TÓPICOS DE DINÂMICA NÃO-LINEAR

Celso P. Pesce

1996

RIMOGAL

TÓPICOS DE DINÂMICA NÃO-LINEAR

I. ASPECTOS TOPOLÓGICOS

1. Trajetórias de fase

O teorema de Estabilidade de Liapunov permite, na maioria das vezes, estabelecer critérios de estabilidade para sistemas não-lineares a partir de seus associados linearizados, estudando o seu comportamento na vizinhança de seus pontos singulares.

Considere o sistema linear:

$$\ddot{x} = a\dot{x} + bx + c \qquad (1)$$

com solução

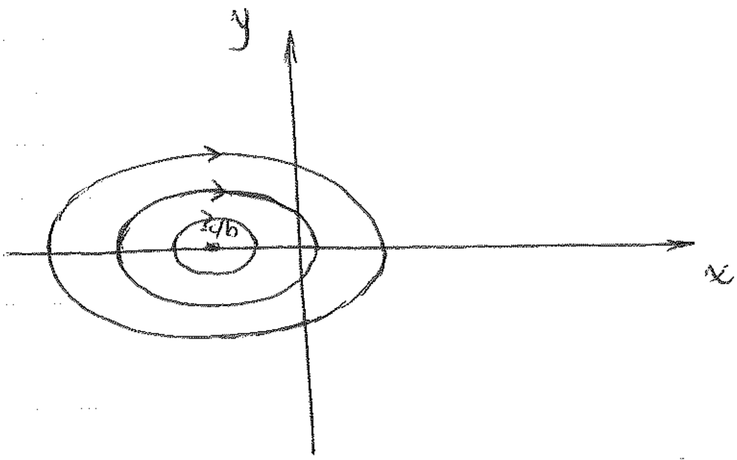
$$\begin{aligned} x &= f(t, x_0, y_0) \\ y = \dot{x} &= g(t, x_0, y_0) \end{aligned} \qquad (2)$$

Eliminando a variável t de (2) escrevemos

$$F(x, y, x_0, y_0) = 0 \qquad (3)$$

que representa uma curva no plano (x,y): o <u>PLANO DE FASE</u>.

As coordenadas do PLANO DE FASE são a posição e a velocidade do sistema. A equação (3) define as <u>curvas integrais</u> ou <u>trajetórias</u> do sistema.



VELOCIDADE DE FASE : $\qquad \underset{\sim}{u} = \dot{x}\,\underset{\sim}{i} + \dot{y}\,\underset{\sim}{j} = \dot{x}\,\underset{\sim}{i} + \ddot{x}\,\underset{\sim}{j} \qquad (4)$

VELOCIDADE DE FASE NULA $\leftrightarrow$ PONTO FIXO, OU CRÍTICO, OU DE EQUILÍBRIO

Em geral

$$\begin{aligned} \dot{x} &= X(x,y) \\ \dot{y} &= Y(x,y) \end{aligned} \qquad (5)$$

(sistemas dinâmicos autônomos a um grau de liberdade)

Assim:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)} = G(x,y) \qquad (6)$$

que define a tangente (inclinação) da trajetória de fase por (x,y).

Fornece a equação da trajetória de fase, independentemente do tempo.

MÉTODOS TOPOLÓGICOS : $\longrightarrow$ (6)

MÉTODOS ANALÍTICOS : $\longrightarrow$ (5)

<u>Ponto Singular</u>:

$(\bar{x},\bar{y})$: $X(\bar{x},\bar{y}) = Y(\bar{x},\bar{y}) = 0$ (7)

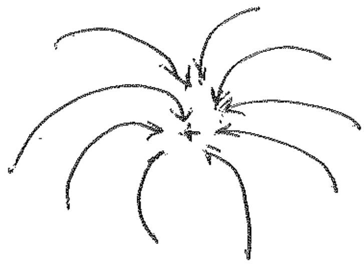
<u>Ponto Ordinário</u> : $\forall\ (x,y)$: $X(\bar{x},\bar{y})$ ou $(Y(\bar{x},\bar{y}) \neq 0)$

$G(\bar{x},\bar{y})$ se $(\bar{x},\bar{y})$ é singular é, obviamente, indeterminada.

<u>Teo. de Cauchy</u> : $\exists$ 1 única soluç̃ correspondente a um par (x_0,y_0) de c.i. nas vizinhanças das quais $X(x,y)$ e $Y(x,y)$ são analíticas.

$\therefore$ "um ponto singular é isolado", i.e., nenhuma outra trajetória passa por um ponto singular.

Uma trajetória pode, no máximo, tender a um ponto singular, levando um tempo infinito para atingi-lo.



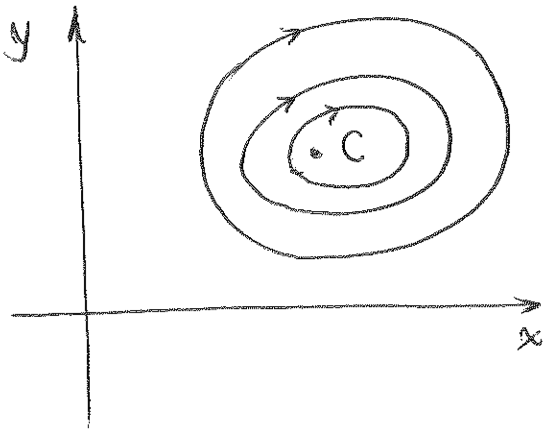
Um P.S. é uma trajetória degenerada.

As demais trajetórias, constituídas por <u>pontos ordinários</u>, são ditas <u>próprias</u>.

2. Classificação de Pontos Singulares

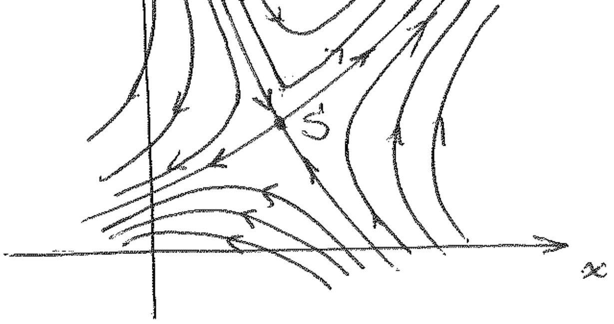
(i) Centro (C)

(a) as trajetórias em sua vizinhança são fechadas e incluem a singularidade
(b) existe um conjunto contínuo de trajetórias numa vizinhança de um centro.



(ii) Ponto de Sela (S) (*)

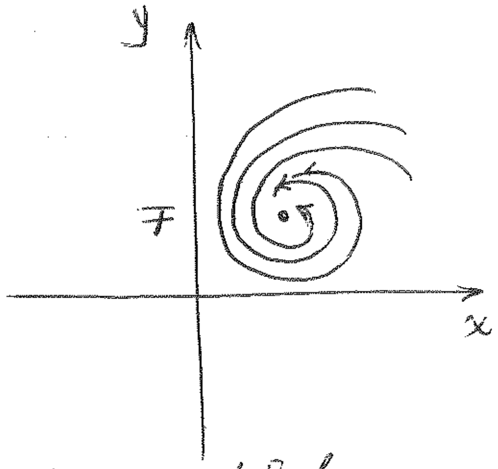
(a) existência de duas separatrizes que tendem (emergem) do ponto singular
(b) as quatro regiões isoladas definidas pelas separatrizes contêm conjuntos contínuos de trajetórias na vizinhança da singularidade



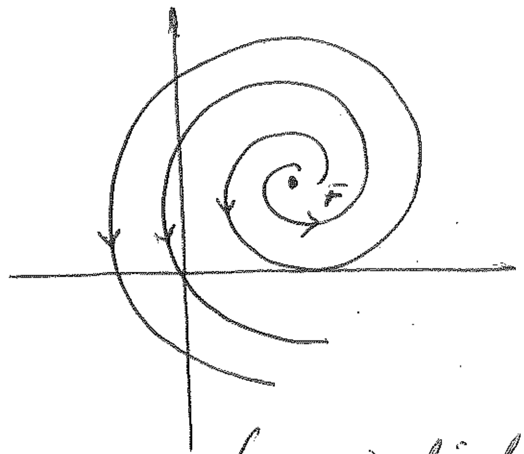
(*) "saddle point" ou ponto "hiperbólico"

(iii) Foco (F)

(a) um conjunto contínuo de trajetórias tende a um foco sem uma direção limite definida.
(b) distância ao foco cresce ou decresce monotonicamente



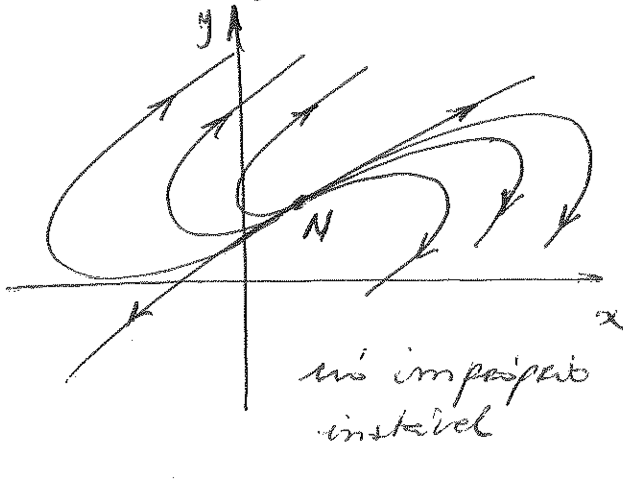
foco estável



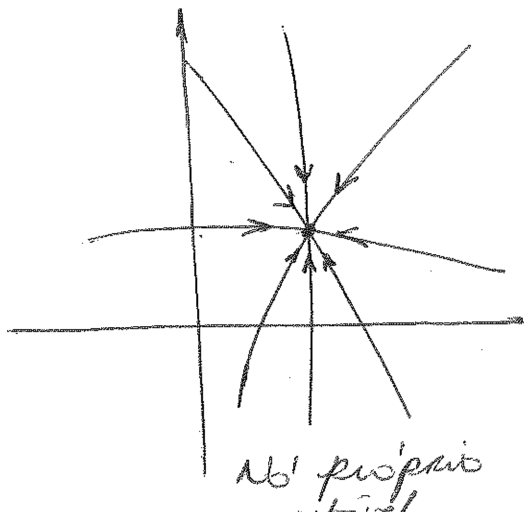
foco instável.

(iv) Nó ou Nodo (N)

(a) cada trajetória tende ao nó segundo uma direção bem definida que pode, eventualmente, ser única para todas as trajetórias.
(b) nó próprio: dada uma direção qualquer existe uma trajetória que tende ao nó com aquela direção



nó impróprio instável



Nó próprio estável

Exemplo : sistema linear

$$\dot{x} = ax + by$$

$$\dot{y} = cx + dy$$

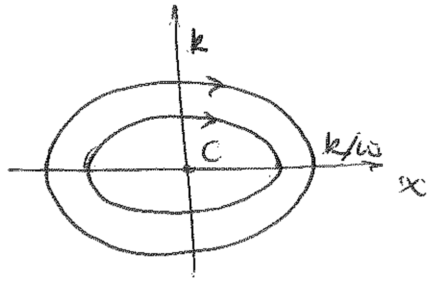
$D = ad - bc \neq 0$

P.S. $\rightarrow$ $(x,y) = (0,0)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + dy}{ax + by}$$

(i) $\dot{x} = y$ (oscilador linear)
$\dot{y} = -\omega^2 x$, $\omega^2 > 0$ (não amortecido)

$(x,y) = (0,0)$ é centro :



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{y}$$

$$y\,dy = -\omega^2 x\,dx$$

$y^2 + \omega^2 x^2 = k^2$: elipse de centro na origem

ou $\dfrac{y^2}{\omega^2 k^2} + x^2 = 1$: $(\text{semi-eixos})^2 = \cancel{\omega}k^2$ e k^2/ω^2

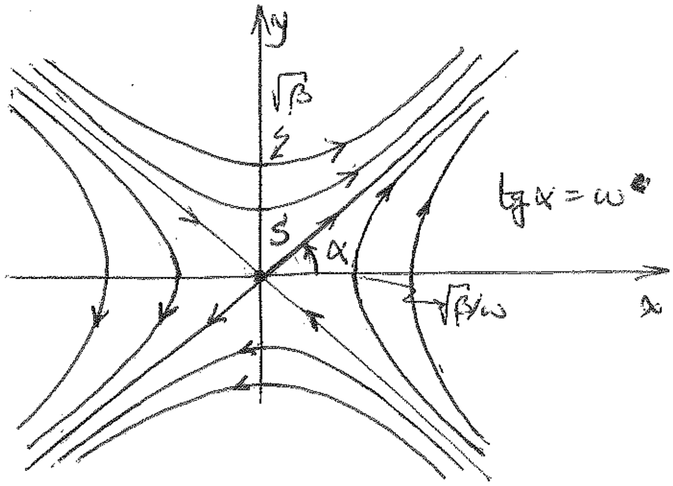
(ii) $\dot{x} = y$
$\dot{y} = \omega^2 x$, $\omega^2 > 0$

$(x,y) = (0,0)$ é ponto de sela

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{y} = G(x,y) = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)}$$

$$y^2/2 = \omega^2 x^2/2 + C \rightarrow y^2/2 - \omega^2 x^2/2 = C \rightarrow \frac{y^2}{\beta} - \frac{x^2}{\beta/\omega^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{\beta} - \frac{x^2}{\beta/\omega^2} = 1 \qquad \text{hipèrboles}$$



$x \to 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \to 0$
$y \neq 0$

$y^2 \to \beta;\ y \to \pm\sqrt{\beta}$

$y \to 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} \to \infty$
$x \neq 0$

1r quadrant: $y \neq 0,\ x \to 0^+ : \frac{dy}{dx} \to 0^+ ,\quad y \to +\sqrt{\beta}$

$x \neq 0,\ y \to 0^+ : \frac{dy}{dx} \to +\infty ,\quad x \to \sqrt{\beta}/\omega$

2n quadrant: $y \neq 0,\ x \to 0^- : \frac{dy}{dx} \to 0^- ,\quad y \to +\sqrt{\beta}$

$x \neq 0,\ y \to 0^+ : \frac{dy}{dx} \to -\infty ,\quad x \to -\sqrt{\beta}/\omega$

3r quadrant: $y \neq 0,\ x \to 0^- : \frac{dy}{dx} \to 0^+ ,\quad y \to -\sqrt{\beta}$

$x \neq 0,\ y \to 0^- : \frac{dy}{dx} \to +\infty ,\quad x \to -\sqrt{\beta}/\omega$

4t quadrant: $y \neq 0,\ x \to 0^+ : \frac{dy}{dx} \to 0^- ,\quad y \to -\sqrt{\beta}$

$x \neq 0,\ y \to 0^- : \frac{dy}{dx} \to -\infty ,\quad x \to +\sqrt{\beta}/\omega$

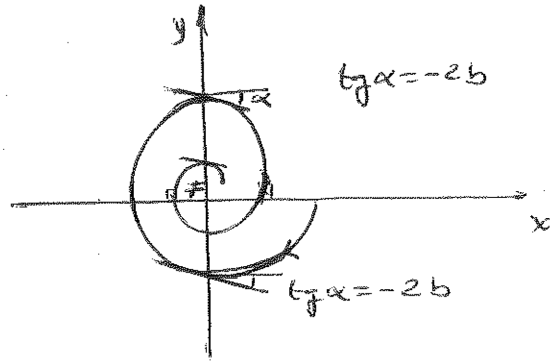
$$\beta \to 0 \Rightarrow y^2 \cong x^2\omega^2 \Rightarrow y \cong \pm\omega x$$

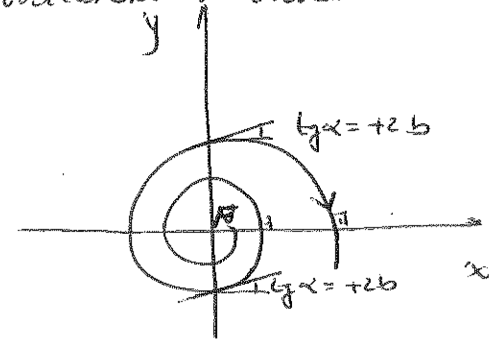
(iii) $\dot{x} = y$ (oscilador harmónico autónomo "amortecido")

$\dot{y} = -\omega^2 x - 2by$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x + 2by}{y} = -\omega^2 \frac{x}{y} - 2b$$

(a) $b^2 - \omega^2 < 0$ (soluções oscilatórias "amortecidas")





$b > 0$ $\quad (\bar{x}, \bar{y}) = (0,0)$ é Foco $\quad b < 0$

1º quadrante: $(x, y > 0)$

$x \neq 0, \; y \to 0^+$

$\frac{dy}{dx} \to -\infty$ $\qquad\qquad \frac{dy}{dx} \to -\infty$

2º quadrante: $(x<0, y>0)$

$y \neq 0, \; x \to 0^-$

$\frac{dy}{dx} \to 0^+ - 2b = -2b < 0$ $\qquad\qquad \frac{dy}{dx} \to 0^+ - 2b > 0$

3º quadrante $(x<0, y<0)$

$x \neq 0, \; y \to 0^-$

$\frac{dy}{dx} \to -\infty$ $\qquad\qquad \frac{dy}{dx} \to -\infty$

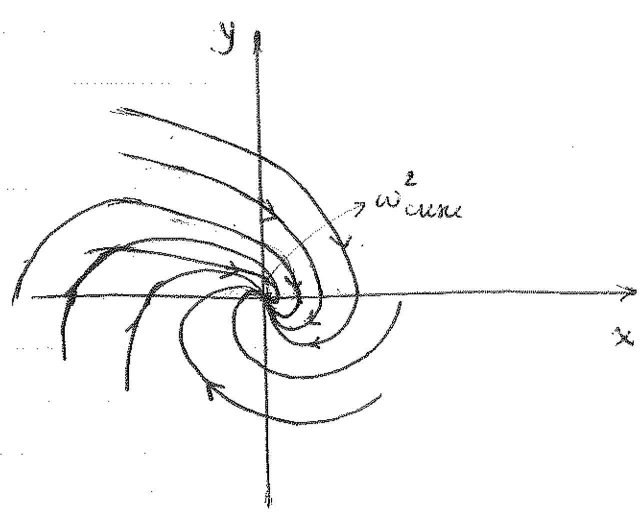
4º quadrante $(x>0, y<0)$

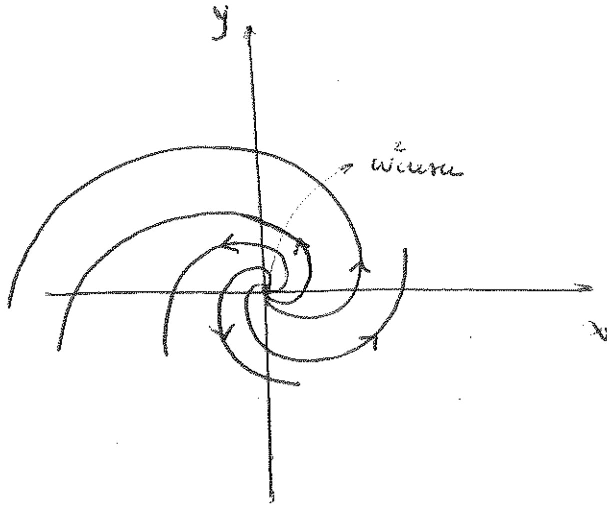
$y \neq 0, \; x \to 0^+$

$\frac{dy}{dx} \to 0^+ - 2b = -2b$ $\qquad\qquad \frac{dy}{dx} \to 0^+ - 2b > 0$

(b) $b^2-\omega^2>0$ (soluções exponenciais)

$(\bar{x},\bar{y})=(0,0)$ é <u>nó</u>





$b>0$	$b<0$
0: nó estável	0: nó instável

1º quadrante $x,y>0$

$x\neq 0,\ y\to 0^+$	$y\neq 0,\ x\to 0^+$	$x\neq 0\ y\to 0^+$	$y\neq 0,\ x\to 0^+$
$\frac{dy}{dx}\to -\infty^-$	$\frac{dy}{dx}\to 0^- -2b<0$	$\frac{dy}{dx}\to -\infty^+$	$\frac{dy}{dx}\to 0^- -2b>0$

2º quadrante $x<0,\ y>0$

$x\neq 0,\ y\to 0^+$	$y\neq 0,\ x\to 0^+$	$x\neq 0,\ y\to 0^+$	$y\neq 0,\ x\to 0^-$
$\frac{dy}{dx}\to +\infty^-$	$\frac{dy}{dx}\to 0^+ -2b<0$	$\frac{dy}{dx}\to +\infty^+$	$\frac{dy}{dx}\to 0^+ -2b>0$

3º quadrante $x<0,\ y<0$

$x\neq 0,\ y\to 0^-$	$y\neq 0,\ x\to 0^-$	$x\neq 0,\ y\to 0^-$	$y\neq 0,\ x\to 0^-$
$\frac{dy}{dx}\to -\infty^-$	$\frac{dy}{dx}\to 0^- -2b<0$	$\frac{dy}{dx}\to -\infty^+$	$\frac{dy}{dx}\to 0^- -2b>0$

4º quadrante $x>0,\ y<0$

$x\neq 0,\ y\to 0^-$	$y\neq 0,\ x\to 0^+$	$x\neq 0,\ y\to 0^-$	$y\neq 0,\ x\to 0^+$
$\frac{dy}{dx}\to +\infty^-$	$\frac{dy}{dx}\to 0^+ -2b<0$	$\frac{dy}{dx}\to +\infty^+$	$\frac{dy}{dx}\to 0^+ -2b>0$

3. Isóclinas

Em todo ponto ordinário, a família paramétrica (em a)

$$G(x,y) = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)} = \frac{dy}{dx} = a \qquad (8)$$

pode ser construída.

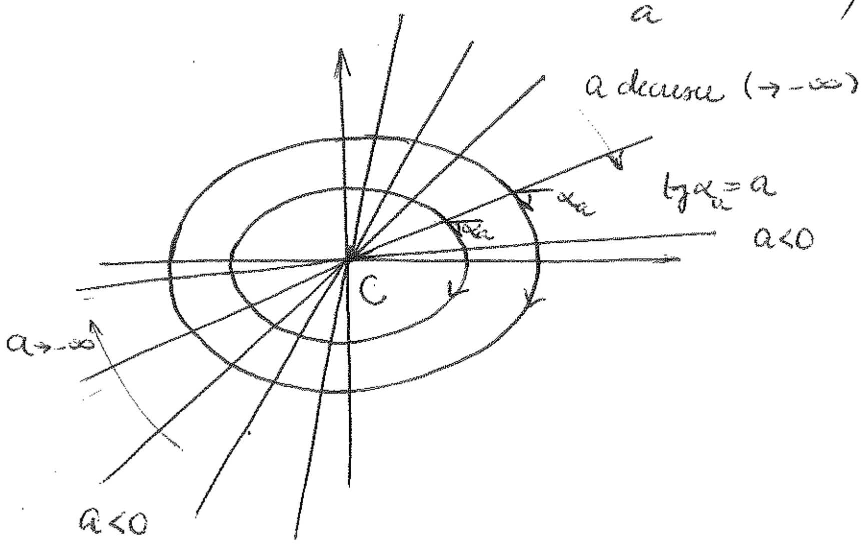
As trajetórias interceptam essa curva com inclinação constante e igual a a.

Exemplo (3.i) oscilador linear não-amortecido

$$G(x,y) = \frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 x}{y} = a \quad , \text{ origem : centro}$$

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{x^2}{\frac{\beta^2}{\omega^2}} = 1 \qquad \text{trajetórias elípticas}$$

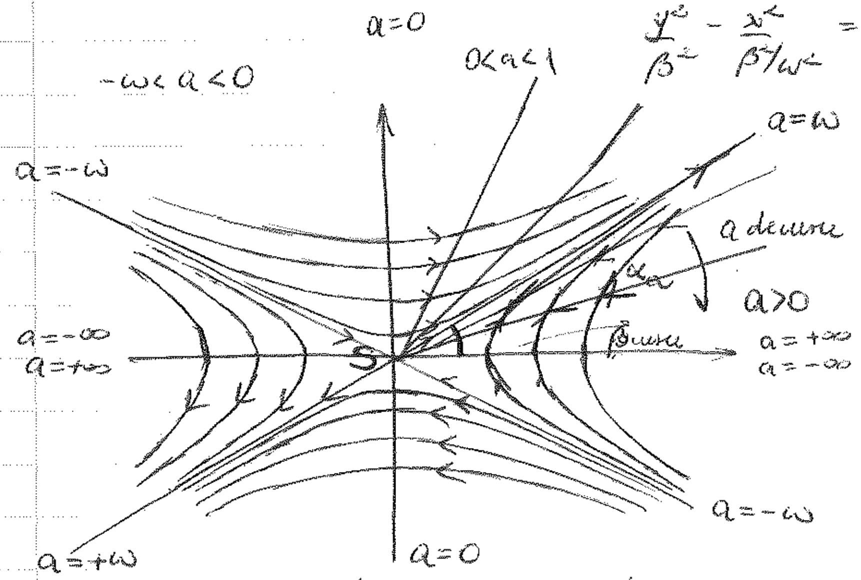
$$G(x,y) = a \Rightarrow \quad y = -\frac{\omega^2}{a} x \qquad \text{família de retas}$$



Sugestão: trace as isóclinas para os exemplos ~~(ii)~~, (iii)

Exemplo (3.ii) $\quad G(x,y) = \frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2 x}{y} = a$: rectas $y = \frac{\omega^2}{a} x$

$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{x^2}{\beta^2/\omega^2} = 1$ hipérboles



α : $tg\,\alpha = \omega$: $a = \omega$

α_a : $tg\,\alpha_a = a$

assíntota: $a = \pm\omega$

4. <u>Trajectórias de fase de Sistemas Conservativos</u>

Sistemas conservativos a um grau de liberdade:

$$\ddot{x} = f(x) \qquad (9)$$

$f(x) \in \mathbb{R}$, analítica

Integral primeiro de energia:

$$\dot{x}\ddot{x} = \dot{x} f(x)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x}^2) = \dot{x} f(x)$$

$$d(\dot{x}^2) = 2\,\dot{x} f(x)\,dt$$

$$d\,y^2 = 2\,f(x)\,dx$$

$$y^2 = 2\int f(x)dx + E$$

definindo
$$V'(x) = -f(x)$$

tal que
$$\int f(x)\,dx = V(x)$$

temos :

$$\frac{1}{2}y^2 + V(x) = E \qquad (10)$$

É, portanto, possível construir a totalidade das curvas no plano de fase.

