

Aula 06

Forças de segunda-ordem em ondas: deriva média e deriva lenta

A descrição estatística do mar

Forças de deriva em ondas irregulares



Introdução

- Objetivos:
 - Apresentar uma introdução às forças não lineares induzidas pelas ondas, retendo termos até segunda ordem (quadráticos na amplitude de onda);
 - Definir os problemas de deriva media e deriva lenta;
 - Estudar o problema de deriva-lenta em ondas irregulares (mar);
 - Apresentar modelo teórico que permite simplificar o cálculo das deriva lenta em sistemas pouco amortecidos.

Referências

- Referências sugeridas para estudo:
 1. DEAN R.G. & DALRIMPLE, R.A. Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists. Word Scientific, 1991.
 2. FALTINSEN, O.M. Sea Loads on ships and offshore structures. Cambridge University Press, 1990.
 3. JOURNÉE, J.M.J & MASSIE, W.W. Offshore Hydromechanics, Apostila, Delft University of Tech., Holanda, 1a Ed., 2001
 4. PINKSTER, J. A. “Low Frequency Second Order Wave Exciting Forces on Floating Structures”. PhD Thesis, Delft Univ. Tech., 1980

Forças de segunda-ordem

- Podemos decompor todas as variáveis do escoamento (velocidade e pressão), da onda (elevação) e do corpo flutuante (deslocamentos, vetor normal do corpo, área molhada, velocidades,...) em termos de diferentes ordens de magnitude em relação à amplitude da onda incidente. Exemplo:

$$\phi(x, y, z, t) = \phi_0 + \varepsilon\phi_1 + \varepsilon^2\phi_2 + \dots$$

$$p(x, y, z, t) = p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots$$

$$\zeta(x, y, t) = \zeta_0 + \varepsilon\zeta_1 + \varepsilon^2\zeta_2 + \dots$$

$$\vec{X}(t) = \vec{X}_0 + \varepsilon\vec{X}_1 + \varepsilon\vec{X}_2 + \dots$$

$$\vec{n}(x, y, z, t) = \vec{n}_0 + \varepsilon\vec{n}_1 + \varepsilon\vec{n}_2 + \dots$$

$$\varepsilon = kA \ll 1$$

Ondas de
pequena
declividade
(amplitude)

Forças de segunda-ordem

- Os termos lineares (sub-índice 1) foram discutidos na aula anterior. Todos são proporcionais à amplitude de onda (A). As forças hidrodinâmicas são calculadas considerando-se:

1. Campo de pressão linear: $\varepsilon p_1(x, y, z, t) \sim O(A)$

2. Superfície-molhada média do corpo: $\overline{S_B} = S_{B,0} \sim O(1)$

do que resulta:

$$\varepsilon \overline{F_1}(t) = \iint_S \varepsilon p_1 \overline{n_0} dS \sim O(A)$$

Forças de segunda-ordem

- A parcela de pressão de segunda-ordem pode ser obtida a partir da Equação de Bernoulli, e resulta (ver Pinkster, 1980):

$$\varepsilon^2 p_2 = \varepsilon^2 \left(-\rho \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1 - \rho \bar{X}_1 \cdot \nabla \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - \rho g X_{2,3} \right)$$

The diagram illustrates the decomposition of the second-order pressure term $\varepsilon^2 p_2$ into three components, each enclosed in a circle and connected to a descriptive box by an arrow:

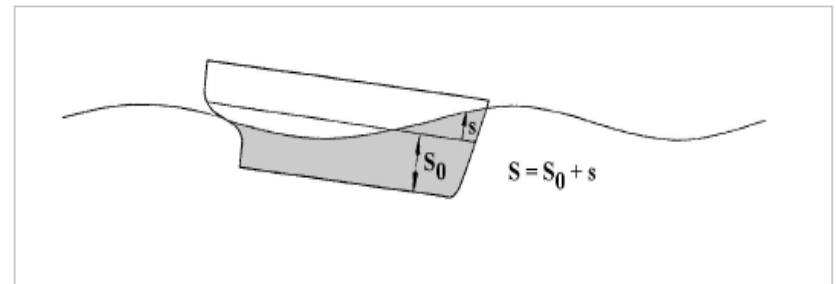
- Termo devido ao potencial de 2a ordem**: Points to the term $-\rho \frac{\partial \phi_2}{\partial t}$.
- Termos forçantes da solução de 1a ordem**: Points to the terms $-\nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1$ and $-\rho \bar{X}_1 \cdot \nabla \frac{\partial \phi_1}{\partial t}$.
- Termo hidrostático devido ao movimento vertical (heave) de 2a ordem**: Points to the term $-\rho g X_{2,3}$.

Forças de segunda-ordem

- E a força de segunda-ordem ainda deverá levar em conta as diferentes parcelas de ordem ε^2 que resultam da integração dos campos de pressão médio, linear e quadrático sobre a superfície molhada média e sua flutuação de 1ª ordem:
- Chamemos aqui: $\varepsilon S_{B,1} = s(t)$

$$\vec{F}(t) = \iint_{S_B} p \vec{n} dS$$

$$\vec{F}(t) = \iint_{\bar{S}_B + s} (p_0 + \varepsilon p_1 + \varepsilon^2 p_2 + \dots)(\vec{n}_0 + \varepsilon \vec{n}_1 + \varepsilon^2 \vec{n}_2 + \dots) dS$$



Forças de segunda-ordem

- E, assim, a força de segunda-ordem resulta:

$$\varepsilon^2 \vec{F}_2(t) = \varepsilon^2 \iint_{\underline{S}_B} (p_2 \vec{n}_0 + p_1 \vec{n}_1) dS + \iiint_S \varepsilon p_1 \vec{n}_0 dS$$

Termos forçantes da solução de
1a ordem

Observação: Se a estrutura for fixa, então não há variação da normal e $n_1=0$, embora continue havendo variação da área molhada devido à elevação da onda ($s \neq 0$), que contribui para a força de segunda-ordem. O Exercício 3 da lista #2 trabalha este tipo de situação.

