) dz - U_{20}^- \int_{-h}^0 q(z) \psi(-\infty,0) dz \quad (\text{VII.9.c})$$

Tomando-se em particular, $\psi(x,z) = 1$ em (VII.5.a) e

(VII.9.c) tem-se:

$$-\frac{k}{2\omega}(1-|R|^2-|T|^2) = (U_{20}^- - U_{20}^+) \int_{-h}^0 q(z) dz \quad (\text{VII.10})$$

expressão que, em última análise, reflete a equação de conservação de Massa.

Considerando o sistema conservativo tem-se $|R|^2+|T|^2=1$ e nesse caso teríamos:

$$U_{20}^+ = U_{20}^- \quad (\text{VII.11})$$

Por outro lado tomando-se a média em cada ciclo do fluxo de massa, (oriundo dos potenciais Φ_{20} e ϕ_1 em aproximação de segunda ordem, nas fronteiras verticais do domínio fluido, ou seja em ∂V^+ e ∂V^- , e denominando-as respectivamente \bar{Q}^+ e \bar{Q}^- tem-se

$$\begin{aligned} \bar{Q}^+ &= + \int_{-h}^0 U_{20}^+ q(z) dz + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x, 0, t) \eta(x, t) dt \right] \\ \bar{Q}^- &= + \int_{-h}^0 U_{20}^- q(z) dz + \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x, 0, t) \eta(x, t) dt \right] \end{aligned} \quad (\text{VII.12})$$

Utilizando-se as expressões (II.2), devidamente adimensionalizadas, para expressar $\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x, 0, t)$ e $\eta(x, t)$ quando $x \rightarrow \pm\infty$, e realizando as integrais no tempo é fácil verificar que

$$\bar{Q}^+ = +U_{20}^+ \int_{-h}^0 q(z) dz + \frac{k}{2\omega} |T|^2 \quad (\text{VII.13})$$

$$\overline{Q}^- = +U_{20}^- \int_{-h}^0 q(z) dz + \frac{k}{2\omega} (1 - |R|^2) \quad (\text{VII.13})$$

Comparando-se (VII.10) e (VII.13) vem de imediato:

$$\overline{Q}^+ = \overline{Q}^- \quad (\text{VII.14})$$

que é a própria equação da continuidade.

Tomando, em particular $\overline{Q}^+ = \overline{Q}^- = 0$ ou seja, impondo que em cada seção não haja transporte líquido de massa⁽¹⁾ tem-se:

$$\begin{aligned} U_{20}^+ &= -\frac{k}{2\omega} |T|^2 \left(\int_{-h}^0 q(z) dz \right)^{-1} \\ U_{20}^- &= -\frac{k}{2\omega} (1 - |R|^2) \left(\int_{-h}^0 q(z) dz \right)^{-1} \end{aligned} \quad (\text{VII.15})$$

Definiremos U_{20}^\pm de tal forma que

$$\int_{-h}^0 q(z) dz = \sqrt{h}.$$

Em particular $q(z) = h^{-\frac{1}{2}}$ satisfaz a relação acima e em contrapartida vê-se que

$$g_0(z) = \lim_{k_0 h \rightarrow 0} f_0(z) = h^{-\frac{1}{2}}.$$

(1) - Tal hipótese equivale a dizer que o fluxo de massa induzido por termos quadráticos do potencial de primeira-ordem induz, por sua vez, um refluxo de mesma intensidade cujo campo de velocidades é representado pelo potencial de segunda ordem.

Portanto uma expressão consistente para a condição de radiação a ser imposta a (6.1) é:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi_{20}^{\pm}(x, z) = (A_{20}^{\pm} + U_{20}^{\pm}(x - x_0^{\pm}))g_0(z) \quad (\text{VII.16})$$

Para finalizar a presente seção tomemos a classe de funções $\psi(x, z)$ tal que seu comportamento assintótico quando $x \rightarrow \pm\infty$ possa ser descrito pela expressão (VII.16). Em particular, as funções potenciais $\phi^0(x, z)$, soluções dos problemas lineares de radiação (3.10) calculadas assintoticamente quando a frequência tende a zero, atendem tal restrição (vide anexo VI).

Assim em (VII.9.c) os termos em $\psi(\pm\infty, 0) = \phi^0(\pm\infty, 0)$ são dados por:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} U_{20}^{\pm} \int_{-h}^0 q(z) \psi(x, 0) dz = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{h} U_{20}^{\pm} \phi_u^0(x, 0) = \pm U_{20}^{\pm} U_0^{\pm} \sqrt{h} \quad (\text{VII.17})$$

Segue também de (VII.15) e (VII.16) que:

$$U_{20}^+ = -\frac{k}{2\omega\sqrt{h}} |T|^2$$

$$U_{20}^+ = -\frac{k}{2\omega\sqrt{h}} (1 - |R|^2) \quad (\text{VII.18})$$

Resultando então que (VII.9.c) pode ser simplificado desde que $\psi(x, z)$ obedeça a condição de contorno análoga a (VII.16):

$$-\int_{A_\infty} \nabla \phi_{20} \cdot \nabla \Psi dA_\infty = -J(\psi) + \frac{k}{2\omega} [(-|T|^2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \psi(x,0) + (1-|R|^2) \lim_{x \rightarrow -\infty} \psi(x,0)]$$

e portanto, de (VII.5.a):

$$-\int_{A_\infty} \nabla \phi_{20} \cdot \nabla \psi dA_\infty = \bar{J}(\psi) \quad (\text{VII.19})$$

Tal relação é de extrema utilidade no cálculo do coeficiente de força de segunda-ordem $Q_2^{(2)}$, realizado no capítulo 6.

ANEXO VIII. ONDAS ALEATÓRIAS, DENSIDADE ESPECTRAL DE ENERGIA E MODULAÇÃO

Assumimos a existência de um trem de ondas aleatórias de propagação unidirecional segundo o eixo x (figura VIII.1), realização de um processo aleatório. O processo é suposto estacionário, ou seja, com parâmetros estatísticos independentes do tempo e espaço. Supõe-se também, conforme usualmente adotado, que todas as variáveis aleatórias relacionadas ao processo em questão, tais como velocidades, acelerações, sejam Gaussianas. Em particular a amplitude da onda $\eta(x,t)$ e portanto aquelas variáveis a elas relacionadas linearmente são supostas de média nula.

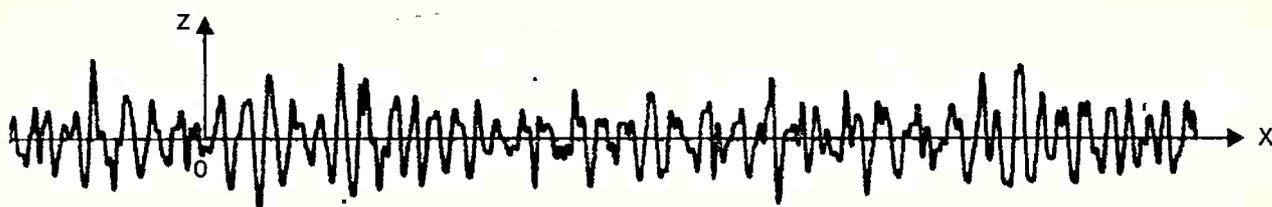


Figura VIII.1 - Trem de ondas aleatórias e sistema de referências

Adicionalmente o processo é suposto ergódico, ou seja as esperanças a ele relacionadas são idênticas às médias temporais correspondentes a qualquer realização do processo.

Seja então $\eta_i(x,t)$ uma realização do processo em questão. De acordo com as definições clássicas de esperança, média, desvio padrão, teremos:

$$E[\eta(x,t)] = \mu_\eta = \langle \eta_i(x,t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \eta_i(x,t) dt$$

$$E[\eta(x,t)\eta(x,t+\tau)] = R_\eta(\tau) = \langle \eta_i(x,t)\eta_i(x,t+\tau) \rangle$$

para qualquer x . Relações análogas se aplicam as esperanças e médias espaciais para qualquer instante t .

É usual o tratamento do processo aleatório no domínio da frequência. Costuma-se então caracterizar o processo pela função de densidade espectral de energia $S_\eta(\omega)$ a ele correspondente, tomada em uma posição fixa no espaço. Devido a hipótese de ergodicidade, $S_\eta(\omega)$ independe da posição escolhida e portanto pode-se tomar $x = 0$ sem perda de generalidade.

A definição da função de densidade espectral de energia se faz com base na transformada de Fourier.

No entanto a existência da transformada de Fourier de uma função $g(t)$ exige sua integrabilidade, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < \infty$$

Obviamente isto não ocorre para um processo estacionário. É necessário então truncar convenientemente a realização $\eta(t)$ definindo:

$$\eta(t) = \begin{cases} \eta_i(t), & -T < t < T \\ 0, & |t| > T \end{cases}$$

Nessas condições $S_\eta(\omega)$ é definida como a transformada de Fourier da função de auto-correlação de $\eta(t)$:

$$S_\eta(\omega) = F[R_\eta(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_\eta(t) e^{-i\omega t} dt = \int_{-T}^T R_\eta(t) e^{-i\omega t} dt$$

Daqui em diante toda e qualquer realização do processo aleatório deve ser entendida como truncada em intervalos de tempo e espaço convenientes e os conceitos de estacionariedade e ergodicidade restritos a estes intervalos. Designa-se também $S_\eta(\omega)$ como espectro de potência de $\eta(t)$.

VIII.1 Representação da onda em série de Fourier. Conceito de Modulação em Amplitude e Fase

Uma vez truncada a realização de $\eta(x,t)$ em intervalos de tempo e espaço limitados, compatíveis com as dimensões

características do fenômeno em estudo, é razoável aproximá-la por uma função $\tilde{\eta}(x,t)$ dada na forma de série de Fourier.

Particionando-se a função $S(\omega)$ em $2N+1$ raias de frequência de largura $\Delta\omega$, pequena quando comparado à largura de banda espectral (ver figura VIII.3), escreve-se:

$$\eta(x,t) \approx \tilde{\eta}(x,t) = \sum_{m=-N}^N A_m \cos(k_m x - m\Delta\omega t) + \sum_{m=-N}^N B_m \sin(k_m x - m\Delta\omega t) \quad (\text{VIII.1.a})$$

onde os coeficientes A_m e B_m são variáveis aleatórias não correlacionadas de distribuição Guassiana e média nula tal que

$$E\{A_m\} = E\{B_m\} = 0 \quad (\text{VIII.2.1})$$

$$E\{A_m^2\} = E\{B_m^2\} = 2S(\omega_m)\Delta\omega = 2S(m\Delta\omega)\Delta\omega$$

e

$$\omega_m^2 = k_m \tanh k_m h$$

A condição de estacionariedade para $\tilde{\eta}(x,t)$ leva a: (ver Shanmugan, p. 113)

$$E\{A_n A_m\} = E\{A_n B_m\} = E\{B_n B_m\} = \delta_{nm} 2S(\omega_m)\Delta\omega \quad (\text{VIII.2.2})$$

onde δ_{nm} é a função delta de Kronecker.

Com tais condições é fácil verificar que a função auto-correlação de $\tilde{\eta}(0, t)$ é dada por:

$$R_{\tilde{\eta}}(0, \tau) = \frac{1}{2} \sum_{m=-N}^N E \left\{ (A_m^2 + B_m^2) \right\} \cos(\omega_m \tau) \quad (\text{VIII.3})$$

ou

$$R_{\tilde{\eta}}(0, \tau) = 2 \sum_{m=-N}^N S(\omega_m) \Delta\omega \cos(\omega_m \tau) \quad (\text{VIII.3.a})$$

Outra forma de expressão de $\tilde{\eta}(x, t)$ é através de série cosseno (ou seno) de Fourier:

$$\tilde{\eta}(x, t) = \frac{1}{2} \sum_{m=-N}^N a_m [e^{i(k_m x - m\Delta\omega t + \epsilon_m)} + (*)] \quad (\text{VIII.1.b})$$

ou

$$\tilde{\eta}(x, t) = \sum_{m=-N}^N a_m \cos(k_m x - m\Delta\omega t + \epsilon_m) \quad (\text{VIII.1.c})$$

com

$$a_m^2 = (A_m^2 + B_m^2)$$

e

$$\epsilon_m = \tan^{-1}(B_m / A_m)$$

Caso $S_{\eta}(m)$ tenha largura de banda espectral bastante

estreita, ou seja a energia esteja concentrada em torno de uma frequência central ω_0 em uma faixa de frequências de largura Ω pequena se comprovada a ω_0 , é razoável representar $\tilde{\eta}(x,t)$ na forma de uma modulação em amplitude e fase de uma onda portadora de amplitude a_0 , frequência ω_0 e número de onda k_0 (Shamugan, Kim (1980), etc.). Assim:

$$\tilde{\eta}(x,t) = a(x,t) \cos(k_0 x - \omega_0 t + \varepsilon(x,t)) \quad (\text{VIII.4})$$

onde

$$a(x,t) = a_0 + \tilde{a}(x,t)$$

e

$$\varepsilon(x,t)$$

são as funções moduladoras, de baixa frequência, em amplitude e fase⁽¹⁾, respectivamente.

