Autovalores e autovetores de operadores lineares

Prof. Alfredo Gay Neto
Prof. Luís Bitencourt Jr.
Prof. Miguel Bucalem

PEFUSP
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE ESTRUTURAS E GEOTÉCNICA

PEF 3302 – Mecânica das Estruturas I

Definições

$\mathbb{E}$: espaço de vetores da geometria euclidiana

Seja um operador linear $\mathbf{T}: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{E}$,

se existirem $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\boldsymbol{x} \in \mathbb{E}$, $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, tal que:

$$\mathbf{T}\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$$

Dizemos que λ é um autovalor de $\mathbf{T}$ associado ao autovetor (ou "vetor próprio") $\boldsymbol{x}$.

Se $\boldsymbol{x}$ é um autovetor, então $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}, \alpha \in \mathbb{R}$, também é autovetor.

$$\mathbf{T}\boldsymbol{y} = \mathbf{T}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\mathbf{T}(\boldsymbol{x}) = \alpha\lambda\boldsymbol{x} = \lambda(\alpha\boldsymbol{x}) = \lambda\boldsymbol{y}$$

O autovetor $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$ é associado ao mesmo autovalor λ.

Equação característica

Considerando $\boldsymbol{h}$ um autovetor de $\mathbf{T}$,

$$\mathbf{T}\boldsymbol{h} = \lambda\boldsymbol{h}$$

$$\mathbf{T}\boldsymbol{h} - \lambda\boldsymbol{h} = (\mathbf{T} - \lambda\mathbf{I})\boldsymbol{h} = \mathbf{0}$$

Pode ser escrito matricialmente por:

$$([\mathrm{T}] - \lambda[\mathrm{I}])\{h\} = 0$$

$$\begin{bmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equação característica

Para existirem soluções diferentes da trivial ($\boldsymbol{h} = \boldsymbol{0}$),

Equação característica

$$\boxed{\det([\mathrm{T}] - \lambda[\mathrm{I}]) = 0}$$

ou

$$\boxed{\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0}$$

onde I_1, I_2, I_3 são os invariantes:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \mathrm{tr}[\mathrm{T}]$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{33} & T_{31} \\ T_{13} & T_{11} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} = \det[\mathrm{T}]$$

Para um operador simétrico, as raízes da equação característica ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$) são números reais

Autovetor associado

Considerando, por exemplo, o autovalor λ_1, pode-se determiner o autovetor $\boldsymbol{h}^{(1)}$ associado a λ_1 usando:

$$\begin{bmatrix} T_{11}-\lambda_1 & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda_1 & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \\ h_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Como a matriz é singular, há infinitas soluções.

Para restringir as soluções, considera-se a condição adicional:

$$\|\boldsymbol{h}\| = 1 \Rightarrow (h_1)^2 + (h_2)^2 + (h_3)^2 = 1$$

Diz-se que $\boldsymbol{h}$ é um versor neste caso

Ortogonalidade dos autovetores

PEFUSP

Quando $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$ para dois autovalores distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tem-se que $\boldsymbol{h}_1 \perp \boldsymbol{h}_2$

De fato, como $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$:

$$\boldsymbol{h}_1 \cdot \mathbf{T}\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{h}_2 \cdot \mathbf{T}^T \boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{h}_2 \cdot \mathbf{T}\boldsymbol{h}_1$$

Tem-se:

$$\boldsymbol{h}_1 \cdot \lambda_2 \boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{h}_2 \cdot \lambda_1 \boldsymbol{h}_1$$

$$\Rightarrow (\lambda_2 - \lambda_1)(\boldsymbol{h}_1 \cdot \boldsymbol{h}_2) = 0 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{h}_1 \cdot \boldsymbol{h}_2 = 0}$$

Como $\|\boldsymbol{h}_1\| = \|\boldsymbol{h}_2\| = 1$,

$$\boxed{\boldsymbol{h}_1 \perp \boldsymbol{h}_2}$$

Ortogonalidade dos autovetores

PEFUSP

- 1ª situação: três autovalores distintos $(\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3)$
  - Os três autovetores são **necessariamente ortogonais** entre si!
- 2ª situação: dois iguais e um distinto $(\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3)$
  - O autovalor distinto λ_3 está associado a um determinado autovetor $\boldsymbol{h}_3$.
  - $\boldsymbol{h}_3$ determina a normal a um **plano**. Todos os vetores paralelos a esse plano são autovetores associados ao outro autovalor $\lambda_1 = \lambda_2$.
  - Sempre pode-se escolher um par de autovetores ortogonais paralelos a esse plano!
- 3ª situação: três autovalores iguais $(\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3)$
  - Todos os vetores são autovetores!
  - Sempre pode-se escolher um trio de autovetores ortogonais!