Forças de segunda-ordem

- O campo de pressão de segunda ordem ($\varepsilon^2 p_2$) oscilará em *frequências diferentes* daquelas das ondas incidentes.
- Para se avaliar isso, é interessante analisar o que ocorre com uma das parcelas de pressão de segunda-ordem quando a estrutura está sob ação de duas ondas regulares: [ver discussão nas notas de aula](#)

Forças de segunda-ordem

- Da discussão fica claro que as forças de segunda terão componentes médias (constantes) e componentes que oscilam no tempo em baixas e altas frequências.
- Do ponto de vista prático, *as componentes oscilatórias só causam problemas quando excitam a ressonância de algum sistema ancorado.*

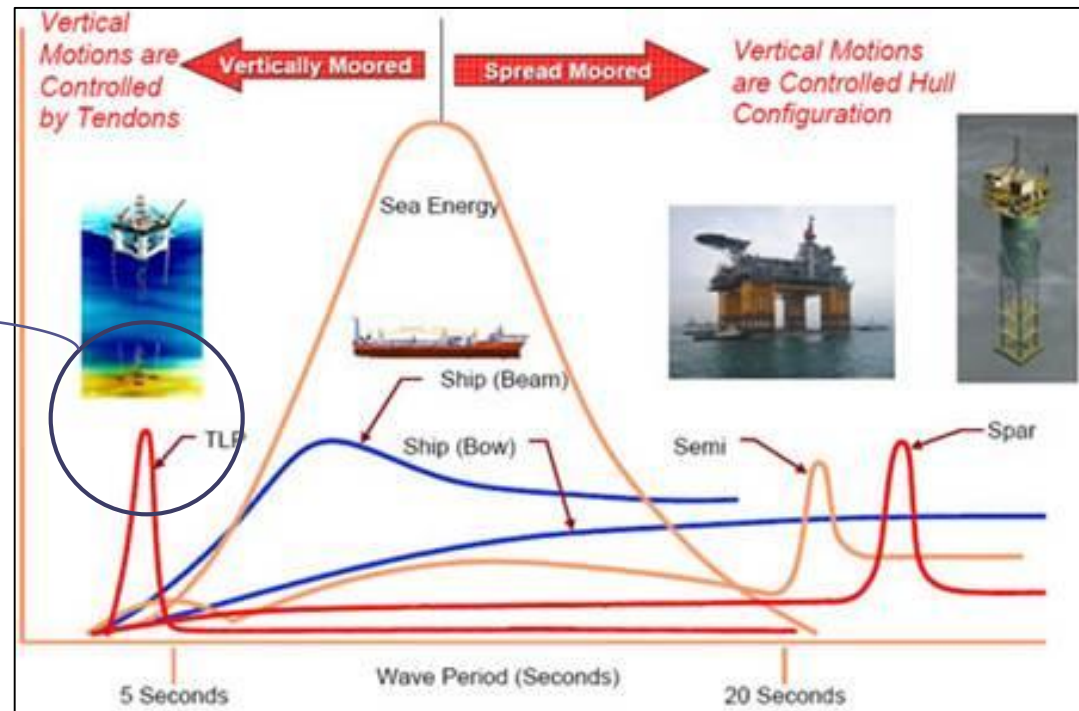
$$\vec{F}_2(t) = \boxed{\overline{F}_2 + \vec{F}_2^{(-)}(t)} + \boxed{\vec{F}_2^{(+)}(t)}$$

Em sistemas ancorados darão origem aos problemas de deriva media (*mean drift*) e deriva-lenta (*slow drift*)

Importante, p.ex., no problema de *springing* dos tendões de uma TLP

Forças de segunda-ordem

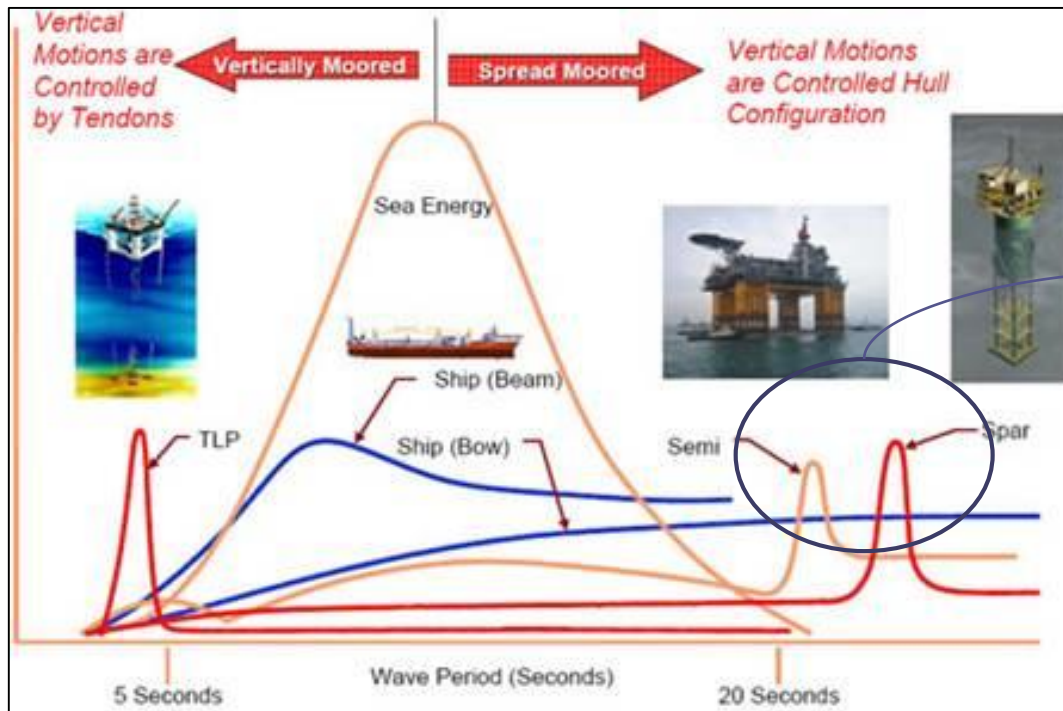
- As ressonâncias do sistema fundeado (se abaixo ou acima das frequências de ondas do mar) nos dirão quais as cargas de segunda-ordem relevantes para cada sistema