E é um parâmetro (no caso a energia mecânica total do sistema).

A velocidade de fase é dada por:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + f^2(x) = y^2 + f^2(x)$$

$$v^2 = y^2 + f^2(x) \qquad (11)$$

<u>Propriedades</u>:

(a) as trajetórias interceptam o eixo x em ângulo reto.

de fato, $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/dt}{dx/dt} = \dfrac{\ddot{x}}{y} = \dfrac{f(x)}{y}$

$$\lim_{y\to 0} \frac{dy}{dx} = \infty$$

(b) as trajetórias de fase tem tangentes horizontais nos pontos de zero de $f(x)$ a menos que, nesses pontos, não atravessem o eixo x.

de fato: seja $\bar{x}_i$ t.q. $f(\bar{x}_i)=0$

assim $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{xi} = 0$, desde que atravessem o eixo x em x_i

(c) O teorema de Cauchy se aplica em todos os pontos exceto $(x_i;0)$ para os quais $f(x_i)=0$ (posto que $\frac{dy}{dx}$ não ficará definida)

(d) Os pontos singulares correspondem aos pontos de equilíbrio e neles a velocidade de fase é nula.

De fato: $f(x) = -V'(x)$ e se

$f(\bar{x})=0$ e $y=y_0=0$, $\dot{x}=0 \Rightarrow$ ponto de equilíbrio, pois $\dot{y}=0$ ou seja.

$$v^2 = y^2 + f^2(x) = 0 \quad \text{se e só se!} \quad \begin{array}{l} y=\dot{x}=0 \\ \text{e } f(x)=0 \end{array}$$

porém $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{y}$ e $f(x)=0$ e $y=0$

definem os pontos singulares do sistema.

(e) Os movimentos possíveis são restritos à condição

$$E - V(x) \geqslant 0$$

De fato: , de (10):

$$y^2 = 2\big(E - V(x)\big)$$

que apenas terá soluções reais se $E - V(x) \geq 0$.

(f) Nos pontos de equilíbrio $V(x)$ tem um extremo.

De fato: seja $x = \bar{x}_i$ t.q. $f(\bar{x}_i) = 0$

os pontos de equilíbrio localizam-se sempre na reta $y=0$ e portanto

$$P_i = (\bar{x}_i, 0)$$

porém $f(x) = -V'(x)$

e portanto $V'(\bar{x}_i) = 0 \Rightarrow V(x)$ tem ~~um~~ extremos nos pontos de equilíbrio.

Obs: Do ponto de vista da mecânica analítica $\mathcal{L} = T - V$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \qquad \text{(eq. de Euler-Lagrange)}$$

Se $T = g(\dot{x}) = g(y)$
e $V'(x) = -f(x)$

$$\frac{\partial T}{\partial q} = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial V}{\partial \dot{q}} = 0$$

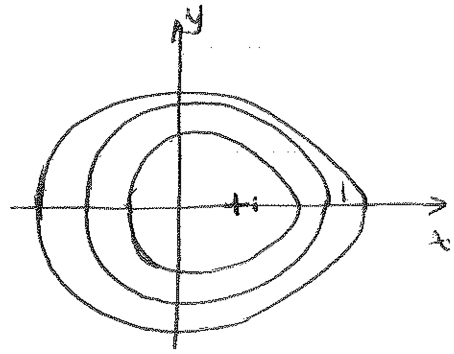
assim:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

equilíbrio implica em $\frac{\partial V}{\partial x} = 0 = V'(x)$

(g) As trajetórias de fase são simétricas em relação ao eixo x.



De fato:

$$y^2 = 2(E - V(x))$$

logo $\quad y = \pm\sqrt{2(E-V(x))}$

função par em relação a y

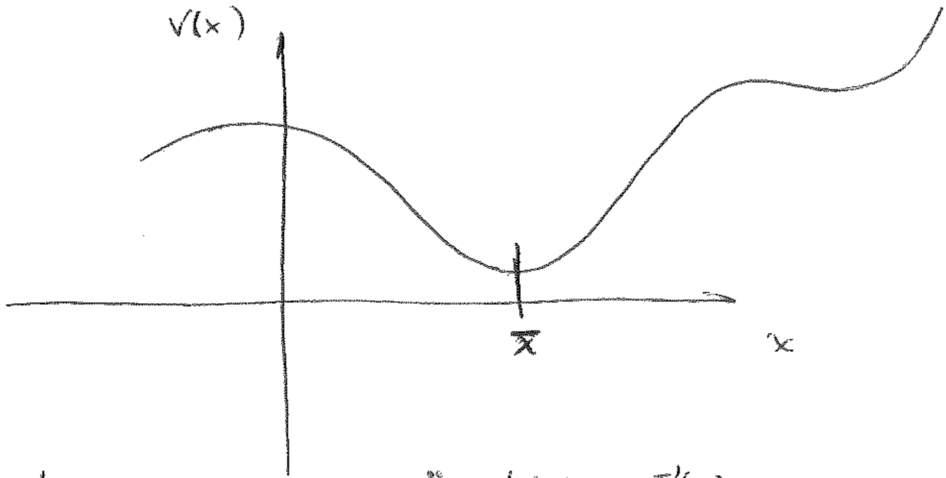
Como $\frac{dy}{dx} = \infty$ em $y = 0$ então depreendemos que as trajetórias são <u>necessariamente</u> <u>fechadas</u>.

Aliás esta é uma consequência imediata da conservação de energia.

(h) Se $V(x)$ tem em $x = \bar{x}$ um mínimo isolado $(\bar{x}, 0)$ é um centro.

De fato: $\quad V'(x) = 0 \rightarrow$ implica em equilíbrio

e $\quad V''(x) > 0$ implica em $V(x)$ ter um mínimo isolado.



$V'(\bar{x}) = 0$

$$\ddot{x} = f(x) = -V'(x)$$

$$\ddot{x}\Big|_{x=} \cong f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) = f(\bar{x}) - V''(\bar{x})(x-\bar{x})$$

$\therefore$ localmente $(x \sim \bar{x})$

$$\ddot{x} \sim -V''(\bar{x})(x-\bar{x})$$

Se $x > \bar{x}$, $\ddot{x} < 0$ se $V''(\bar{x}) > 0$

$\ddot{x} > 0$ se $V''(\bar{x}) < 0$

<u>Exemplo</u> 1 : pêndulo simples

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

1º integral de energia:

$$\dot{\theta}\,\ddot{\theta} + \dot{\theta}\,\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d(\dot{\theta}^2)}{dt} = -\dot{\theta}\,\frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$\int d\dot{\theta}^2 = -2\,\frac{g}{l}\int \mathrm{sen}\,\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,dt$$

$$\dot{\theta}^2 = -2\,\frac{g}{l}\int \mathrm{sen}\,\theta\,d\theta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = E - V(\theta) \qquad V(\theta) = \frac{g}{l}\int \mathrm{sen}\,\theta\,d\theta = -\frac{g}{l}\cos\theta$$

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = E + \frac{g}{l}\cos\theta$$

ou $$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \omega^2(\cos\theta + \lambda)$$

com $\omega^2 = \frac{g}{l}$ e $\lambda = \frac{E}{\omega^2} = E\frac{l}{g}$

Nota: (i) $E - V(\theta) \geq 0 \Rightarrow E \geq -g/l$ caso contrário $\dot{\theta}^2 < 0$ (e não há soluções reais)

(ii) Se $-g/l < E < g/l$ as trajetórias são fechadas em torno dos centros $C_i = (2n\pi; 0)$

pois $\dot{\theta}^2 = 2\omega^2 (\cos\theta + \lambda)$ $|\lambda| < 1$

e $\dot{\theta} = 0$ para $\theta = \arccos(-\lambda) \Rightarrow$ as trajetórias cruzam o eixo θ (portanto em ângulo reto) e são fechadas dada a simetria (conforme (g)) $\left(2\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}\right) = -2\omega^2 \operatorname{sen}\theta$

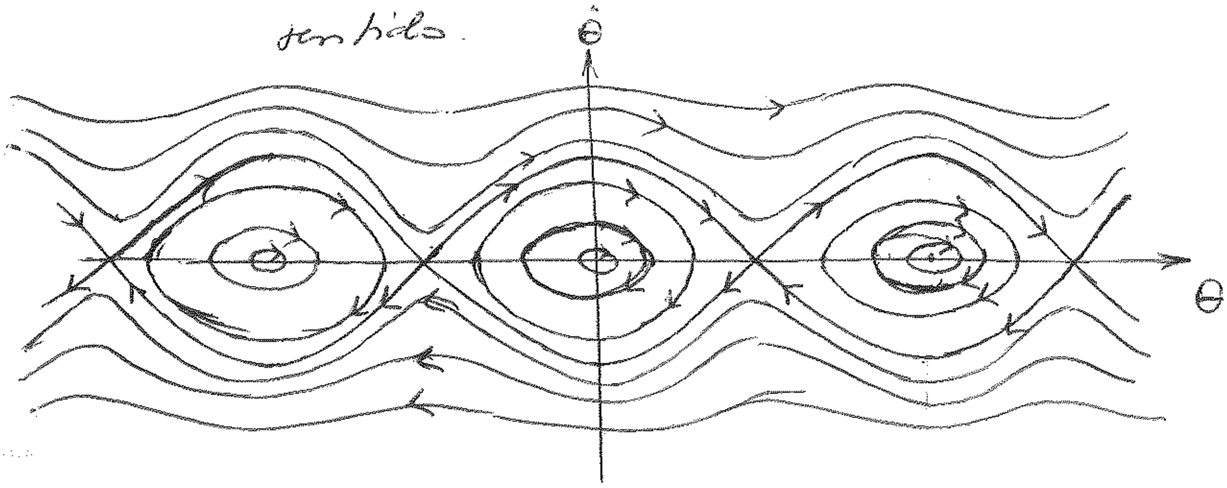
(iii) Se $E = g/l$ $(\lambda = 1)$ temos a equação das separatrizes:

$$\dot{\theta}^2 = 2\omega^2 (\cos\theta + 1)$$

e teremos $\dot{\theta} = 0$ apenas se $\theta = (2n-1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$, pontos de sela $(S_i) \equiv ((2n-1)\pi; 0)$

as trajetórias tendem aos pontos de sela

(iv) Se $E > g/l$ $(\lambda > 1)$, não existe θ para o qual $\dot{\theta} = 0$. Neste caso o pêndulo fica girando continuamente (porém com velocidade angular que oscila em torno de uma média) em um ou outro sentido.



Retornando à análise mais geral do problema de sistemas conservativos a um grau de liberdade, verificamos que, se

$$y^2 = 2\left[E - V(x)\right] \quad , \quad E - V(x) \geq 0$$

então $\quad \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = y = \pm \sqrt{2\,(E - V(x))} \qquad (12)$

que implica em

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2\,(E - V(x))}}$$

ou seja

$$t = \pm \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2\,(E - V(x))}} + t_0 \qquad (13)$$

(em geral $t_0 \equiv 0$, sem perda de generalidade)

Voltando ao problema do pêndulo, novamente, no caso $|\lambda| < 1$ vemos imediatamente que se $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow$

$$\cos\theta_0 = -\lambda \Rightarrow \theta_0 = \pm \arccos(-\lambda) = \mp \arccos(\lambda)$$

$|\theta_0| = \arccos \dfrac{E\ell}{g}$ é portanto a amplitude de oscilação do pêndulo.

O período de oscilação pode ser escrito então,

$$T = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\,(E - V(\theta))}} = 4 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\,(E + \frac{g}{\ell}\cos\theta)}}$$

ou seja

$$T = 4\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{2\frac{g}{l}(\lambda+\cos\theta)}} = \frac{4}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{(\lambda+\cos\theta)}}$$

mas $\lambda = -\cos\theta_0$ logo

$$T = \frac{4}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$$

, lembrando

ainda que $T_L = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ é o período natural do pêndulo - linear.

$$T = \frac{2}{\pi}\frac{T_L}{\sqrt{2}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$$

mas, fazendo $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \operatorname{sen}\frac{\theta_0}{2}\cdot\operatorname{sen}\beta$

temos

$$T = \frac{2}{\pi}\frac{T_L}{\sqrt{2}}\int_0^{\pi/2}\frac{d\beta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{\theta_0}{2}\operatorname{sen}^2\beta}} \quad (*)$$

que é uma integral elíptica completa de 1ª espécie.

É notável, como se observa, que T aumenta à medida que θ_0 aumenta.

(*) →

Exemplo 2 : oscilador cúbico

$$\ddot{x} = f(x) = -(\alpha x + \beta x^3) \quad , \alpha > 0$$

Com $y = \dot{x}$ a integral primeira de energia fica:

$$y^2 = 2\,(E - V(x))$$

onde $V'(x) = -f(x) = +(\alpha x + \beta x^3)$

ou seja

$$V(x) = +\frac{\alpha}{2}x^2 + \frac{\beta}{4}x^4$$

$$y^2 = 2\left(E - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\beta}{4}x^4\right) = 2E - \alpha x^2 - \frac{\beta}{2}x^4$$

Fazendo $\dot{x} = y = 0$, $x = a$

$$\frac{\beta}{2}a^4 + \alpha a^2 - 2E = 0$$

$$a^2 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta E}}{\beta} \qquad (\text{apenas } +)$$

é a equação que fornece a máxima amplitude de deslocamento, obviamente restrita ao caso em que

$$\alpha^2 + 4\beta E > 0$$

i.e. $4\beta E > -\alpha^2 \Rightarrow -4\beta E < \alpha^2 \Rightarrow -\beta < \frac{\alpha^2}{4E}$ (*)

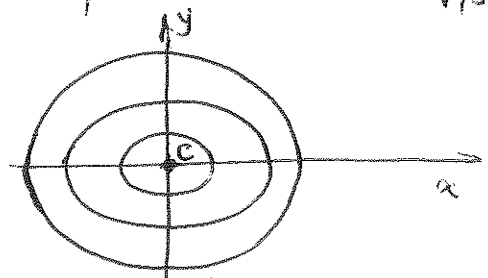
Se $\beta > 0$: "hard spring"
$\beta < 0$: "soft spring"

(i) Se $\beta > 0$: condição (*) sempre satisfeita

(ii) Se $\beta < 0$: condição (*) satisfeita se

$|\beta| < \alpha^2/4E$, caso contrário não há trajetórias fechadas.

(i) $\beta > 0$ $f(x) = 0 \Rightarrow$ $\bar{x} = 0$ ou $\beta x^2 + \alpha = 0 \Rightarrow \bar{x} = \pm i\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$



$\bar{x} = 0$: é centro (C)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\alpha x + \beta x^3}{y}$$

note que a tangente é sempre infinita em $y = 0$.

(ii) $\beta < 0$: fazendo $-\beta = \rho^2$:

$\therefore$ $y^2 = 2E - \alpha x^2 + \frac{\rho^2}{2} x^4$ ou

$$y^2 + \alpha x^2 - \frac{\rho^2}{2} x^4 = 2E$$

Se $|\beta| = \rho^2 = \frac{\alpha^2}{4E}$; separatrizes

$$y_s^2 + \alpha x^2 - \frac{\alpha^2}{4E}\frac{x^4}{2} = 2E_s$$

$$y_s^2 + \alpha\left(x^2 - \frac{\alpha}{8E_s} x^4\right) = 2E_s$$

pontos de sela : $\bar{x} = \pm\sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}} = \pm\sqrt{\frac{4\alpha E_s}{\alpha^2}} = \pm 2\sqrt{\frac{E_s}{\alpha}}$

$\boxed{E_s = -\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\beta}}$ $\boxed{E_s = \frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\rho^2}}$

Mas pelo $y_s = 0$, $x = x_s = \bar{x} = \pm 2\sqrt{\frac{E}{\alpha}}$

$$\alpha\left(\bar{x}^2 - \frac{\alpha}{8E}\bar{x}^4\right) = 2E_s$$

$$\alpha\left(4\frac{E_s}{\alpha} - \frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{8}\cancel{E}}\,16\frac{E_s^{\cancel{2}}}{\alpha^{\cancel{2}}}\right) = 2E_s$$

$$\alpha\left(4\frac{E_s}{\alpha} - 2\frac{E_s}{\alpha}\right) = 2E_s$$

$$2E_s = 2E_s \quad \text{e está verificado!!}$$

Se fizermos $x_0 = 0$ em y_s calculamos

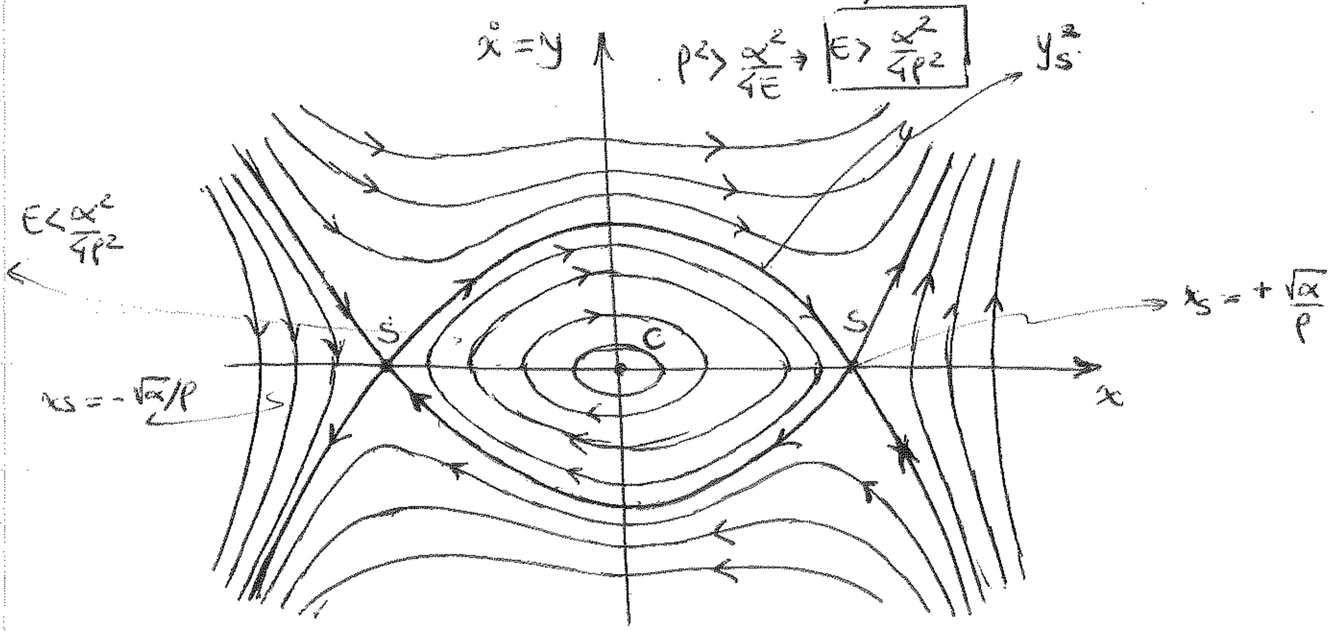
$$y_{s_0}^2 = 2E_{s_0}$$

$$y_{s_0}^2 = \dot{x}_{s_0}^2 = 2\frac{1}{4}\frac{\alpha^2}{\rho^2} = \frac{\alpha^2}{2\rho^2}$$

logo

$$y_{s_0} = \dot{x}_{s_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\alpha}{\rho}$$

é a "velocidade de escape".



A equação de separatriz fica portanto dada por

$$y_s^2 = 2E_s - \alpha\left(x^2 - \frac{\alpha}{8E_s}x^4\right)$$

$$y_s^2 = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \alpha\left(x^2 - \frac{\alpha}{\frac{8}{4}\frac{\alpha^2}{\beta^2}}x^4\right)$$

$$y_s^2 = \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\beta^2} - \alpha\left(x^2 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\frac{\alpha}{2}x^4\right)$$

$$\boxed{y_s^2 = -\alpha x^2 + \frac{\beta^2}{2}x^4 - \frac{1}{2}\frac{\alpha^2}{\beta^2}}$$

O período de oscilação por sua vez fica

$$T = 4\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2(E - V(x))}} = 4\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2\left(E - \frac{\alpha x^2}{2} - \frac{\beta x^4}{4}\right)}}$$

$$= 4\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2E - \alpha x^2 - \frac{\beta x^4}{2}}}$$

mas como a^2 é raiz de $2E - (\alpha z + \beta z^2/2) = 0$, podemos escrever:

$$2E - (\alpha x^2 + \beta x^4/2) = \frac{\beta}{2}(a^2 - x^2)(b^2 + x^2)$$

com

$$\frac{\beta}{2}(-b^2 + a^2) = -\alpha \quad \text{ou} \quad \beta b^2 = \beta a^2 + 2\alpha$$

tomando agora $x = a\,\text{sen}\,\theta$

$$2E - (\alpha x^2 + \beta x^4/2) = \frac{\beta}{2}(a^2 - x^2)(b^2 + x^2) = \frac{\beta}{2}a^2(1 - \text{sen}^2\theta)(b^2 + a^2\text{sen}^2\theta) =$$

$$\Rightarrow \quad dx = a\cos\theta\, d\theta$$

$$\frac{dx}{\sqrt{2E - \alpha x^2 - \frac{\beta x^4}{2}}} = \frac{a\cos\theta\, d\theta}{a\cos\theta\sqrt{\frac{\beta}{2}(b^2 + a^2\operatorname{sen}^2\theta)}} =$$

$$= \frac{d\theta}{\sqrt{\frac{\beta a^2 + 2\alpha}{2} + \frac{\beta a^2 \operatorname{sen}^2\theta}{2}}} = \sqrt{2}\,\frac{d\theta}{\sqrt{\beta a^2 + 2\alpha + \beta a^2 \operatorname{sen}^2\theta}}$$

$$\therefore \quad T = 4\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{2\alpha + \beta a^2(1+\operatorname{sen}^2\theta)}}$$

Se $\beta = 0 \rightarrow$ oscilador linear $\quad T_L = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2\alpha}}\,\pi/2$

$$\boxed{T_L = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha}}}$$

Se $\beta \neq 0$ o período depende da amplitude da oscilação

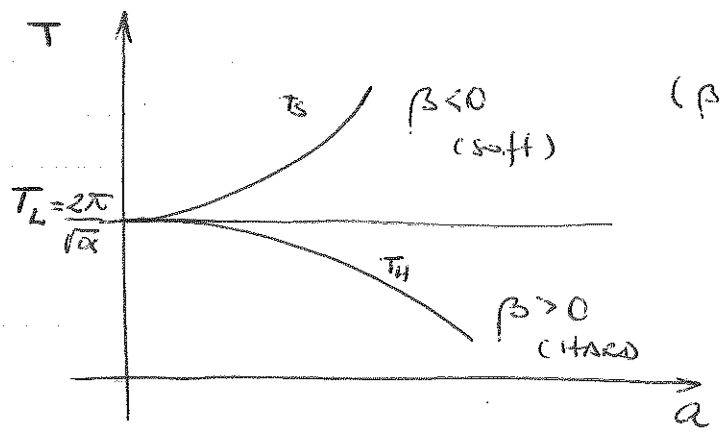
(i) $\beta > 0$: "hard spring"

$$T_H < T_L$$

(ii) $\beta < 0$: soft spring

$$T_S > T_L$$

Note que se $|\beta| > \frac{\alpha^2}{4E}$ não há trajectórias fechadas e a expressão do período perde o significado



5. Sistema Conservativo função de um parâmetro

Seja um sistema parametrizado em p

$$\ddot{x} = f(x,p) = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (14)$$

No entanto, se $V(x)$ é mínimo em (*) um certo $x=\bar{x}$, o equilíbrio é estável, e instável se $V(\bar{x})$ for um extremo porém não-mínimo.

$$f(x) = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{é suposta } C^1$$

A "topologia" do espaço de fase, ou seja a estrutura topológica é dependente do parâmetro p.