Ortogonalidade dos autovetores

Assim, é sempre possível construir uma **base (tri)ortonormal** formada por autovetores de um operador simétrico $\mathbf{T}$.

Nesta base, a matriz de $\mathbf{T}$ é diagonal e tem componentes:

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Geralmente estabelecem-se os autovalores na ordem: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$

Forma quadrática associada

Pode-se definir uma forma quadrática associada a um operador linear simétrico $\mathbf{T}$ como sendo a aplicação $t: \mathbb{E} \rightarrow \mathbb{R}$, de um vetor a um número real, dada por:

$$t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{T}\boldsymbol{x}$$

Note-se que

$$t(\alpha\boldsymbol{x}) = (\alpha\boldsymbol{x}) \cdot \mathbf{T}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha^2(\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{T}\boldsymbol{x}) = \alpha^2\, t(\boldsymbol{x}), \forall\alpha \in \mathbb{R}$$

Considere um vetor genérico $\boldsymbol{x}$, escrito na base ortonormal de autovetores de $\mathbf{T}$:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{h}_1 + x_2\boldsymbol{h}_2 + x_3\boldsymbol{h}_3$$

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = 1$$

Forma quadrática associada

Na base de autovetores, o operador simétrico $\mathbf{T}$ que define a forma quadrática tem componentes:

$$[\mathrm{T}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \cdot \mathbf{T}\boldsymbol{x} = \{x_1 \quad x_2 \quad x_3\} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}$$

ou

$$t(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 (x_1)^2 + \lambda_2 (x_2)^2 + \lambda_3 (x_3)^2$$

Forma quadrática associada

Substituindo na equação anterior

$$(x_1)^2 = 1 - (x_2)^2 - (x_3)^2$$

$$t(\boldsymbol{x}) = \lambda_1[1 - (x_2)^2 - (x_3)^2] + \lambda_2(x_2)^2 + \lambda_3(x_3)^2$$

$$t(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)(x_2)^2 + (\lambda_3 - \lambda_1)(x_3)^2$$

Como $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, pode-se concluir que:

$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}, t(\boldsymbol{x}) \leq \lambda_1$ Já que $\lambda_2 - \lambda_1 \leq 0$ e $\lambda_3 - \lambda_1 \leq 0$

Como $t(\boldsymbol{h}_1) = \lambda_1$, λ_1 é o valor máximo assumido pela aplicação t

Analogamente, temos:

$$(x_3)^2 = 1 - (x_1)^2 - (x_2)^2$$

$$t(\boldsymbol{x}) = \lambda_1 (x_1)^2 + \lambda_2 (x_2)^2 + \lambda_3 [1 - (x_1)^2 - (x_2)^2]$$

$$t(\boldsymbol{x}) = \lambda_3 + (\lambda_1 - \lambda_3)(x_1)^2 + (\lambda_2 - \lambda_3)(x_2)^2$$

Lembrando a ordem $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$, resulta:

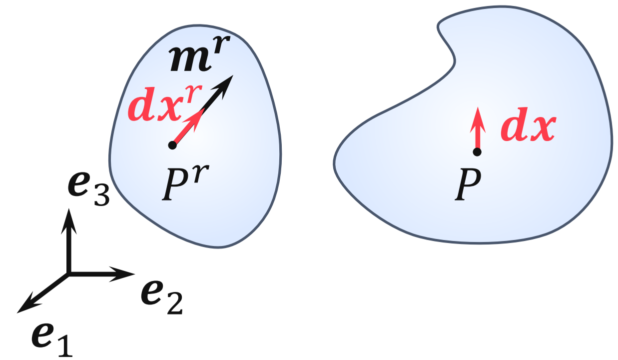
$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}, t(\boldsymbol{x}) \geq \lambda_3$ Já que $\lambda_1 - \lambda_3 \geq 0$ e $\lambda_2 - \lambda_3 \geq 0$

Como $t(\boldsymbol{h}_3) = \lambda_3$, λ_3 é o valor mínimo assumido pela aplicação t

Ou seja, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{E}, \boxed{\lambda_3 \leq t(\boldsymbol{x}) \leq \lambda_1}$

O alongamento linear da fibra infinitesimal é dado por:

$$\varepsilon_l(\boldsymbol{m}^r) = \boldsymbol{m}^r \cdot \mathbf{E}\,\boldsymbol{m}^r$$



$\varepsilon_l(\boldsymbol{m}^r)$ é uma forma quadrática associada ao operador linear simétrico $\mathbf{E}$, o tensor das deformações infinitesimais.