Cargas ressonantes axiais nos tendões induzidas por forças de 2ª ordem em alta frequência

Forças de segunda-ordem

- As ressonâncias do sistema fundeado (se abaixo ou acima das frequências de ondas do mar) nos dirão quais as cargas de segunda-ordem relevantes para cada sistema



Deriva média e movimentos ressonantes lentos carregando as linhas de ancoragem

Forças de deriva média

- As forças de deriva média não têm contribuição do potencial de segunda-ordem ϕ_2 , e podem ser escritas na forma (ver Pinkster, 1980):

$$\vec{F}_2 = \vec{D}(\omega) = \oint_{WL} \frac{1}{2} \rho g (\zeta_{(1),r})^2 \vec{n}_0 dl + \quad \text{I}$$

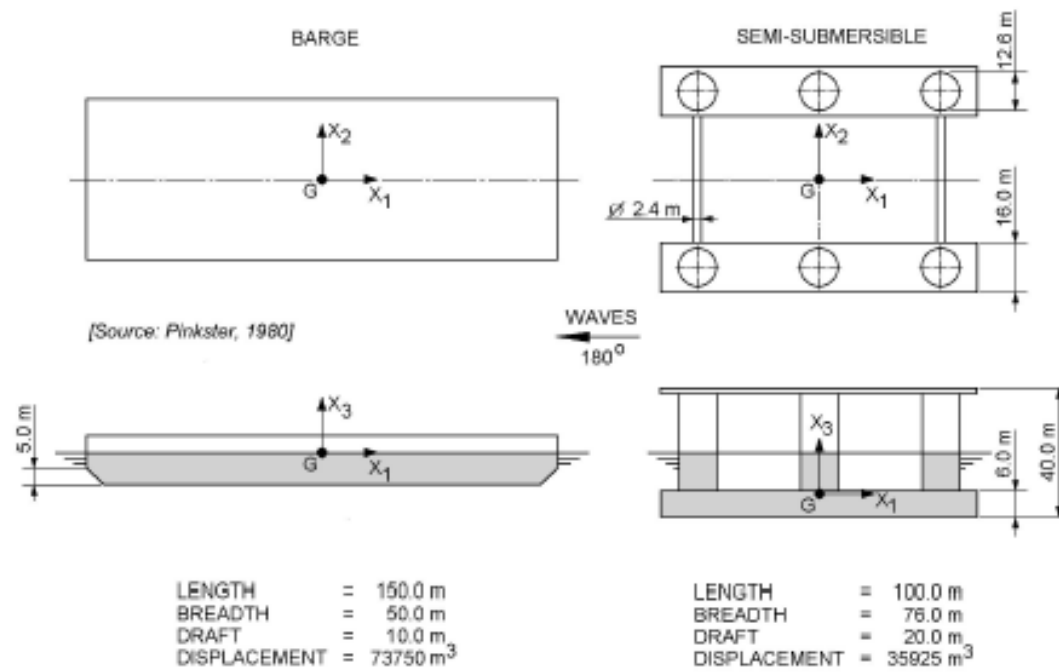
$$\iint_{\bar{S}_B} \left(-\frac{1}{2} \rho \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1 \right) \vec{n}_0 dS + \quad \text{II}$$

$$\iint_{\bar{S}_B} \left(-\rho \vec{X}_1 \cdot \nabla \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) \vec{n}_0 dS + \quad \text{III}$$

$$-m[R_1] \{ \ddot{X}_1 \} \quad \text{IV}$$

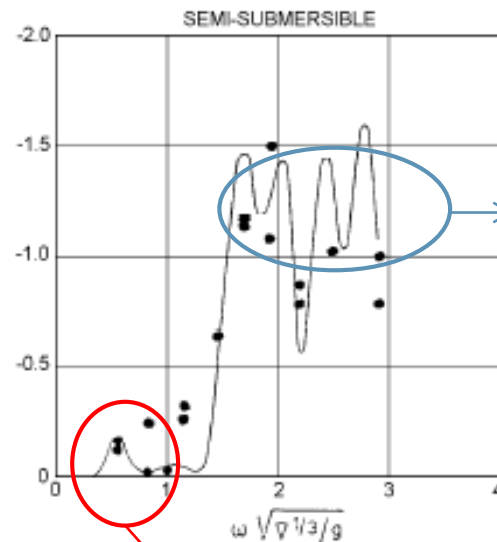
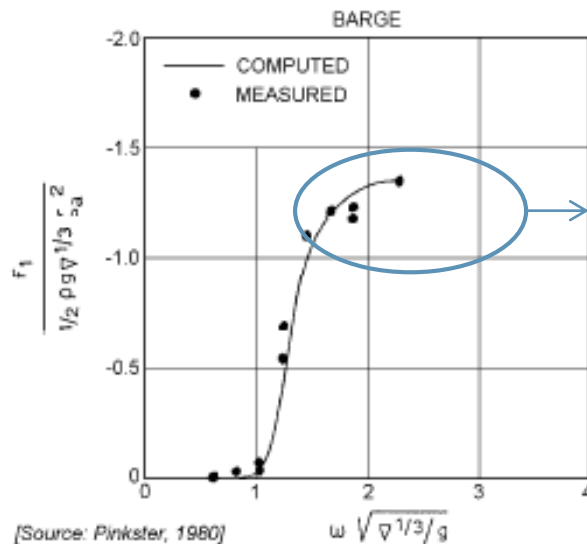
Forças de deriva média

- Exemplos (Pinkster, 1980):



Forças de deriva média

- Exemplos (Pinkster, 1980):