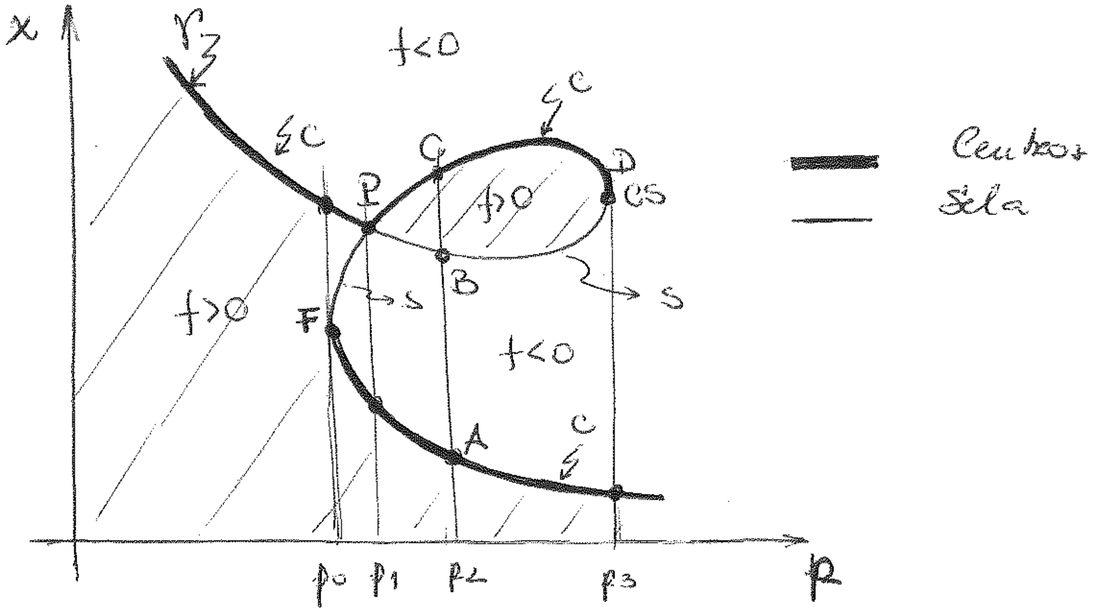
Os valores ordinários de p são aqueles correspondentes a trajetórias de mesma família. (exemplo conjunto de trajetórias fechadas ao redor de um centro: ilha de trajetórias). Uma variação contínua de p traz uma variação contínua de trajetórias sem mudanças radicais na estrutura topológica.

(*) vale apenas p/ 1 grau de liberdade (pontos sing. isolados)

Podem existir valores p_i do parâmetro p para os quais a estrutura topológica muda bruscamente: são os valores críticos.

Tomemos a equação definidora dos pontos de equilíbrio

$$f(x,p) = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0 \qquad (15)$$



CS - centro-sela ou cúspide $V_{xx}=0$ (instável)

C - $V_{xx}>0$ ($f_x<0$) - centros (estável)

S - $V_{xx}<0$ ($f_x>0$) - sela (instável)

logo:

$f(x,p) = 0$ define os pontos singulares

$f_x(x,p)$ define a estabilidade

Tomando (15) e diferenciando em relação p:

$$df = f_x \, dx + f_p \, dp$$

$$\frac{df}{dp} = f_x \frac{dx}{dp} + f_p$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{1}{f_x} \left(\frac{df}{dp} - f_p \right)$$

mas $f(x,p) = 0$ é a equação analisada, então:

$$\frac{dx}{dp} = - \frac{f_p}{f_x}$$

No ponto C-S (um centro e um ponto de sela coalescem dando origem a uma cúspide) temos $f_x(x_{cs}, p_s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_{cs}, p_s) = 0$ e portanto a tangente é vertical.

Isto significa que $f(x,p) = 0$ tem um zero duplo em (x_{cs}, p_s).

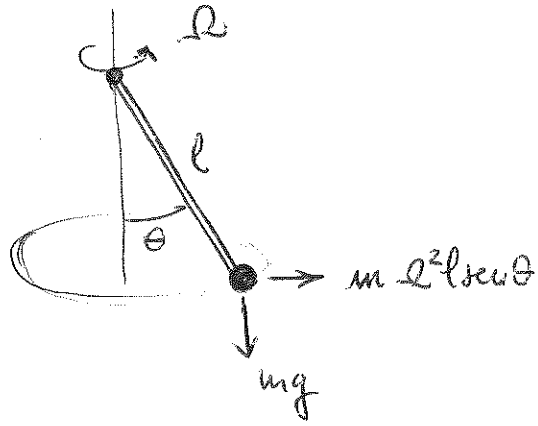
Em $P \equiv (x_p, p_1)$ tanto f_p quanto f_x se anulam

Critério de Poincaré

"Se a região na qual $f(x,p) > 0$ está abaixo da curva $f(x,p) = 0$, o equilíbrio é estável. Se estiver acima da curva, o equilíbrio é instável"

"Os pontos de equilíbrio em sistemas conservativos sempre aparecem e desaparecem aos pares e o desaparecimento sempre resulta de coalescência de um centro com um ponto de sela".

Exemplo 1: pêndulo esférico



$$m\ell^2\ddot{\theta} - m\Omega^2\ell^2(\cos\theta - p)\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \qquad \text{(E.D.O. mov. relativo)}$$

$$p = \frac{g}{\Omega^2\ell} \qquad \text{note que} \quad p = \frac{\omega_L^2}{\Omega^2} \qquad \omega_L^2 = \frac{g}{\ell}$$

ou

$$\ddot{\theta} - \Omega^2(\cos\theta - p)\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

seja

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta} = \Omega^2(\cos\theta - p)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

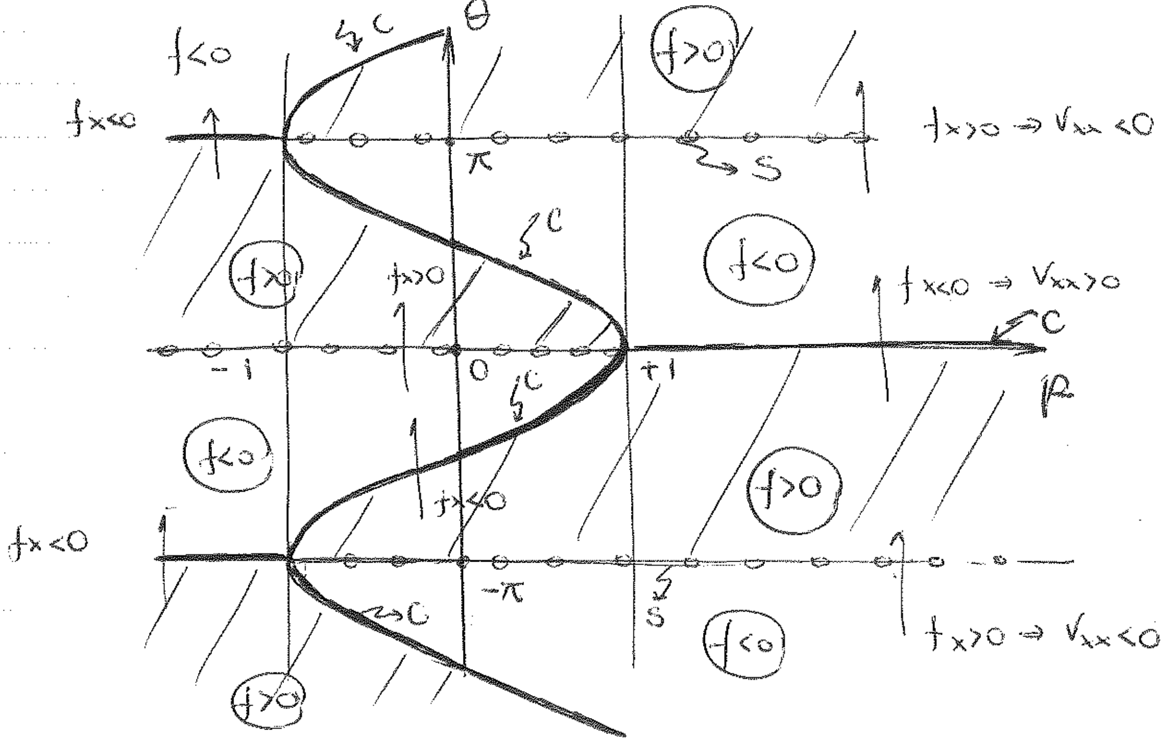
$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{\Omega^2}{\omega}(\cos\theta - p)\,\mathrm{sen}\,\theta = f(\theta, p, \Omega) = f(\theta, p)$$

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{\omega_L^2}{\omega}\,\frac{1}{p}\,(\cos\theta - p)\,\mathrm{sen}\,\theta$$

pontos de equilíbrio dados por:

$$f(\theta, p) = 0 \qquad \text{ou seja}$$

$$\theta = 0, \pm\pi, \ \arccos p \qquad (\text{na realidade } \pm n\pi)$$



Integral de energia:

$$\frac{1}{2}\omega^2 - \Omega^2\left\{\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta + p\cos\theta\right\} = E$$

separatriz passa por $(\theta = \pm\pi; \omega = 0)$ e $(\theta = 0, \omega = 0)$ (pontos de sela)

$$\therefore \qquad \omega_s^2 = \Omega^2\left[\operatorname{sen}^2\theta + 2p(\cos\theta \pm 1)\right]$$

OBS: na realidade $p > 0$ é praticamente constante

LISTA DE EXERCÍCIOS #01.

1. ESBOÇAR AS TRAJETÓRIAS DE FASE DO PÊNDULO ESFÉRICO REGIDO PELA E.D.O.

$$\ddot{\theta} - \Omega^2(\cos\theta - p)\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \quad ; \quad p = g/(\Omega^2 \ell)$$

para p: $<1, -1, 0, +1, >+1$

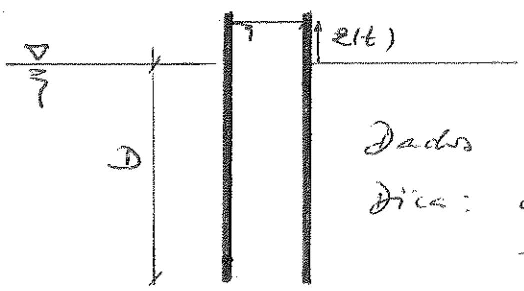
2. Um ponto material de peso mg move-se sem atrito sobre uma parábola $z = \frac{x^2}{2a}$ que gira com velocidade angular Ω em torno do eixo vertical z. Sendo o parâmetro $p = \frac{g}{a} - \Omega^2$, estudar a estrutura topológica do movimento.

3. PROBLEMA 2, Ferraz & Cintra do Prado, pg. 50 -

4. PROBLEMA 10, F.&C-P., pg. 61

5. PROBLEMA 11, F&C-P, pg. 61

6. Um tubo aberto é fixo em uma plataforma e mergulhado com calado D. O raio do tubo é R. Escreva a E.D.O. que descreve o movimento da coluna líquida dentro do tubo. Considere apenas o sistema autônomo. Discuta as singularidades e estude a estrutura topológica do movimento. Desconsidere toda e qualquer dissipação, mesmo aquela associada à formação de ondas de superfície. Determine também a frequência natural do sistema linearizado.



Dados g, D, R, ρ

Dica: modele o movimento da coluna líquida através de 1 único grau de liberdade $z(t)$

II. ASPECTOS TOPOLÓGICOS E ESTABILIDADE

1. Estabilidade Segundo Liapunov.

- estabilidade de pontos de equilíbrio . sistemas conservativos

Características essenciais (ver, p. ex., oscilador cúbico autónomo)

(a) trajectórias podem tender a pontos singulares tanto para $t \to +\infty$, quanto $t \to -\infty$;

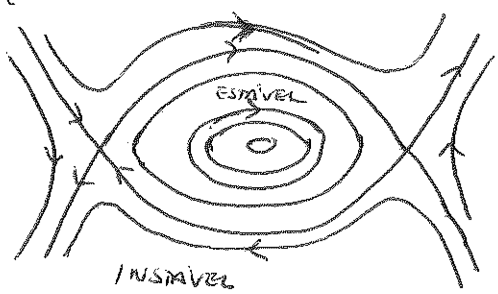
(b) trajectórias podem ser fechadas, correspondendo a movimentos periódicos, envolvendo centros;

(c) trajectórias podem se dirigir ou virem do infinito.

Critério de Estabilidade de Lyapunov.

Um movimento, definido por $x(t, x_0, y_0)$ e $y(t, x_0, y_0)$ <u>é estável</u> se, para qualquer $\epsilon > 0$, existe um outro, $\delta > 0$, tal que se $|\bar{x}_0 - x_0| \leq \delta$ e $|\bar{y}_0 - y_0| \leq \delta$ se verificam então $|x(t, x_0, y_0) - x(t, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| \leq \epsilon$ e $|y(t, x_0, y_0) - y(t, \bar{x}_0, \bar{y}_0)| \leq \epsilon$ para todo t

Esta definição equivale à continuidade uniforme da solução $x(t, x_0, y_0)$ e $y(t, x_0, y_0)$ em relação às condições iniciais (x_0, y_0).



2. Estabilidade Linear e Classificação dos Pontos de Equilíbrio.

Considere

$$\dot{x} = ax + by = f(x,y) = X(x,y)$$
$$\dot{y} = cx + dy = g(x,y) = Y(x,y)$$

$(\bar{x},\bar{y}) = (0,0)$ é ponto singular (de equilíbrio).

Com $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$, $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ temos

$$(a-\lambda)x_0 + by_0 = 0$$
$$c\,x_0 + (d-\lambda)\,y_0 = 0$$

que tem solução não trivial se e só se

$$\det\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \equiv 0$$

Alternativamente, definindo

$$\underset{\sim}{x} = (x,y)$$

tal que $\mathbb{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \mathbb{J} = \begin{bmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{bmatrix}$

escrevemos:

$$\dot{\underset{\sim}{x}}(t) = \mathbb{A}\underset{\sim}{x} = \mathbb{J}\underset{\sim}{x}$$

Se

$$\underset{\sim}{x}(t) = \underset{\sim}{x_0}\, e^{\lambda t}$$

$$(\mathbb{J} - \lambda \mathbb{I})\underset{\sim}{x_0} = \underset{\sim}{0}$$

λ são os auto-valores e $\underset{\sim}{x_0}$ os autovectores associados.

No caso bidimensional λ_1 e λ_2 são as raízes do polinómio característico

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0$$

e definem a estabilidade do ponto fixo $(0,0)$.

Escrevamos

$$\lambda_i = Re(\lambda_i) + i\,Im(\lambda_i) = \alpha_i + i\beta_i$$

então

$$\underset{\sim}{x}_i(t) = e^{\alpha_i t}\, e^{i\beta_i t}\, \underset{\sim}{x_0}_i$$

Se $\alpha_i < 0$: $\underset{\sim}{x}(t) \to (0,0)$, $t\to\infty$

$\alpha_i > 0$: $\underset{\sim}{x}(t) \to \infty$, $t \to \infty$

- Se $Re\,\lambda_i = \alpha_i \neq 0$ para todo i o equilíbrio é dito <u>hiperbólico</u>. (não degenerado)

(a) $Re\,\lambda_i = \alpha_i < 0$, todo i: estabilidade assintótica
(b) $Re\,\lambda_i = \alpha_i > 0$, pelo menos p/ 1 i: instabilidade

- Se $Re\,\lambda_i = 0$: <u>equilíbrio</u> <u>é dito</u> <u>elíptico</u> (ou degenerado)

no caso linear $\underset{\sim}{x}(t)$ permanece nas vizinhanças do ponto de equilíbrio : <u>centro</u>.

Classificação dos Pontos de Equilíbrio (n=2)

(i)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Y(x,y)}{X(x,y)} = \frac{cx+dy}{ax+by}$$

(ii) Considere $\underset{\sim}{r} = (x,y)$ e $\underset{\sim}{\rho} = (\xi, \eta)$

Como

$$\dot{\underset{\sim}{r}} = J\underset{\sim}{r} = \lambda \underset{\sim}{r}$$

podemos reduzir o sistema à forma normal

$$\dot{\underset{\sim}{\rho}} = \Lambda \underset{\sim}{\rho}$$

com

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

i.e., se

$$\xi = \alpha x + \beta y$$
$$\eta = \gamma x + \delta y$$

ou

$$\underset{\sim}{\rho} = \mathbb{B} \underset{\sim}{r} \quad , \quad \det \mathbb{B} \neq 0$$

$$\dot{\underset{\sim}{\rho}} = \mathbb{B} \dot{\underset{\sim}{r}} = \mathbb{B} J \underset{\sim}{r} = \mathbb{B} \lambda \underset{\sim}{r} = \mathbb{B} \lambda \mathbb{B}^{-1} \underset{\sim}{\rho}$$

Se

$$\dot{\underset{\sim}{\rho}} = \Lambda \underset{\sim}{\rho} \rightarrow \quad \Lambda = \mathbb{B} \lambda \mathbb{B}^{-1}$$

logo $\quad \mathbb{B}^{-1} \Lambda \mathbb{B} = \lambda$

e $\quad \Lambda = \mathbb{B} J \mathbb{B}^{-1}$

A matriz $\mathbb{B}$ que diagonaliza J é formada pelos auto-valores de $\mathcal{J}$.

Explicitamente: (a menos de uma constante multiplicativa)

$$\alpha(a-\lambda_1)+\beta c=0$$
$$\alpha b+\beta(d-\lambda_1)=0$$

e

$$\gamma(a-\lambda_2)+\delta c=0$$
$$\gamma b+\delta(d-\lambda_2)=0$$

definem os coeficientes da transformação no caso bi-dimensional

Obs 1 Se $b=c=0$ e $a=d$ $\rightarrow$ $\lambda_1=\lambda_2=a$

pois $\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \lambda^2-(a+d)\lambda+(ad-bc)=0$

neste caso

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

e o sistema já se encontra na forma normal

Obs 2: Se $\Delta=\alpha\delta-\gamma\beta$

$$x=\frac{1}{\Delta}(\delta\xi-\eta\beta) \quad ; \quad y=\frac{1}{\Delta}(-\gamma\xi+\alpha\eta)$$

Obs 3: podemos tomar

$$\alpha=-c\Delta$$
$$\beta=(a-\lambda_1)\Delta$$
$$\gamma=c\Delta$$
$$\delta=-(a-\lambda_2)\Delta$$

e assim:

$$x=(\lambda_2-a)\xi+(\lambda_1-a)\eta$$
$$y=-c(\xi+\eta)$$

<u>Teorema</u> : Quando λ_1, λ_2 são reais e de mesmo sinal o sistema

$$\dot{x} = ax + by$$
$$\dot{y} = cx + dy$$

tem um nodo em $x = y = 0$

De fato; reduzindo o sistema à forma normal

$$\dot{\xi} = \lambda_1 \xi$$
$$\dot{\eta} = \lambda_2 \eta$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\lambda_2 \eta}{\lambda_1 \xi} \quad \therefore \quad \eta = C\,\xi^{\gamma} \qquad \gamma = \lambda_2/\lambda_1 > 0$$

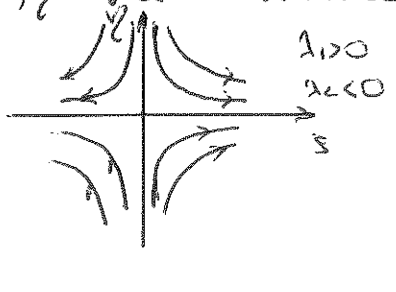
As trajetórias de fase são parábolas de grau γ.
Se $\gamma > 1$ as curvas são tangentes ao eixo ξ na origem, com exceção de $\xi = 0$, curva "singular", que corresponde a $C \to \infty$.
Se $\gamma < 1$ as curvas são tangentes ao eixo η, exceto para $\eta = 0$, que corresponde a $C = 0$.

Se λ_1, λ_2 negativos : $\to$ nodo estável
λ_1, λ_2 positivos : $\to$ nodo instável

<u>Teorema</u> : Quando λ_1, λ_2 são reais e de sinais opostos o sistema tem um <u>ponto de sela</u> em $(0,0)$

Sim, pois $\quad \eta = C\,\xi^{-\gamma} \qquad \gamma = |\lambda_2/\lambda_1|$

As trajetórias são hipérboles de grau γ e os eixos ξ, η são assíntotas



<u>Teorema</u> Quando λ_1, λ_2 são complexos conjugados o sistema tem um foco na origem

De facto se x, y reais e λ_1, λ_2 tal que $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $\xi = \bar{\eta}$, pois se

$$\xi = u + iv$$
$$\eta = u - iv$$

$$\dot{u} + i\dot{v} = \lambda_1 \xi = (A + iB)(u + iv)$$
$$\dot{u} - i\dot{v} = \lambda_2 \eta = (A - iB)(u - iv)$$

e, de ambas, $\dot{u} = Au - Bv$ e $\dot{v} = Bu + Av$, reais.

Assim

$$\frac{dv}{du} = \frac{Bu + Av}{Au - Bv}$$

que com $u = r\cos\varphi$ e $v = r\operatorname{sen}\varphi$ transforma-se

$$\frac{dv}{du} = \frac{dr\operatorname{sen}\varphi + r\cos\varphi\, d\varphi}{dr\cos\varphi - r\operatorname{sen}\varphi\, d\varphi} = \frac{Bu + Av}{Au - Bv} =$$

$$= \frac{Br\cos\varphi + Ar\operatorname{sen}\varphi}{Ar\cos\varphi - Br\operatorname{sen}\varphi}$$

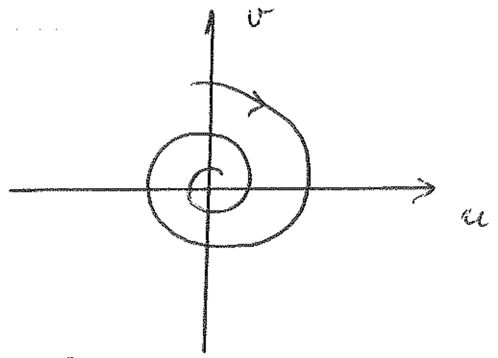
de onde

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{A}{B} r$$

logo

$$r = Ce^{q\varphi} \qquad q = A/B$$

No plano u, v as trajectórias são portanto espirais logarítmicas $\therefore$ A origem é um foco



Como $r^2 = u^2 + v^2$, $u = r\cos\theta$, $v = r\,\mathrm{sen}\,\theta$

então: $r\dot{r} = u\dot{u} + v\dot{v}$

$$\dot{r} = \cos\theta\,\dot{u} + \mathrm{sen}\,\theta\,\dot{v} = \cos\theta(Au - Bv) + \mathrm{sen}\,\theta(Bu + Av) =$$
$$= 2Ar$$

$$\frac{1}{2}\dot{r} = Ar \qquad r = r_0 e^{2At}$$

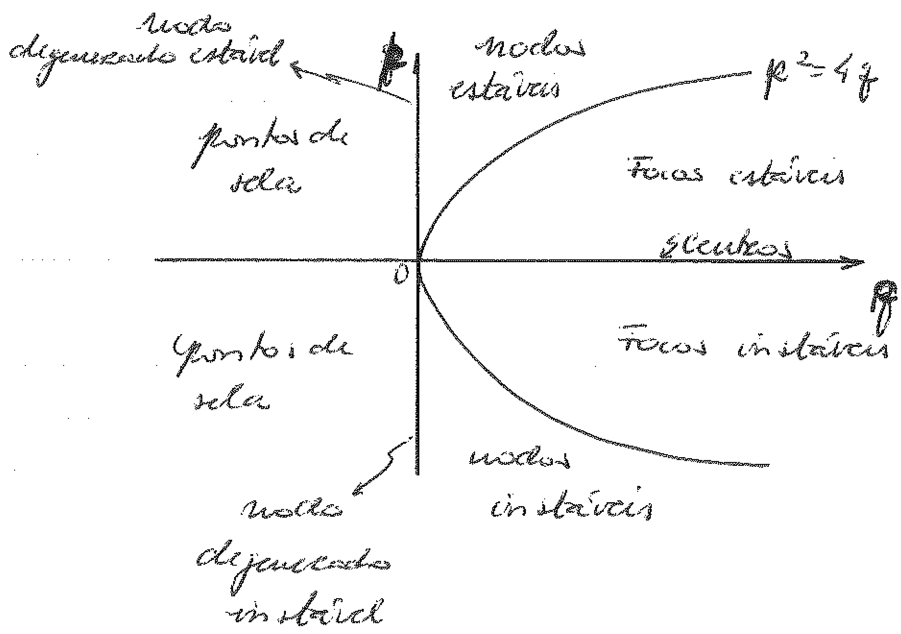
$A = Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) < 0 \Rightarrow$ foco estável
$A = Re(\lambda_1) = Re(\lambda_2) > 0 \Rightarrow$ foco instável

Se $A = 0$ (λ_1, λ_2 imaginários puros)
$\lambda_1 = \lambda_2 = i\omega$

$\dot{r} = 0 \Rightarrow$ circunferências $\Rightarrow$ centro.

<u>Resumo</u>: Eq. característica: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
com $p = -(a+d)$
$q = ad - bc$

(a) $q < 0$: λ_1 e λ_2 reais, $\lambda_1\lambda_2 < 0$: ponto de sela
(b) $p > 0$; $p^2 < 4q$: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $Re(\lambda_1) < 0$: foco estável
(c) $p > 0$; $p^2 > 4q$: λ_1 λ_2 reais negativos : nodo estável
(d) $p < 0$; $p^2 < 4q$: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $Re(\lambda_1) > 0$: foco instável
(e) $p < 0$; $p^2 > 4q$: λ_1, λ_2 reais, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: nodo instável
(f) $p = 0$, $q > 0$: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = i\omega$, $\omega > 0$; centro



3. Teoremas de Estabilidade

(i) Estabilidade segundo Liapunov (ponto de equilíbrio)
Nas vizinhanças de um ponto de equilíbrio x_0
"O equilíbrio é estável se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q. tem-se $|x(t) - x_0| < \varepsilon$ para todo $t \in (t_0, \infty)$ desde que $|x(t_0) - x_0| < \delta$."