(1) - A frequência instantânea $\omega(x,t)$ é dada por:

$$\omega(x,t) = \omega_0 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(x,t)$$

e portanto o desvio instantâneo em frequência por:

$$\delta\omega(x,t) = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(x,t)$$

Na realidade se considerássemos o ciclo dispersivo como não linear e de tal forma que $\omega = \omega(a^2, k)$ teríamos, na hipótese de ondas de pequena amplitude, tomando o termo de primeira ordem da expressão de $\omega(a^2, k)$ em série de Taylor em a^2 :

$$\delta\omega(x,t) = \left[\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right]_{a_0} a_m^2(x,t) (1 + O(a_m^4))$$

e seguiria uma relação que implica na mútua indução entre modulação em amplitude e modulação em fase:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}(x,t) = - \left[\frac{\partial \omega}{\partial a^2} \right]_{a_0} a_m^2(x,t).$$

Uma forma mais conveniente de (VIII.4) é dada por:

$$\tilde{\eta}(x,t) = c(x,t) \cos(k_0 x - \omega_0 t) + s(x,t) \sin(k_0 x - \omega_0 t) \quad (\text{VIII.5})$$

As expressões (VIII.1) podem ser facilmente identificadas a (VIII.5). Basta somar-se duas a duas as componentes harmônicas simétricas em relação a frequência central ω_0 . Assim a título de exemplo, considerar-se-á por ora uma onda aleatória $\zeta(x,t)$ cujo espectro de potência é subdividido em três raias de frequência centradas em ω_0 , ω_{-1} e ω_1 e de tal sorte que:

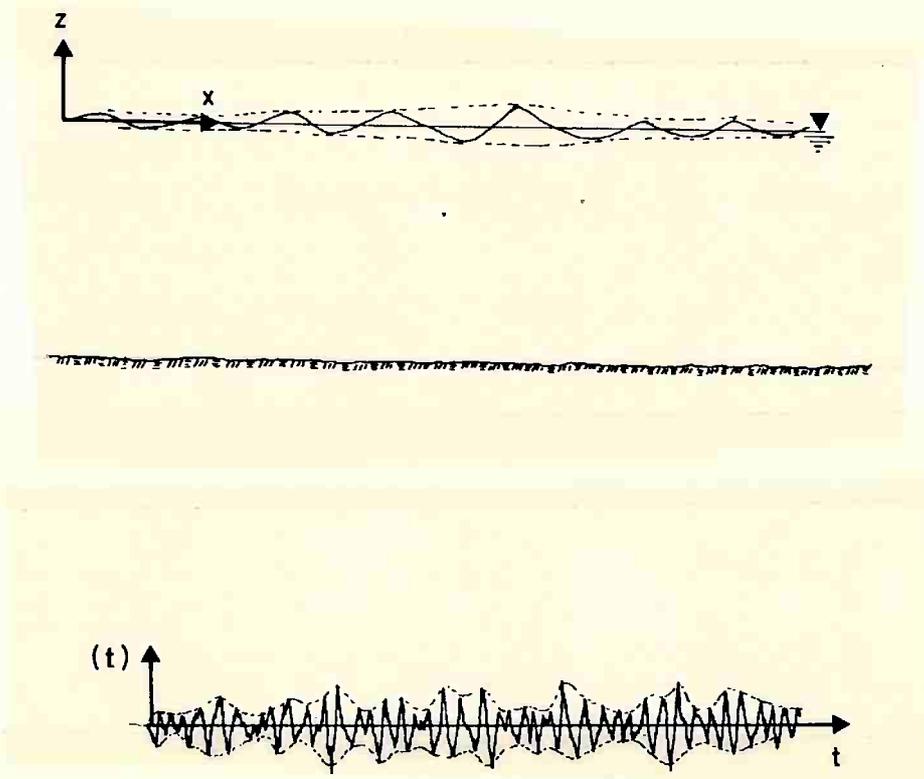


Figura VIII.2 - Perfil de onda aleatória no instante $t=t_0$ (a)
Série temporal de onda na posição $x=x_0$ (b)

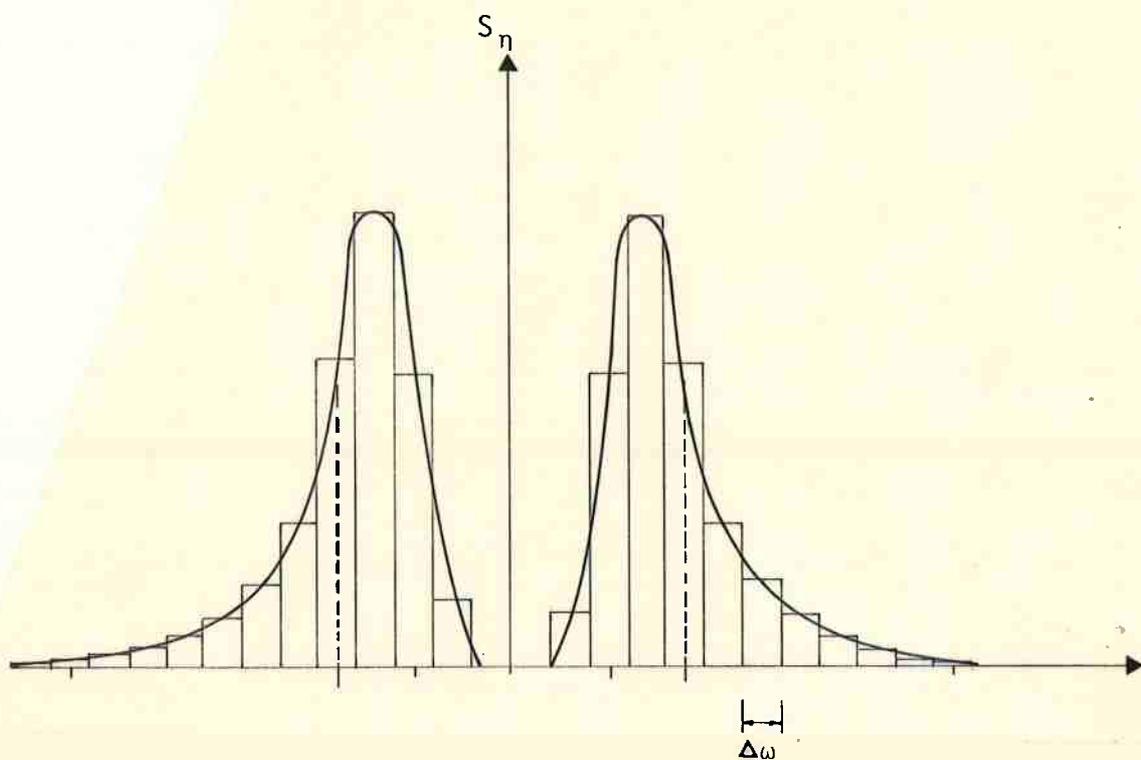


Figura VIII.3 - Densidade Espectral de Energia
Aproximação em funções ressaltado.

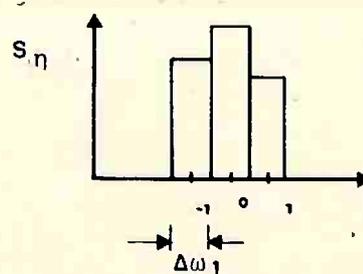


FIG. VIII.4

Figura VIII.4 - Espectro de potência simplificado com três raias

$$\omega_{-1} < \omega_0 < \omega_1$$

$$|\omega_0 - \omega_1| = |\omega_0 - \omega_{-1}| = \Delta\omega_1$$

$$a_n = 2S_j(\omega_n)\Delta\omega_1, \quad n = -1, 0, 1$$

Então, de (VIII.1.c):

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) = & a_0 \cos(k_0 x - \omega_0 t) + a_1 \cos(k_1 x - \omega_1 t + \epsilon_1) + \\ & + a_{-1} \cos(k_{-1} x - \omega_{-1} t + \epsilon_{-1}) \end{aligned} \quad (\text{VIII.6})$$

onde ϵ_1 e ϵ_{-1} foram tomadas, sem perda de generalidade, como fases relativas à componente ω_0 .

Por outro lado não há perda de generalidade em analisar-se a função $\zeta(x, t)$ em uma dada posição do espaço, digamos $x = 0$. Assim:

$$\zeta_0(t) = \zeta(0, t) = a_0 \cos \omega_0 t + a_1 \cos(\omega_1 t - \epsilon_1) + a_{-1} \cos(\omega_{-1} t - \epsilon_{-1}) \quad (\text{VIII.7})$$

Definindo, para brevidade de notação:

$$\gamma_1 = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_{-1}}{2}$$

$$\delta_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_{-1}}{2}$$

tem-se:

$$\begin{aligned} \zeta_0(t) = & a_0 \cos(\omega_0 t) + (a_1 + a_{-1}) \cos(\omega_0 t - \gamma_1) \cos(\Delta\omega_1 t - \delta_1) - \\ & - (a_1 - a_{-1}) \sin(\omega_0 t - \gamma_1) \sin(\Delta\omega_1 t - \delta_1) \end{aligned} \quad (\text{VIII.8})^{(1)}$$

desenvolvendo (VIII.9) e agrupando-se os termos em cosseno e seno tem-se:

$$\begin{aligned} \zeta_0(t) = & \cos\omega_0 t ((a_1 + a_{-1}) \cos(\Delta\omega_1 t - \delta_1) \cos\gamma_1 + (a_1 - a_{-1}) \sin(\Delta\omega_1 t - \delta_1) \sin\gamma_1) + \\ & + \sin\omega_0 t ((a_1 + a_{-1}) \cos(\Delta\omega_1 t - \delta_1) \sin\gamma_1 - (a_1 - a_{-1}) \sin(\Delta\omega_1 t - \delta_1) \cos\gamma_1) + \\ & + a_0 \cos\omega_0 t \end{aligned} \quad (\text{VIII.8.a})$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \zeta_0(t) = & \cos\omega_0 t [a_0 + a_1 \cos(\Delta\omega_1 t - \epsilon_1) + a_{-1} \cos(\Delta\omega_1 t - \epsilon_{-1})] - \\ & - \sin\omega_0 t [a_1 \sin(\Delta\omega_1 t - \epsilon_1) + a_{-1} \sin(\Delta\omega_1 t - \epsilon_{-1})] \end{aligned} \quad (\text{VIII.9})^{(2)}$$

Notando que correto com erro da ordem $[1 + O(\Delta\omega_1)^2]$ podemos escrever:

(1) - Utilizou-se o fato de que:

$$A \cos\alpha + B \cos\beta = (A+B) \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - (A-B) \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

(2) - Considerou-se (1) e o fato de que:

$$A \sin\alpha + B \sin\beta = (A+B) \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) + (A-B) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

$$\frac{k_1+k_{-1}}{2} = \frac{\omega_0^2}{g \tanh k_0 h} \left(1 + 0 \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) = k_0 \left(1 + 0 \left(\frac{\Delta\omega_1}{\omega_0} \right)^2 \right)$$

$$\frac{k_1-k_{-1}}{2} = \frac{\omega_0(\omega_1-\omega_{-1})}{g \tanh k_0 h} \left(1 + 0 \left(\frac{\Delta\omega_1}{\omega_0} \right)^2 \right) \quad (\text{VIII.10})$$

a expressão (VIII.6) pode ser escrita com erro da ordem

$$\left[1 + \left(\frac{1}{k_0} \frac{\Delta\omega^2}{g} \right) \right]$$

como:

$$\zeta(x,t) = \cos(k_0 x - \omega_0 t) \cdot [a_0 + a_1 \cos(\Delta k_1 x - \Delta\omega_1 t + \epsilon_1) +$$

$$+ a_{-1} \cos(\Delta k_1 x - \Delta\omega_1 t + \epsilon_{-1})] - \sin(k_0 x - \omega_0 t) \cdot$$

$$\cdot [a_1 \sin(\Delta k_1 x - \Delta\omega_1 t + \epsilon_1) + a_{-1} \sin(\Delta k_1 x - \Delta\omega_1 t + \epsilon_{-1})] \quad (\text{VIII.11})$$

onde

$$\Delta k_1 = \frac{2\omega_0 \Delta\omega_1}{\tanh k_0 h}$$

Comparando-se (VIII.11) e (VIII.5) é imediato verificar que:

$$c_1(x,t) = a_0 + a_1 \cos(\Delta k_1 x - \Delta\omega_1 t + \epsilon_1) + a_{-1} \cos(\Delta k_1 x - \Delta\omega_1 t + \epsilon_{-1}) \quad (\text{VIII.12})$$

$$s_1(x,t) = -a_1 \sin(\Delta k_1 x - \Delta\omega_1 t + \epsilon_1) + a_{-1} \sin(\Delta k_1 x - \Delta\omega_1 t + \epsilon_{-1}) \quad (\text{VIII.12})$$

Voltemos agora à onda $\tilde{\eta}(x,t)$, de espectro de potência subdividido em $2N+1$ raias de frequências equiespaçadas de $\Delta\omega$, e dada na forma de série de Fourier, conforme (VIII.1.c).

Supõe-se ainda, sem perda de generalidade, $\epsilon_0 = 0$, de tal sorte que ϵ_j são as fases aleatórias, distribuídas no intervalo $[0, 2\pi]$ com densidade de probabilidade constante, tomadas em relação à componente central $j = 0$ ($\omega = \omega_0$).

As expressões (VIII.11) e VIII.12) podem ser estendidas de imediato, fornecendo com erro da ordem $\left[1 + O\left(\frac{(N\Delta\omega)^2}{k_0 g}\right)\right]$:

$$\left[1 + O\left(\frac{(\Delta\omega)^2}{k_0 g}\right)\right]:$$

$$c(x,t) = \sum_{j=-N}^N a_j \cos(\Delta k_j x - j\Delta\omega t + \epsilon_j)$$

$$s(x,t) = - \sum_{j=-N}^N a_j \text{sen}(\Delta k_j x - j\Delta\omega t + \epsilon_j)$$
(VIII.14)

onde:

$$\Delta k_j = \frac{2j\omega_0 \Delta\omega}{g \tanh k_0 h}$$

Definindo agora a função complexa de modulação

$$f(x,t) = c(x,t) + is(x,t) = \sum_{j=-N}^N a_j e^{-i(\Delta k_j x - j\Delta\omega t + \epsilon_j)}$$
(VIII.15)

é imediato verificar que (VIII.1) pode ser expressa por:

$$\tilde{\eta}(x,t) = \frac{1}{2}f(x,t)e^{-i(k_0x-\omega_0t)} + \frac{1}{2}f^*(x,t)e^{+i(k_0x-\omega_0t)} \quad (\text{VIII.1.d})$$

Observa-se ainda que, das condições (VIII.2), $f(x,t)$ é amostra de um processo aleatório gaussiano de média nula e que $c(x,t)$ e $s(x,t)$ são não-correlacionados.

Por fim calcularemos o espectro de potência da função moduladora $f(x,t)$. Para tanto, sem perda de generalidade tomemos as funções $c(x,t)$ e $s(x,t)$ calculadas em $x=0$ denotando-as simplesmente $c(t)$ e $s(t)$.