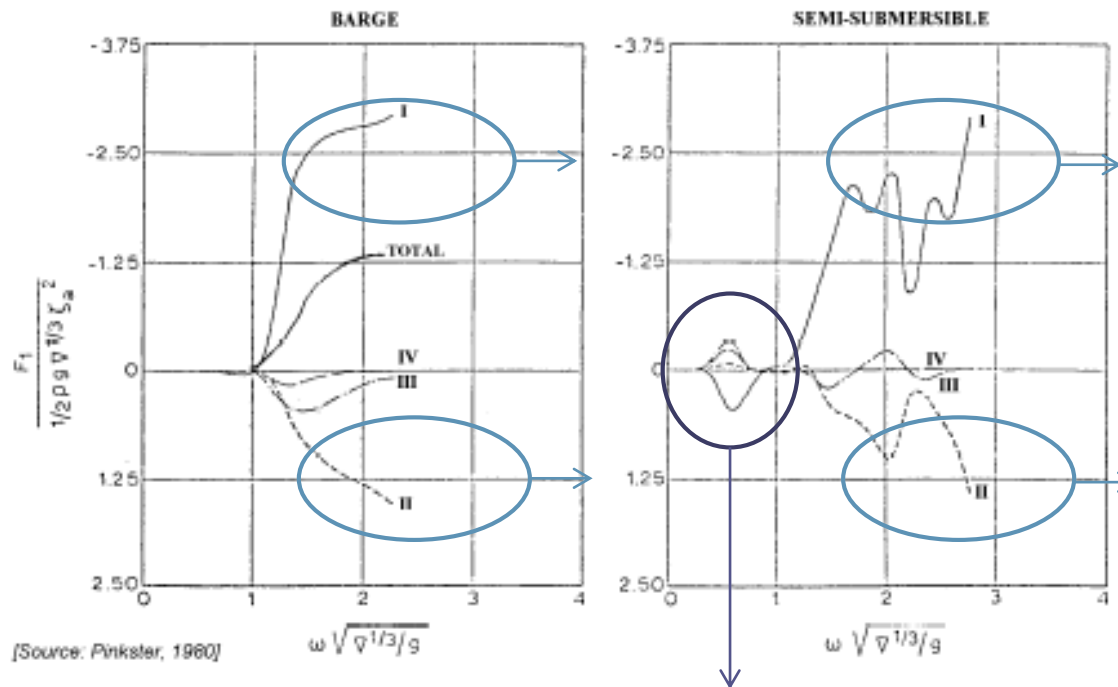


Maior
Espalhamento
(Reflexão) de
ondas

Ressonância

Forças de deriva média

- Exemplos (Pinkster, 1980):



Maior
Espalhamento
(Reflexão) de
ondas

“Redução” de
pressão $\sim (v_1)^2$

Requer considerar
amortecimentos

Forças de deriva média

- Aproximação para o casco de um navio em ondas curtas: Se a onda for suficientemente curta em relação ao casco do navio ($kL \ll 1$), é razoável admitir que os movimentos e acelerações do casco serão muito pequenos e:

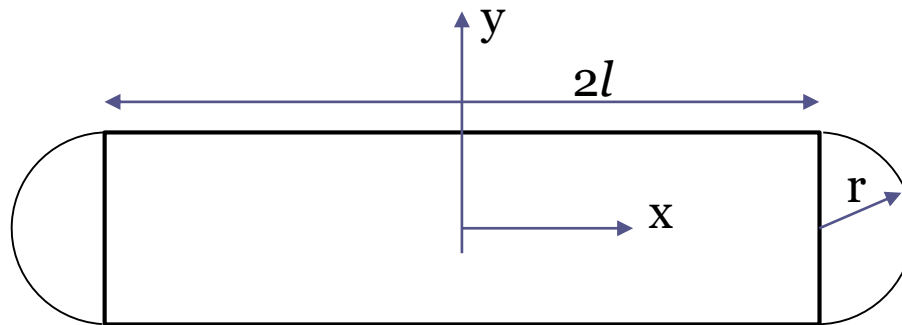
$$\vec{F}_2 = \vec{D}(\omega) = \oint_{WL} \frac{1}{2} \rho g (\zeta_{(1),r})^2 \vec{n}_0 dl + \quad \text{I}$$

$$\iint_{\bar{S}_B} \left(-\frac{1}{2} \rho \nabla \phi_1 \cdot \nabla \phi_1 \right) \vec{n}_0 dS + \quad \text{II}$$

- Nesse caso, a onda *refletirá integralmente* sobre o casco do navio (similar ao que ocorre no [Exercício 3 da lista #2](#))

Forças de deriva média

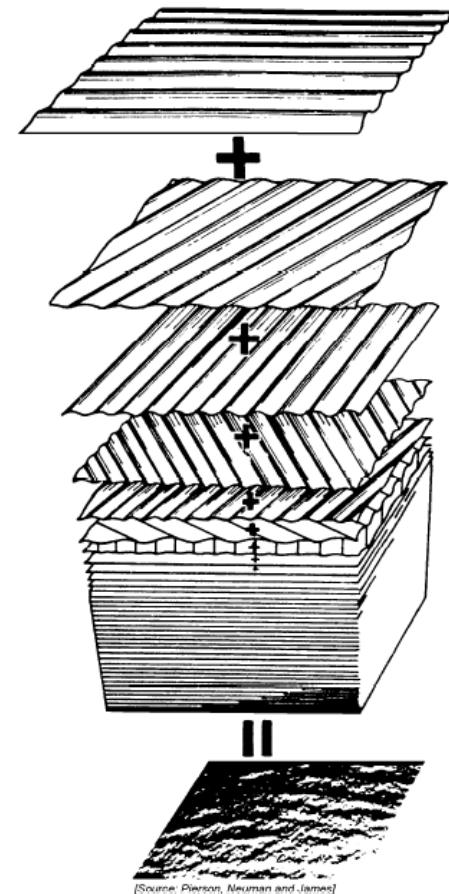
- No livro de Faltinsen (1990), Cap 5 pgs 142-45, ele deriva, a partir do limite de ondas curtas, aproximações analíticas para um casco de navio simplificado, como o da figura abaixo.



- Estas aproximações podem ser empregadas, p.ex., para se estimar a posição e o ângulo de aproamento médios de um FPSO tipo *turret* sob ação de ondas curtas, considerando-se a posição do turret no casco e a rigidez do sistema de amarração.