(em outras palavras distâncias iniciais "pequenas" permanecem "pequenas")

(ii) Estabilidade assintótica segundo Liapunov:

"A solução $x(t, x_0, y_0)$ é assintoticamente estável se for estável e se existe um $\delta > 0$ t.q. $|\bar{x}_0 - x_0| \leq \delta$ e $|\bar{y}_0 - y_0| \leq \delta$ implique em
$|x(t, \bar{x}_0, \bar{y}_0) - x(t, x_0, y_0)| \to 0$ e
$|y(t, \bar{x}_0, \bar{y}_0) - y(t, x_0, y_0)| \to 0$ para $t \to \infty$"

(iii) Estabilidade segundo Liapunov.

"Um movimento definido por $(x(t, x_0, y_0), y(t, x_0, y_0))$ é estável se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.q. $|\bar{x}_0 - x_0| \leq \delta, |\bar{y}_0 - y_0| \leq \delta$

implica em $|x(t,x_0,y_0) - x(t,\bar{x}_0,\bar{y}_0)| \leq \varepsilon$ e
$|y(t,x_0,y_0) - y(t,\bar{x}_0,\bar{y}_0)| \leq \varepsilon$ para todo t "

Notas:

(i) A solução é dita limitada se $|x|, |y| < M$ para algum $M > 0$, finito.

(ii) A solução pode ser limitada mas não-estável e vice-versa

exemplos: (a) $\dot{x} = 1 \rightarrow x = x_0 + t$ é ilimitada mas estável pois

$$|x(t,x_0,y_0) - x(t,\bar{x}_0,\bar{y}_0)| = |x_0 - \bar{x}_0| \qquad (\varepsilon = \delta)$$

(b) $$\ddot{x} = -[x^2 + (x^4 + 4\dot{x}^2)^{1/2}](x/2)$$

tem solução $x = \alpha \operatorname{sen}(\alpha t + \beta)$, limitada mas instável pois
$$\alpha = \frac{y_0}{x_0} \quad e \quad \beta = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x_0^2}{y_0}\right)$$

pois trajetórias não permanecem próximas

(iii) Sistemas lineares autônomos: sol. são estáveis se e só se forem limitadas

Seja agora o sistema linear

$$\dot{\underset{\sim}{x}} = \mathbb{A}(t)\underset{\sim}{x} + \underset{\sim}{f}(t,\underset{\sim}{x}) \qquad , \quad \underset{\sim}{f}(t,\underset{\sim}{0}) = \underset{\sim}{0}$$

Teo de Liapunov.

"Se A for constante e tiver raízes características todas com parte real negativa e se $\|\underset{\sim}{f}(t,\underset{\sim}{x})\| \to \underset{\sim}{0}$ para $\|\underset{\sim}{x}\| \to 0$ uniformemente em $0 \le t \le \infty$ então toda solução $\underset{\sim}{x}(t)$, com $\|\underset{\sim}{x}(0)\|$ suficientemente pequeno existe em $[0,+\infty)$ e a solução $\underset{\sim}{x} = \underset{\sim}{0}$ é assintoticamente estável para $t \to \infty$."

Sejam agora

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + f(x,y) \\ \dot{y} &= cx + dy + g(x,y) \end{aligned} \qquad (*)$$

e seu linearizado

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= cx + dy \end{aligned} \qquad (**)$$

<u>Teo 1.</u>
Se a origem é um atrator para (**), também o é para (*)

<u>Teo 2</u>
Se a origem é um foco para (**) então também o é para (*)

<u>Teo 3</u>
Se a origem é um nodo próprio para (**) e se $|f|, |g| \le F(r)$, $F(r) = O(r)$ para $r \to 0$

e $\int_{\to 0} r^2 F(r)\,dr < \infty$, então a origem é um nodo próprio para (*). Em particular, isto vale para,

$f, g = O(r^{1+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$.

<u>Teo 4.</u> Se a origem é um <u>centro</u> de (**) então ou é um <u>centro</u> ou um <u>foco</u> de (*)

Exemplo (i):

$$\dot{x} = -y - rx \qquad r = (x^2+y^2)^{1/2}$$
$$\dot{y} = x - ry$$

em coordenadas polares: $\dot{r} = -r^2$, $\dot{\phi} = 1$
com solução:

$$r(t) = (t + r_0^{-1})^{-1}, \quad \phi(t) = t + \phi_0$$

$r \to 0$, $t \to \infty$ e $\phi \to \infty$ para $t \to \infty$: a origem é um foco.

para o sistema linear, no entanto

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = x$$

a origem é um centro.

Exemplo (ii)
O sistema $\quad \dot{x} = -y + xr \,\mathrm{sen}(\pi/r)$
$\qquad\qquad\quad \dot{y} = x + yr \,\mathrm{sen}(\pi/r)$

que em coordenadas polares é

$$\dot{r} = r^2 \,\mathrm{sen}(\pi/r)$$
$$\dot{\phi} = 1$$

tem as circunferências C_n: $r = 1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ como soluções periódicas ao redor da origem.

Sim pois $\qquad r^2 = x^2 + y^2 \quad ; \; x = r\cos\phi, \; y = r\,\mathrm{sen}\,\phi$

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = r\cos\phi\,\dot{x} + r\,\mathrm{sen}\,\phi\,\dot{y}$$

$$\dot r = \cos\phi\,\dot x + \operatorname{sen}\phi\,\dot y = \cos\phi\left(-y + x r \operatorname{sen}(\pi/r)\right) + \operatorname{sen}\phi\left(x + y r \operatorname{sen}(\pi/r)\right)$$

$$= \cos\phi\left(-r\operatorname{sen}\phi + r^2\cos\phi \operatorname{sen}\pi/r\right) + \operatorname{sen}\phi\left(r\cos\phi + r^2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\pi/r\right) =$$

$$= r^2 \operatorname{sen}\pi/r$$

$\dot r = 0$ se $\dfrac{\pi}{r} = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$ então

$C_n : r = 1/n$ são órbitas periódicas.

<u>Teo 5</u>: Se a origem é um nodo de (**) então é um nodo de (*)

<u>Teo 6</u>: Se a origem for um ponto de sela para (**) então também o é para (*) desde que $p(x,y)$ e $q(x,y)$ definidos na forma normal de (*):

$$\dot x = \lambda_1 x + p(x,y)$$
$$\dot y = \lambda_2 y + q(x,y)$$

sejam de classe C^1.

III. TEORIA DE POINCARÉ - BENDIXSON

1. Ciclos-Limite em Sistemas Autónomos

São curvas fechadas que podem atrair ou repelir soluções próximas. Constituem outro tipo de atractor (ou repulsor). Comparecem apenas em sistemas não-conservativos.
O ciclo limite estável (internamente) necessariamente rodeia um ponto de equilíbrio instável (nó ou foco) ou um outro ciclo-limite, externamente instável.

Exemplo 1:

$$\dot{x} = -y + x(x^2+y^2-1)$$
$$\dot{y} = x + y(x^2+y^2-1)$$

em coordenadas polares , $x = r\cos\varphi$, $y = r\,\text{sen}\,\varphi$

de tal forma que

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$$

$$\dot{r} = \cos\varphi\,\dot{x} + \text{sen}\,\varphi\,\dot{y} = \cos\varphi\,(-y + x(x^2+y^2-1)) + $$
$$+ \text{sen}\,\varphi\,(x + y(x^2+y^2-1)) =$$

$$= \cos\varphi(\cancel{-r\,\text{sen}\,\varphi} + r\cos\varphi(r^2-1)) + \text{sen}\,\varphi\,(\cancel{r\cos\varphi} + r\,\text{sen}\,\varphi(r^2-1))$$

$$\dot{r} = r(r^2-1)$$

e
$$x = r\cos\varphi$$
$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\,\text{sen}\,\varphi\,\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\dot{x} - \dot{r}\cos\varphi}{r\,\text{sen}\,\varphi}$$

mas

$$\dot{x} - \dot{r}\cos\varphi = -y + x(r^2-1) - r(r^2-1)\cos\varphi =$$

$$= -r\operatorname{sen}\varphi + r\cos\varphi(r^2-1) - r\cos\varphi(r^2-1) = -r\operatorname{sen}\varphi$$

logo

$$\dot{\varphi} = +1$$

então: $\quad \varphi(t) = \varphi_0 + t$

e $\quad r = (1 - Ae^{2t})^{-1/2}$

Se $\quad r(0) = r_0$

$$r_0 = (1-A)^{-1/2} \quad \therefore \quad A = 1 - r_0^{-2} = \frac{r_0^2-1}{r_0^2}$$

(i) Se $r_0 < 1$, $A<0$ então:

$$r = (1+|A|e^{2t})^{-1/2} = \frac{1}{[1+|A|e^{2t}]^{1/2}}$$

logo, (i) para $r_0<1$, $r \to 1$ para $t \to -\infty$, e
$r \to 0$ para $t \to +\infty$

(ii) Mas, para $r_0 > 1$, $A>0$ e

$$r = (1 - |A|e^{2t})^{-1/2} = \frac{1}{[1-|A|e^{2t}]^{1/2}}$$

$r \to 1$, $t \to -\infty$
r cresce para $\quad 0 < t < \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_0^2}{r_0^2-1}\right)$

depois de $\quad t^* = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{r_0^2}{r_0^2-1}\right)$, valor em que

$1-|A|e^{2t} = 0$ não há soluções mais.

O ciclo-limite $r=1$ é instável circundando um foco estável em $r=0$.

Exemplo 2 : Oscilador de Van-der-Pol

$$\ddot{x} + \alpha(x^2-1)\dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad , \quad \alpha > 0 \ (\text{pós-crítico})$$

é um caso particular do sistema

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega^2 x + f(x,\dot{x}) = 0$$

no qual $b = -\alpha$ e $f(x,\dot{x}) = \alpha x^2 \dot{x}$

O sistema linearizado $(|x| \ll 1)$

$$\ddot{x} + b\dot{x} + \omega^2 x = 0$$

é amortecido se $b>0$ e cresce (tem solução) exponencialmente se $b<0$. Em $b=0$ o foco estável se transforma em foco instável portanto (a configuração antes é estruturalmente instável). No entanto o comportamento do sistema para $x \sim O(1)$ não pode ser previsto a partir do sistema linearizado.

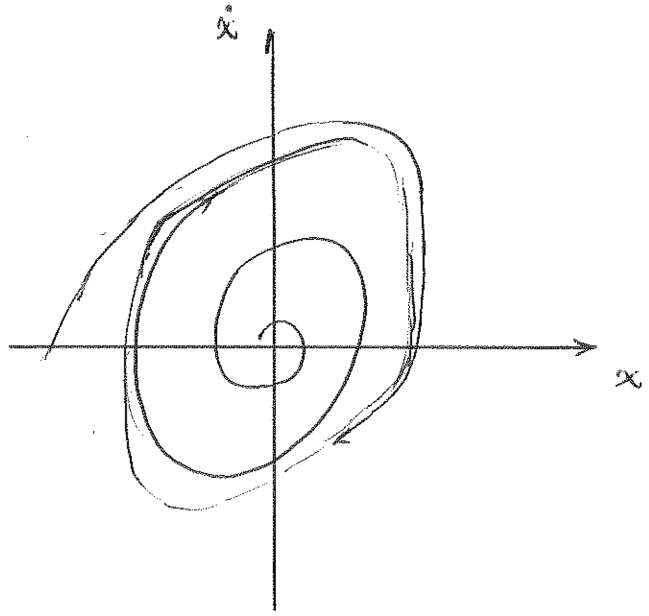
Para $\alpha>0$ (pós-crítico) e $x \ll 1$ o termo de segunda-ordem é desprezível e

$$\ddot{x} + \omega^2 x \cong +\alpha\dot{x} \quad : \text{comportamento instável}$$

Se x é grande o suficiente $(x>1)$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = -\alpha(x^2-1)\dot{x} \quad : \text{comportamento dissipativo.}$$

O sistema exibe portanto um ciclo-limite estável que circunda um foco instável.



Exemplo 3

$$\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

Se $x^2+\dot{x}^2 > 1$: amortecido
$x^2+\dot{x}^2 < 1$: sistema recebe energia.

Com $y = \dot{x} = r\,\mathrm{sen}\,\varphi \quad x = r\cos\varphi$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

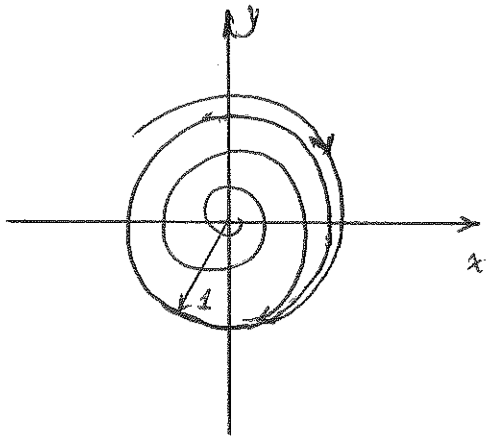
segue que

$$\dot{r} = r(1-r^2)\,\mathrm{sen}^2\varphi$$
$$\dot{\varphi} = (1-r^2)\,\mathrm{sen}\,\varphi\cos\varphi - 1$$

Assim $\dot{r} > 0$, para $r<1$ e $\dot{r} < 0$, se $r>1$;

$\dot{r} = 0$, se $r = 1$

Se $r = 1$ $\dot{\varphi} = -1$ $\therefore$ O ciclo limite é estável e é um círculo de raio unitário centrado na origem.



2. Atratores em fluxos planos de sistemas autónomos

Tipos :

(i) pontos fixos (ou de equilíbrio)

(ii) órbitas fechadas (ciclos-limite)

(iii) união de pontos fixos e trajectórias que os ligam (assintoticamente)

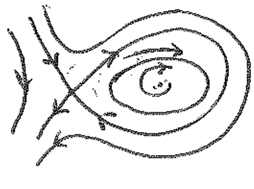
(a) órbitas heteroclínicas: dois pontos fixos distintos

(b) órbitas homoclínicas: ponto fixo conectado a si mesmo.

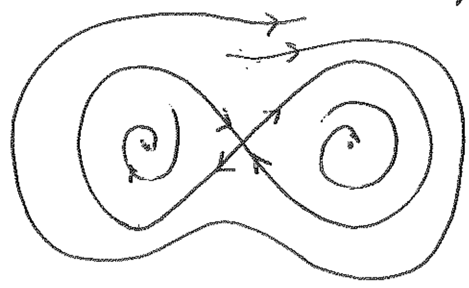
(os pontos-fixos devem ser necessariamente pontos de sela)

Exemplos

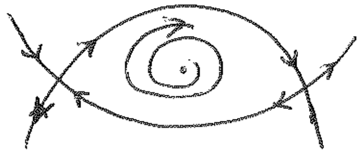
(1) Órbita homoclínica (com ciclo-limite em seu interior)

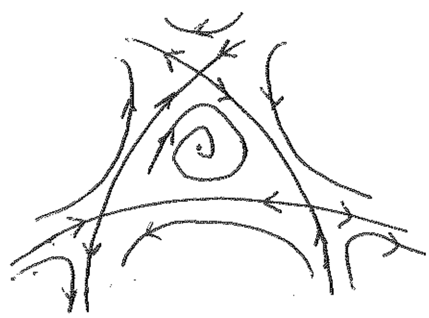


(2) órbita homoclínica dupla



(3) "Ciclos" homoclínicos formados por órbitas heteroclínicas





3. Critério Negativo de Bendixson

Considere o oscilador

$$\ddot{w} + (-b^2 + a^2 w^2 + c^2 \dot{w}^2)\dot{w} + d^2 w = 0$$

Sejam $x = w$ e $y = \dot{w}$ então:

$$\dot{x} = y \equiv F_1(x,y)$$

$$\dot{y} = b^2 y - (a^2 x^2 + c^2 y^2)y - d^2 x \equiv F_2(x,y)$$

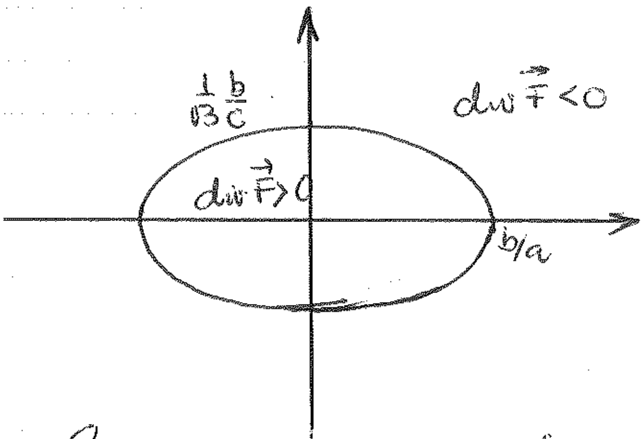
O campo vetorial $\vec{F} = F_1(x,y)\vec{i} + F_2(x,y)\vec{j}$ descreve o sistema.

$$\nabla \cdot \vec{F} = \operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} = b^2 - (a^2 x^2 + 3c^2 y^2)$$

O plano (x,y) pode ser considerado em dois sub-conjuntos: o interior e o exterior da elipse

$$b^2 - a^2x^2 - 3c^2y^2 = 0$$

de semi-eixos b/a e $b/\sqrt{3}c$ respectivamente.

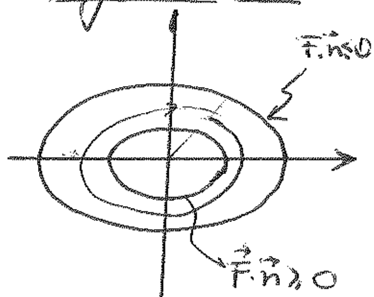


Qualquer curva fechada no interior da elipse é tal que, ao longo dela, $\operatorname{div}\vec{F} \geq 0$.

Então

$$\oint_C \vec{F}\cdot\vec{n}\,dc = \iint_{A_c} \operatorname{div}\vec{F}\,dA_c > 0$$

e esta curva não pode ser um ciclo limite pois ao longo de um ciclo limite devemos ter $\vec{F}\cdot\vec{n} = 0$.(*) <u>Este é o critério negativo de Bendixson</u>.



Considere a família de elipses

$$a^2x^2 + y^2 = \alpha^2 \qquad \alpha > 0$$

Para α suficientemente pequeno teremos $b^2 > a^2x^2 + c^2y^2$ e $\vec{F}\cdot\vec{n} \geq 0$. Para α suficientemente grande $b^2 < a^2x^2 + c^2y^2$ e $\vec{F}\cdot\vec{n} \leq 0$. Portanto qualquer trajetória que se inicie

(*) $\longrightarrow$

na região compreendida entre as duas elipses deve ficar confinada nesta região e como uma trajectória não pode se cruzar ela necessariamente deve tender a um ciclo limite quando $t \to \infty$. Este ciclo-limite é, no mínimo semi-estável. Por outro lado, se $\vec{F} \cdot \vec{n}$ for ≥ 0 na elipse externa e ≤ 0 na interna então invertendo o percurso do tempo $(\vec{F} \leftarrow -\vec{F})$ concluímos que entre as duas elipses existe pelo menos um ciclo-limite que, no mínimo, é semi-instável.

4. Teorema de Poincaré-Bendixson

"Seja D um domínio finito que não contém pontos singulares e do qual trajectórias não partem. Então D contém um ciclo-limite".

LISTA DE EXERCÍCIOS #02

(1) PROBLEMA 14, F&C-P, pg 62
(a), (c), (e)

(2) PROBLEMA 15, F&C-P, pg 62 - escolha 4 equações

(3) PROBLEMA 16, F&CP, pg 62

(4) Estudar o sistema

$$\dot{x} = ay + x\,(p - q(x^2+y^2))\,(x^2+y^2)^{-1/2}$$
$$\dot{y} = -ax + y\,(p - q(x^2+y^2))\,(x^2+y^2)^{-1/2}$$

a, p, q constantes. Determinar o caráter de estabilidade da origem e a existência de ciclos-limite em função dos parâmetros a, p, q

(5) Aplicar o critério negativo de Bendixson à equação $\ddot{x} - \mu\dot{x} + x + \dot{x}^3 = 0$. Analise em função do parâmetro μ.

5. Aspectos Topológicos Analíticos

Seja o sistema

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = F_1(x,y) = P(x,y)$$
$$\dot{x}_2 = \dot{y} = F_2(x,y) = Q(x,y)$$

F_1 e F_2 contínuas em um aberto A de $\mathbb{R}^2$, contendo a origem. Os pontos singulares, tais que $F_1(x,y) = F_2(x,y) = 0$, são trajetórias isoladas.

Definições:

(i)
C^+ : semi-trajetória positiva, definida em $[t_0, +\infty)$
C : trajetória completa, definida em $(-\infty, +\infty)$
C^- : semi-trajetória negativa, definida em $(-\infty, t_0]$

(ii) $(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é chamado um ponto-limite de C^+ se existe uma sequência $\{t_n\}$ com $t_n \to +\infty$, tal que $x(t_n) \to \bar{x}$, $y(t_n) \to \bar{y}$ se $n \to +\infty$

(iii) $L(C^+)$ é o conjunto dos pontos-limite de C^+ em $\mathbb{R}^2$

(iv) analogamente
$L(C^-)$ é o conjunto dos pontos-limite de C^- em $\mathbb{R}^2$

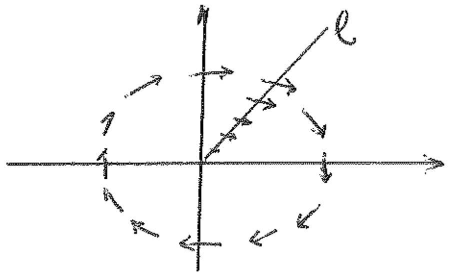
(v) $L^+(C)$, $L^-(C)$ são os conjuntos dos pontos-limite de C em $\mathbb{R}^2$ quando $n \to \infty$ $(t_n \to \pm\infty)$

(vi) uma trajetória periódica é aquela em que $L^+(C) = L^-(C) = C$, incluindo-se aí também os pontos singulares.

(note que (vi) decorre de (i)-(v))

(vii) K será denominado um sub-conjunto compacto (i.e. limitado e fechado) do aberto A.

(viii) Um segmento ℓ é denominado uma <u>transversal</u> em A se todos os seus pontos P forem regulares com respeito ao sistema dinâmico e se tiver direção diferente daquelas definidas pelo campo vetorial



<u>Lemas</u> e <u>Teoremas</u> (*)

<u>Lema 1</u> : <u>Se $C^+ \subset K \subset A$</u> então $L(C^+)$ é um conjunto não-vazio, compacto e conexo e $L(C^+) \subset K$ isto é <u>$L(C^+)$ é um conjunto contínuo</u>.

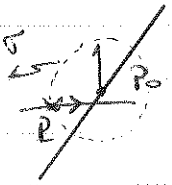
<u>Lema 2</u> : Se $C^+ \subset K \subset A$ e $L(C^+)$ contém um ponto regular P_0, então a trajetória Γ que passa por P_0 é uma trajetória completa e $\Gamma \subset L(C^+)$

<u>Lema 3</u> : (a) todo ponto regular P de A é um ponto interno de alguma transversal que pode ter qualquer direção diferente de $\theta(P)$ ($\tan\theta = Q(P)/P(P)$) (ou $\tan\theta = F_2(P)/F_1(P)$)

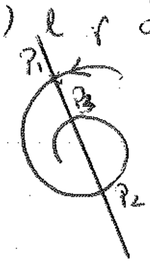
(b) toda trajetória que encontrar uma transversal a atravessa e todas as trajetórias deste tipo a cruzam no mesmo sentido

(*) ver demonstrações em Graciglia, "Vibrações não-lineares"

(c) Se P_0 é um ponto qualquer interno de ℓ e $\varepsilon>0$ arbitrário, então existe uma circunferência σ de centro P_0 tal que tal que toda a trajetória passando por qualquer ponto $P\in\sigma$ em $t=0$, cruza ℓ em algum instante t, $|t|<\varepsilon$



(d) Se um segmento fechado Γ de uma trajetória cruzar ℓ o fez em um número finito de pontos, (reduzindo-se a 1 único ponto se Γ for periódica)



<u>Lema 4</u>: Se C^+ e $L(C^+)$ tiverem um ponto em comum, C^+ é uma trajetória periódica.

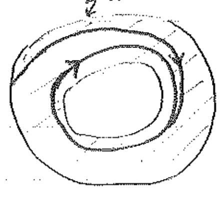
<u>Lema 5</u>: Se $L(C^+)$ contiver uma trajetória periódica Γ, então $L(C^+)=\Gamma$.

<u>Teorema de Poincaré-Bendixson</u>. Se $C^+\subset K\subset A$ e se $L(C^+)$ consistir apenas de pontos regulares então ou $C^+=L(C^+)$ é uma trajetória periódica ou $L(C^+)$ é uma trajetória periódica.