Da expressão (VIII.14) a potência de $c(t)$ contida nas raias de frequência centradas em $\pm m\Delta\omega$ é dada por:

$$S_c(m\Delta\omega)2\Delta\omega = E\left\{\frac{a_m^2}{2} + \frac{a_{-m}^2}{2}\right\} \quad (\text{VIII.16})$$

Das condições (VIII.2), lembrando que $a_m^2 = A_m^2 + B_m^2$ tem-se:

$$\begin{aligned} S_c(m\Delta\omega) &= S_\eta(\omega_m) + S_\eta(\omega_{-m}) = \\ &= S_\eta(\omega_0 + m\Delta\omega) + S_\eta(\omega_0 - m\Delta\omega) \end{aligned}$$

e fazendo $\Delta\omega$ tender a zero, com $m\Delta\omega = \omega$ tem-se:

$$S_c(\omega) = S_\eta(\omega_0 + \omega) + S_\eta(\omega_0 - \omega) \quad (\text{VIII.17.a})$$

Analogamente prova-se o mesmo para o espectro de po-

tência de $s(t)$:

$$S_s(\omega) = S_\eta(\omega_0 + \omega) + S_\eta(\omega_0 - \omega) = S_c(\omega) \quad (\text{VIII.17.b})$$

Observa-se que tais expressões poderiam ter sido deduzidas diretamente a partir do Teorema da Modulação (Bracewell, p.108).

Segue então de (VIII.17), (VIII.4) e (VIII.5) e do fato de que $s(t)$ e $c(t)$ são não-correlacionados que:

$$S_a(\omega) = 2S_c(\omega) = 2(S_\eta(\omega_0 + \omega) + S_\eta(\omega_0 - \omega)) \quad (\text{VIII.18})$$

Ainda, de (VIII.14) e da definição de espectro de potência:

$$S_a(\omega) = F[f(t) * f^*(t)] = F[c(t) * c(t)] + F[s(t) * s(t)]$$

e então:

$$S_f(\omega) = 2S_c(\omega) = S_a(\omega) = 2(S_\eta(\omega_0 + \omega) + S_\eta(\omega_0 - \omega)) \quad (\text{VIII.19})$$

VIII.2. Densidade Espectral de Energia da Força de Deriva em Ondas Aleatórias

Tomando-se a expressão (5.14) da força de deriva em ondas aleatórias o espectro de potência a ela associada pode ser escrito:

$$S_{\tilde{D}}(\omega) = \epsilon^2 \left\{ (Q_2^{(1)}(\omega_0))^2 S_{a^2}(\omega) + \frac{Q_2^{(2)}(\omega_0)}{\omega_0^2} S_{(\dot{a}^2)}(\omega) \right\} \quad (\text{VIII.20})$$

onde

$S_{a^2}(\omega)$ é o espectro de potência associado ao quadrado da função de modulação $a^2(t) = f(t)f^*(t)$

$S_{(\dot{a}^2)}(\omega)$ é o espectro de potência associado à derivada temporal de $a^2(t)$.

A função $a(t)$ é uma variável aleatória de um processo gaussiano de média nula, conforme estabelecido no item VIII.4, e portanto é possível mostrar-se que a função de auto-correlação de $a^2(t)$ é dado por (Shanmugan, pág. 104):

$$R_{a^2}(t_1, t_2) = E\{a^2(t_1)a^2(t_2)\} = E\{a^2(t_1)\}E\{a^2(t_2)\} + 2\left[E\{a(t_1)a(t_2)\}\right]^2 \quad (\text{VIII.21})$$

porém visto que $a(t)$ é estacionário:

$$E\{a^2(t_1)\} = E\{a^2(t_2)\} = R_a(0) = \sigma_a^2$$

$$E\{a(t_1)a(t_2)\} = R_a(|t_1 - t_2|) = R_a(\tau) \quad (\text{VIII.22})$$

Assim:

$$R_{a^2}(t_1, t_2) = R_{a^2}(\tau) = [R_a(0)]^2 + 2[R_a(\tau)]^2$$

e então:

$$R_{a^2}(\tau) = (\sigma_a)^2 + 2[R_a(\tau)]^2 \quad (\text{VIII.23})$$

Tomando-se a transformada de Fourier de $R_{a^2}(\tau)$ vem:

$$S_{a^2}(\omega) = (\sigma_{a^2})^2 \delta(\omega) + 2S_a(\omega) * S_a(\omega) \quad (\text{VIII.24})$$

onde

$\delta(\omega)$ é a função de Dirac

* indica produto de convolução.

Porém de (VIII.19) segue que:

$$\sigma_{a^2}^2 = 2\sigma_a^2 \quad (\text{VIII.25})$$

e portanto:

$$S_{a^2}(\omega) = 4\sigma_a^2 \delta(\omega) + 2S_a(\omega) * S_a(\omega) \quad (\text{VIII.26})$$

Do teorema da transformada de Fourier da derivada de um sinal é imediato verificar que (Bracewell, pg. 117):

$$S_{\dot{a}^2}(\omega) = \omega^2 S_{a^2}(\omega) \quad (\text{VIII.27})$$

e portanto, de (VIII.20)

$$S_{\dot{D}}(\omega) = \epsilon^2 \left\{ \left[Q_2^{(1)} \right]^2 + Q_2^{(2)} (\omega_0) \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left\{ 4(\sigma_a^2)^2 \delta(\omega) + 2S_a(\omega) * S_a(\omega) \right\} \right\} \quad (\text{VIII.28})$$

ou substituindo (VIII.19)

$$S_{\bar{D}}(\omega) = \epsilon^2 \left\{ (Q_2^{(1)}(\omega_0))^2 + (Q_2^{(2)}(\omega_0))^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right\} \left\{ 4(\sigma_\eta^2)^2 \delta(\omega) + \right. \\ \left. + 8[S_\eta(\omega_0 + \omega) + S_\eta(\omega_0 - \omega)] * [S_\eta(\omega_0 + \omega) + S_\eta(\omega_0 - \omega)] \right\} \quad (\text{VIII.29})$$

Decorre de (VIII.29) o valor da força média de deriva:

$$D = \epsilon Q_2^{(2)}(\omega_0) 2\sigma_\eta^2 \quad (\text{VIII.30})$$

Definindo agora a amplitude média do trem de ondas aleatórias (\bar{A} luz da relação entre amplitude e variância de uma onda senoidal) como $\bar{A} = \sqrt{2}\sigma_\eta$ a expressão (VIII.30) fica:

$$D = \epsilon Q_2^{(1)}(\omega_0) \bar{A}^2 \quad (\text{VIII.31})$$

que é absolutamente equivalente à expressão similar para a força média de deriva em ondas monocromáticas de frequência ω_0 e mesma variância.

VIII.3. Parâmetros Estatísticos e Parâmetros Espectrais

Os parâmetros do espectro de potência da onda de maior importância para a caracterização do fenômeno de oscilações lentas podem ser relacionados de acordo com as considerações tecidas nos itens anteriores; são eles:

- variância em amplitude da onda incidente (σ_{η}^2)
- frequência central (ω_0) do espectro de potência
- função de modulação $f(t)$
- largura de banda espectral (Ω).

Para um processo estacionário tais parâmetros podem ser definidos com base nos momentos espectrais de ordem k :

$$m_j = 2 \int_0^{\infty} S_{\eta}(\omega) \omega^j d\omega \quad (\text{VIII.32})$$

Decorre:

$$\sigma_{\eta}^2 = m_0$$

$$\omega_0 = m_1/m_0 \quad (\text{VIII.33})$$

$$\omega_z = \left(\frac{m_2}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

onde ω_z é a "frequência média entre zeros ascendentes" (ver por exemplo, Bishop & Price).

Resta por fim definir a largura de banda espectral. É comum, na literatura a seguinte definição:

$$\Omega^2 = \left(1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4} \right)$$

No presente trabalho, no entanto, é interessante definir Ω de modo a representar a frequência característica das

funções de modulação, ou seja, de forma a indicar quão devagar varia a função de modulação com o tempo. Definimos então:

$$\Omega = \frac{\left\langle \left(\frac{df}{dt}(t) \right)^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}}}{\left\langle f^2(t) \right\rangle^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(\frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{df}{dt} \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{VIII.34})$$

ou seja Ω^2 é a razão entre as variâncias de $\frac{df}{dt}$ e $f(t)$.

A expressão (VIII.34) pode ser aproximada por:

$$\Omega = \frac{\left(\sum_{j=-N}^N j(\Delta\omega)^2 a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum_{j=-N}^N a_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{VIII.35})$$

utilizando-se o fato de que:

$$a_j^2 = S_\eta(\omega) \Delta\omega$$

e

$$j\Delta\omega = \omega_j - \omega_0$$

tem-se:

$$\Omega = \left(\frac{\sum_{j=-N}^N (\omega_j^2 - 2\omega_j\omega_0 + \omega_0^2) \cdot S(\omega) \Delta\omega}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e então:

$$\Omega = \left(\frac{\sum_{j=-N}^N \omega_j^2 S(\omega) \Delta\omega - 2 \sum_{j=-N}^N \omega_j \omega_0 S(\omega) \Delta\omega + \omega_0^2 m_0}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Omega = \left(\frac{m_2}{m_0} - 2\omega_0 \frac{m_1}{m_0} + \omega_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Omega = \left(\omega_z^2 - \omega_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VIII.36})$$

ou em forma adimensional, tal que $\bar{\Omega} = \Omega/\omega_0$:

$$\bar{\Omega} = (\omega_z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{VIII.36.a})$$

É importante notar que $\omega_z \geq \omega_0$ qualquer que seja $S(\omega) > 0$. De fato, definindo:

$$dE = S(\omega)d\omega$$

tem-se:

$$m_1 = \int_0^\infty \omega dE \leq \left(\int_0^\infty \omega^2 dE \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty dE \right)^{\frac{1}{2}} = (m_2 m_0)^{\frac{1}{2}}$$

segundo-se que:

$$\frac{m_1}{m_0} \leq \left(\frac{m_2}{m_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

e portanto:

(1) segundo a adimensionalização adotada no anexo IV $\Omega = \hat{\Omega}/\hat{\omega}_a = \frac{\omega_0}{\omega_a} \bar{\Omega} = \omega_0 \bar{\Omega}$

$$\omega_z \geq \omega_0$$

VIII.3.1. Largura de Banda Espectral de um Espectro de mar típico

A presente seção tem como objetivo avaliar a ordem de magnitude da largura de banda de espectros típicos de mar.

Consideraremos a formulação conhecida como Pierson-Moskowitz, expressão empírico-teórica, válida para águas infinitamente profundas, e caracterizando estados de mar locais plenamente desenvolvidos de forma bastante próxima à realidade observada. Além de seu emprego ser de uso bastante difundido, outras expressões frequentemente utilizadas, tais como ISSC, ITTC são, na realidade, derivadas diretamente da formulação de Pierson-Moskowitz (Bishop & Price).

O espectro de Pierson-Moskowitz é um espectro de energia a dois parâmetros, válido para ondas de propagação unidirecional em águas profundas. Sua expressão mais geral é dada por (Newman, pg.315):

$$S(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp\left\{-\beta \left(\frac{g}{\omega U}\right)^4\right\} \quad (\text{VIII.37})$$

onde

U - velocidade média do vento tomada em uma cota padrão (19,5m) acima da superfície;

α, β - parâmetros adimensionais definidores do espectro.

Os valores comumente adotados são:

$$\alpha = 8,1 \times 10^{-3}$$

$$\beta = 0,74$$

É imediato verificar que:

$$m_0 = \frac{\alpha}{4\beta} \frac{U^4}{g^2} = 0,0027 \frac{U^4}{g^2}$$

$$m_1 = \frac{\Gamma(3/4)}{4} \frac{\alpha}{\beta^{3/4}} \frac{U^3}{g} = 0,3064 \frac{\alpha}{\beta^{3/4}} \frac{U^3}{g} \quad (\text{VIII.38})^{(1)}$$

$$m_2 = \frac{\alpha}{4} \frac{\Gamma(1/2)}{\beta^{1/2}} U^2 = 0,4431 \alpha U^2$$

e portanto:

$$\omega_0 = 1,2254 \beta^{1/4} \frac{g}{U}$$

$$\omega_z = 1,3313 \beta^{1/4} \frac{g}{U} \quad (\text{VIII.39})$$

$$\omega_p = 0,9457 \beta^{1/4} \frac{g}{U}$$

e então:

(1) $\Gamma(x)$ é a função Γ : $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$ ($x > 0$).

$$\bar{\Omega} = 0,4246$$

Ou seja a largura de banda espectral para mar local plenamente desenvolvido, em águas infinitamente profundas pode ser dito constante e com o valor aproximado de $0,43 \omega_0$. Ou seja, quanto maior a velocidade do vento e portanto menores as frequências central (ω_0) de pico espectral (ω_p) e entre zero ascendentes (ω_z), menor será a frequência característica da função moduladora.

Alguns comentários adicionais são necessários. Inquestionavelmente $\Omega \approx 0,43$ é um valor bastante alto e acarretará erros da ordem de 16% a 20% no caso de adoção de uma expressão assintótica correta até segunda ordem em Ω para a representação das forças de deriva em ondas aleatórias. No entanto é sabido que a formulação de Pierson-Moskowitz não é suficientemente fidedigna em frequências altas. De acordo com observações experimentais e mesmo considerações teóricas em altas frequências, invariavelmente a formulação de Pierson-Moskowitz superestima os valores de densidade espectral de energia. Tal fato leva conseqüentemente a uma superestima do valor de Ω .

Faz-se necessário corrigir-se o cálculo de Ω . Diversos procedimentos são usualmente empregados (Franco, 1983) em análise de dados reais de ondas do mar.

Um procedimento bastante comum é a redefinição do li-

mite superior de integração dos momentos espectrais ω_c . É necessária no entanto a redistribuição da fração de energia correspondente a frequências superiores a ω_c no intervalo $(0, \omega_c)$.