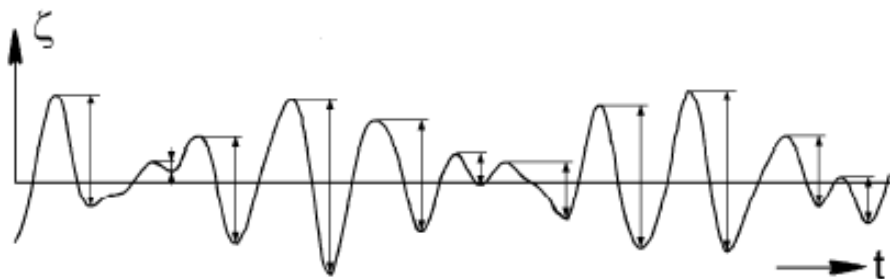
A descrição do mar (ondas irregulares)

- Podemos compreender uma condição real de mar como uma *combinação de ondas regulares* com diferentes amplitudes, frequências (e direções).
- A medida de elevação de onda em determinado local dá origem a um *registro de onda*, elemento-base para a descrição estatística do mar



A descrição do mar (ondas irregulares)

- A partir de um registro temporal de ondas, é possível decompor uma determinada condição de mar em suas ondas regulares constituintes, através de uma clássica análise de Fourier:



$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T}$$
$$\omega_j = j\Delta\omega$$

$$\zeta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} [c_j \cos \omega_j t + s_j \sin \omega_j t] = \sum_{j=1}^{\infty} [A_j e^{i(\omega_j t - \varepsilon_j)} + (*)]$$

$$A_j = \sqrt{c_j^2 + s_j^2}$$

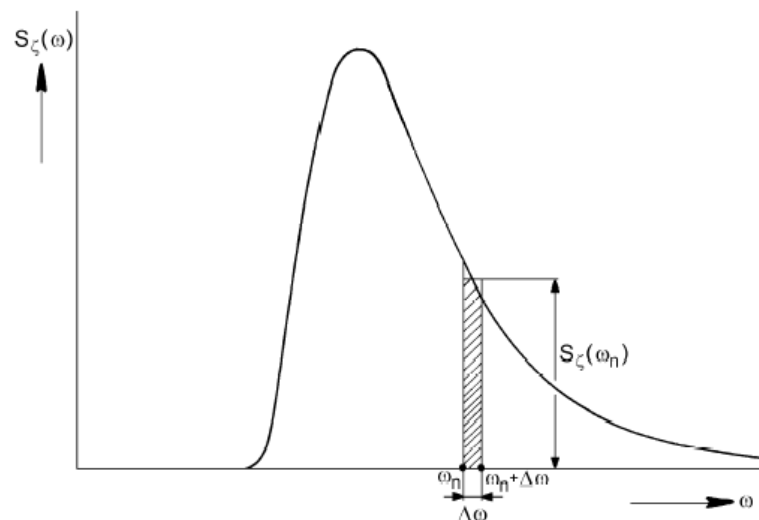
$$\varepsilon_j = \arctan(s_j / c_j)$$

A descrição do mar (ondas irregulares)

- Hoje, porém, a descrição de uma condição de mar é usualmente feita através de seu *Espectro de Energia de Ondas*, função que descreve como a energia da onda ($\sim A_j^2$) se distribui nas diferentes frequências:

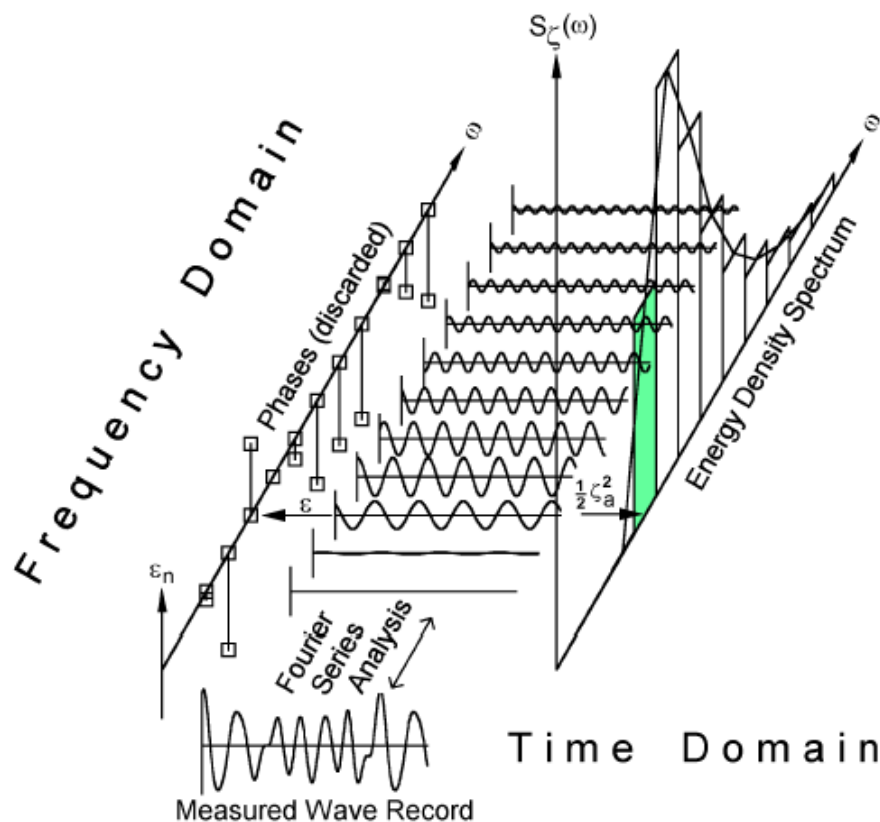
$$S_{\zeta}(\omega_n) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\Delta\omega} \sum_{\omega_n}^{\omega_n + \Delta\omega} \frac{1}{2} A_n^2 \right]$$

$$S_{\zeta}(\omega_n) \cdot d\omega = \frac{1}{2} A_n^2$$



A descrição do mar (ondas irregulares)

- A descrição espectral do mar ignora as fases (variação temporal de um determinado registro), mas preserva a energia e os parâmetros estatísticos da condição de mar (amplitudes médias, máximas, períodos representativos, etc.):