<u>Dem</u>: Com efeito, se C^+ for periódica, $C^+=L(C^+)$. Se C^+ não for periódica, pelo Lema 2, existe uma trajetória completa $\Gamma\subset L(C^+)\subset K$. Seja $P_0\in L^+(\Gamma)$, isto é $P_0\in K$ e, pelo Lema 2, também $P_0\in L(C^+)$. Logo P_0 é um ponto regular e podemos tomar uma transversal ℓ por P_0. Claramente, P_0 e Γ^+ estão contidos em $L(C^+)$ e ℓ só pode encontrar C^+ em P_0. Mas P_0 é um ponto-limite de Γ^+ e, portanto, ℓ deve encontrar Γ^+ em algum ponto, que é necessa-

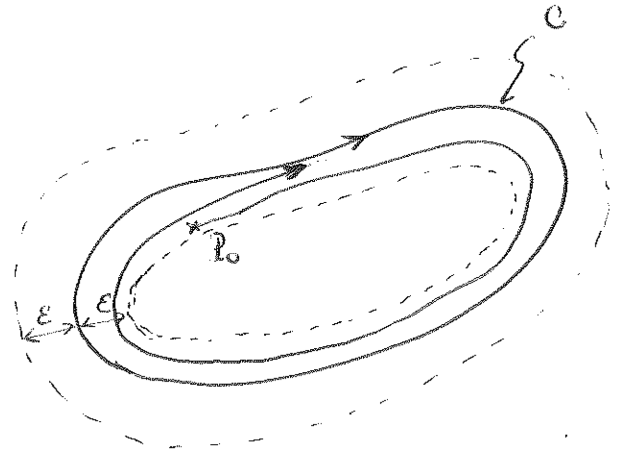
riamente P_0. Pelo Lema 4, Γ é periódica e pelo Lema 5, $\Gamma = L(\Gamma^+) = L(C^+)$.

<u>Corolário</u>: Se $C^+ \subset K \subset A$ e não existirem pontos singulares em K, então K contém uma solução periódica. Tal solução é necessariamente $L(C^+)$ e é um ciclo-limite.



<u>Estabilidade Orbital</u>

Consideremos uma trajetória completa C fechada, de período T, dada por $x = X(t)$ e $y = Y(t)$. Como o sistema é autônomo $X(t-c)$ e $Y(t-c)$ também é solução para qualquer c. Seja $\{P, C\}$ a distância de um ponto P à curva C. A <u>órbita</u> C é dita estável se, dado um $\varepsilon > 0$ arbitrário, existir um $\delta > 0$ tal que toda solução $x(t), y(t)$ que passa em $t = t_0$ num ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ com $\{P_0, C\} < \delta$ tiver a propriedade $\{P(t), C\} < \varepsilon$ para todo $t > t_0$.



A órbita C é dita assintoticamente estável se for estável e se existir um $\varepsilon_0 > 0$ tal que toda a trajetória $x(t), y(t)$ que num instante $t = t_0$ passe por P_0 com $\{P_0, C\} < \varepsilon_0$, for tal que

$$\{P(t), C\} \to 0 \text{ para } t \to +\infty.$$

Suponhamos uma região K anular no plano de fase satisfazendo às seguintes propriedades

(a) não há pontos singulares do sistema dinâmico nem em K nem em sua fronteira ∂K

(b) as soluções que passam por ∂K entram necessariamente em K.

Nestas condições vale o seguinte teorema:

Segundo Teorema de Bendixson (ou princípio do anel)

Para toda semi-trajetória C^+, iniciando em um ponto qualquer de ∂K, temos que $C^+ \subset K$ e portanto K contém uma solução periódica C_0, em decorrência dos teoremas acima. Por outro lado, se soubermos que C_0 é a única órbita em K então ela é certamente estável.

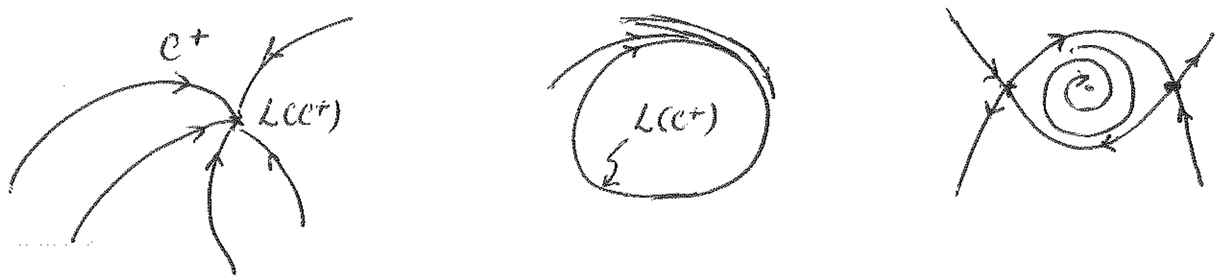
Teorema: Se $C^+ \subset K \subset A$ e A contiver um número finito de pontos singulares então, uma das três alternativas pode ocorrer

(a) $L(C^+)$ é um único ponto singular e C^+ a ele tende, $t \to +\infty$.

(b) $L(C^+)$ é uma trajetória periódica

(c) $L(C^+)$ consiste de um número finito de pontos singulares e de um con-

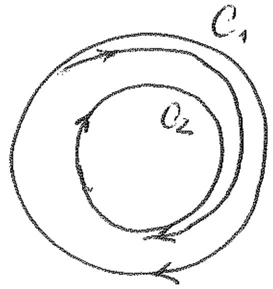
- junto de trajetórias completas Γ ligando esses pontos, de forma que para cada Γ $L(\Gamma^+)$ e $L(\Gamma^-)$ são dois únicos pontos singulares



nodo ou foco (ou sela)

ciclo-limite

<u>Teorema</u> Sejam C_1 e C_2 duas trajetórias periódicas uma contida no interior da outra. Suponhamos que não haja nenhum ponto singular e nenhuma outra trajetória periódica na região anular definida por C_1 e C_2. Nestas condições C_1 e C_2 <u>não podem ser ambas</u>, orbitalmente estáveis dos lados internos à região anular.



Segue que: <u>dois ciclos-limite sucessivos e concêntricos</u>, sem nenhum ponto singular interior ao anel por eles formado, <u>são alternativamente estável e instável</u>.

Primeiro Teorema de Bendixson (ou Critério Negativo)

Seja C uma trajectória fechada de período T e R a região interior a C. Pelo teorema de Gauss

$$\iint_R \operatorname{div}\vec{F}\, dS = \oint_C (F_1\, dy - F_2\, dx) =$$

$$= \oint_C (\dot{x}\, dy - \dot{y}\, dx) = \int_0^T \left(\dot{x}\frac{dy}{dt} - \dot{y}\frac{dx}{dt}\right) dt = \int_0^T (\dot{x}\dot{y} - \dot{y}\dot{x})\, dt = 0$$

Então: em uma região simplesmente conexa onde $\operatorname{div}\vec{F}$ tiver o mesmo sinal não pode existir nenhuma solução periódica.

Exemplos de Aplicação do Segundo Teorema de Bendixson

(1)
$$\dot{r} = 1 - r^2$$
$$\dot{\theta} = 1$$

$$\frac{dr}{d\theta} = 1 - r^2 \begin{cases} >0 & \text{se } r<1 \\ =0 & \text{se } r=1 \\ <0 & \text{se } r>1 \end{cases}$$

É evidente a existência de um ciclo-limite que é uma circunferência de raio unitário.

No entanto poderíamos ter escolhido uma ~~limite~~ região K anular delimitada por circunferências de raio $r_1 < 1$ e $r_2 > 1$ e centros em O. Este anel satisfaz as condições do 2º teorema pois não existem singularidades nem em K nem em sua fronteira. Existe pois um ciclo-limite no interior do anel

(2) $$\dot{x} = -ay + x(1-r^2) \qquad r^2 = x^2+y^2$$
$$\dot{y} = A + ax + y(1-r^2)$$

para r suficientemente grande as traj. são dirigidas para dentro. Além disso transferindo a origem para um ponto singular (se $A=0$ a origem é o próprio ponto singular) de tal forma que $\xi = x - x_0$, $\eta = y - y_0$

o sistema fica reduzido à forma, localmente

$$\dot{\xi} = \xi - a\eta + \dots$$
$$\dot{\eta} = a\xi + \eta + \dots$$

$(\xi,\eta) = (0,0)$ é um foco instável e, como não existe nenhuma outra singularidade o critério do anel mostra que existe uma solução periódica, portanto estável, contida numa região finita.

<u>Exemplos de aplicação do Critério Negativo de Bendixson</u>

(1) $$\dot{x} = -Bx - Ay + f(x)$$
$$\dot{y} = -Ax - By + f(y)$$
(corrente total gerada por 2 geradores em paralelo)

$f(x)$ e $f(y)$ são as características de potencial nos geradores em função da corrente eléctrica. ($f(0)=0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(y) - Ax - By}{f(x) - Bx - Ay}$$

$$\operatorname{div}\vec{F} = \frac{df(x)}{dx} - B + \frac{df(y)}{dy} - B$$

Se $\frac{df(x)}{dx} - B > 0$ e $\frac{df(y)}{dy} - B > 0 \Rightarrow \operatorname{div}\vec{F} > 0$ e pelo critério negativo de Bendixson não haverá ciclos-limite.

Os pontos singulares são dados por

$$f(y) = Ax + By$$
$$f(x) = Bx + Ay$$

que tem uma solução particular dada por $x = y$ e
$$f(x) = (A+B)x$$

O sistema linear associado é dado por

$$\dot{x} = -(B-\beta)x - Ay \qquad \beta = \frac{df(0)}{dx}$$
$$\dot{y} = -Ax - (B-\beta)y$$

ou seja $\quad \det\begin{bmatrix} B-\beta-\lambda & A \\ A & B-\beta-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow B-\beta-\lambda = \pm A$

ou $\quad \lambda_1 = A - B + \beta$
$\quad\quad \lambda_2 = -A - B + \beta$

A origem será

nodo instável : $\lambda_1, \lambda_2 > 0$
sela : $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$
nodo ~~instável~~ estável : $\lambda_1, \lambda_2 < 0$

$\bar{\beta}_2 = A + B$ é valor crítico $\rightarrow$ nodo instável $\leftrightarrow$ sela
$\bar{\beta}_1 = B - A$ é valor crítico $\rightarrow$ nodo estável $\leftrightarrow$ sela

Para x pequeno $(\beta - B) > 0$ regula portanto a possibilidade de haver ou (não)-ciclo-limite (desde que os valores críticos não sejam atingidos)

(2) $\ddot{x} - \mu\dot{x} + \dot{x}^3 + x = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y & &= F_1(x,y) \\ \dot{y} &= -x + y(\mu - y^2) & &= F_2(x,y) \end{aligned}$$

ponto fixo: 0

$$\operatorname{div} \vec{F} = \mu - 3y^2$$

(i) sistema linearizado
$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -x + \mu y \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}\right)$$

$\mu < -2$: $\lambda_1, \lambda_2 < 0$: nó estável

$\mu = -2$: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$

$0 > \mu > -2$: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $Re(\lambda_1) < 0$: foco estável

$\mu = 0$: bifurcação de Hopf.

$0 < \mu < 2$: $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2$, $Re(\lambda_1) > 0$: foco instável

$\mu > 2$: $\lambda_1, \lambda_2 > 0$: nó instável.

(ii) O amortecimento é positivo para $\dot{x} = y$ suficientemente grande

Se $\mu < 0$: $\operatorname{div} \vec{F} < 0$ sempre : não existe ciclo limite pelo critério negativo de Bendixson

$\mu > 0$: $\operatorname{div} \vec{F} \begin{cases} < 0 : & y^2 > \mu/3 \\ = 0 : & y^2 = \mu/3 \\ > 0 : & y^2 < \mu/3 \end{cases}$

existe a possibilidade de aparecer um ciclo limite estável circundando um foco (se $0 < \mu < 2$) ou nó instável (se $\mu > 2$).

$\mu = 0$ é ponto de bifurcação (de Hopf no caso)

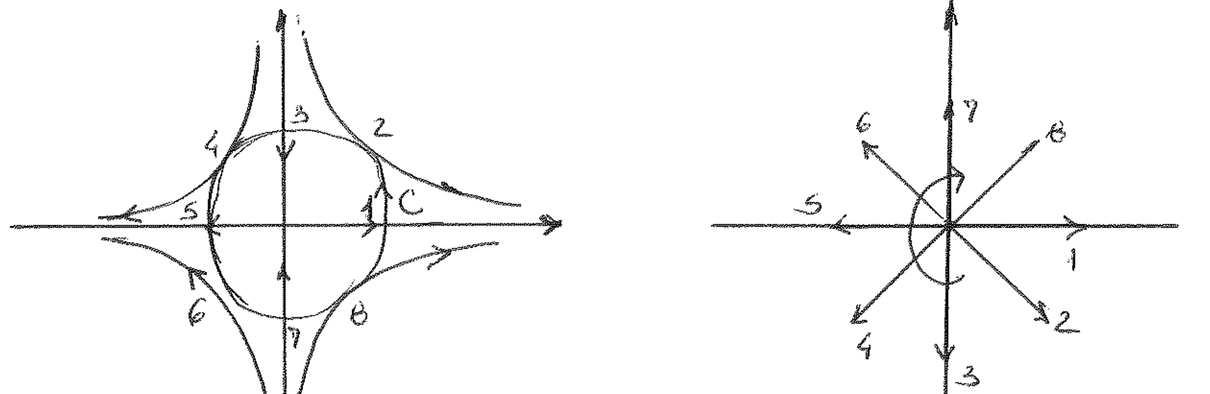
6. Índice de uma singularidade

Considere uma curva C fechada em torno de um ponto de equilíbrio de um sistema plano

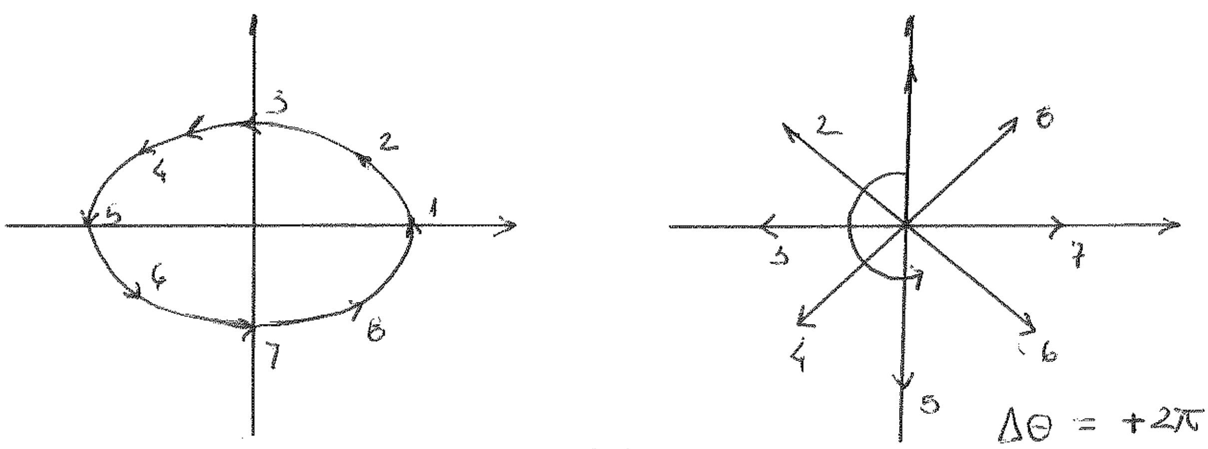
$$\dot{x}_1 = \dot{x} = F_1(x,y) = F_1(x_1,x_2)$$
$$\dot{x}_2 = \dot{y} = F_2(x,y) = F_2(x_1,x_2)$$

À medida que a curva C é percorrida no sentido anti-horário (positivo) desenhamos o diagrama polar do campo vetorial $\vec{F}$.

As figuras abaixo ilustram curvas em torno de (a) ponto de sela (b) centro e seus respectivos diagramas polares do campo $\vec{F}$



(a)

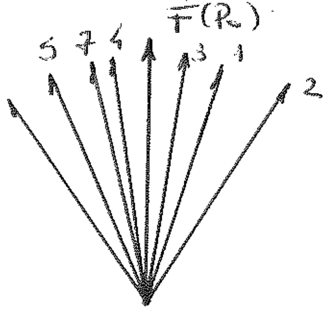


(b)

Como vimos $\Delta\Theta = -2\pi$ para o fluxo em torno do ponto de sela e $\Delta\Theta = +2\pi$ no caso do centro. O comportamento no caso de nó ou foco é idêntico ao do centro.

Se, por outro lado C for traçada em torno de um ponto regular, i.e. $\vec{F}(P_0) \neq \vec{0}$, o diagrama polar do campo não completará uma volta completa.

Exemplo



$\Delta\Theta = 0$

Pode-se imaginar uma oscilação do vetor $\vec{F}$ retornando à posição original sem completar um ciclo. Portanto $\Delta\Theta = 0$

Este resultado motiva a definição do <u>índice</u> de uma <u>curva fechada C</u> em relação ao <u>campo vetorial $\vec{F}$</u>.

Seja então $\theta(s)$ o ângulo que $\vec{F}(s)$ faz com o eixo $x_1 = x$ quando C é percorrida. Ou seja:

$$tg\,\theta = \frac{F_2(s)}{F_1(s)}$$

logo

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{F_2' F_1 - F_1' F_2}{F_1^2 + F_2^2}$$

pois

$$\frac{d}{ds}(tg\,\theta) = \frac{F_2' F_1 - F_1' F_2}{F_1^2}$$

e $$(1+tg^2\theta)\,\frac{d\theta}{ds} = \frac{F_2'F_1 - F_1'F_2}{F_1^2}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{F_2'F_1 - F_1'F_2}{F_1^2\left(1+\left(\frac{F_2}{F_1}\right)^2\right)} = \frac{F_1F_2' - F_1'F_2}{F_1^2+F_2^2}$$

Definimos o índice $I(C;\vec{F})$.

$$I(C;\vec{F}) = \frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{d\theta}{ds}\,ds = \frac{1}{2\pi}\oint_C ds\,\frac{F_2'(s)F_1(s) - F_1'(s)F_2(s)}{F_1^2(s)+F_2^2(s)}$$

Temos, portanto

(i) $I(C;\vec{F}) = 0$ (se no interior e sobre C os pontos forem regulares)

(ii) $I(C;\vec{F}) = +1$: (se no interior de C existir somente um centro, ou nó ou foco)

(iii) $I(C;\vec{F}) = -1$; (se no interior de C existir somente um ponto de sela)

Se a curva C circundar mais de uma singularidade temos:

$$I(C;\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} I(C_i;\vec{F})$$

onde C_i indicam curvas que circundam cada uma das singularidades, isoladamente.

Este resultado é análogo ao teorema do

unidas, em funções analíticas de uma variável complexa.

Se $\vec{F} = \vec{F}(x,y;\lambda)$, λ um parâmetro, os pontos de equilíbrio dependerão de λ.

O índice $\vec{I}(C,\vec{F})$ permanecerá invariante se, ao variarmos λ, nenhum ponto de equilíbrio cruzar a curva C (o que tornaria $F_1 = F_2 = 0$ e implicaria em uma singularidade na definição de I).

Segue, ~~pos~~tanto, que:

(1) O índice de uma curva fechada não contendo singularidades é zero

(2) $I(C,\vec{F}) = \sum_{i=1}^{N} I(C_i,\vec{F}) = \sum_{i}^{N} I_i(C,\vec{F})$

(3) O índice de uma trajetória periódica é $+1$

(4) O índice de uma curva fechada em relação à qual os vetores do campo estão dirigidos ou todos para fora ou para dentro é $+1$

(5) Uma trajetória periódica contém em seu interior ao menos uma singularidade cujo índice é $+1$.

(6) Uma trajetória fechada pode conter várias (nº finito) singularidades sendo, então, a soma algébrica de seus índices $+1$.

(7) Uma trajetória fechada pode conter em seu interior um único nodo, um único foco ou um único centro, mas nunca

um único ponto de sela

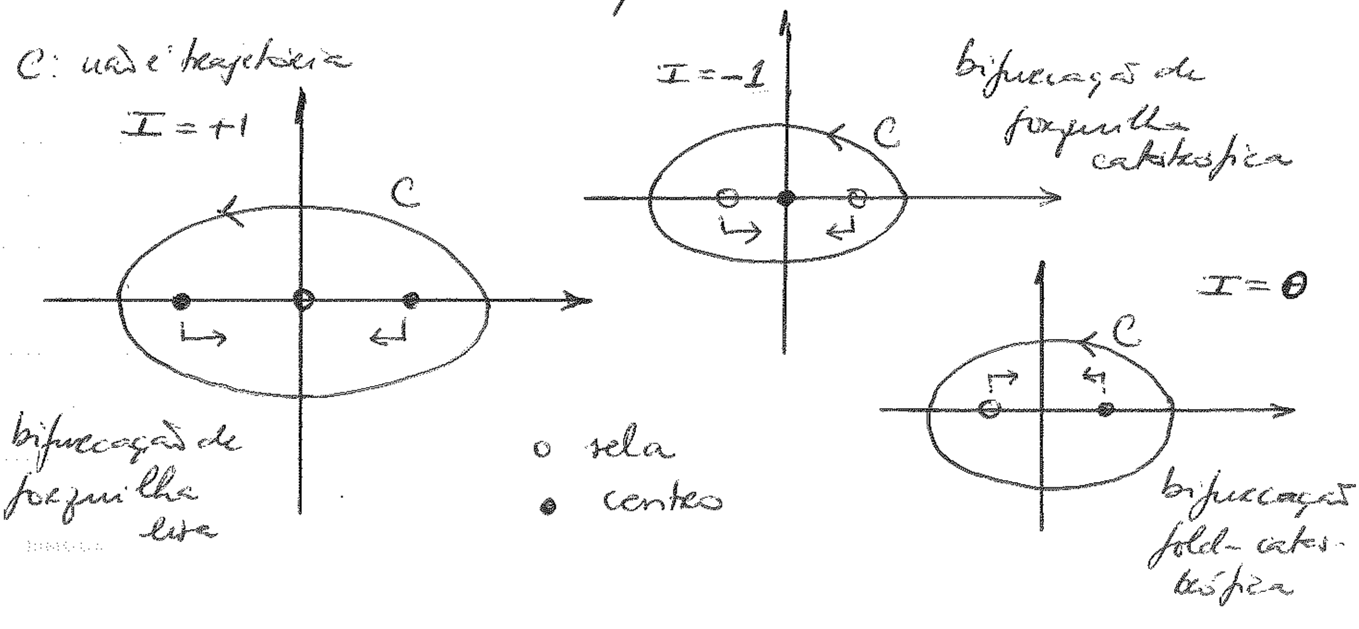
(8) Uma trajetória fechada somente pode conter em seu interior um número ímpar de pontos singulares: n pontos de sela e (n+1) pontos de qualquer outro tipo.

(9) Não podem existir trajetórias periódicas num sistema que não apresente singularidades.

(10) Se um sistema tem uma única singularidade e seu índice não é +1, as trajetórias periódicas são impossíveis.

(11) Se um sistema tem um número finito de singularidades tal que a soma algébrica de seus índices não é +1, trajetórias fechadas que incluam em seu interior todas as singularidades não são possíveis.

(12) Em um sistema tendo uma única singularidade de índice +1 e à qual tendam trajetórias, vindo do infinito, movimentos periódicos são impossíveis.



IV. ELEMENTOS DA TEORIA DE BIFURCAÇÕES

Um sistema dinâmico é dito estruturalmente estável se para qualquer perturbação suficientemente pequena o fluxo resultante é topologicamente equivalente ao do sistema original.

Vimos anteriormente o conceito de sistemas dinâmicos dependentes de um parâmetro de controle.

Considere o sistema bidimensional

$$\dot{x} = f_\mu(x,y)$$
$$\dot{y} = g_\mu(x,y) \qquad \mu: \text{parâmetro de controle}$$

A posição e natureza dos pontos de equilíbrio podem depender do parâmetro μ. Se em um certo μ_c existe alteração topológica do espaço de fase dizemos que este é um ponto de bifurcação. O conceito de bifurcação foi introduzido por Poincaré.

Exceto em casos simples de mudança de estabilidade de pontos de equilíbrio, o fenômeno de bifurcação somente se verifica em sistemas não-lineares.

Considere o sistema linear

$$\dot{x} = -y + \lambda x$$
$$\dot{y} = x + \lambda y \qquad , \lambda > 0$$

λ é o parâmetro de controle

Se $\lambda = 0$ o sistema fica reduzido a

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = x$$

com trajetórias de fase $x^2+y^2=a^2$; a origem é um centro. Para qualquer alteração arbitrariamente pequena em torno de $\lambda=0$ a origem se transforma em um foco (estável se $\lambda<0$, instável se $\lambda>0$). $\lambda=0$ é portanto um ponto de bifurcação. O sistema é estruturalmente instável nas vizinhanças de $\lambda=0$.

1. Panorama Geral

1.1 Bifurcação de dobra ("fold") ou sela-nó

Considere

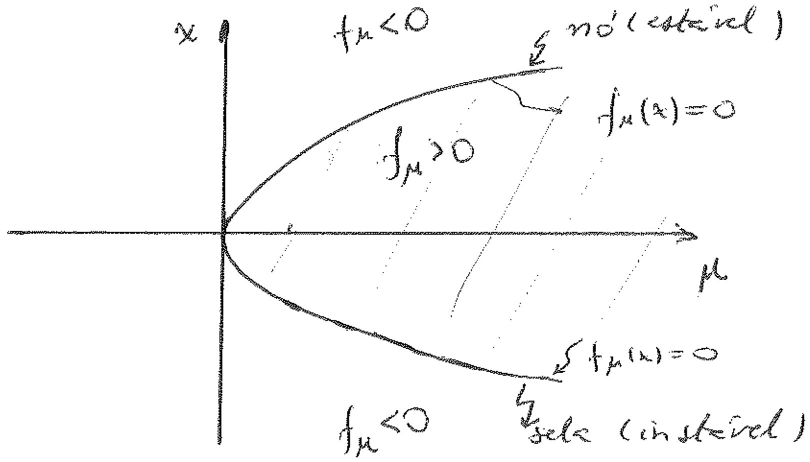
$$\dot{x} = \mu - x^2 = f_\mu(x)$$

$f_\mu(x)=0$ define $(\mu,x)=(0,0)$ como ponto crítico. Sim pois

$$f_\mu(x) = \mu - x^2 = 0$$

tem solução real se $\mu \geq 0$, $x = \pm\sqrt{\mu}$.