Define-se o parâmetro α_c de tal forma que:

$$m_{0_c} = m_0$$

então:

$$S_c(\omega) = \frac{\alpha_c g^2}{\omega^5} \exp\left[-\beta \left(\frac{g}{\omega U}\right)^4\right] \quad (\text{VIII.40})$$

e portanto:

$$m_{0_c} = \int_0^{\omega_c} S_c(\omega) d\omega = \frac{\alpha_c U^4}{4\beta g^2} (1 - \exp[-\beta (g/\omega_c U)^4]) \quad (\text{VIII.41})$$

e

$$\alpha_c = \left\{ \exp[-\beta (g/\omega_c U)^4] \right\}^{-1} \alpha$$

Os momentos espectrais de ordem n são por sua vez calculados (Franco, 83)

$$m_{nc} = \frac{\alpha_c}{4\beta^p} \frac{U^{4-n}}{g^{2-n}} \left(\Gamma(p) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k g^{(p+k)}}{(p+k)k!} \right) \quad (\text{VIII.42})$$

válida para $n \neq 4$ ($p \neq 0$) com:

$$p = 1 - n/4$$

$$q = \beta \left(\frac{g}{U\omega_c} \right)^4$$

Assim os momentos de primeira e segunda ordem são expressos:

$$m_{1c} = \frac{\omega_c}{4\beta^{3/4}} \frac{U^3}{g} \left(\Gamma(3/4) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{(3/4+k)}}{(3/4+k)k!} \right)$$

e

$$m_{2c} = \frac{\omega_c}{4\beta^{3/4}} U^2 \left(\Gamma(1/2) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{(1/2+k)}}{(1/2+k)k!} \right)$$

(VIII.43)

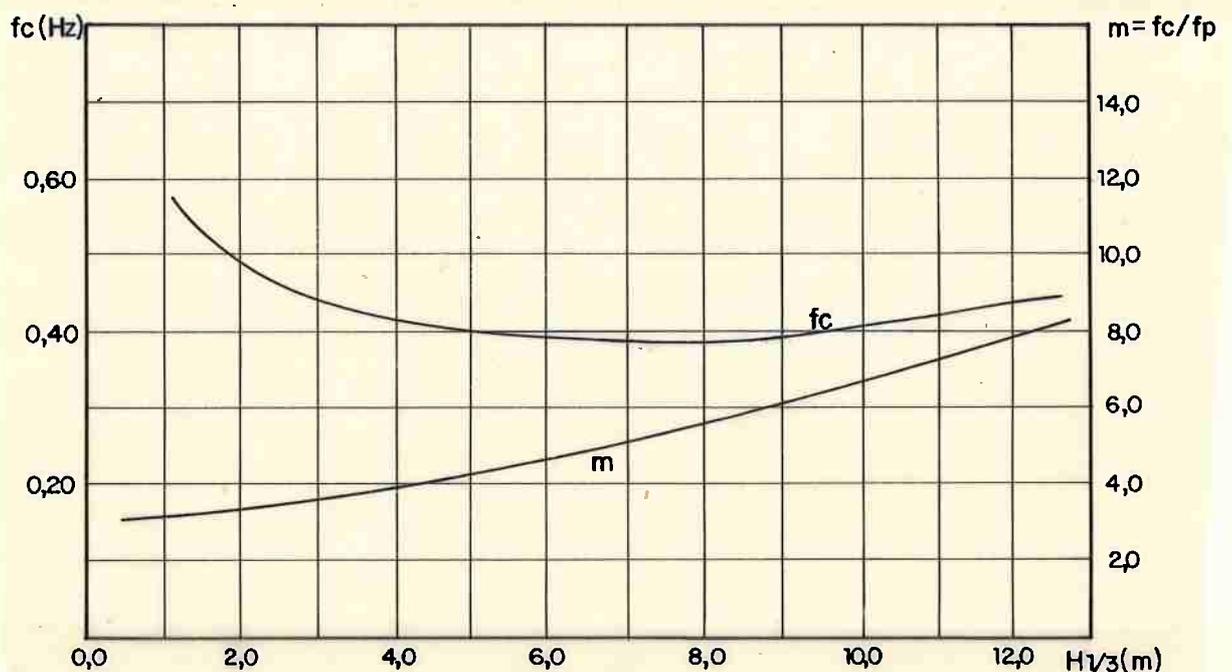


Fig. VIII.5 - Frequências de Corte para espectro de mar típico

As séries em (VIII.42) são obviamente convergentes.

Estudos realizados por Franco, 1983 [18], baseados em dados coletados e analisados por Hoffman na Estação India, sugerem a adoção de uma frequência de corte constante

$\omega_c \cong 2\pi \times 0.43 = 2.70S^{-1}$, conforme ilustrado pelo diagrama da

página anterior. Com base nestes resultados construiu-se, a título de exemplo, a tabela VIII.1 abaixo:

TABELA VIII.1 - Largura de Banda Espectral, $\omega_c = 2.70S^{-1}$

T_1 (S)	q	α_c/α	m_{0c} (m ²)	m_{1c} (m ² S ⁻¹)	m_{2c} (m ² S ⁻²)	$\bar{\Omega}_c$
10.0	0.0012	1.0012	2.938	1.7892	1.1087	0.1324
12.0	0.0006	1.0006	6.093	3.0990	1.6181	0.1630
14.0	0.0003	1.0003	11.287	4.9282	8.2210	0.1794

Por outro lado, tomando-se ω_c/ω_0 constante o valor de $\bar{\Omega}_c$ praticamente não varia com ω_0 , consistentemente ao resultado alcançado teoricamente para a formulação de Pierson-Moskowitz.

Tomando-se por exemplo $\omega_c/\omega_0 \cong 4.30$, de tal sorte que para uma onda de período mediano $T_1=10S$ tenhamos $\omega_c = 2.70S^{-1}$, tem-se $\bar{\Omega}_c \cong 0.1325$, valor bastante inferior àquele obtido anteriormente, $\bar{\Omega} = 0.4246$. (ver Tabela VIII.2).

TABELA VIII.2 - Largura de Banda Espectral, $\omega_c/\omega_0 = 4.30$

T_1 (s)	q	α_c/α	m_{0c} (m ²)	m_{1c} (m ² S ⁻¹)	m_{2c} (m ² S ⁻²)	$\bar{\Omega}_c$
10.0	0.0012	1.0012	2.938	1.7892	1.1087	0.1324
12.0	0.0012	1.0012	6.093	3.0917	1.5965	0.1329
14.0	0.0012	1.0012	11.287	4.9096	2.1731	0.1325

VIII.4. Aproximação Assintótica da Função Potencial Associada a Ondas Aleatórias de Espectro de Banda Estreita

Considere-se o problema da perturbação de um trem de ondas aleatórias que incide sobre um corpo cilíndrico flutuante

te. Restringirmos-emos ao caso bidimensional e consideraremos as variáveis adimensionalizadas de acordo com o exposto no anexo IV.

Supondo ser o espectro correspondente de banda estreita e frequência central ω_0 a onda incidente é tomada na forma modulada dada por (VIII.1.c).

A função potencial correspondente à onda perturbada é definida, de forma correta até segunda ordem, como:

$$\psi(x,z,t) = (\psi_1(x,z,t) + \epsilon\psi_2(x,z,t)(1+O(\epsilon^2))) \quad (\text{VIII.44})$$

onde ϵ é o parâmetro pequeno $\epsilon = \frac{\hat{\omega}_0^2}{g} \hat{A}$. Os movimentos do corpo em primeira ordem são definidos como $u_{\psi_1}(t)$, $w_{\psi_1}(t)$, $\theta_{\psi_1}(t)$.

Considere-se ainda a função potencial $\Phi(x,z,t)$ solução do problema análogo em onda incidente monocromática de frequência ω_0 , equacionado por (3.9):

$$\Phi(x,z,t) = \Phi_1(x,z,t) + \epsilon(\Phi_{20}(x,z) + \Phi_{22}(x,z,t)) \quad (\text{VIII.45})$$

e os movimentos do corpo em primeira ordem definidos como:

$$u_1(t), w_1(t) \text{ e } \theta_1(t).$$

Tomemos uma expansão assintótica de $\psi_1(x,z,t)$ em Ω em torno da função $\Phi_1(x,z,t)$ modulada por $f(t)$. Visto que:

$$\Omega \sim O\left(\frac{1}{f(t)} \frac{df(t)}{dt}\right)$$

é válido expressá-la por:

$$\psi_1(x,z,t) = \left[\frac{1}{2} f(x,t) \phi_1(x,z,t) + \frac{1}{2} \frac{df}{dt} \bar{\psi}_1(x,z,t) + (*) \right] (1+0(\Omega^2)) \quad (\text{VIII.46})$$

Expansões em $\frac{\partial f}{\partial x}$ não serão consideradas visto que nos temos a resolver o problema nas vizinhanças do corpo que tem dimensões características muito inferiores ao comprimento da onda de modulação ($\Delta k \cdot B \sim 0(\Omega)$). Tomaremos para tanto $f_0(t) = f(0,t)$ sem perda de generalidade.

Tanto ψ_1 como ϕ_1 são soluções da equação (3.10). A condição de contorno de ψ_1 na superfície livre se desenvolvida com base em (VIII.29) fornece, com erro de ordem $(1+0(\Omega^2))$:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \psi_1}{\partial z} \right|_{z=0} &= \frac{1}{2} f_0(t) \left[\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right] \Big|_{z=0} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{df_0}{dt} \left[\frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial z} + 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right] \Big|_{z=0} + \\ &+ (*) + 0(\Omega^2) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VIII.47})$$

como:

$$\left. \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi_1}{\partial z} \right|_{z=0} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{df_0}{dt} \sim 0(\Omega)$$

então:

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial z} + 2 \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right|_{z=0} = 0 + 0(\Omega^2)$$

e portanto:

$$\left. \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial z} \right|_{z=0} = -2 \left. \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right|_{z=0} + O(\Omega^2) \quad (\text{VIII.48})$$

Tomemos agora a seguinte expansão assintótica para os movimentos $u_{\psi_1}(t)$, $w_{\psi_1}(t)$ e $\theta_{\psi_1}(t)$

$$u_{\psi_1}(t) = \left[\frac{1}{2} f_0(t) u_1(t) + \frac{1}{2} \frac{df}{dt} u_{\bar{\psi}_1}(t) + (*) \right] (1 + O(\Omega^2)) \quad (\text{VIII.49})$$

e analogamente para w_{ψ} e θ_{ψ} .

Desenvolvendo a condição de contorno no corpo dada em (3.10) teremos:

$$\nabla \psi_1 \cdot \vec{n} \Big|_{\partial B} = \left(\frac{du_{\psi_1}}{dt} - z \frac{d\theta_{\psi_1}}{dt} \right) n_x + \left(\frac{dw_{\psi_1}}{dt} + x \frac{d\theta_{\psi_1}}{dt} \right) n_z + (*)$$

então:

$$\begin{aligned} \left[f_0(t) \nabla \phi_1 + \frac{df_0}{dt} \nabla \psi_1 \right] \vec{n} \Big|_{\partial B} &= f_0(t) \left[\left(\frac{du_1}{dt} - z \frac{d\theta_1}{dt} \right) n_x + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{dw_1}{dt} + x \frac{d\theta_1}{dt} \right) n_z \right] + \\ &\quad + \frac{df_0}{dt} \left[(u_1 - z\theta_1) n_x + (w_1 + x\theta_1) n_z \right] + \\ &\quad + \frac{df_0}{dt} \left[\left(\frac{du_{\bar{\psi}_1}}{dt} - z \frac{d\theta_{\bar{\psi}_1}}{dt} \right) n_x + \left(\frac{dw_{\bar{\psi}_1}}{dt} + z \frac{d\theta_{\bar{\psi}_1}}{dt} \right) n_z \right] \end{aligned} \quad (\text{VIII.50})$$

e portanto, utilizando (3.10) aplicada em Φ_1 :

$$\begin{aligned} \nabla \bar{\psi}_1 \cdot \vec{n} \Big|_{\partial B} &= \left[u_1 + \frac{du \bar{\psi}_1}{dt} - z \left(\theta_1 + \frac{d\theta \bar{\psi}_1}{dt} \right) \right] n_x + \\ &+ \left[w_1 + \frac{dw \bar{\psi}_1}{dt} + x \left(\theta_1 + \frac{d\theta \bar{\psi}_1}{dt} \right) \right] n_z + (*) \quad (\text{VIII.51}) \end{aligned}$$

ou seja o potencial $\bar{\psi}_1$ é solução da seguinte equação:

- $\nabla^2 \bar{\psi}_1(x, z, t) = 0$
- $\frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial t^2} + \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial z} \Big|_{z=0} = -2 \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \Big|_{z=0} + (*)$; na superfície livre
- $\nabla \bar{\psi}_1 \cdot \vec{n} \Big|_{\partial B} = \left[u_1 + \frac{du \bar{\psi}_1}{dt} - z \left(\theta_1 + \frac{d\theta \bar{\psi}_1}{dt} \right) \right] n_x +$
 $+ \left[w_1 + \frac{dw \bar{\psi}_1}{dt} + x \left(\theta_1 + \frac{d\theta \bar{\psi}_1}{dt} \right) \right] n_z + (*)$; na superfície do corpo
- $\nabla \bar{\psi}_1 \cdot \vec{n} \Big|_{\partial H} = 0$; no fundo.

Repetindo-se agora o raciocínio para o potencial $\psi_2(x, z, t)$ utilizando agora a equação (3.11) não é difícil verificar que a seguinte expressão assintótica de ψ_2 a satisfaz:

$$\begin{aligned} \psi_2(x, z, t) &= \left[f_0^2(t) \Phi_{20}(x, z) + \frac{df_0}{dt} f_0(t) \cdot \bar{\psi}_{20}(x, z) + \right. \\ &\left. + f_0^2(t) \Phi_{22}(x, z, t) + \frac{df_0}{dt} f_0(t) \bar{\psi}_{22}(x, z, t) \right] (1 + O(\Omega^2)) \end{aligned} \quad (\text{VIII.53})$$

onde $\bar{\psi}_{20}$ e $\bar{\psi}_{22}$ serão equacionados de forma análoga a $\bar{\psi}_1$ tendo suas condições de contorno na superfície livre e na superfície do corpo dadas em função de Φ_{20} e Φ_{22} , respectivamente.

ANEXO IX - CÁLCULO DOS COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO DEVIDO A EFEITOS VISCOSOS. FORMULAÇÕES EMPÍRICAS

É sabida a importância dos efeitos viscosos na resposta cinemática de corpos flutuantes sujeitos à ação de ondas. Os cálculos e previsões de movimentos podem ser significativamente afetados quando não se incluem as forças de natureza viscosa no cômputo da resposta do sistema em ondas, particularmente na faixa de frequências próximas às suas frequências naturais.

Com especial ênfase, no movimento de "roll" os efeitos viscosos são sobremaneira importantes, dado seu caráter ressonante causado por baixos coeficientes de amortecimento associados à radiação de ondas.

No presente problema, bidimensional, interessa-nos o estudo dos efeitos de forças viscosas no amortecimento dos movimentos de "roll", "sway" e "heave". Limitar-nos-emos ainda, a estudar tais efeitos para o caso de corpos cilíndricos de seções simétricas semelhantes a seções de embarcações convencionais, deixando de lado outros tipos de geometria como a de plataformas semi-submersíveis (veja figura IX.1).