Espectro de ondas e a deriva média

- Em uma condição real (irregular) de ondas, portanto, a deriva média de uma estrutura flutuante deve levar em conta a distribuição de energia (amplitudes) de ondas nas diferentes frequências:
- Considerando um dos graus-de-liberdade de movimento da estrutura flutuante ($\alpha=1,\dots,6$):

$$D_\alpha = \sum_{j=1}^N \left(\frac{D_\alpha(\omega_j, \beta)}{A^2} \right) A_j^2$$

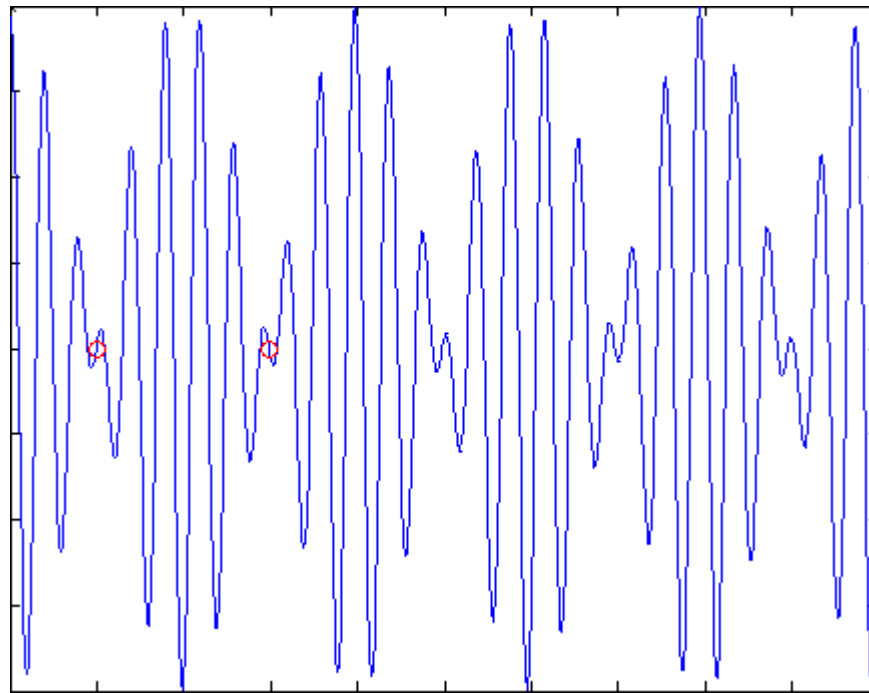
Coeficiente de deriva-media para amplitude unitária de ondas (normalmente obtido de software de seakeeping, p.ex. WAMIT, AQWA, etc)

Espectro de grupo de ondas e a deriva lenta

- No entanto, se levarmos em conta as interações quadráticas entre as diferentes componentes de ondas regulares, descobriremos que há ondas de pequena magnitude que oscilam em baixas frequências.
- Uma *evidência* da origem destas ondas decorre da simples análise da superposição de duas ondas regulares (lineares) de frequências próximas ($\omega_i = \omega - \delta\omega$ e $\omega_j = \omega + \delta\omega$). Esta análise permite definir aquilo que chamamos de *grupo de ondas*. -> [ver notas de aulas](#)

Espectro de grupo de ondas e a deriva lenta

- O grupo de ondas se move com velocidade menor ($c_g = \delta\omega/\delta k$) do que a onda de frequência ω :



Velocidade de fase (*) e Velocidade de grupo (o)

Espectro de grupo de ondas e a deriva lenta

- E a ele (grupo) estará associado uma elevação de onda de segunda-ordem na forma:

$$\varepsilon^2 \zeta_2 = A^2 \cos(\delta\omega t - \xi)$$

$$\zeta(x, y, t) = \zeta_0 + \varepsilon\zeta_1 + \varepsilon^2\zeta_2 + \dots$$

- que, embora de pequena amplitude, pode excitar as ressonâncias de sistemas amarrados quando há energia de grupo suficiente na faixa de frequências:

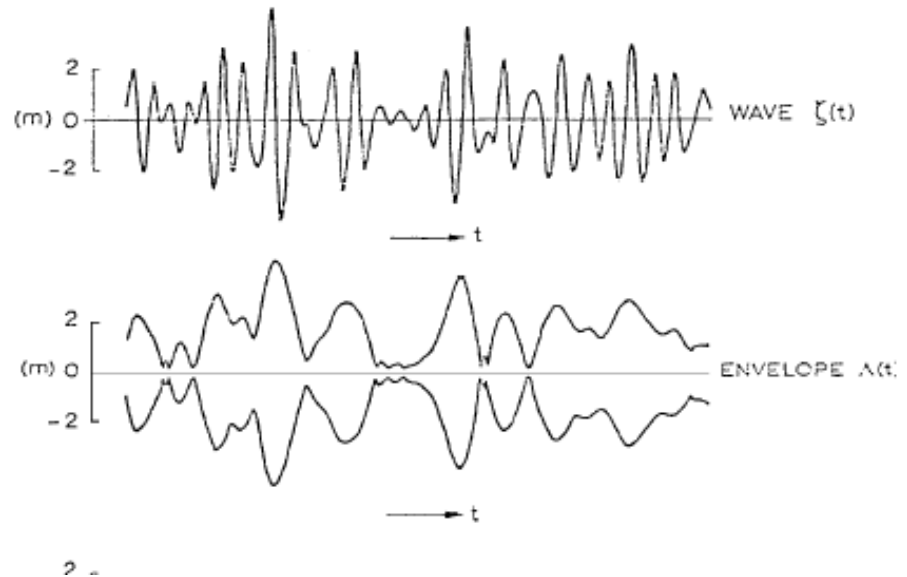
$$\delta\omega \cong \omega_{n,\alpha}$$