Se traçarmos o diagrama (μ, x)



podemos aplicar o "critério de Poincaré" visto anteriormente (página 26-27)

A condição de estabilidade do ponto de equilíbrio pode ser escrita na forma

$$\left(\frac{df_\mu}{dx}\right)_{x=\bar{x}} < 0$$

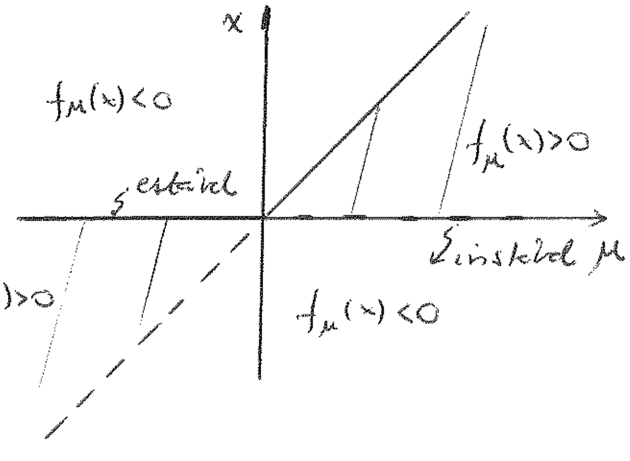
No presente caso $\frac{df_\mu}{dx} = -2x$ de tal forma que

$$\left(\frac{df_\mu}{dx}\right)_{x=\pm\sqrt{\mu}} \lessgtr 0$$ e o ramo superior é estável

sendo instável o inferior.

1.2 Bifurcação Transcrítica

Considere $\dot{x} = \mu x - x^2 = f_\mu(x)$. Temos pontos de equilíbrio $x=0$ e $x=\mu$. São dois ramos portanto. No entanto $\frac{df_\mu}{dx} = \mu - 2x$ e assim $\left(\frac{df_\mu}{dx}\right)_0 = \mu$, negativo se $\mu<0$. Também $\left(\frac{df_\mu}{dx}\right)_\mu = -\mu$, positivo se $\mu<0$. Os ramos "trocam" de estabilidade quando $\mu=0$



1.3 Bifurcação de Forquilha (Pitch-fork)

(a) Supercrítica (lisa)

Em $\dot{x} = \mu x - x^3 = f_\mu(x)$, $\mu > 0$ $(x,\mu) = (0,0)$ é ponto de bifurcação. De facto os pontos de equilíbrio são dados por $x = 0$ e $x = \pm\sqrt{\mu}$. Temos

$$\frac{df_\mu}{dx} = \mu - 3x^2$$

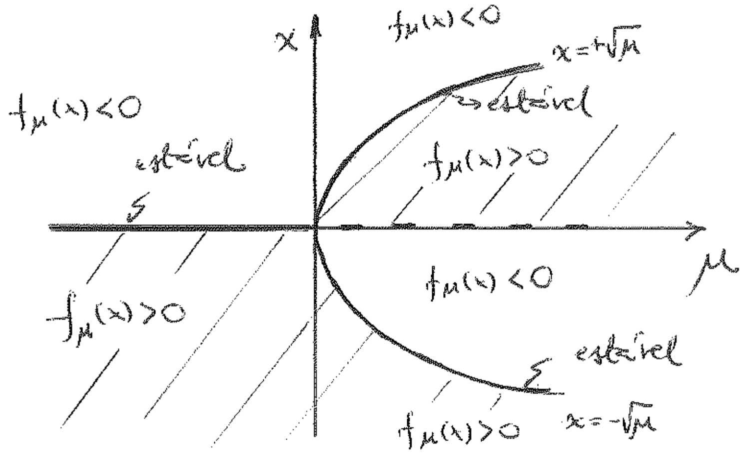
e portanto

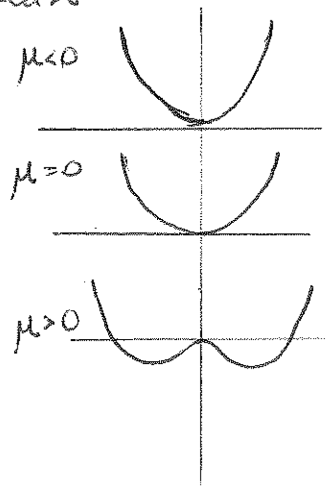
$$\left(\frac{df_\mu}{dx}\right)_0 = \mu \quad , \quad \text{negativo (positivo) para } \mu < 0 \; (\mu > 0).$$

e

$$\left(\frac{df_\mu}{dx}\right)_{\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu \, , \quad \text{positivo (negativo) se } \mu < 0 \; (\mu > 0)$$

O diagrama correspondente é portanto





No caso de um oscilador cúbico (soft)

$$\ddot{x} + \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 = 0 \qquad (\alpha_1 \cdot \alpha_3 < 0)$$

ou

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = -\alpha_1 x - \alpha_3 x^3$$

Os pontos de equilíbrio são: $(0,0)$ e $\left(\pm\sqrt{-\alpha_1/\alpha_3}\, , 0\right)$

Podemos reescrever a equação como

$$\ddot{\xi} + \mu\xi + \xi^3 = 0$$

com $\mu = -\alpha_1/\alpha_3$ $\xi = x/\alpha_3$. Os pontos de equilíbrio são $(0,0)$ e $(\pm\sqrt{\mu}, 0)$ e para $\alpha_1\alpha_3 < 0$, o que implica $\mu > 0$ temos estabilidade dos ramos $\bar{\xi} = \pm\sqrt{\mu}$. O diagrama anterior em (μ, ξ) se aplica (com $\dot{\xi} = 0$).

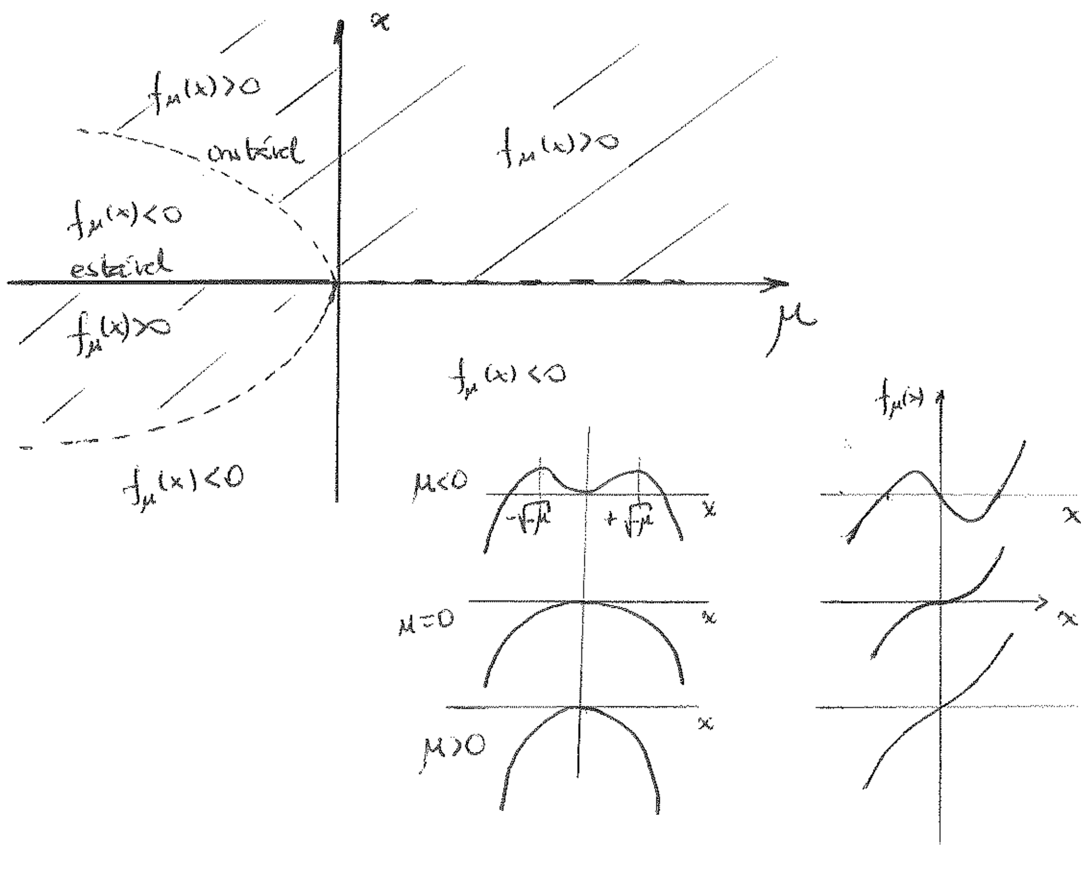
(b) <u>Subcrítica</u>. (Catastrófica)

Em $\dot{x} = \mu x + x^3 = f_\mu(x)$ $\bar{x} = 0$ é ponto de equilíbrio. No entanto $\bar{x} = \pm\sqrt{\mu}$ serão pontos de equilíbrio apenas se $\mu < 0$. Temos

$$\left(\frac{df_\mu}{dx}\right)_0 = \mu \quad , \text{ negativo para } \mu < 0$$

e

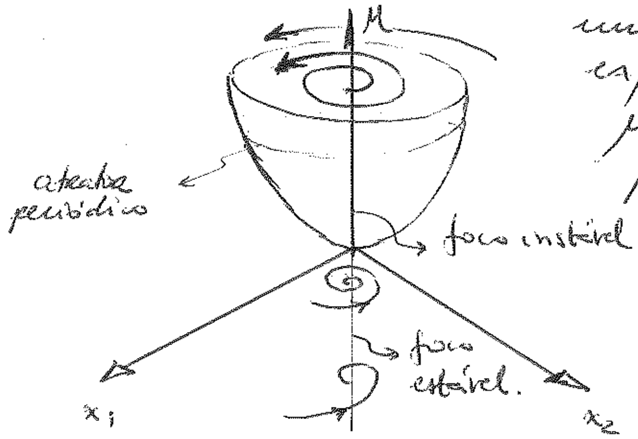
$$\left(\frac{df_\mu}{dx}\right)_{\pm\sqrt{\mu}} = -2\mu \quad , \text{ negativo se } \mu > 0$$



1.4 Bifurcação de Hopf

É aquela que dá origem a um ciclo limite. Um foco estável pode se tornar instável, por exemplo, dando origem a um atrator periódico em seu entorno. Neste caso a bifurcação é dita supercrítica.

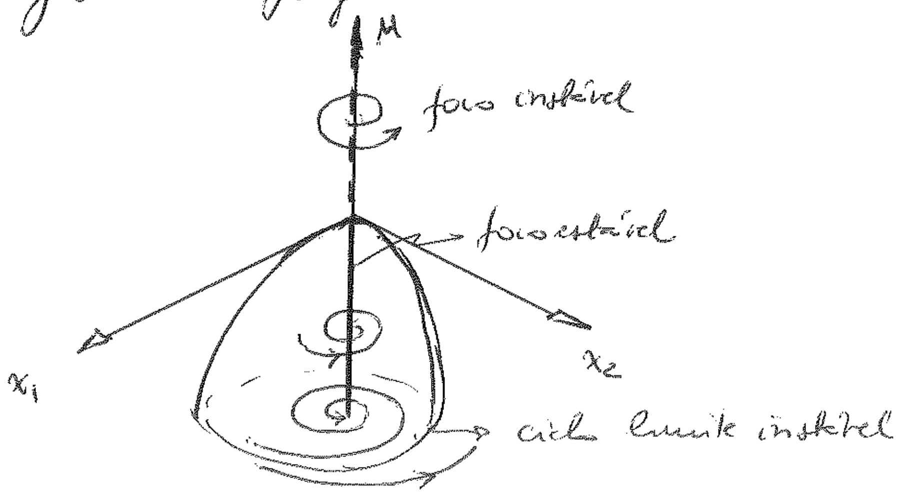
O diagrama qualitativo correspondente pode ser visualizado abaixo. O atrator está agora sobre um paraboloide no espaço (x_1, x_2, μ), quando $\mu > 0$ e reduz-se a um ponto (sobre o eixo foco instável $x_1 = x_2 = 0$, i.e. o eixo μ) quando $\mu < 0$



O ponto $(0,0,0)$ no espaço (x_1, x_2, μ) é dito um ponto de Hopf. O oscilador amortecido com amortecimento cúbico, descrito na página 62, é um exemplo típico de instabilidade estrutural quando $\mu = 0$

Note que o atrator muda de dimensão.

A bifurcação de Hopf pode ser subcrítica, de forma análoga à de forquilha

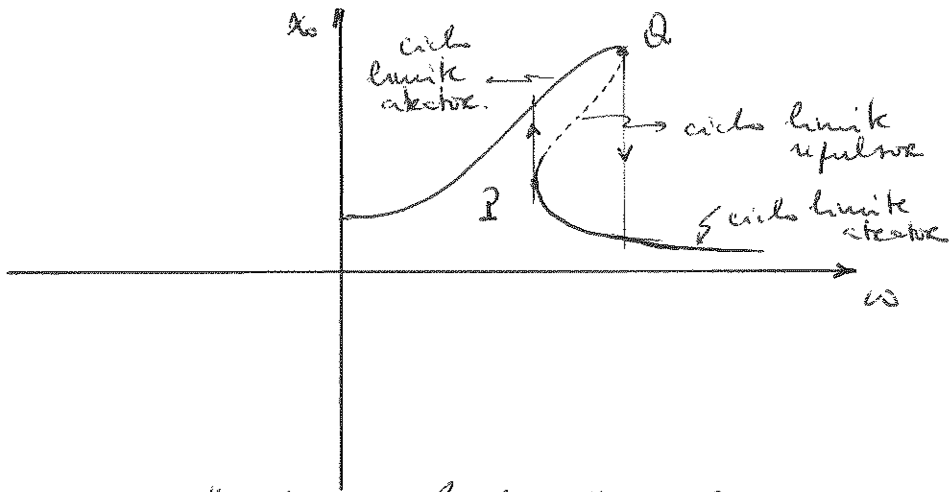


1.5 Bifurcação de dobra cíclica

A equação de Duffing (oscilador cúbico amortecido forçado)

$$\ddot{x} + d\dot{x} + x + \alpha x^3 = f_0 \cos \omega t$$

exibe, em função do parâmetro de controle ω, bifurcação de dobra-cíclica. Façamos agora os parâmetros d, α constantes (fixos). Seja x_0 a amplitude da resposta a uma dada excitação de amplitude f_0 e frequência ω. O diagrama de resposta em frequência típico é dado por



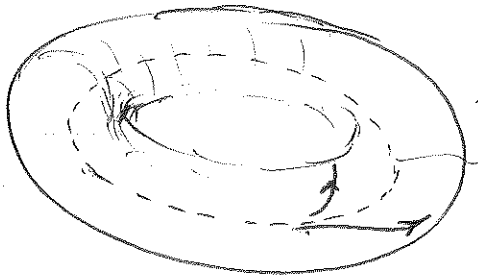
que é um "ciclo de histerese". Ocorre um salto nos pontos P e Q.

1.6 Bifurcação "Flip" ou de Duplicação de Período

Ocorre em espaços de fase de dimensão maior ou igual a 3. Um exemplo é a sequência que transforma um foco estável em um ciclo-limite, através de uma bifurcação de Hopf e, em seguida, o ciclo limite se bifurca sobre uma fita de Möebius, duplicando assim o período do fenômeno.

1.7 Bifurcação Secundária de Hopf (ou de Neimark)

Exige um espaço de fase de dimensão maior ou igual a 3. Um ciclo limite pode se instabilizar, bidimensionalmente, dando origem a um atrator sobre um toro bidimensional (T^2).



Podemos dizer que T^2 está para o ciclo limite que o originou assim como o ciclo-limite está para o foco que o originou na bifurcação de Hopf.

LISTA DE EXERCÍCIOS # 03

(1) EXERCÍCIO (15) pg. 62 - Ferrara & C. Prado

(a), (c), (g), (h), (i), (j)

(2) Dado o sistema

$$\dot{x} = -x - (x+\gamma)y + \delta$$
$$\dot{y} = -y + (x+\gamma)x$$

estudar a evolução das trajetórias de fase para

$\gamma \geqslant 0$ e $\delta \geqslant 0$

(3) Mostrar que a equação de Van der Pol

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0$$

tem, $\forall \mu \neq 0$, uma e uma única solução periódica.

Estudar o sistema nas vizinhanças de $\mu = 0$

V - MAPAS

Considere um sistema dinâmico contínuo não-linear e seu fluxo φ_t. Este fluxo pode originar um mapa

$$\vec{x}_{i+1} = F_\mu(\vec{x}_i)$$

onde i designa as passagens sucessivas por uma superfície (hiper-superfície) que secciona o fluxo.

Pode-se dizer que mapa é um sistema dinâmico que evolui no tempo de forma discreta.

O mapa será liso se o fluxo que o originou for liso (classe C^k). (Diz-se então que tratamos de um difeomorfismo).

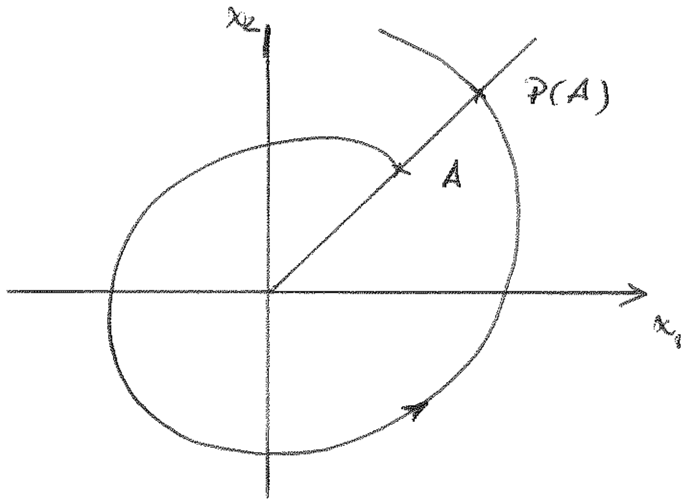
A órbita gerada pelo mapa é constituída por uma sequência de pontos $(x_i)_{-\infty}^{+\infty}$, construída a partir da equação de diferenças acima.

1. O mapa de POINCARÉ

O mapa de Poincaré (ou aplicação) é uma das formas de construir um mapa liso a partir de um fluxo liso. Isto é feito identificando-se, em uma secção $(n-1)$ dimensional do espaço de fase, os mesmos pontos de intersecção de um fluxo. Obviamente, se a trajetória analisada é periódica (um ciclo-limite, por exemplo) o mapa reduz-se a um número finito de pontos fixos.

Vejamos um exemplo em fluxos bi-dimensionais.

Suponha a origem um ponto de equilíbrio com índice +1 (foco, nó ou centro) e tracemos uma reta, pela origem, com orientação arbitrária.

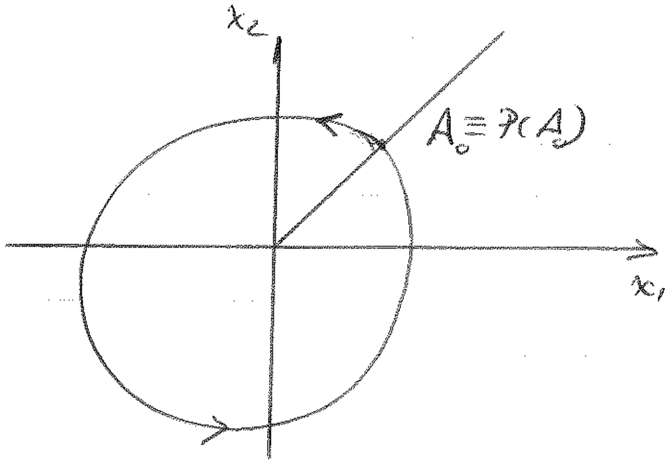


Seja A um ponto arbitrário desta (semi-reta) e P(A) o ponto onde a trajetória intercepta a semi-reta pela segunda vez

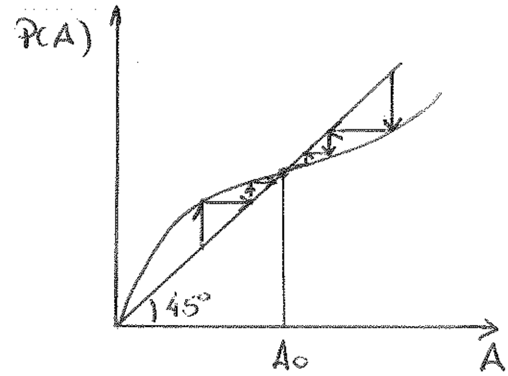
A função P(A) é a "aplicação de Poincaré".

Um ciclo limite será definido por

$$P(A_0) = A_0$$

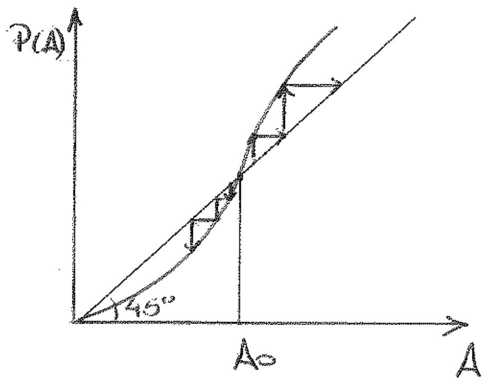


A natureza do ciclo-limite, quanto à sua estabilidade, pode ser estudada através da derivada $P(A)$, $P'(A)$, em A_0.



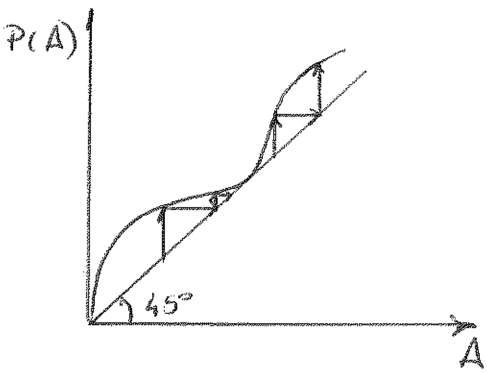
$P'(A_0) < 1$

ciclo-limite estável



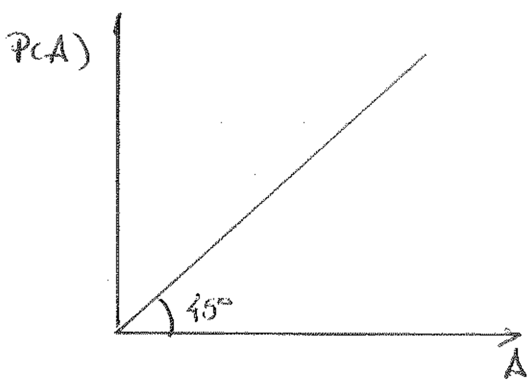
$P'(A_0) > 1$

ciclo-limite instável



$P'(A_0) = 1$

ciclo-limite semi-estável



"ciclos-limite degenerados"

$P'(A) \equiv 1 \;, \; \forall A$

(centros)

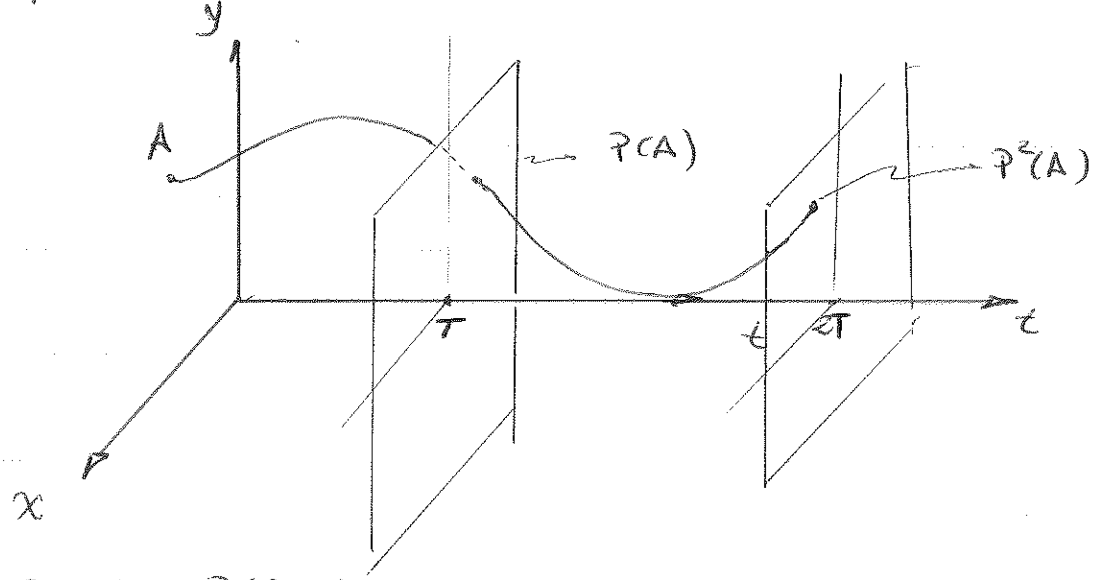
Considere o sistema forçado (bi-dimensional)

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = f(t) \quad , \quad f(t) \text{ de período } T$$

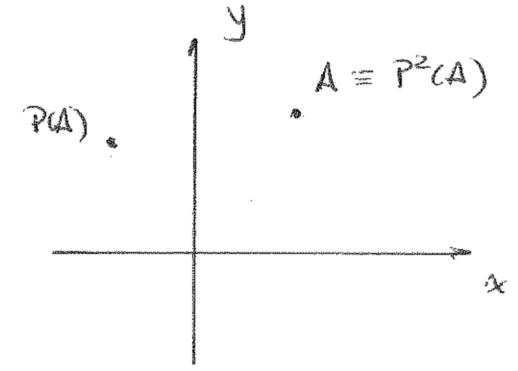
ou

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -g(x,y) + f(t) \\ \dot{t} &= 1 \end{aligned}$$

O estado é representado por (x, y, t) no espaço tri-dimensional.