Para as seções em estudo é bem conhecida a pequena influência dos efeitos viscosos no movimento de "heave". A resposta cinemática segundo esse grau de liberdade é bem prevista pela teoria potencial, razão pela qual os efeitos vis-

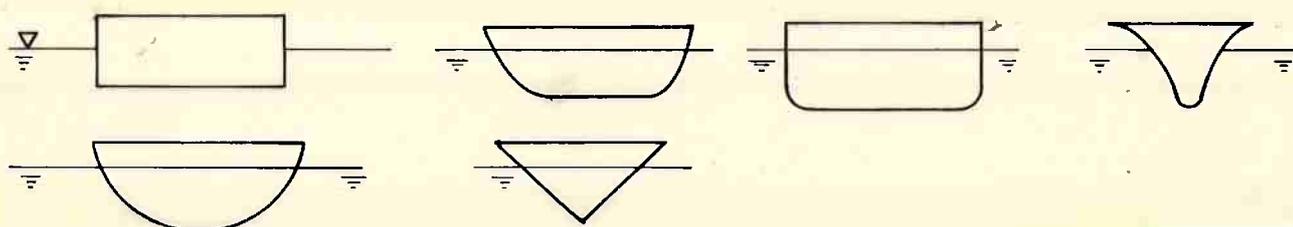


Figura IX.1 - Seções típicas estudadas no presente anexo.

cosos em "heave" não tem sido objeto de estudos aprofundados.

Por outro lado os efeitos de forças viscosas nos movimentos de "roll" e "sway" tem sido intensamente investigados. Dada a natureza turbulenta do escoamento e da dificuldade inerente a seu equacionamento, tais investigações tem essencialmente caráter empírico ou semi-empírico. Deven-se a Kato [1] Tanaka e Ikeda [22],[23], as principais contribuições ao estudo em questão, sucedendo-se algumas investigações de caráter teórico feitos por Dalzell,[14] Myrhaug & Sand [39] e outros.

A motivação do presente estudo reside na observação da forte dependência dos coeficientes de força de segunda or-

dem, objetos primeiros do trabalho, com relação ao movimento de "roll". Tal dependência é exemplificada e analisada no capítulo 8 e, efetivamente, mostra-se pronunciada. Em particular a curva do coeficiente $Q_2^{(2)}$ associado ao potencial de segunda ordem é fortemente afetada pela ressonância em "roll" apresentando alteração brusca nessa faixa de frequência.

Pretende-se, portanto, no presente anexo apresentar uma síntese dos estudos realizados através da bibliografia consultada, formulando de forma clara e objetiva os métodos adotados para a inclusão dos efeitos de forças viscosas.

IX.1. Forças Viscosas de Amortecimento em "roll" e "sway"

Tomemos o sistema acoplado de equações que rege o movimento de um cilindro sujeito à ação de ondas. De forma explícita:

$$(M+A_{11})\ddot{u} + N_u(\dot{u}) + C_u(u) = F_u(t) \quad (IX.1)$$

$$(I_\theta + A_{33})\ddot{\theta} + N_\theta(\dot{\theta}) + C_\theta(\theta) = M_\theta(t)$$

onde $F_u(t)$ e $F_\theta(t)$ são as forças excitantes associadas à difração do sistema de ondas, $N_u(\dot{u})$ e $N_\theta(\dot{\theta})$ são funções de amortecimento e $C_u(u)$ e $C_\theta(\theta)$ são funções de restauração. Tanto as funções de amortecimento quanto de restauração são não lineares. As últimas, no entanto, em geral são tratadas preservan-

do-se apenas o termo linear de sua expansão em série.

Já para as funções de amortecimento, os termos lineares são em geral preservados até a segunda ou terceira ordens da expansão. Assim, embora trabalhos mais recentes (Dalzell, 1978), (Takaki & Tsai, 1973), (Lewison, 1976) tenham indicado séries polinomiais ímpares como mais adequadas, tanto do ponto de vista físico quanto algébrico, os resultados apresentados de maior divulgação referem-se à clássica aproximação quadrática:

$$N_{\theta}(\dot{\theta}) = (B_{13}^{(1)} + B_{33}^{(1)})\dot{\theta} + (B_{13}^{(2)} + B_{33}^{(2)})\dot{\theta}|\dot{\theta}| \quad (\text{IX.2})$$

$$N_u(\dot{u}) = (B_{31}^{(1)} + B_{11}^{(1)})\dot{u} + (B_{31}^{(2)} + B_{11}^{(2)})\dot{u}|\dot{u}|$$

onde, por facilidade de notação indicou-se o movimento de "sway" pelo subscrito 1 e "roll" pelo subscrito 3; o superescrito (1) designa os coeficientes associados a termos lineares de velocidade e o superescrito (2) a termos quadráticos.

Os termos lineares de amortecimento referem-se a perda de energia por geração de ondas na superfície e são calculados pela teoria potencial. É possível mostrar-se inclusive que $B_{13}^{(1)} = B_{31}^{(1)}$.

Os termos quadráticos referem-se predominantemente à dissipação de energia associada ao trabalho de forças viscosas.

Ao contrário dos termos lineares não há simetria e os diversos coeficientes devem ser estudados separadamente.

É conveniente, ainda, que a equação (IX.2) seja linearizada, o que se faz através do cálculo de coeficientes de amortecimento equivalentes, assumindo-se resposta linear do sistema.

Por fim, da literatura, (Kato, Ikeda, Tanaka e outros) é comum separar-se as forças de natureza viscosa em duas partes⁽¹⁾:

- forças relacionadas ao atrito viscoso: N_f
- forças relacionadas à formação de vórtices: N_e .

Assim os coeficientes apresentados são particionados:

$$B_{ij}^{(2)} = B_{ij_f}^{(2)} + B_{ij_e}^{(2)} \quad (\text{IX.3})$$

Sua determinação empírica é realizada com o auxílio de experimentos com cilindros equivalentes, visando neutralizar-se o efeito de turbilhonamento medindo-se a força de atrito viscoso e posteriormente subtraindo-se tais valores da força viscosa total medida no experimento real calculando-se então o coeficiente de amortecimento turbilhonar.

(1) - Quando há a presença de bolinas costuma-se adicionar, de forma des^ucoplada, coeficientes associados à sua sustentação e arrasto.

IX.2. Linearização dos coeficientes de amortecimento viscoso

Considere-se os coeficientes de amortecimento linearizados B_{ij}^L de tal forma que as forças e movimentos de amortecimento viscoso sejam dados por:

$$N_u^L(\dot{u}) = (B_{11}^L + B_{31}^L)\dot{u} \quad (\text{IX.4})$$

$$N_\theta^L(\dot{\theta}) = (B_{13}^L + B_{33}^L)\dot{\theta}$$

Assumindo-se reposta linear do sistema a uma excitação harmônica de frequência ω é imediato verificar que a potência média dissipada em um ciclo associada ao trabalho das forças viscosas linearizadas é dada por:

$$\bar{W}^L = \bar{W}_{11}^L + \bar{W}_{13}^L + \bar{W}_{31}^L + \bar{W}_{33}^L \quad (\text{IX.5})$$

com:

$$\begin{aligned} \bar{W}_{11}^L &= \frac{\omega^2}{2} B_{11}^L u_0^2 \\ \bar{W}_{13}^L &= \frac{\omega^2}{2} B_{13}^L \cos(\beta_u - \beta_\theta) u_0 \theta_0 \\ \bar{W}_{31}^L &= \frac{\omega^2}{2} B_{31}^L \cos(\beta_\theta - \beta_u) \theta_0 u_0 \\ \bar{W}_{33}^L &= \frac{\omega^2}{2} B_{33}^L \theta_0^2 \end{aligned} \quad (\text{IX.6})$$

onde:

u_0, θ_0 amplitudes de movimento de "sway" e "roll"

β_u, β_θ fases dos movimentos de "sway" e "roll".

Por outro lado a potência média dissipada em um ciclo sob hipótese de movimentos harmônicos é dada em termos dos coeficientes quadráticos por:

$$\begin{aligned}\bar{W}_{11}^{(2)} &= \frac{4}{3\pi} B_{11}^{(2)} \omega^3 u_0^3 \\ \bar{W}_{13}^{(2)} &= \frac{4}{3\pi} B_{13}^{(2)} \omega^3 \cos(\beta_u - \beta_\theta) u_0 \theta_0^2 \\ \bar{W}_{31}^{(2)} &= \frac{4}{3\pi} B_{31}^{(2)} \omega^3 \cos(\beta_\theta - \beta_u) \theta_0 u_0^2 \\ \bar{W}_{33}^{(2)} &= \frac{4}{3\pi} B_{33}^{(2)} \omega^3 \theta_0^3\end{aligned}\tag{IX.7}$$

Igualando-se (IX.6) a (IX.7), ou seja supondo como equivalentes as potências médias dissipadas calculadas sob ambas aproximações, vem:

$$\begin{aligned}B_{11}^L &= \frac{8}{3\pi} \omega u_0 B_{11}^{(2)} \\ B_{13}^L &= \frac{8}{3\pi} \omega \theta_0 B_{13}^{(2)} \\ B_{31}^L &= \frac{8}{3\pi} \omega u_0 B_{31}^{(2)} \\ B_{33}^L &= \frac{8}{3\pi} \omega \theta_0 B_{33}^{(2)}\end{aligned}\tag{IX.8}$$

Obviamente o processo de solução do sistema linearizado será iterativo, visto que os coeficientes B_{ij}^L dependem da própria solução.

Tal processo é iniciado pela solução do sistema linear correspondente à teoria potencial. A cada passo os coeficientes B_{ij}^L são calculados em função da solução do passo imediatamente anterior, até que o processo convirja. Assim, indicando com o índice n o n -ésimo passo da iteração teremos:

$$B_{11_n}^L = \frac{8}{3\pi} \omega B_{11}^{(2)} u_{0_{n-1}} \quad (\text{IX.8.a})$$

e assim analogamente para os coeficientes restantes.

IX.3. Coeficiente de amortecimento viscoso em "sway"

Segundo investigações realizadas por Ikeda & Tanaka (1980), com navios convencionais, a força de amortecimento viscoso em "sway" é negligenciável de modo geral, podendo-se então utilizar a teoria potencial linear de forma bastante satisfatória no cálculo da resposta em "sway". Tal fato no entanto restringe-se ao caso de oscilações de pequena amplitude na faixa de frequências das ondas, ou seja resposta em primeira-ordem em águas profundas, onde o movimento de "sway" tem a mesma ordem de magnitude da amplitude da onda incidente.

Conforme mostrado por Keulegan & Carpenter as forças viscosas agentes sobre corpos cilíndricos em fluxo oscilatório

dependem fortemente do número $kc = V_{MAX} \frac{T}{D}$ onde V_{MAX} denota a máxima velocidade do escoamento em relação ao corpo em movimento, T é o período de oscilação e D o diâmetro característico da seção.

O gráfico IX.2 apresenta curvas típicas do coeficiente de arrasto C_D determinadas experimentalmente por Keulegan & Carpenter [70] correspondentes aos casos de um cilindro circular e de uma placa retangular, ambas de diâmetro D , sujeitos a um

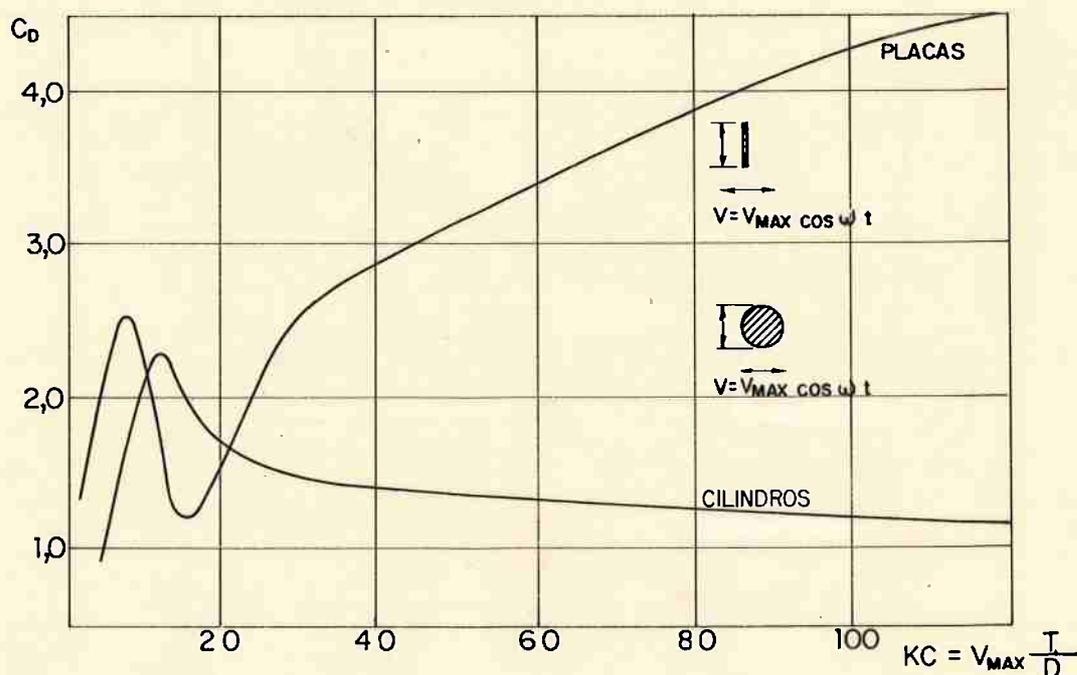


Gráfico IX.2 - Coeficiente de Arrasto de corpos cilíndricos

Em baixas frequências ($kd \ll 1$), onde a difração é desprezível, a velocidade horizontal relativa fluido-corpo pode ser escrita:

$$V_R(z,t) = V_p - \dot{u} = A\omega \left[\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \cos \omega t - G_u \cdot \cos(\omega t + \beta_u - \pi/2) \right] \quad (\text{IX.11})$$

Por outro lado é sabido que quando kh tende a zero G_u tende a $\coth kh$ e β_u tende a $\pi/2$ conforme pode ser verificado no exemplo do gráfico IX.2. Assim em baixa frequência a velocidade relativa fluido-corpo é nula ou quase-nula, ou seja o corpo ($kd \ll 1$ e $d/b \sim 0(1)$) acompanha perfeitamente o orbital da onda. Tal fato sugere que em primeira instância possa ser desprezada a força viscosa em "sway" no cálculo dos movimentos em primeira ordem em baixa frequência.