Espectro de grupo de ondas e a deriva lenta

- A energia contida nestas ondas de baixa frequência, por sua vez, é descrita pelo espectro de energia de grupo, que pode ser calculado a partir do espectro de energia da onda (ver, p.ex, Pinkster, 1980):

$$S_g(\mu) = \int_0^{\infty} 8S(\omega)S(\omega + \mu)d\omega$$

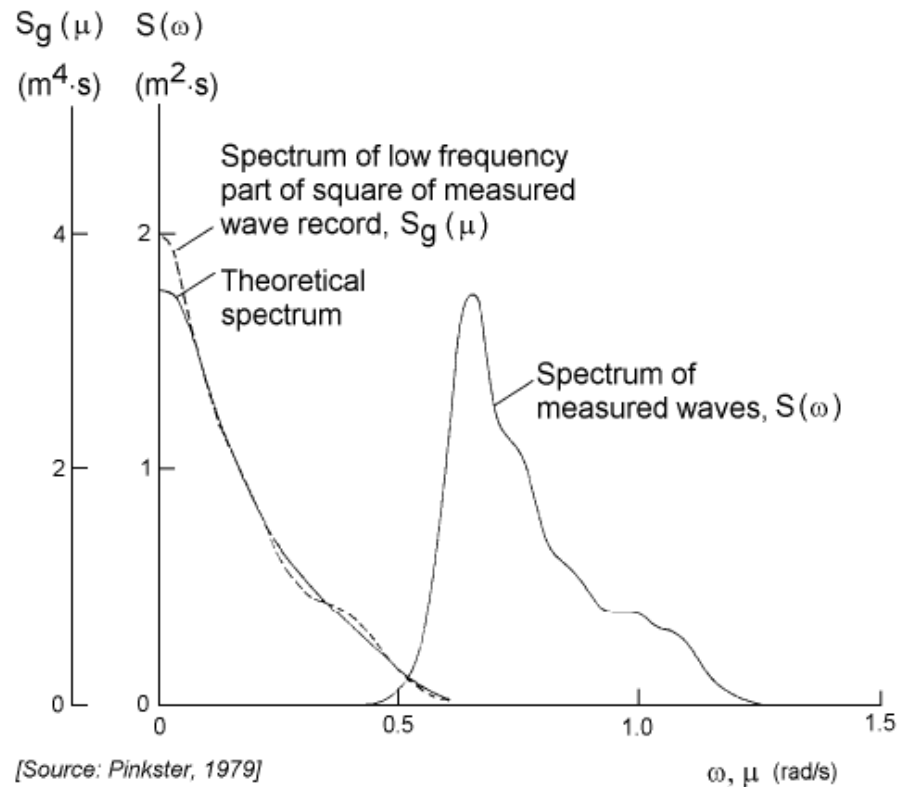
$$\mu = \delta\omega$$



Espectro de grupo de ondas e a deriva lenta

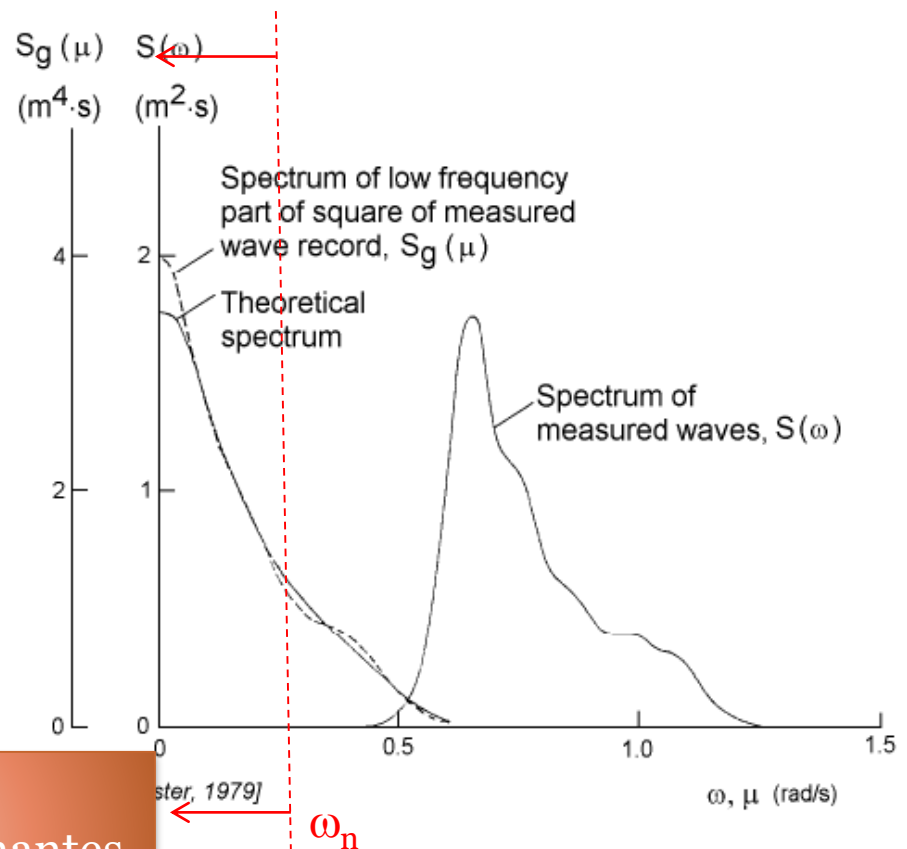
$$S_g(\mu) = \int_0^{\infty} 8S(\omega)S(\omega + \mu)d\omega$$

$$\mu = \delta\omega$$



Espectro de grupo de ondas e a deriva lenta

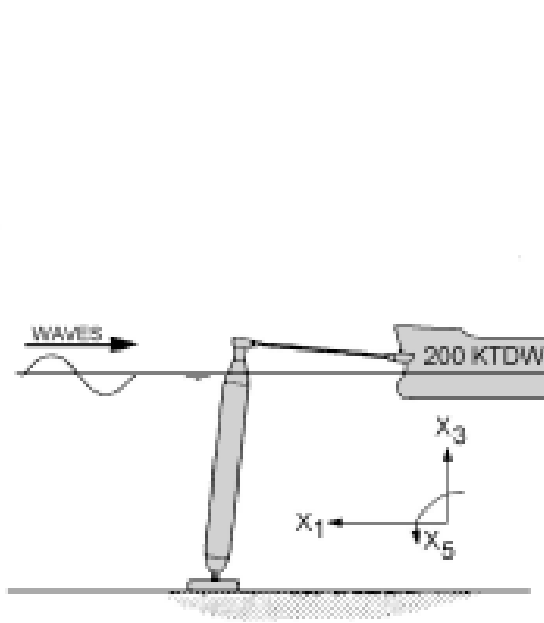
- A amarração de um sistema flutuante em geral proporciona frequências naturais baixas nos movimentos horizontais (surge, sway e yaw).
- Quanto mais baixas estas frequências, mais energia de deriva-lenta haverá para excitar a ressonância