$P^2(A) = P(P(A))$



Considere o sistema dinâmico (autônomo) n-dimensional, com soluções periódicas,

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x}) \qquad \vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

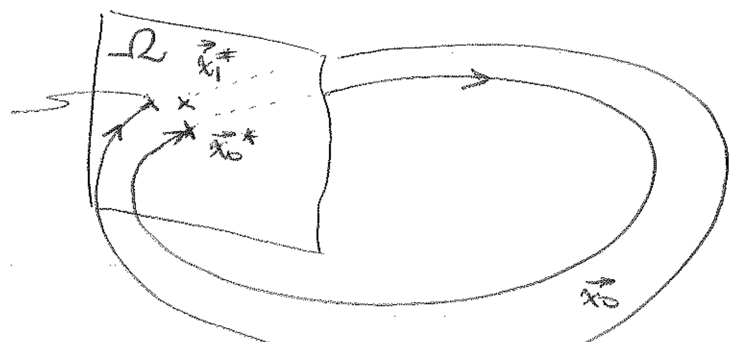
$\vec{f}(x)$ é um campo vetorial não-linear.
Se $\vec{x_0}$ for uma órbita periódica (de período T) associada ao fluxo $\varphi(t)$ e Ω uma hipersuperfície $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n-1)$-dimensional, transversal ao fluxo, isto é

$$\vec{f}(\vec{x}) \cdot \vec{n}(\vec{x}) \neq 0 \quad , \forall \vec{x} \in \Omega$$

Se $\vec{x_0}^*$ é o ponto onde a órbita $\vec{x_0}$ intercepta Ω o estudo da estabilidade desta órbita pode ser realizado analisando-se em uma vizinhança de $\vec{x_0}^*$ o mapa.

Seja $U \subseteq \Omega$ esta vizinhança e $\vec{x_1}^*$ um ponto próximo a $\vec{x_0}^*$. Seja $\tau = \tau(\vec{x_1}^*)$ o tempo necessário para o retorno da trajetória por $\vec{x_1}^*$ à seção de Poincaré Ω. Como o fluxo é liso $\tau \to T$ com $\vec{x_1}^* \to \vec{x_0}^*$.

$P(\vec{x_1}^*)$



$\vec{x_0}^* = P(\vec{x_0}^*)$

É evidente, mais uma vez, que uma órbita periódica corresponde a um ponto fixo $\vec{x_0}^*$ da aplicação $P: U \to \Omega$.

A estabilidade de $\vec{x}_0^*$ relativamente a P reflete a estabilidade da órbita $\vec{x}_0$, com relação ao fluxo $\varphi(t)$.

"O mapa de Poincaré é constituído pela sequência de pontos decorrentes da intersecção do fluxo com a secção de Poincaré".

<u>Exemplo</u> (FFEC-P)

$$\dot{x} = x - y - x(x^2+y^2)$$
$$\dot{y} = x + y - y(x^2+y^2)$$

ou em coordenadas polares, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$:

$$\dot{r} = r(1-r^2)$$
$$\dot{\theta} = 1$$

Obviamente um ciclo-limite estável ocorre para $r \equiv 1$ ou $(r,\theta) = (1,t)$. Se $\Omega \equiv \{x\ ,\ x>0\}$ (ou ainda $\Omega = \{r>0, \theta=0\}$, e como a solução geral do sistema é dada por

$$r = \left\{ 1 + \left(\frac{1}{r_0^2} - 1 \right) e^{-2t} \right\}^{-1/2} = r(r_0, t)$$

$$\theta = t + \theta_0 = \theta(\theta_0, t)$$

(c.i. $r = r_0$, $\theta = \theta_0$)

é visível que $T = 2\pi$ é o período de recorrência a Ω.

A aplicação de Poincaré fica, para qualquer ponto q de Ω, dado por

$$P(q) = r(q, 2\pi)$$

ou seja

$$P(q) = \left\{ 1 + \left(\frac{1}{q^2} - 1 \right) e^{-4\pi} \right\}^{-1/2}$$

Note que

$$P(1) = 1$$

isto é $q = 1$ é um ponto fixo da aplicação $P(q)$.

Se $q = 10^{-4}$, p. ex.,

$$P(10^{-4}) = 0.05347$$

$$P^2(10^{-4}) = P(P(10^{-4})) = P(0.05347) = 0.99939$$

$$\vdots$$

e $q = 1$ é um ponto fixo estável.

Em sistemas n-dimensionais, com Ω $(n-1)$-dimensional, se $\vec{x}_0^*$ for um ponto fixo da aplicação de Poincaré, a estabilidade de $\vec{x}_0^*$ dará informações acerca da estabilidade da órbita $\vec{x}_0$.

2. Mapas unidimensionais

Considere o mapa unidimensional

$$x_{i+1} = F(x_i)$$

O ponto x^* é dito um ponto fixo do mapa se

$$x^* = F(x^*)$$

Tome um ponto x_i, próximo de x^* de forma que

$$x_i = x^* + \varepsilon_i$$

A sequência

$$x_{i+1} = F(x_i) = F(x^* + \varepsilon_i) = x^* + \varepsilon_{i+1} \quad (\circ)$$

$$x_{i+2} = F(x_{i+1}) = F(x^* + \varepsilon_{i+1}) = x^* + \varepsilon_{i+2}$$

$$\vdots$$

é o mapa de Poincaré associado. Seu comportamento permitirá qualificar o ponto fixo x^* no que concerne a sua estabilidade.

Expandindo-se $(\circ)$ em série de Taylor em torno de x^* tem-se.

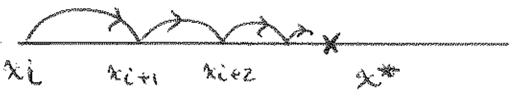
$$x^* + \varepsilon_{i+1} = F(x^* + \varepsilon_i) = F(x^*) + \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x=x^*} \varepsilon_i + \frac{1}{2}\left.\frac{d^2F}{dx^2}\right|_{x=x^*} \varepsilon_i^2 + O(3).$$

Mas $F(x^*) = x^*$, por hipótese, e retendo-se apenas o termo de primeira-ordem:

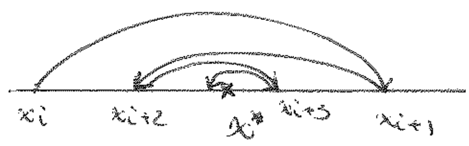
$$\varepsilon_{i+1} = \frac{dF}{dx}\Big|_{x=x^*} \varepsilon_i = C\,\varepsilon_i$$

Note que $|\varepsilon_{i+1}| < \varepsilon_i$ se $|C| < 1$. Neste caso teremos estabilidade assintótica.

- Se $0 < C < 1$ a aproximação assintótica é monotônica
- Se $-1 < 0 < C$ a aproximação assintótica é oscilatória



$$0 < C = \frac{dF}{dx}\Big|_{x^*} < 1$$



$$-1 < C = \frac{dF}{dx}\Big|_{x^*} < 0$$

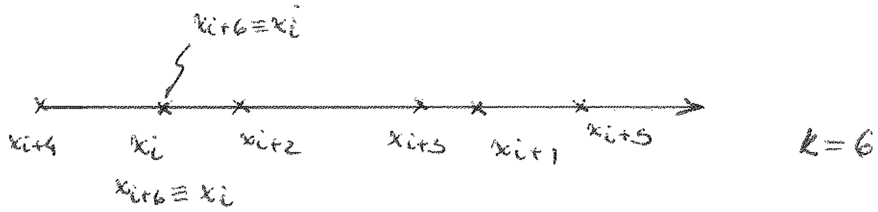
Por outro lado, se $|C| > 1$ as sucessivas iterações afastam-se cada vez mais do ponto fixo, que neste caso é dito instável.

- Se $C > 1$: afastamento monotônico
- Se $C < -1$: afastamento oscilatório.

O caso crítico, em que $C = \left.\frac{dF}{dx}\right|_{x^*} = 1$, não permite conclusão a partir da inspeção unicamente da primeira derivada, a não ser que o mapa seja linear, caso em que $\frac{d^kF}{dx^k} \equiv 0$, $k \geq 2$. Neste caso particular $C = 1$ define um <u>centro</u>.

Além de pontos fixos identificam-se, muitas vezes, <u>órbitas periódicas de período k</u> (periodicidade k) no mapa, definidos por um número finito k de pontos tais que

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= F(x_i) \\
x_{i+2} &= F(F(x_i)) = F^2(x_i) \\
x_{i+3} &= F^3(x_i) \\
&\vdots \\
x_{i+k} &= F^k(x_i) \equiv x_i
\end{aligned}
$$



Considere uma órbita de periodicidade 2

$$
\begin{aligned}
x_{i+1} &= F(x_i) \\
x_{i+2} &= F^2(x_i) = T(x_i) = x_i
\end{aligned}
$$

Definimos $T(x_i) = F^2(x_i)$. A estabilidade da órbita do mapa F pode ser estudada através da estabilidade do ponto fixo $x^* = x_i$ do mapa $T(\cdot) = F^2(\cdot) = F(F(\cdot))$. Generalizemos este resultado para periodicidade k, tal que $T(\cdot) = F^k(\cdot)$

3. Mapas Bidimensionais

Seja

$$x_{i+1} = F_1(x_i, y_i)$$

$$y_{i+1} = F_2(x_i, y_i)$$

com ponto fixo $Q^* = (x^*, y^*)$, tal que

$$x^* = F_1(x^*, y^*)$$
$$y^* = F_2(x^*, y^*)$$

Se Q_i for um ponto próximo de Q^* com

$Q_i = (x_i + \xi_i, y_i + \eta_i)$, ξ_i e η_i pequenos

teremos:

$$x_{i+1} = F_1(x_i + \xi_i; y_i + \eta_i) \cong F_1(x^*, y^*) + \left.\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|_{Q^*} \xi_i + \left.\frac{\partial F_1}{\partial y}\right|_{Q^*} \eta_i$$

$$y_{i+1} = F_2(x_i + \xi_i; y_i + \eta_i) \cong F_2(x^*, y^*) + \left.\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|_{Q^*} \eta_i + \left.\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|_{Q^*} \xi_i$$

mas

$$x_{i+1} = x^* + \xi_{i+1}$$
$$y_{i+1} = y^* + \eta_{i+1}$$

então:

$$\xi_{i+1} \cong \left.\frac{\partial F_1}{\partial x}\right|_{Q^*} \xi_i + \left.\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|_{Q^*} \eta_i$$

$$\eta_{i+1} \cong \left.\frac{\partial F_2}{\partial x}\right|_{Q^*} \xi_i + \left.\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|_{Q^*} \eta_i$$

ou se $\vec{\mathcal{E}}_i = (\xi_i, \eta_i) = \underset{\sim}{\varepsilon_i}$

$$\vec{\mathcal{E}}_{i+1} = \mathbb{J}^* \vec{\mathcal{E}}_i$$

com

$$\mathbb{J}^* = \left.\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x,y)}\right|_{Q^*} = \left[\frac{\partial F_k}{\partial x_j}\right]_{Q^*}$$

a matriz Jacobiana do mapa calculada no ponto fixo Q^*.

A estabilidade do ponto fixo Q^* depende dos autovalores de $\mathbb{J}^*$!

Sejam λ_1 e λ_2 os autovalores de $\mathbb{J}^*$.

- Se λ_1 e λ_2 são reais, sempre é possível encontrar uma transformação que diagonaliza o sistema.

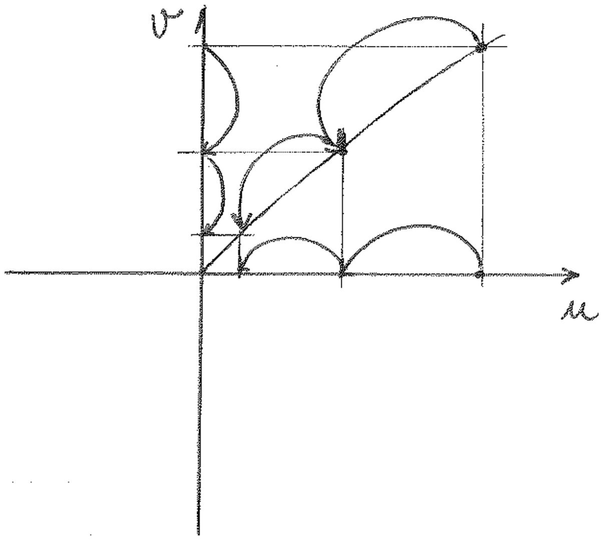
$$u_{i+1} = \lambda_1 u_i$$

$$v_{i+1} = \lambda_2 v_i$$

Desacoplamos o problema reduzindo o estudo do mapa bidimensional ao estudo de dois mapas unidimensionais.

O sistema será, obviamente, assintoticamente estável se $|\lambda_{1,2}| < 1$ e instável se pelo menos um deles tiver módulo maior do que 1 ($|\lambda_1| > 1$ e/ou $|\lambda_2| > 1$)

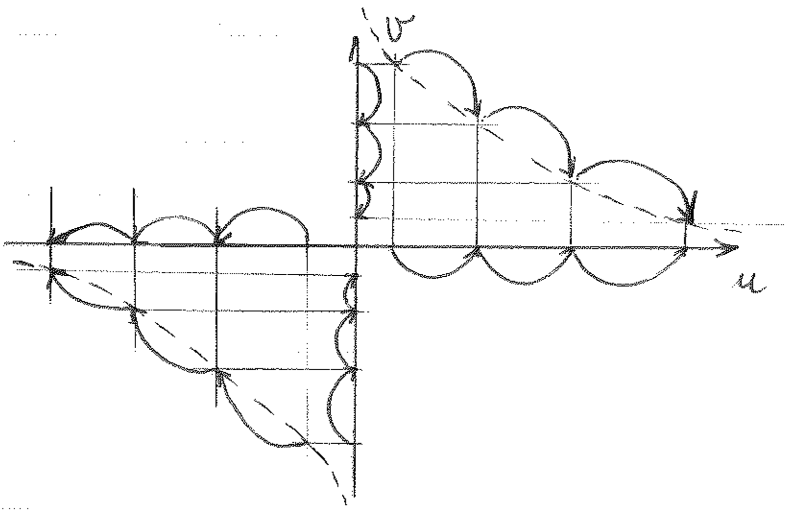
No caso em que $|\lambda_{1,2}|<1$ tem-se um atrator. Se $|\lambda_{1,2}|>1$ tem-se um repulsor. Se apenas um deles tiver módulo maior do que 1 ($|\lambda_1|>1$ ou $|\lambda_2|>1$) trata-se de um ponto de sela



$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

$|\lambda_{1,2}|<1$

$0<\lambda_{1,2}<1$

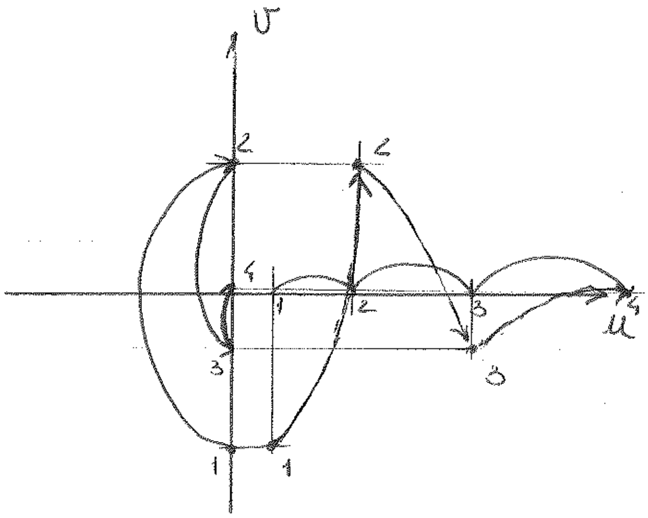


$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

$|\lambda_1|>1$

$|\lambda_2|<1$

$\lambda_{1,2}>0$



$\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$

$|\lambda_2|<1$, $-1<\lambda_2<0$

$|\lambda_1|>1$, $\lambda_1>1$

Os critérios de estabilidade de pontos fixos de mapas bidimensionais podem ser resumidos em termos de um círculo de raio unitário no plano complexo dos autovalores, portanto.

(i) Se os dois auto-valores estão no interior do círculo, o sistema é assintoticamente estável; (ponto fixo é atrator)

(ii) Se ao menos um dos autovalores está fora do círculo o ponto fixo é instável

(iii) o limite de estabilidade é o círculo unitário.

(iv) quando $\lambda_1 = 1$ e $|\lambda_2| < 1$, por exemplo, o estado é de divergência incipiente

(v) quando $\lambda_1 = -1$ e $|\lambda_2| < 1$, p.ex., o estado é de oscilação incipiente.

Nos caso (iv) e (v) termos de ordem superior na expansão em série de Taylor devem ser considerados.

- Se $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \alpha + i\beta$ são autovalores complexos de J^* a transformação a ser utilizada é do tipo

$$\begin{bmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

Seja $z_i = u_i + i v_i = r_i e^{i\theta_i}$

então,

$$z_{i+1} = \lambda_1 z_i$$

com $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, ou $\lambda_1 = |\lambda_1| e^{i \arctan(\beta/\alpha)}$

com $\rho = |\lambda_1| = (\alpha^2+\beta^2)^{1/2}$ e $\psi = \arctan \beta/\alpha$

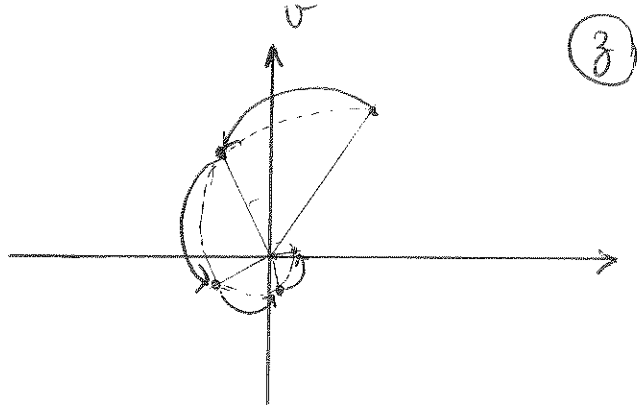
temos

$$\lambda_1 = \rho e^{i\psi}$$

Mas

$$z_{i+1} = \lambda_1 z_i = \rho e^{i\psi} z_i = \rho r_i e^{i(\theta_i+\psi)}$$

e a transformação (conforme) pode ser interpretada como uma expansão ($\rho>1$) ou contração ($\rho<1$) associada a uma rotação de ψ. Obviamente se $\rho=1$ o ponto fixo é um centro

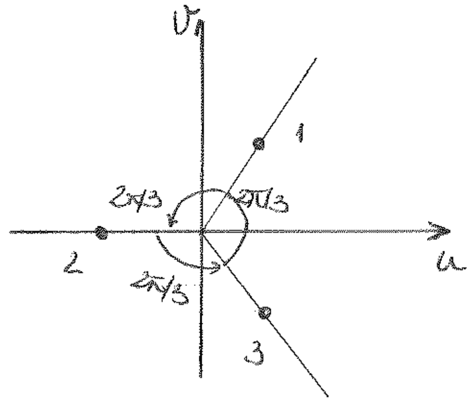


$\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \rho < 1$

Foco estável

Se $\rho = 1$ (centro) e $k\Psi = 2\pi$ todo ponto do plano (u,v) será um ponto periódico. Se $\frac{\Psi}{2\pi}$ for irracional as iterações sucessivas do mapa vão descrever um círculo em torno de (x^*, y^*) (devemos, se o mapa for não-linear, examinar então termos de ordem superior).



$$\Psi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\rho = 1$$

periodicidade 3

Nota: (1) Se, sob o comando de um parâmetro de controle, os autovalores, complexos, cruzarem o círculo de raio unitário teremos uma bifurcação secundária de Hopf ou de Neimark, na qual o ciclo limite dará origem a um novo atrator, um toro T^2.

(2) Mapas n-dimensionais

a matriz Jacobiana $M = \left[\frac{\partial \vec{F}(\vec{x})}{\partial \vec{x}}\right]_{S^*}$

é denominada matriz de Floquet e seus autovalores são os multiplicadores de Floquet.

4. Estabilidade Estrutural e Bifurcação

Seja o sistema dinâmico bidimensional

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2)$$

Erros de modelagem conduzem à necessidade de analisarmos perturbações do sistema.

Seja o sistema perturbado

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2) + \varepsilon f_1(x_1, x_2) = \hat{F}_1(x_1, x_2; \varepsilon)$$
$$\dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2) + \varepsilon f_2(x_1, x_2) = \hat{F}_2(x_1, x_2; \varepsilon)$$

onde $\vec{f}(x_1, x_2)$ é suposta contínua.

O ponto de equilíbrio $\vec{x}_e$ (ou órbita fechada C), é estruturalmente estável se o sistema perturbado tiver um ponto de equilíbrio (ou órbita fechada) em uma vizinhança de $\vec{x}_e$ (ou de C).

Se $\vec{x}_e$ é um ponto de equilíbrio então

$$\vec{F}_1(x_{e_1}, x_{e_2}) = F_2(x_{e_1}, x_{e_2}) = 0 \qquad \text{e , portanto,}$$

$$\hat{F}_1(x_{e_1}, x_{e_2}; \varepsilon=0) = \hat{F}_2(x_{e_1}, x_{e_2}; \varepsilon=0) = 0$$

Caso $\vec{x}_e$ seja estruturalmente estável então

$$\hat{\vec{x}}_e = \vec{x}_e + \varepsilon \Delta\vec{x} \quad ; \quad |\Delta\vec{x}| \sim O(1)$$

e portanto,

$$\hat{F}_1\,(x_{e_1} + \varepsilon\,\Delta x_1\,;\; x_{e_2} + \varepsilon\,\Delta x_2\,;\; \varepsilon\,) = 0$$

$$\hat{F}_2\,(x_{e_1} + \varepsilon\,\Delta x_1\,;\; x_{e_2} + \varepsilon\,\Delta x_2\,;\; \varepsilon\,) = 0$$

Desenvolvendo em série de Taylor em torno de x_{e_1} e x_{e_2} :

$$\hat{F}_1\,(\hat{x}_{e_1}, \hat{x}_{e_2}; \varepsilon\,) = \hat{F}_1\,(x_{e_1}, x_{e_2}; 0) + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_1}(x_{e_1}, x_{e_2}; 0)\,\varepsilon\Delta x_1$$

$$+ \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_2}(x_{e_1}, x_{e_2}; 0)\,\varepsilon\Delta x_2 + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial \varepsilon}(x_{e_1}, x_{e_2}; 0)\,\varepsilon = 0$$

mas, $\hat{F}_1\,(x_{e_1}, x_{e_2}; 0) = 0$ logo

$$\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_1}(\bar{x}_{e_1}, \bar{x}_{e_2}; 0)\,\Delta x_1 + \frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_2}(x_{e_1}, x_{e_2}; 0)\,\Delta x_2 = -\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial \varepsilon}(x_{e_1}, x_{e_2}; 0)$$

analogamente

$$\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial x_1}(x_{e_1}, x_{e_2}; 0)\,\Delta x_1 + \frac{\partial \hat{F}_2}{\partial x_2}(x_{e_1}, x_{e_2}; 0)\,\Delta x_2 = -\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial \varepsilon}(x_{e_1}, x_{e_2}; 0)$$

porém $\dfrac{\partial \hat{F}_1}{\partial \varepsilon}(x_1, x_2; \varepsilon) = f_1(x_1, x_2)$ e

$$\frac{\partial \hat{F}_2}{\partial \varepsilon}(x_1, x_2; \varepsilon) = f_2(x_1, x_2)$$

e, assim,

$$\mathbb{J}_e\,\Delta\vec{x} = -\vec{f}(x_1, x_2)\Big|_{\vec{x} = \vec{x}_e} \qquad (*)$$

com

$$\mathbb{J}_e = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\vec{x}_e}$$

a matriz Jacobiana em $\bar{x}_e$.

Note que

$$\frac{\partial \hat{F}_1}{\partial x_1}(x_1, x_2; \varepsilon) = \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_1, x_2) + \varepsilon \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_1, x_2)$$

e, analogamente, para os outros termos:

$$\frac{\partial \hat{F}_k}{\partial x_j}(x_1, x_2; \varepsilon) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x_1, x_2) + \varepsilon \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x_1, x_2)$$

então:

$$\frac{\partial \hat{F}_k}{\partial x_j}(x_{e_1}, x_{e_2}; 0) = \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(x_{e_1}, x_{e_2})$$ e portanto

$$\hat{\mathbb{J}}(\bar{x}_e) = \mathbb{J}(\vec{x}_e) \qquad (\varepsilon = 0).$$

Como o lado direito de (*) é arbitrário, a c.n.s. para existência de solução é que

$$\det \mathbb{J}_e \neq 0$$

e $\bar{x}_e$ será um ponto de sela se $\det \mathbb{J}_e < 0$ ou um nó (ou foco, ou centro) se $\det \mathbb{J}_e > 0$, como visto anteriormente.