Já em alta frequência, quando a velocidade relativa fluido-corpo é significativa prepondera o amortecimento por radiação, como pode ser verificado observando-se o gráfico IX.3.

De qualquer maneira, a força viscosa em "sway" poderia ser incluída de forma aproximada no cálculo dos movimentos em primeira ordem, sob hipótese de resposta linear. Para tanto bastaria determinar-se o coeficiente linearizado B_{11}^L . É fácil verificar que:

$$B_{11}^L = \frac{2}{3\pi} \cdot \rho D \cdot |V_R| C_D(T, D, |V_R|) \cdot \cos \delta \quad (\text{IX.12})^{(1)}$$

(1) - Na dedução de (X.12) assumiu-se que o cilindro flutuante de calado d ; pudesse ser aproximado por um cilindro de dupla seção e diâmetro transversal ao escoamento, $D = 2d$.

com:

$$|V_R|^2 = (V_{p0} + \omega u_0)^2 \cos^2 \left(\frac{\beta u}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + (V_{p0} - \omega u_0)^2 \sin^2 \left(\frac{\beta u}{2} - \frac{\pi}{2} \right)$$

(IX.13)

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega \cdot u_0 - V_{p0}}{\omega \cdot u_0 + V_{p0}} \right) + \left(\frac{\beta u}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$$

o ângulo de fase entre a velocidade relativa e a velocidade em "sway", onde:

V_{p0} : é a amplitude média da velocidade horizontal do fluxo oscilatório tomada no intervalo $z = [-d, 0]$

$C_D(T, D, |V_R|)$: é o coeficiente de arrasto de uma dupla seção cilíndrica, com o número de Keulegan & Carpenter dado por $KC = \frac{|V_R| T}{D}$

D: diâmetro característico da seção

Em baixa frequência é imediato verificar que: $B_{11}^L \approx 0$.

Por fim é importante enfatizar que no caso do corpo estar amarrado, a curva de resposta em frequência segundo o movimento de "sway" apresentará um pico ressonante cuja frequência é em geral baixa. Em tais casos a força de amortecimento viscoso não mais poderá ser negligenciada para o cálculo da resposta do sistema em primeira-ordem.

O mesmo ocorre quando do cômputo do movimento de "sway" em baixa frequência causado por forças de segunda-ordem em on-

das aleatórias. Neste caso, visto que o fenômeno tem caráter ressonante, é lícito estimar-se um coeficiente médio $\overline{B_{11}^{(2)}}$ em função do período natural do sistema em "sway". Assim em ondas aleatórias:

$$\overline{B_{11}^{(2)}} \approx \frac{1}{4} \rho D C_D (T_s, D, V_s) \quad (\text{IX.14})$$

onde:

V_s : é a amplitude de velocidade de "sway" em baixa frequência, causada por forças de segunda-ordem

T_s : é o período natural do sistema em "sway".

Ou ainda na forma linearizada, supondo-se amarração de características lineares:

$$\overline{B_{11}^L} = \frac{2}{3\pi} \rho D C_D (T_s, D, V_s) \cdot |V_s| \quad (\text{IX.14.a})$$

Embora o método proposto seja, em sua essência, bastante simples, alguns problemas de ordem prática se interpõem à sua aplicação imediata:

- i) Há a necessidade do levantamento de curvas experimentais de C_D para cada tipo de seção ou, pelo menos, para famílias de seções. Tais experimentos são onerosos e ao que se saiba não existe publicado algum estudo sistemático nesse sentido. Assim, há que se adotar as curvas apresentadas no gráfi-

co IX.2 como primeira aproximação, aparentemente passível de ser efetuada para valores de KC inferiores a 20.

- ii) Embora Keulegan & Carpenter tenham ressaltado a independência de seus resultados em função do número de Reynolds, trabalhos posteriores tem questionado tal assertiva (ver p.ex. Sarpkaya [71]). Logo os estudos experimentais sugeridos teriam que incluir necessariamente o estudo da variação do coeficiente de arresto C_D com o número de Reynolds.

Métodos teóricos de solução do escoamento tem sido aplicados com êxito para o caso de cilindros oscilantes em fluidos sem fronteiras, como é o caso da solução apresentada em Schlichting pág. 428 para um cilindro circular, utilizando-se o método de aproximações sucessivas. Tais resultados, no entanto restringe-se a escoamentos laminares, embora métodos numéricos já estejam sendo empregados para a determinação da camada limite turbulenta.

IX.4. Coeficientes de amortecimento viscoso em "roll"

Conforme visto no item IX.1, expressão (IX.3), o coeficiente de amortecimento viscoso é em geral decomposto em coeficiente de amortecimento por atrito viscoso e vortical. Kato e depois Ikeda & Tanaka preocuparam-se com sua determinação experimental, elaborando métodos de aplicação restrita a se-

ções típicas de embarcações convencionais. Tais métodos são relatados a seguir de forma abreviada.

Métodos teóricos tem sido empregados para a solução do mesmo problema (ver Myrhaug & Sand, 1980). Naquele trabalho os casos de escoamento laminar e turbulento, em torno de um cilindro oscilando angularmente, são investigados. Conceitos de comprimento de mistura de Prandtl e tensão de Reynolds são utilizados aliados à solução análoga ao segundo problema de Stokes. No entanto a implementação destes métodos foge em demasia do escopo do presente trabalho, razão pelo qual nos atemos aos modelos semi-empíricos de Kato, Ikeda e Tanaka.

IX.4.1. Coeficiente de amortecimento por atrito viscoso. Método de Kato

Através de experimentos efetuados com cilindros circulares, verticalmente suspensos e totalmente submersos, oscilando harmonicamente em torno de seu eixo, Kato elaborou a seguinte fórmula empírica para o coeficiente de atrito C_f , válida para escoamento laminar:

$$C_f = 1,328R_e'^{-0,5} \quad (IX.15)$$

com

$$R_e' = 0,512 \frac{r^2}{\nu} \theta_0^2 \omega$$

IX.17.

onde r é o raio do cilindro circular e R'_e é definido como o número de Reynolds efetivo. É importante observar que (IX.15) coincide com a fórmula de Blasius válida para o escoamento laminar.

Assumindo que o número de Reynolds efetivo pudesse ser usado para o caso de escoamento turbulento a expressão (IX.15) foi expandida:

$$C_f = 1,328 Re'^{-0,5} + 0,014 Re'^{-0,114} \quad (IX.16)$$

Ambas as expressões (IX.15) e (IX.16) são generalizadas para seções cilíndricas sem contudo afastarem-se em demasia de uma seção circular, através da definição de r como raio de uma seção circular equivalente.

$$r = \left(\frac{2S}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (IX.17)$$

onde:

S é a área da seção.

Assim o momento de atrito viscoso em torno do eixo de notação em "roll" é dado por:

$$M_{f_\theta} = \frac{1}{2} \rho C_f r^3 \ell \dot{\theta} |\dot{\theta}| \quad (IX.18)$$

onde:

ℓ é o perímetro da seção.

É imediato verificar então de (IX.2) que:

$$B_{33_f}^{(2)} = \frac{1}{2} \rho C_f r^3 \ell \quad (\text{IX.19})$$

e que

$$B_{33_f}^L = \frac{4}{3\pi} \rho C_f r^3 \ell \omega \theta_0$$

Adotando-se a adimensionalização exposta no anexo IV, o coeficiente de atrito viscoso linearizado é expresso por:

$$B_{33_f}^L = \frac{4}{3\pi} C_f r^3 \ell \omega \left(\frac{\omega^2 \hat{a}}{g \hat{A}} \right) \theta_0 = \frac{4}{3\pi} C_f r^3 \ell \omega \frac{\gamma}{k} \theta_0 \quad (\text{IX.19.a})$$

onde as variáveis com subscrito $\hat{\quad}$ são dimensionais e γ é a inclinação da onda.

IX.4.2. Coeficiente de amortecimento turbilhonar. Método de Ikeda & Tanaka

Ikeda & Tanaka (1977) elaboraram um método para a determinação do coeficiente de amortecimento vortical através da integração do campo de pressões criado pelo fenômeno de turbilhonamento ao longo da seção.

Tal campo de pressões é suposto linear ao longo da

seção conforme exemplificado na figura IX.5

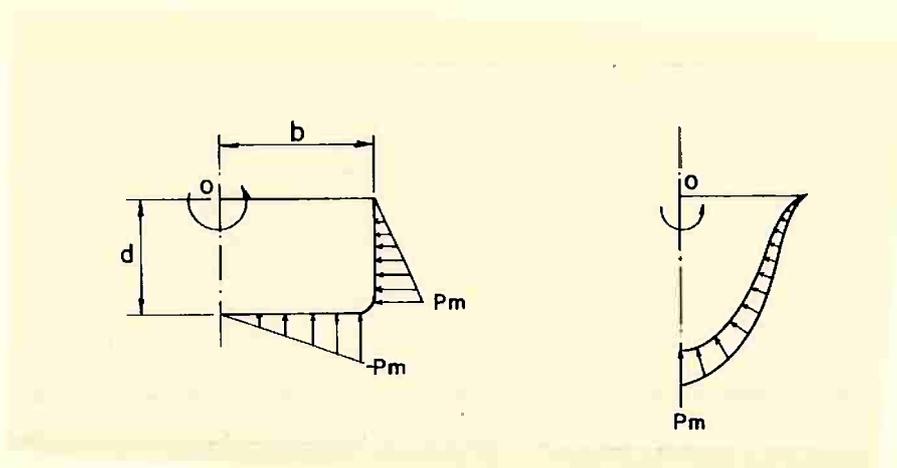


Figura IX.5 - Distribuição de pressão devida ao turbilhonamento

A partir de considerações puramente geométricas verifica-se que o momento em relação ao polo 0 (fig. IX.2) das forças de pressão devido ao escoamento turbilhonar pode ser escrita, para uma seção retangular:

$$M_{\theta_e} = 2d^2(1+H_0^2)\frac{P_m}{3} \quad (\text{IX.20})$$

onde:

$$H_0 = b/d.$$

Definindo C_R como coeficiente associado a M_{θ_e} :

$$C_R = \frac{M_{\theta_e}}{\frac{1}{2}\rho d^4 \dot{\theta} |\dot{\theta}|} \quad (\text{IX.21})$$

Ikeda e Tanaka generalizaram empiricamente a expressão (IX.20) através de experimentos envolvendo seções de geometrias diver-

sas. A seguinte expressão foi conseguida para C_R :

$$C_R = \frac{4}{\rho d^2 \dot{\theta} |\dot{\theta}|} \left[\left(1 - f_1 \frac{R}{d} \right)^2 + f_2 \left(H_0 - f_1 \frac{R}{d} \right)^2 \right] \frac{P_m}{3} \quad (\text{IX.22})$$

com:

$$R = \begin{cases} R_1 = 2d \left(\frac{H_0 (1-\sigma)}{4-\pi} \right)^{\frac{1}{2}}, & \text{se } R_1 < d \text{ e } R_1 < b \\ d & \text{se } R_1 \geq d \text{ e } H_0 \geq 1 \\ b & \text{se } R_1 \geq d \text{ e } H_0 \leq 1 \end{cases}$$

onde:

$\sigma = S/2bd$ é o coeficiente de área seccional e onde os coeficientes

$$f_1 = \frac{1}{2} [1 - \tanh(20(\sigma - 0,7))] \quad (\text{IX.23})$$

$$f_2 = \frac{1}{2} (1 - \cos \pi \sigma) - 1,5 (1 - e^{5(\sigma-1)}) \sin^2 \pi \sigma$$

foram ajustados experimentalmente são apresentados nos gráficos IX.6 e IX.7.

Note-se que para seções retangulares ($\sigma=1$) tem-se $f_1 = R = 0$ e $f_2 = 1$, levando-se a

$$C_R = \frac{4}{\rho d^2 \dot{\theta} |\dot{\theta}|} (1 + H_0^2) \frac{P_m}{3}$$

e portanto $M_{\theta_e} = 2d^2 (1 + H_0^2) \frac{P_m}{3}$, recaindo-se então na expressão

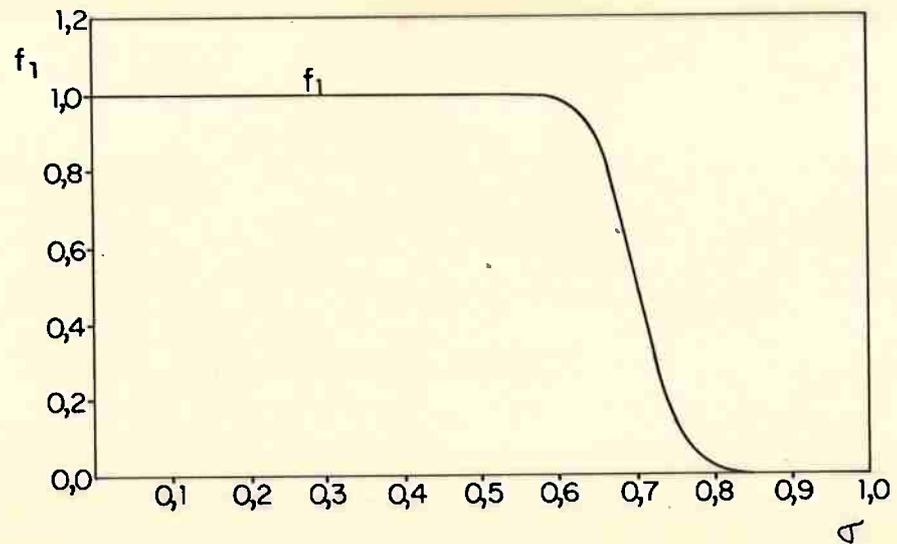
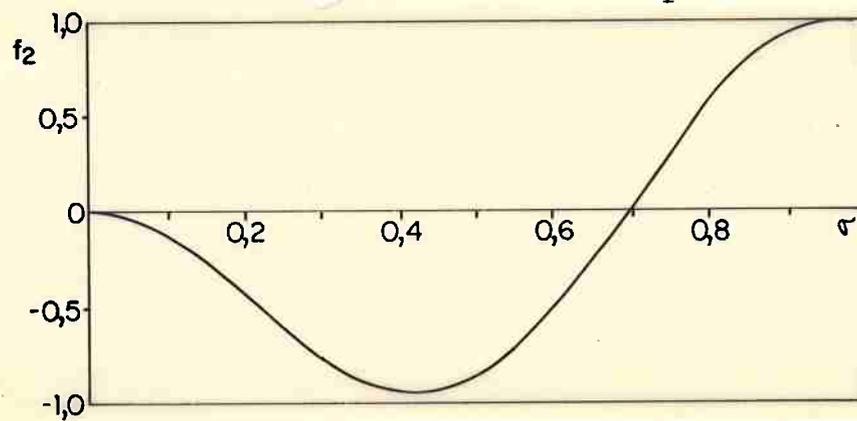
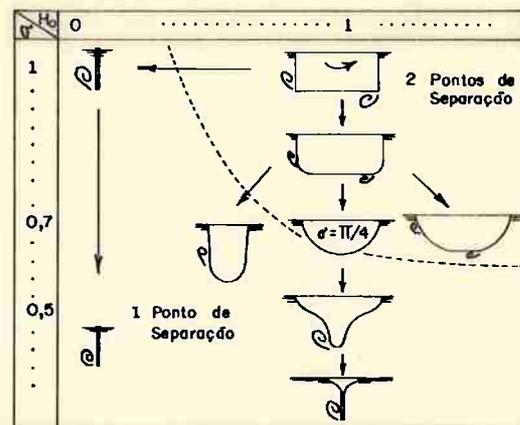
Gráfico IX.6 - Coeficiente $f_1 \times \sigma$ Gráfico IX.7 - Coeficiente $f_2 \times \sigma$ 

Fig. IX.9 - Pontos de separação [22]

(IX.20). Já para uma placa plana vertical ($H_0=0$, $\sigma=0$) resulta

$$M_{\theta_e} = 2d^2 \frac{p}{3}.$$

Os coeficientes f_1 e f_2 procuram representar a natureza do escoamento quanto ao número de pontos de separação (ver figura IX.8). Em particular para uma seção circular $H_0 = 1$ e $\sigma = \pi/4$, valor a partir do qual $f_1 \sim 0$.