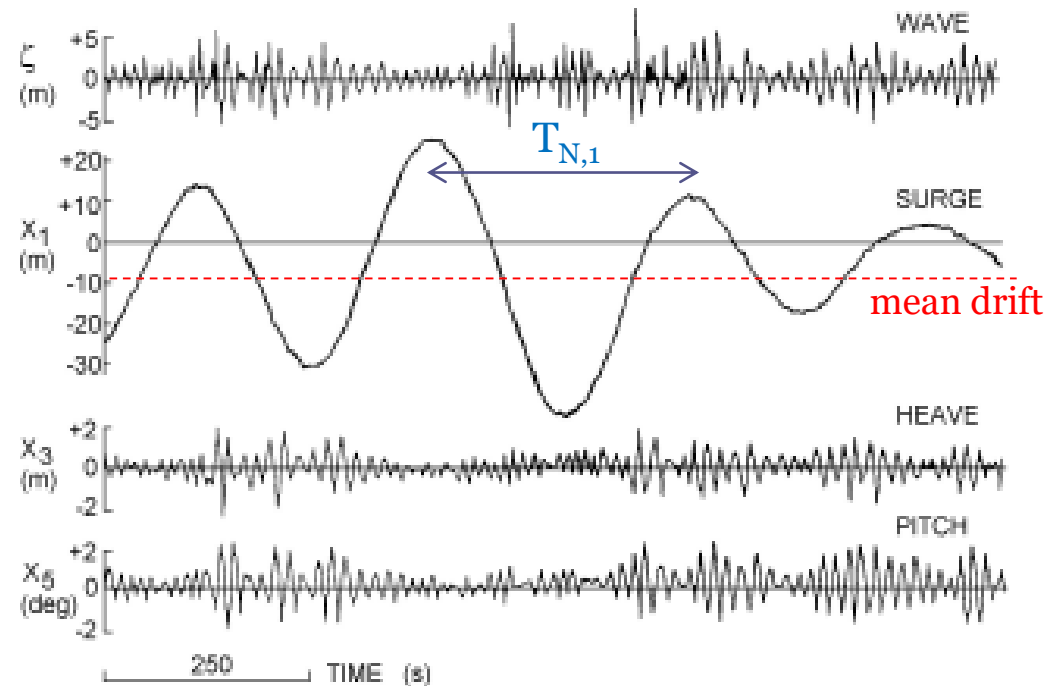
Aumento dos movimentos ressonantes em baixas freq.

Espectro de grupo de ondas e a deriva lenta

- Exemplo:



[Source: Pinkster, 1979]



As forças de deriva-lenta

- As forças de deriva-lenta no tempo (*slow-drift*, SD) também podem ser descritas com base em coeficientes de força adimensionais obtidos no domínio-da-frequência:

$$F_{2,\alpha}^{SD} = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N A_j A_k T_{jk,\alpha}(\omega_j, \omega_k) \cos((\omega_k - \omega_j)t + (\xi_k - \xi_j))$$

Matriz de transferência de força quadrática (QTF)

- De modo geral, a obtenção da matriz de QTF completa é difícil, pois envolve a solução dos problemas de valor de contorno de 1ª e 2ª ordens e está sujeita a problemas de convergência numérica.

As forças de deriva-lenta: aproximações úteis

1. **A aproximação de Newman (1974)*** : Se as *frequências naturais do sistema amarrado são baixas* (tipicamente acima de 100s) e o sistema está ancorado em *águas profundas*, Newman demonstrou que a matriz de QTF pode ser aproximada pelos valores de sua diagonal principal ($\omega_j - \omega_k = 0$), que correspondem às forças de deriva-média ($D(\omega)$):

$$T_{jk,\alpha}(\omega_j, \omega_k) \cong D_\alpha \left(\omega_j + \frac{\delta\omega}{2} \right)$$

- A grande vantagem, aqui, é que os coeficientes de deriva-média só dependem da solução de 1ª ordem e são muito mais fáceis de se obter.

*NEWMAN, J.N. “Second order, slowly varying forces on vessels in irregular Waves”, *Proc. Int. Symp. Dynamics of Marine Vehicles and Struct. in Waves*, pp. 182-186, 1974

As forças de deriva-lenta: aproximações úteis

- 2. Restrição à faixa dominante de resposta:** Em geral, os sistemas ancorados sujeitos à deriva lenta são *pouco amortecidos* (em termos de seu amortecimento crítico). Portanto, a resposta dinâmica do sistema é significativa apenas em uma faixa estreita de frequências em torno da frequência natural. Nesse caso, portanto, é razoável considerar apenas a parcela da forçante que corresponde a:

$$\omega_k = \omega_j + \omega_n$$

- Combinada à aproximação de Newman, esta consideração leva a:

$$T_{jk,\alpha}(\omega_j, \omega_k) \cong D_\alpha \left(\omega_j + \frac{\omega_n}{2} \right)$$

As forças de deriva-lenta: aproximações úteis

- Dessa forma, em uma simulação no tempo de um sistema amarrado em águas profundas, considerando-se que os períodos naturais dos movimentos horizontais são altos (*acima de 100s*) e que os mesmos são pouco amortecidos (*amortecimento abaixo de 10% do crítico*), seria razoável estimar a força/momento de deriva-lenta no plano horizontal ($\alpha=1,2,6$) por:

$$F_{2,\alpha}^{SD} \cong \sum_{j=1}^N A_j A_{jn} \left(\frac{D_\alpha(\omega_j + \omega_n/2, \beta)}{A^2} \right) \cos(\omega_n t)$$

onde A_{jn} representa a amplitude de onda na frequência $\omega_j + \omega_n/2$