Se $\det J_e \equiv 0$ o ponto de equilíbrio degenera. Esta situação corresponde à bifurcação.

Considere, como exemplo,

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = \lambda x_1 - x_1^3$$

que é o clássico oscilador cúbico não amortecido.

Se $\lambda > 0$ existem três pontos de equilíbrio como visto anteriormente: $\vec{x}_e = (0,0)$ e $\vec{x}_e = (\pm\sqrt{\lambda}, 0)$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - 3x_1^2 & 0 \end{bmatrix}$$

e assim

$$\det J_e = \det J(\vec{x}_e) = \begin{cases} -\lambda & ; (\vec{x}_e = (0,0)) \\ +2\lambda & ; (\vec{x}_e = (\pm\sqrt{\lambda}, 0)) \end{cases}$$

A condição $\det J(\vec{x}_e) = \det J_e = 0$ ocorre quando $\lambda = 0$, ou seja, no "ponto de bifurcação".

"Bifurcação, portanto, é uma característica estrutural do sistema"

No caso de órbitas fechadas, ou ciclos-limite, a análise de estabilidade estrutural pode ser conduzida através da aplicação de Poincaré.

Considere C uma órbita fechada do sistema original

$$\dot{x}_1 = F_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = F_2(x_1, x_2)$$

Seja $\hat{P}(A;\varepsilon)$ a aplicação de Poincaré para o sistema perturbado. Assim:

$$\hat{P}(A_0;0) = A_0$$

onde A_0 é um ponto fixo da aplicação de Poincaré do sistema original, tal que $P(A_0) \equiv A_0$.

Se a órbita C for estruturalmente estável então existirá um certo $A(\varepsilon)$ tal que

$$A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon \Delta A$$
$$\hat{P}(A(\varepsilon);\varepsilon) = A(\varepsilon)$$

Assim,

$$\hat{P}(A_0 + \varepsilon \Delta A; \varepsilon) = A_0 + \varepsilon \Delta A$$

Desenvolvendo a expressão acima no parâmetro ε

$$\cancel{\hat{P}(A_0;0)} + \frac{\partial \hat{P}}{\partial \varepsilon}(A_0;0)\varepsilon + \frac{\partial \hat{P}}{\partial A}(A_0;0)\varepsilon \Delta A = \cancel{A_0} + \varepsilon \Delta A$$

então:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathcal{E}}(A_0;0) + \frac{\partial \hat{P}}{\partial A}(A_0;0)\,\Delta A = \Delta A$$

e portanto:

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathcal{E}}(A_0;0) + \left(\left.\frac{\partial \hat{P}}{\partial A}\right|_{(A_0;0)} - 1\right)\Delta A = 0$$

conduzindo a

$$\Delta A = - \frac{\frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathcal{E}}(A_0;0)}{\frac{\partial \hat{P}}{\partial A}(A_0;0) - 1}$$

A órbita será estável se e somente se

$$\frac{\partial \hat{P}}{\partial A}(A_0;0) \neq 1$$

ou, denotando $\frac{\partial \hat{P}}{\partial A}(A_0;0) = \frac{dP}{dA}(A_0) = P'(A_0)$

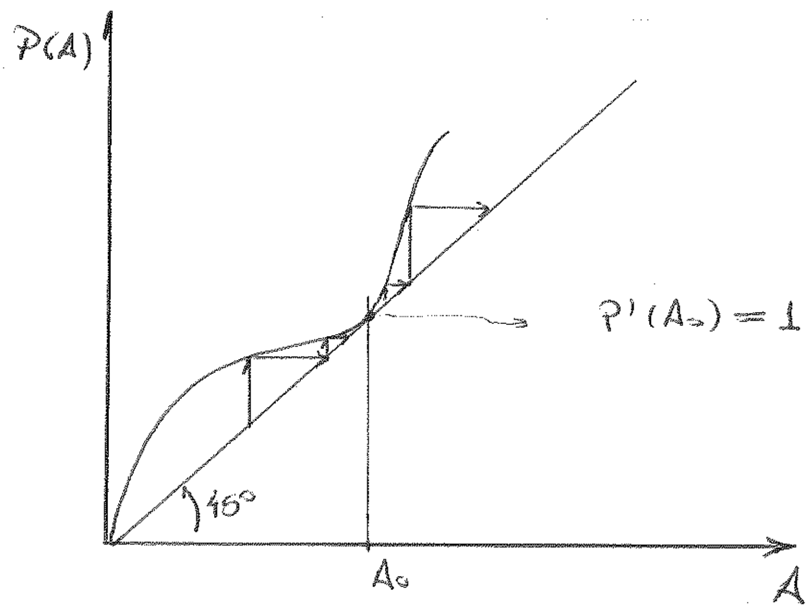
temos como condição necessária

$$P'(A_0) \neq 1$$

Os ciclos-limite estáveis e instáveis são, portanto, estruturalmente estáveis. No primeiro caso $P'(A_0) < 1$ e, no segundo caso, $P'(A_0) > 1$.

Já os ciclos-limite semi-estáveis são estruturalmente instáveis.

ciclo-limite
semi-estável



VI. CICLOS-LIMITE E ESCALAS MÚLTIPLAS

Uma técnica de matemática aplicada que permite resolver de forma assintótica uma série de problemas em osciladores não-lineares é a técnica conhecida como de escalas-múltiplas de tempo.

Este método surge como alternativa ao clássico método de perturbações que podem dar origem, diante de fenómenos ressonantes, a termos seculares, i.e., termos que crescem com t (ou mais rápidamente). Embora termos seculares acabem por se anular (quando o sistema tem solução limitada), à medida em que a soma dos termos da série de perturbações é realizada, este é um processo por demais exaustivo.

Daí a adequabilidade da técnica de "escalas-múltiplas".

O procedimento formal consiste em considerar uma segunda escala de tempo $\tau = \varepsilon t$ que dará origem a termos do tipo $\cos(\varepsilon t)$, lentamente variáveis quando comparado a termos típicos na forma $\cos t$. Esta escala adicional é um artifício e representar a solução como função de duas "variáveis" independentes, t e τ, tem apenas o objetivo de permitir a remoção de termos seculares.

Assim seja um oscilador do tipo

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = 0 \qquad (*)$$

Assuma uma expansão na forma:

$$x(t) = X_0(t,\tau) + \varepsilon X_1(t,\tau) + \dots$$

então:

$$\dot{x}(t) = \left(\frac{\partial X_0}{\partial t} + \frac{\partial X_0}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt}\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial X_1}{\partial t} + \frac{\partial X_1}{\partial \tau}\frac{d\tau}{dt}\right) + \dots$$

mas como $\tau = \varepsilon t$ então $d\tau/d\tau = \varepsilon$ e portanto

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial X_0}{\partial t} + \varepsilon\left(\frac{\partial X_0}{\partial \tau} + \frac{\partial X_1}{\partial t}\right) + O(\varepsilon^2) \quad (a)$$

Derivando novamente em relação a t obtemos

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + \varepsilon\left(\frac{\partial^2 X_0}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2}\right) + \frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial X_0}{\partial t}\frac{d\tau}{dt} + O(\varepsilon^2)$$

logo

$$\ddot{x}(t) = \frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + \varepsilon\left(2\frac{\partial^2 X_0}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2}\right) + O(\varepsilon^2) \quad (b)$$

Substituindo (a) e (b) em (*) e colecionando termos de mesma ordem de magnitude em ε é possível impor condições para a remoção de termos seculares.

Este procedimento final é melhor visualizado através de exemplos.

Ex 1. Tomemos um oscilador, cúbico no amortecimento, na forma

$$\ddot{x} + x + \varepsilon(\dot{x})^3 = 0 \quad ; \quad x(0)=1; \; \dot{x}(0)=0$$

Se $\varepsilon > 0$ a primeira integral de energia

$$\frac{d}{\partial t}\left\{ \frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}x^2 \right\} = -\varepsilon(\dot{x})^4 \leq 0$$

mostra que a origem é um foco estável.

A técnica de escalas múltiplas será utilizada para estudar o comportamento de $x(t)$ para t grande.

Tomando

$$x(t) \cong X_0(t,\tau) + \varepsilon X_1(t,\tau) \quad , \quad \varepsilon \to 0+$$

com $\tau = \varepsilon t$ temos, de (a) e (b)

$$\dot{x}(t) \cong \frac{\partial X_0}{\partial t} + \varepsilon\left(\frac{\partial X_0}{\partial \tau} + \frac{\partial X_1}{\partial t} \right)$$

$$\ddot{x}(t) \cong \frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + \varepsilon\left(2\frac{\partial X_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} \right)$$

então:

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + \varepsilon\left(2\frac{\partial^2 X_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} \right) + X_0 + \varepsilon X_1 +$$

$$+ 3\varepsilon^2\left(\frac{\partial X_0}{\partial t} \right)^2 \left(\frac{\partial X_0}{\partial \tau} + \frac{\partial X_1}{\partial t} \right) + \varepsilon\left(\frac{\partial X_0}{\partial t} \right)^3 = O(\varepsilon^3)$$

e portanto:

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + X_0 = 0 \qquad (i)$$

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} + X_1 = -2\frac{\partial^2 X_0}{\partial t\,\partial \tau} - \left(\frac{\partial X_0}{\partial t}\right)^3 \qquad (ii)$$

A solução real mais geral de (i), dada por:

$$X_0(t,\tau) = A(\tau)\,e^{it} + A^*(\tau)\,e^{-it}$$

de onde obtemos

$$\frac{\partial X_0}{\partial t} = i\,A(\tau)\,e^{it} - i\,A^*(\tau)\,e^{-it}$$

$$\left(\frac{\partial X_0}{\partial t}\right)^3 = -i\,A^3(\tau)e^{3it} + 3i\left[|A|^2 A\,e^{it} + |A|^2 A^* e^{-it}\right] + i\,A^{*3}(\tau)\,e^{-3it}$$

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial t\,\partial \tau} = i\frac{dA}{d\tau}e^{it} - i\frac{dA^*}{d\tau}e^{-it}$$

assim:

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} + X_1 = -2i\frac{dA}{d\tau}e^{it} + 2i\frac{dA^*}{d\tau}e^{-it} + i\,A^3(\tau)e^{3it} - i\,A^{*3}e^{-3it} + 3i|A|^2 A\,e^{it} + 3i|A|^2 A^* e^{-it} =$$

$$= -e^{it}\left\{2i\frac{dA}{d\tau} + 3i|A|^2 A\right\} - e^{-it}\left\{-2i\frac{dA^*}{d\tau} - 3i|A|^2 A^*\right\} + i\,A^3 e^{3it} - i\,A^{*3}e^{-3it}$$

Os termos seculares somente serão evitados se

$$2i \frac{dA}{d\tau} + 3i\,|A|^2 A = 0$$

e

$$-2i \frac{dA^*}{d\tau} - 3i\,|A|^2 A^* = 0$$

que são equivalentes

Seja $\qquad A(\tau) = R(\tau)\, e^{i\theta(\tau)}$

então:

$$2i \left\{ \frac{dR}{d\tau} e^{i\theta(\tau)} + iR(\tau)\, e^{i\theta(\tau)} \frac{d\theta}{d\tau} \right\} +$$

$$+ 3i\, R^3(\tau)\, e^{i\theta(\tau)} = 0$$

ou seja

$$\frac{dR}{d\tau} = -\frac{3}{2} R^3(\tau)$$

e

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 0$$

com solução

$$\theta(\tau) = \theta(0) = \theta_0$$

e

$$\int \frac{dR}{R^3} = -\frac{3}{2}\,\tau$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{R^2} + C = -\frac{3}{2}\,\tau \Rightarrow C = \frac{1}{2}\frac{1}{R^2(0)}$$

então :

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^2(\tau)} - \frac{1}{R^2(0)}\right) = -\frac{3}{2}\tau$$

$$\frac{1}{R^2(\tau)} = \frac{1}{R^2(0)} + 3\tau$$

$$\frac{1}{R^2(\tau)} = \frac{1+3\tau R^2(0)}{R^2(0)}$$

$$R(\tau) = \frac{R(0)}{\sqrt{1+3\tau R^2(0)}} = \frac{R_0}{\sqrt{1+3\tau R_0^2}}$$

Das condições iniciais originais:

$x(0) = 1$ e $\dot{x}(0) = 0$ vem que

$X_0(0,0) = 1$, $\frac{\partial X_0}{\partial t}(0,0) = 0$ então:

$$R_0 = R(0) = \frac{1}{2} \quad e \quad \theta_0 = \theta(0) = 0 \Rightarrow A(\tau) = R(\tau) = \frac{1}{\sqrt{4+3\varepsilon t}}$$

Por fim, em primeira ordem em ε,

$$x(t) = X_0(t,\tau) + \varepsilon X_1(t,\tau) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4+3\varepsilon t}}\cos t + \varepsilon X_1(t,\varepsilon t)$$

ou

$$x(t) \cong \frac{\cos t}{\sqrt{1+\frac{3}{4}\varepsilon t}}$$

Note que $\quad x(t) \sim t^{-1/2}, \quad t \to \infty \quad, \varepsilon > 0$

$\quad x(t) \to \infty \quad, \quad t \to -\frac{1}{2\varepsilon} \quad, \quad \varepsilon < 0$

<u>Exemplo 2</u>: Aproximação de um ciclo-limite "Oscilador de Rayleigh"

$$\ddot{x} + x = \varepsilon \left(\dot{x} - \frac{1}{3} (\dot{x})^3 \right) \qquad \begin{array}{l} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 2a \end{array}$$

Tomemos

$$x(t) \sim X_0(t,\tau) + \varepsilon X_1(t,\tau) + \cdots \quad , \quad \begin{array}{l} \varepsilon \to 0^+ \\ \tau = \varepsilon t \end{array}$$

procedendo de forma análoga obtemos:

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + X_0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} + X_1 = -2\frac{\partial^2 X_0}{\partial t \partial \tau} + \frac{\partial X_0}{\partial t} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial X_0}{\partial t}\right)^3 \qquad (**)$$

portanto

$$X_0(t,\tau) = A(\tau) e^{it} + A^*(\tau) e^{-it}$$

que substituída em (**) e evitando termos seculares conduz a

$$-2i\frac{dA}{d\tau} + iA - i|A|^2 A = 0$$

tomando, novamente, $A(\tau) = R(\tau) e^{i\theta(\tau)}$

vem

$$2\frac{dR}{d\tau} = R - R^3$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = 0$$

com solução: $\theta(\tau) = \theta(0) = \theta_0$ e

$$2\int \frac{dR}{R(1-R^2)} = \tau$$

que conduz a

$$R(\tau) = R_0\left\{e^{-\tau} + R_0^2(1-e^{-\tau})\right\}^{-1/2}$$

A condição inicial $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 2a$ requer que

$R_0 = a$ e $\theta_0 = -\pi/2$ e finalmente

$x(t) \sim 2R(\tau)\operatorname{sen} t$

$$x(t) \sim \frac{2a \operatorname{sen} t}{\sqrt{e^{-\varepsilon t} + a^2(1-e^{-\varepsilon t})}}, \quad \varepsilon \to 0^+, \quad \varepsilon t \sim O(1)$$

Para qualquer valor de a a solução aproxima-se do ciclo-limite $x(t) = 2\operatorname{sen} t$.

Se $a<1$ a espiral, no plano de fase, é divergente. Se $a>1$, é convergente. O ciclo-limite é estável. e é um círculo de raio 2 no plano de fase.

Note, por outro lado que o ciclo-limite está atingindo se:

$$\frac{dR}{d\tau} = p(R) = \frac{1}{2} R(1-R^2) = 0$$

o que conduz a $\bar{R} = 1$ e como $\theta_0 = -\pi/2$

$$A(\tau) = R(\tau) e^{-i\pi/2} \quad \text{logo}$$

$$x_0(t,\tau) = e^{i(t-\pi/2)} + e^{-i(t-\pi/2)} = 2 \operatorname{sen} t$$

conforme já demonstrado.

Também, o mapa de Poincaré pode ser construído explicitamente. De fato, tomando uma seção de Poincaré no plano $x, \dot{x}$ tal que $OA =$

pois

$$x(t) = 2R(\tau) \operatorname{sen} t = 2R(\varepsilon t) \operatorname{sen} t$$

$$\dot{x}(t) = \frac{2dR}{d\tau} \varepsilon \operatorname{sen} t + 2R(\varepsilon t) \cos t$$

$$OA = \sqrt{x^2 + \dot{x}^2} = \sqrt{4R^2(\tau) + 8\varepsilon \frac{dR}{d\tau} R \operatorname{sen} t \cos t + 4\varepsilon^2 \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 \operatorname{sen}^2 t}$$

$$OA \cong 2R \sqrt{1 + 2\frac{\varepsilon}{R}\frac{dR}{d\tau} \operatorname{sen} t \cos t + \frac{\varepsilon^2}{R^2}\left(\frac{dR^2}{d\tau^2}\right) \operatorname{sen}^2 t}$$

$$\cong 2R\left(1 - \frac{\varepsilon}{R}\frac{dR}{d\tau} \operatorname{sen} t \cos t\right) = 2R\left(1 - \frac{\varepsilon}{2R}\frac{dR}{d\tau} \operatorname{sen} 2t\right)$$

$$P(A) = 2R\left(1 - \frac{\varepsilon}{2R}\frac{dR}{d\tau}\,\mathrm{sen}\,2t\right) \qquad (t = 2\pi,\ \tau = 2\pi\varepsilon)$$

$$P(A) = 2R(2\pi\varepsilon)$$

mas $\quad \dfrac{dR}{d\tau} = p(R)$

$$\int_0^{2\pi\varepsilon} \frac{dR}{d\tau}\,d\tau = \int_0^{2\pi\varepsilon} p(R)\,d\tau = \int_0^{2\pi\varepsilon} p(R(\tau))\,d\tau$$

$$R(2\pi\varepsilon) - R_0 = \int_0^{2\pi\varepsilon} p(R(\tau))\,d\tau$$

$$= \int_0^{2\pi\varepsilon} \frac{1}{2}\left(R(\tau) - R^3(\tau)\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi\varepsilon} \left\{ \frac{R_0}{\left(e^{-\tau} + R_0^2(1-e^{-\tau})\right)^{1/2}} - \frac{R_0^3}{\left(e^{-\tau} + R_0^2(1-e^{-\tau})\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} d\tau$$

aproximadamente, no entanto,

$$P(A) = A + 2\pi\varepsilon \cdot 2p(A) = A + 4\pi\varepsilon\, p(A)$$

$$P'(A) = 1 + 4\pi\varepsilon\, p'(A)$$

$$p'(R) = \frac{1}{2}\left(1 - 3R^2\right)$$

Equação de Van der Pol

$$\ddot{x} - \mu(1-x^2)\dot{x} + x = 0 \qquad \mu \neq 0$$

Se μ é pequeno: $\mu = \varepsilon$

$$\ddot{x} - \varepsilon(1-x^2)\dot{x} + x = 0$$

Escalas Múltiplas $\tau = \varepsilon t$

$$x(t) = X_0(t,\tau) + \varepsilon X_1(t,\tau) + \cdots$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial X_0}{\partial t} + \varepsilon\left(\frac{\partial X_0}{\partial \tau} + \frac{\partial X_1}{\partial t}\right) + O(\varepsilon^2)$$

$$\ddot{x} = \frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + \varepsilon\left(2\frac{\partial^2 X_0}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2}\right) + O(\varepsilon^2)$$

$$x^2(t) = X_0^2 + 2\varepsilon X_0 X_1$$

então:

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + \varepsilon\left(2\frac{\partial^2 X_0}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2}\right) - \varepsilon(1-X_0^2)\left(\frac{\partial X_0}{\partial t} + \varepsilon\left(\frac{\partial X_0}{\partial \tau} + \frac{\partial X_1}{\partial t}\right)\right)$$
$$+ X_0 + \varepsilon X_1 = O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + \varepsilon\left(2\frac{\partial^2 X_0}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2}\right) - \varepsilon(1-X_0^2)\frac{\partial X_0}{\partial t} + X_0 + \varepsilon X_1 = O(\varepsilon^2)$$

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial t^2} + X_0 = 0$$

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} + X_1 = -2\frac{\partial^2 X_0}{\partial \tau \partial t} + \frac{\partial X_0}{\partial t}(1-X_0^2)$$

$$X_0(t,\tau) = A(\tau)\, e^{it} + A^*(\tau) e^{-it}$$

$$\frac{\partial X_0}{\partial t} = i\, A(\tau) e^{it} - i A^* e^{-it}$$

$$\frac{\partial^2 X_0}{\partial\tau\partial t} = i\frac{dA}{d\tau} e^{it} - i\frac{dA^*}{d\tau} e^{-it}$$

$$X_0^2 = A^2(\tau)\, e^{2it} + 2|A|^2 + A^{*2}(\tau)\, e^{-2it}$$

então

$$\frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} + X_1 = -2i\frac{dA}{d\tau} e^{it} + 2i\frac{dA^*}{d\tau} e^{-it} +$$

$$+ (iAe^{it} - iA^* e^{-it})\left[1 - (A^2 e^{2it} + 2|A|^2 + A^{*2} e^{-2it})\right] =$$

$$= -2i\frac{dA}{d\tau} e^{it} + 2i\frac{dA^*}{d\tau} e^{-it} + iAe^{it} - iA^* e^{-it} +$$

$$+ iA^3 e^{3it} - iA^{*3} e^{-3it} +$$

$$+ (2i|A|^2 A e^{it} + i|A|^2 A^* e^{-it} - i|A|^2 A^* e^{it} - 2i|A|^2 A^* e^{-it})$$

$$= e^{it}\left\{-2i\frac{dA}{d\tau} + iA + i|A|^2 A\right\} +$$

$$+ e^{-it}\left\{2i\frac{dA^*}{d\tau} - iA^* + i|A|^2 A^*\right\} + \left(iA^3 e^{3it} - iA^{*3} e^{-3it}\right)$$

evitando termos seculares:

$$-2i\frac{dA}{d\tau} + iA - i|A|^2 A = 0 \qquad (\text{eq}^{\underline{\text{te}}}\ (*) = 0)$$

Se $\quad A(\tau) = R(\tau) e^{i\theta(\tau)}$

$$\frac{dA}{d\tau} = \frac{dR}{d\tau} e^{i\theta(\tau)} + i\, R(\tau) e^{i\theta(\tau)} \frac{d\theta}{d\tau} = e^{i\theta(\tau)}\left(\frac{dR}{d\tau} + iR(\tau)\frac{d\theta}{d\tau}\right)$$

$|A|^2 = R^2(\tau)$: $|A|^2 A = R^3(\tau)\, e^{i\theta(\tau)}$

então:

$$-2i\, e^{i\theta(\tau)}\left(\frac{dR}{d\tau} + i R(\tau)\frac{d\theta}{d\tau}\right) + i e^{i\theta(\tau)} R(\tau) - i R^3(\tau)\, e^{i\theta(\tau)} = 0$$

assim:

$$\left(-2i\frac{dR}{d\tau} + 2R(\tau)\frac{d\theta}{d\tau} + i R(\tau) - i R^3(\tau)\right) = 0$$

e, portanto,

$$R(\tau)\frac{d\theta}{d\tau} = 0 \quad \therefore \quad \theta(\tau) = \theta(0) = \theta_0$$

e

$$2\frac{dR}{d\tau} - R + R^3 = 0$$

$$\frac{dR}{d\tau} = -\frac{1}{2}(R^3 - R) = -\frac{1}{2}R(R^2 - 1) = \frac{R}{2}(1 - R^2)$$

ciclo limite: $R = 1$ (~~dupla~~ raiz simples)

logo o ciclo-limite é único (para $\mu = \varepsilon \ll 1$)

e

$$R(\tau) = R_0 \left(e^{-\tau} + R_0^2(1 - e^{-\tau})\right)^{-1/2}$$

ROTEIRO PARA O TRABALHO

1. Estabeleça o modelo físico de forma a reduzir o mínimo de graus de liberdade a um nível que permita o tratamento do problema.

2. Procure modelar as principais características dinâmicas de forma simples, sem contudo perder de vista o comportamento não-linear do sistema estudado.

3. Adimensionalize o equacionamento, de forma a identificar parâmetros de controle de forma nítida e cuja interpretação física seja simples.

4. Tendo em mente o estudo analítico do problema tente reduzir o sistema estudado a um sistema bidimensional autônomo.

5. Analise o sistema bidimensional autônomo no que diz respeito à topologia de seu espaço de fase, identificando pontos de equilíbrio, atratores periódicos e bifurcações porventura ocorrentes.

6. Tente esboçar o plano de fase e construí-lo, se possível analiticamente. Caso contrário faça-o numericamente exemplificando diferentes cenários emergentes de variação do(s) parâmetro(s) de controle. Tente construir o mapeamento de Poincaré.

7. Discuta os resultados obtidos para o sistema autônomo bidimensional.

8. Admita o sistema bidimensional simplificado porém agora forçado de forma monocromática (quando for o caso)

9. Através de simulação numérica construa o mapeamento estroboscópico, exemplificando, se possível, casos de ocorrência de multiplicidade de período.

10. Investigue cenários de comportamento dinâmico emergentes, sob a variação dos parâmetros de controle. Note que a amplitude e a frequência da forçante são parâmetros de controle.