A dimensão característica R_1 mede o quanto uma seção com $H_0 = 1$ se afasta da forma circular.

Por sua vez a pressão máxima P_m é definida a partir de um coeficiente de pressão C_p obtido empiricamente:

$$\frac{P_m}{3} = \frac{1}{2} \rho r_{MAX}^2 C_p |\dot{\theta}| \dot{\theta} \quad (IX.24)$$

onde r_{MAX} é o raio máximo da seção com relação ao polo 0.

O coeficiente de pressão C_p foi obtido empiricamente através de experimentos realizados com cilindros de seção circular, retangular e placas planas, medindo-se a pressão máxima resultante e é expresso em função do parâmetro $\gamma = V_{MAX}/V_{MED}$ que relaciona as velocidades máxima e média ocorridas na seção:

$$C_p = \frac{1}{2} (0.87e^{-\gamma} - 4e^{-0.187\gamma} + 3) \quad (IX.25)$$

onde, conforme (IX.17).

$$V_{MED} = r \cdot \dot{\theta}$$

A velocidade máxima V_{MAX} é definida por Ikeda & Tanaka com base nos parâmetros das formas de Lewis correspondentes à seção estudada.

Tal procedimento no entanto não é conveniente no presente trabalho, porquanto os coeficientes hidrodinâmicos são calculados numericamente utilizando-se o Método Compatibilizado de Elementos Finitos. Com base na definição dos autores referidos escreve-se

$$V_{MAX} = f_3 \cdot r_{MAX} \cdot \dot{\theta} \quad (IX.27)$$

onde

$$f_3 = 1 + 4 \exp(-1.65 \times 10^5 (1-\sigma)^2) \quad (IX.28)$$

é uma função que vale 5 para valores de $\sigma \approx 1.0$, ou seja seções retangulares, e vale 1 para valores de σ inferiores a 1.0 e tem como objetivo representar seções retangulares.

O momento das forças viscosas associadas ao campo de pressões devido ao escoamento turbilhonar M_{θ} fica então determinado utilizando-se as expressões (IX.21) e (IX.28).

Voltando ao cálculo do coeficiente de amortecimento $B_{33}^{(2)}$ é imediato verificar que:

IX.24.

$$B_{33_e}^{(2)} = \frac{1}{2} \rho d^4 C_R$$

(IX.29)

$$B_{33_e}^L = \frac{4}{3\pi} \rho d^4 C_R \omega \theta_0$$

Ainda, introduzindo a adimensionalização apresentada no anexo IV o coeficiente B_{33}^L é representado na forma adimensional por:

$$B_{33_e}^L = \frac{4}{3\pi} d^2 C_R \omega \left(\frac{\omega^2}{g} \bar{A} \right) \theta_0 = \frac{4}{3\pi} d^4 C_R \omega \frac{\gamma}{k} \theta_0 \quad (\text{IX.30})$$

IX.5. Coeficientes de amortecimento viscoso acoplados: "roll-sway", "sway-roll"

IX.5.1. "Roll" em "sway"

O coeficiente de amortecimento cruzado "roll-sway" induz força de amortecimento viscoso em "sway" a partir da velocidade angular de "roll". Tal força pode ser calculada por:

$$F_{u\theta} = - \int_{\partial B} p_{e\theta}(x,z) n_x d\partial B - \int_{\partial B} \tau_{\theta}(x,z) m_x d\partial B \quad (\text{IX.31})$$

onde:

$p_{e\theta}$ é o campo de pressão turbilhonar devido ao movimento de "roll"

τ_{θ} é a tensão de cisalhamento ocasionada por atrito viscoso devido ao movimento de "roll"

n_x componente do vetor \vec{n} (normal à superfície do corpo) na direção x

m_x componente no versor \vec{m} (tangente à superfície do corpo) na direção x .

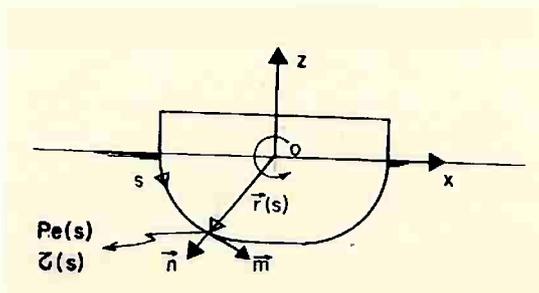


Figura IX.9 - Força de amortecimento viscoso "roll-sway"

Em aproximação de primeira ordem o corpo \bar{e} tomado em sua posição média como mostra a figura IX.4.

A componente de força devida ao atrito viscoso \bar{e} facilmente calculada a partir de (IX.18), definindo-se como tensão média de cisalhamento:

$$\bar{\tau}_\theta = \frac{1}{2} \rho C_f r^2 \dot{\theta} |\dot{\theta}| \quad (\text{IX.32})$$

É fácil verificar, procedendo-se a integral ao longo de ∂B que:

$$F_{u\theta_f} = -\bar{\tau} b = -\frac{1}{2} \rho C_f b r^2 \dot{\theta} |\dot{\theta}| \quad (\text{IX.33})$$

e que portanto

$$B_{13_f}^{(2)} = \frac{1}{2} \rho C_f b r^2 \quad (IX.34)$$

$$B_{13_f}^L = \frac{4}{3\pi} \rho C_f b r^2 \omega \theta_0$$

A componente de força viscosa em "sway" devido ao campo de pressão turbilhonar ocasionado pelo movimento de "roll" é calculada de forma análoga ao momento M_{θ_e} , apresentada no item IX.4.2. Resulta (ver Ikeda & Tanaka, 1980):

$$B_{13_e}^{(2)} = \frac{r_{MAX}^2}{d^3} \frac{C_P}{C_R} \left(1 - f \frac{R}{1d}\right) B_{33_e}^{(2)} \quad (IX.35)$$

$$B_{13_e}^L = \frac{r_{MAX}^2}{d^3} \frac{C_P}{C_R} \left(1 - f \frac{R}{1d}\right) B_{33_e}^L$$

com $B_{33_e}^{(2)}$ e $B_{33_e}^L$ dados pelas expressões (IX.29). Finalmente em termos adimensionais:

$$B_{13_f}^L = \frac{4}{3\pi} C_f b r^2 \omega \left(\frac{\hat{\omega}^2}{g} \hat{A}\right) \theta_0 = \frac{4}{3\pi} C_f b r^2 \omega \frac{\gamma}{k} \theta_0 \quad (IX.36)$$

$$B_{13_e}^L = \frac{4}{3\pi} r_{MAX}^2 d C_P \left(1 - f \frac{R}{1d}\right) \omega \left(\frac{\hat{\omega}^2}{g} \hat{A}\right) \theta_0 = \frac{4}{3\pi} r_{MAX}^2 d C_P \left(1 - f \frac{R}{1d}\right) \omega \frac{\gamma}{k} \theta_0$$

e

$$B_{13}^L = \frac{4}{3\pi} \omega \theta_0 \frac{\gamma}{k} \left(C_f b r^2 + r_{MAX}^2 d C_P \left(1 - f \frac{R}{1d}\right) \right) \quad (IX.37)$$

IX.5.2. "Sway" em "Roll"

De forma análoga à força $F_{u\theta}$ o momento viscoso $M_{\theta u}$ induzido pelas forças viscosas devido ao movimento de "sway" e tomado em relação ao polo 0 (fig. IX.4), pode ser escrito:

$$M_{\theta u} = - \int_{\partial B} p_e(s) \vec{r} \wedge \vec{n} d\partial B - \int_{\partial B} \tau_u(s) \vec{r} \wedge \vec{m} d\partial B \quad (\text{IX.38})$$

onde:

$\vec{r} = \vec{r}(s)$ é o vetor posição ao longo do contorno do corpo em relação ao polo 0

$p_{e_u}(s)$ pressão no corpo devido ao escoamento turbilhonar devido ao movimento de "sway"

$\tau_u(s)$ cisalhamento devido ao atrito viscoso

O cálculo destes momentos cruzados ou de seus coeficientes de amortecimento correspondentes deve ser realizado através de métodos empíricos análogos àqueles apresentados em IX.4.1, IX.4.2 e IX.5.1. Tais métodos no entanto não prescindem de resultados experimentais e uma vez mais Ikeda & Tanaka apresentam alguns resultados baseados na definição de um coeficiente C_{u_R} correspondente ao primeiro termo de (IX.38):

$$C_{u_R} = \frac{M_{\theta u}}{\frac{1}{2} \rho d^2 \dot{u} |\dot{u}|} \quad (\text{IX.39})$$

e portanto

$$B_{31_e}^{(2)} = -\frac{1}{2}\rho d^2 C_{u_R}$$

(IX.40)

$$B_{31_e}^L = -\frac{4}{3\pi}\rho d^2 C_{u_R} \omega u_0$$

Os resultados apresentados por Ikeda & Tanaka, no entanto, não permitem utilização mais genérica restringindo-se aos casos estudados, já que não se apresentou um método empírico que levem em conta diferentes tipos de seção.

O mesmo se pode dizer dos coeficientes $B_{31_f}^{(2)}$ e $B_{31_f}^L$, carecendo de maiores investigações experimentais, infelizmente não encontradas na literatura consultada.

Como primeira aproximação poderiam ser utilizados os resultados apresentados por Ikeda & Tanaka, referentes à seções cilíndricas retangulares, placas planas e seções típicas de modelos série 60.

Quanto ao movimento $M_{\theta_{u_f}}$ é necessário o conhecimento da camada limite ao longo do contorno do corpo em um fluxo oscilatório. Quando o escoamento é laminar a solução é análoga ao "Segundo Problema de Stokes", tendo sido resolvido por Schlichting (pág. 438) empregando o método de expansões assintóticas ou de aproximações sucessivas para o caso de um cilindro circular oscilando harmonicamente. Já, para o caso de escoamento turbulento o problema se torna sobremaneira mais complexo. Um possível método de solução envolveria, de acordo com

Myrhaug & Sand (1980), modelar-se o escoamento segundo os conceitos de comprimentos de mistura de Prandtl e tensão de cisalhamento de Reynolds. Qualquer que seja o método certamente sua apresentação fugiria ao escopo do presente trabalho, deixando-se portanto tal abordagem destinada a trabalhos futuros.

ANEXO X. EXEMPLOS DE LISTAGENS DE PROCESSAMENTO

Apresentam-se exemplos de listagens de processamento do sistema DERIV, relacionados aos resultados constantes do capítulo 8.

O objetivo do presente anexo tem caráter puramente ilustrativo, razão pela qual restringiu-se os exemplos apresentados às listagens resultantes do processamento do programa SODF, omitindo-se aqueles correspondentes aos programas CARGA e ONDA - FASE1 e FASE2.

O exemplo apresentado refere-se ao caso A (ver cap. 8) ($B/d = 2.0$; $h/d = 2.0$), frequência $\omega = 0.5$, com inclusão dos efeitos dissipativos de forças de natureza viscosa.

Exemplos mais amplos bem como o manual de utilização do sistema DERIV e as listagens dos programas computacionais correspondentes podem ser apreciados na referência [28]. Detalhes quanto aos algoritmos utilizados na aplicação do MCEF, na referência [25].

FORÇAS DE SEGUNDA ORDEM EM CORPOS CILINDRICOS

SECAO RETANGULAR $-B/D=2.0$, $H/B=1.0$

ROTINA :READ3

ENDERECO MAXIMO NECESSARIO = 19959

CARACTERISTICAS DA MALHA TRIANGULAR

PROFUNDIDADE	2.000
NUMERO DE NOS	161
ELEMENTOS	256
NOS NAS BORDAS	11
NOS NO CORPO	21
SUPERFICIES	2
DISTANCIA DAS BORDAS	1.800

CARACTERISTICAS DO PROBLEMA

ONDA (ADIMENSIONAL)	
NUMERO DE ONDA (K)386
FREQUENCIA (W)500
ANGULO DE INCIDENCIA	0.000 GRAUS

ANALISE

NUMERO DE TERMOS DA SERIE...	30
DE GRAUS DE LIB.....	3

ROTINA :SEAKP

ENDERECO MAXIMO NECESSARIO = 18301

FORÇAS DE SEGUNDA ORDEM EM CORPOS CILINDRICOS

X.3.

SECAO RETANGULAR -B/D=2.0, H/B=1.0

CARACTERISTICAS DA SECCAO (ADIMENSIONAIS)

ROCA	2.000
CALADO	1.000
COEF. AREA SECCIONAL	1.000
AREA	2.000
POS. VERT. DO CG (ZG)	-.250
ALTURA METACENTRICA (GM)083
RAIO MAXIMO.....	1.414
RAIO MEDIO.....	1.128

MATRIZ DE MASSA (ADIMENSIONAL)

	SWAY (1)	HEAVE (2)	ROLL (3)
SWAY (1)	2.0000	0.0000	.5000
HEAVE (2)	0.0000	2.0000	0.0000
ROLL (3)	.5000	0.0000	.6250

MATRIZ DE RESTAURACAO (ADIMENSIONAL)

	SWAY (1)	HEAVE (2)	ROLL (3)
SWAY (1)	0.0000	0.0000	0.0000
HEAVE (2)	0.0000	2.0000	0.0000
ROLL (3)	0.0000	0.0000	.1667

COTAS DA SECCAO (ORIGEM NA SUPERFICIE)

NO	X	Z
1	-1.000	0.000
2	-1.000	-.100
3	-1.000	-.200
4	-1.000	-.400
5	-1.000	-.600
6	-1.000	-.800
7	-1.000	-1.000
8	-.750	-1.000
9	-.500	-1.000
10	-.250	-1.000
11	0.000	-1.000
12	.250	-1.000
13	.500	-1.000
14	.750	-1.000
15	1.000	-1.000
16	1.000	-.800
17	1.000	-.600
18	1.000	-.400
19	1.000	-.200
20	1.000	-.100
21	1.000	0.000

FORÇAS DE SEGUNDA ORDEM EM CORPOS CILINDRICOS

SECAO RETANGULAR -B/D=2.0, H/B=1.0

RESULTADOS DO COMPORTAMENTO EM PRIMEIRA ORDEM

ADIMENSIONAIS

FREQUENCIA500
INCLINACAO DA ONDA (K0*A)	.063

MATRIZ DE MASSA ADICIONAL

	SWAY (1)	HEAVE (2)	ROLL (3)
SWAY (1)	2.2626	-.0000	.6701
HEAVE (2)	-.0000	1.5923	-.0000
ROLL (3)	.6701	-.0000	.3893

MATRIZ DE AMORTECIMENTO

	SWAY (1)	HEAVE (2)	ROLL (3)
SWAY (1)	1.1094	.0000	.3395
HEAVE (2)	.0000	1.1456	.0000
ROLL (3)	.2736	.0000	.1588

FORÇAS E MOMENTOS EXCITANTES- FUNCAO DE TRANSF.

	SWAY (1)	HEAVE (2)	ROLL (3)
GANHO (ADIM)	1.56	1.59	.384
FASE (GRAUS)	-153.	-112.	-153.

AMORTECIMENTO VISCOSO EM ROLL E SWAY

	ROLL	ROLL EM SWAY
TOTAL	.914E-01	.660E-01
VORTICIAL	.831E-01	.623E-01
ATRITO	.830E-02	.368E-02

MOVIMENTOS - FUNCAO DE TRANSFERENCIA

	SWAY (1)	HEAVE (2)	ROLL (3)
GANHO (ADIM)	1.39	1.28	2.67
FASE (GRAUS)	-12.7	-84.7	98.8

ADIMENSIONAIS SEGUNDO VUGTHS

FREQUENCIA500
INCLIN. DA ONDA (K0*A) ..	.063

AMORTECIMENTOS VISCOSOS EM ROLL E SWAY

	ROLL	ROLL EM SWAY
TOTAL	.1142E-01	.1649E-01
VORTICAL	.1038E-01	.1557E-01
ATRITO	.1038E-02	.9199E-03

MATRIZ DE COEFICIENTES DE MASSA ADICIONAL

	SWAY (1)	HEAVE (2)	ROLL (3)
SWAY (1)	1.1313	-.0000	.1675
HEAVE (2)	-.0000	.7962	-.0000
ROLL (3)	.1675	-.0000	.0487

MATRIZ DE COEFICIENTES DE AMORTECIMENTO

	SWAY (1)	HEAVE (2)	ROLL (3)
SWAY (1)	.5547	.0000	.0849
HEAVE (2)	.0000	.5728	.0000
ROLL (3)	.0684	.0000	.0199

ROTINA :COEF

ENDERECO MAXIMO NECESSARIO = 18677

FORÇAS DE SEGUNDA ORDEM EM CORPOS CILINDRICOS

X.6.

SECAO RETANGULAR -R/D=2.0, H/B=1.0

POTENCIAIS TOTAIS EM PRIMEIRA ORDEM

NA SUPERF. POSIT.

NO	REAL	IMAGINARIA
1	-.6484E+00	.5521E+00
2	-.6693E+00	.5198E+00
3	-.6881E+00	.4870E+00
4	-.7047E+00	.4535E+00
5	-.7189E+00	.4197E+00
6	-.7307E+00	.3855E+00
7	-.7402E+00	.3511E+00
8	-.7477E+00	.3166E+00
9	-.7541E+00	.2822E+00

NA SUPERF. NEGATIVA

NO	REAL	IMAGINARIA
1	-.7649E+00	-.4233E+00
2	-.7677E+00	-.4573E+00
3	-.7654E+00	-.4909E+00
4	-.7589E+00	-.5239E+00
5	-.7490E+00	-.5561E+00
6	-.7360E+00	-.5874E+00
7	-.7204E+00	-.6179E+00
8	-.7024E+00	-.6474E+00
9	-.6823E+00	-.6758E+00

NO CORPO

NO	REAL	IMAGINARIA
1	-.7541E+00	.2822E+00
2	-.7349E+00	.2750E+00
3	-.7162E+00	.2673E+00
4	-.6884E+00	.2524E+00
5	-.6787E+00	.2376E+00
6	-.7009E+00	.2226E+00
7	-.7964E+00	.2044E+00
8	-.9676E+00	.1139E+00
9	-.1032E+01	.3861E-01
10	-.1046E+01	-.3028E-01
11	-.1029E+01	-.9551E-01
12	-.9875E+00	-.1586E+00
13	-.9287E+00	-.2206E+00
14	-.8560E+00	-.2833E+00
15	-.7690E+00	-.3498E+00
16	-.7457E+00	-.3571E+00
17	-.7339E+00	-.3688E+00
18	-.7302E+00	-.3842E+00
19	-.7396E+00	-.4025E+00
20	-.7491E+00	-.4127E+00
21	-.7649E+00	-.4233E+00

COEFICIENTES DA SOLUCAO EM SERIE DE FOURIER

ORDEM	POSITIVA		NEGATIVA	
	REAL	IMAGINARIA	REAL	IMAGINARIA

0	.6386E-01	-.4612E-01	.9227E-01	-.1097E+00
1	-.2962E-01	-.3083E-02	-.4012E-01	-.3447E-02
2	.2490E-02	-.2033E-03	.2642E-02	.6466E-03
3	.1280E-03	.4940E-04	.8706E-03	.1807E-04
4	-.3428E-04	.5268E-05	-.1681E-03	-.2139E-04
5	-.3995E-04	-.2324E-05	-.8851E-04	-.9737E-05
6	.3450E-04	.3316E-05	.4848E-04	.5422E-05
7	.3236E-05	.2498E-05	.8534E-05	-.8032E-05
8	.3877E-04	.3125E-05	.5030E-04	-.3846E-05
9	.4341E-04	-.3825E-06	.5696E-04	-.1993E-05
10	-.1010E-04	-.1155E-05	.2323E-05	-.6632E-07
11	-.1509E-04	-.2177E-05	-.2361E-04	.8654E-05
12	-.6944E-04	-.4796E-05	-.9258E-04	.5156E-05
13	-.6440E-04	-.1738E-05	-.9014E-04	.1454E-04
14	-.7455E-04	-.5628E-05	-.9696E-04	.4693E-05
15	-.3111E-04	-.2493E-06	-.5023E-04	.1132E-04
16	-.3417E-04	-.3130E-05	-.5003E-04	-.5000E-05
17	.2541E-04	.4293E-05	.5170E-04	.5114E-05
18	.4184E-04	-.2870E-05	.5264E-04	-.9035E-06
19	-.2382E-04	-.4198E-05	-.3644E-04	-.9190E-05
20	-.1077E-05	.9018E-05	.1431E-05	.1229E-04
21	-.1953E-04	-.3374E-05	-.2982E-04	-.7437E-05
22	.2776E-04	-.1973E-05	.3484E-04	-.6969E-06
23	.1415E-04	.2362E-05	.2859E-04	.2845E-05
24	-.1519E-04	-.1388E-05	-.2217E-04	-.2248E-05
25	-.1115E-04	-.8979E-07	-.1805E-04	.4065E-05
26	-.2158E-04	-.1626E-05	-.2806E-04	.1368E-05
27	-.1496E-04	-.4114E-06	-.2093E-04	.3358E-05
28	-.1276E-04	-.8720E-06	-.1701E-04	.9687E-06
29	-.2246E-05	-.3240E-06	-.3496E-05	.1228E-05
30	-.1087E-05	-.1205E-06	.2887E-06	.1871E-07

ROTINA :FIM-POT1

ENDERECO MAXIMO NECESSARIO = 17694

ROTINA :READ4

ENDERECO MAXIMO NECESSARIO = 18658

SECAO

RESULTADOS DA SOLUCAO DO POTENCIAL DE SWAY EM FREQUENCIA NULA

NA SUPERF. POSIT.

NO	REAL	IMAGINARIA
1	.1665E+01	0.
2	.1700E+01	0.
3	.1741E+01	0.
4	.1789E+01	0.
5	.1844E+01	0.
6	.1908E+01	0.
7	.1981E+01	0.
8	.2065E+01	0.
9	.2159E+01	0.

NA SUPERF. NEGATIVA

NO	REAL	IMAGINARIA
1	-.2159E+01	0.
2	-.2065E+01	0.
3	-.1981E+01	0.

4	-.1908E+01	0.
5	-.1844E+01	0.
6	-.1789E+01	0.
7	-.1741E+01	0.
8	-.1700E+01	0.
9	-.1665E+01	0.

X.8.

NO CORPO

NO	REAL	IMAGINARIA
1	.2159E+01	0.
2	.2154E+01	0.
3	.2137E+01	0.
4	.2067E+01	0.
5	.1934E+01	0.
6	.1714E+01	0.
7	.1296E+01	0.
8	.8491E+00	0.
9	.5374E+00	0.
10	.2632E+00	0.
11	-.2915E-12	0.
12	-.2632E+00	0.
13	-.5374E+00	0.
14	-.8491E+00	0.
15	-.1296E+01	0.
16	-.1714E+01	0.
17	-.1934E+01	0.
18	-.2067E+01	0.
19	-.2137E+01	0.
20	-.2154E+01	0.
21	-.2159E+01	0.

COEFICIENTES DA SOLUCAO EM SERIE DE FOURIER

ORDEM	POSITIVA		NEGATIVA	
	REAL	IMAGINARIA	REAL	IMAGINARIA
0	-.2062E+01	0.	.2062E+01	0.
1	.2004E+00	0.	-.2004E+00	0.
2	-.8330E-02	0.	.8330E-02	0.
3	-.2629E-02	0.	.2629E-02	0.
4	.3008E-03	0.	-.3008E-03	0.
5	.3022E-03	0.	-.3022E-03	0.
6	-.2878E-03	0.	.2878E-03	0.
7	-.1047E-03	0.	.1047E-03	0.
8	-.2934E-03	0.	.2934E-03	0.
9	-.2442E-03	0.	.2442E-03	0.
10	.6591E-04	0.	-.6591E-04	0.
11	.1634E-03	0.	-.1634E-03	0.
12	.5111E-03	0.	-.5111E-03	0.
13	.4537E-03	0.	-.4537E-03	0.
14	.5438E-03	0.	-.5438E-03	0.
15	.2306E-03	0.	-.2306E-03	0.
16	.2571E-03	0.	-.2571E-03	0.
17	-.2508E-03	0.	.2508E-03	0.
18	-.1748E-03	0.	.1748E-03	0.
19	.2066E-03	0.	-.2066E-03	0.
20	-.1568E-03	0.	.1568E-03	0.
21	.1691E-03	0.	-.1691E-03	0.
22	-.1170E-03	0.	.1170E-03	0.
23	-.1370E-03	0.	.1370E-03	0.
24	.1143E-03	0.	-.1143E-03	0.
25	.8303E-04	0.	-.8303E-04	0.

26	.1577E-03	0.	-.1577E-03	0.
27	.1052E-03	0.	-.1052E-03	0.
28	.9387E-04	0.	-.9387E-04	0.
29	.2351E-04	0.	-.2351E-04	0.
30	.7323E-05	0.	-.7323E-05	0.

RESULTADOS ADICIONAIS

G.....	0.
MASSA ADICIONAL SWAY.....	.3833E+01
COEF. MASSA ADIC. (VUGHTS).....	.1917E+01

FORÇAS DE SEGUNDA ORDEM EM CORPOS CILINDRICOS.

SECAO RETANGULAR -B/D=2.0, H/B=1.0

RESULTADOS FINAIS

COEFICIENTES DE DIFRACAO

	REAL	IMAGINARIA
REFLEXAO (R).....	-.5781E-03	.1203E+00
TRANSMISSAO (T)...	.9836E+00	.6404E-01

COEFICIENTES DE FORÇA EM SWAY EM SEGUNDA ORDEM

CONTRIBUICAO DO POTENCIAL DE PRIMEIRA ORDEM

COM EFEITO DE PROFUNDIDADE (Q21).	.1223E-01
SEM EFEITO DE PROF. (R2/MARUO)...	.1447E-01

CONTRIBUICAO DO POTENCIAL DE SEGUNDA ORDEM

TOTAL (Q22).....	-.6325E-01
INTEGRACAO NO CORPO.....	-.5600E+00
INTEGRACAO NA SUPERFICIE.....	.4335E+00

RAZAO ESTIMADA SEG/PRIM ORDENS

RAZAO (ALFA)	-.1194E+01
BANDA ESPECTRAL ASSUMIDA2000E+00

CONSERVACAO DE ENERGIA

POTENCIA EM UM CICLO

POTENCIAL E CINETICA (R2+T2).....	.9860E+00
DISSIPADA POR ATRITO VISCOSO.....	.1396E-01
TOTAL.....	.1000E+01

ROTINA :KA

ENDEREÇO MÁXIMO NECESSÁRIO = 18301