Seja

$$\mathbf{E}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$

Denominando-se os autovalores λ de $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ e os correspondentes autovetores de $\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, $\boldsymbol{h}_3$, decorre:

- ε_1 é o máximo alongamento linear e ocorre na direção $\boldsymbol{h}_1$
- ε_3 é o mínimo alongamento linear e ocorre na direção $\boldsymbol{h}_3$

Na base dos autovetores, tem-se a seguinte representação matricial

$$[\mathrm{E}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Denomina-se:
$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ deformações principais e
$\boldsymbol{h}_1$, $\boldsymbol{h}_2$, $\boldsymbol{h}_3$ direções principais de deformação

Exemplo 1

O estado de deformação em um ponto de um sólido deformável é caracterizado pelo tensor das deformações $\mathbf{E}$ que, na base ortonormal considerada, é dado por:

$$[\mathrm{E}] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \times 10^{-3}$$

Determinar as deformações e direções principais de $\mathbf{E}$.

Exemplo 1

Determinando a equação característica $\det([\mathrm{E}] - \lambda[\mathrm{I}]) = 0$

$$\begin{vmatrix} -0{,}002 - \lambda & 0{,}001 & -0{,}001 \\ 0{,}001 & 0{,}003 - \lambda & 0{,}002 \\ -0{,}001 & 0{,}002 & 0{,}004 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

onde:

$I_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33} = 0{,}005$

$$I_2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{33} & E_{31} \\ E_{13} & E_{11} \end{vmatrix} = -8 \times 10^{-6}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} = -2{,}7 \times 10^{-8}$$

Exemplo 1

PEFUSP

Resolvendo:

$$\lambda_1 = 0{,}00557$$
$$\lambda_2 = 0{,}00194$$
$$\lambda_3 = -0{,}0025$$

Determinando o autovetor associado a $\lambda_1 = 0{,}00557$

$$\begin{bmatrix} -0{,}00757 & 0{,}001 & -0{,}001 \\ 0{,}001 & -0{,}00257 & 0{,}002 \\ -0{,}001 & 0{,}002 & -0{,}00157 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Como o sistema é possível e indeterminado, deve-se escolher duas equações linearmente independentes e considerar a equação adicional:

$$(h_1)^2 + (h_2)^2 + (h_3)^2 = 1$$

Exemplo 1

$$
\begin{aligned}
-0{,}00757h_1 + 0{,}001h_2 - 0{,}001h_3 &= 0 \\
0{,}001h_1 - 0{,}00257h_2 + 0{,}002h_3 &= 0 \\
(h_1)^2 + (h_2)^2 + (h_3)^2 &= 1
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema, chega-se a:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= -0{,}03073h_3 \\
h_2 &= 0{,}76753h_3 \\
h_3 &= \pm 0{,}79304
\end{aligned}
$$

onde os sinais + e − para h_3 sinalizam a existência de dois autovetores com sentidos opostos. Escolhendo a solução positiva, temos:

$$
\begin{aligned}
h_1 &= -0{,}02437 \\
h_2 &= 0{,}60868 \\
h_3 &= 0{,}79304
\end{aligned}
$$

Ou:

$$\boldsymbol{h}_1 = -0{,}02437\ \boldsymbol{e}_1 + 0{,}60868\ \boldsymbol{e}_2 + 0{,}79304\ \boldsymbol{e}_3$$

De forma análoga para $\lambda_2 = 0{,}00194$ e $\lambda_3 = -0{,}0025$ chega-se a:

$$\boldsymbol{h}_2 = -0{,}3351\ \boldsymbol{e}_1 - 0{,}75236\ \boldsymbol{e}_2 + 0{,}56715\ \boldsymbol{e}_3$$
$$\boldsymbol{h}_3 = 0{,}94187\ \boldsymbol{e}_1 - 0{,}25192\ \boldsymbol{e}_2 + 0{,}22230\ \boldsymbol{e}_3$$

Observa-se que na base dos versores próprios, escreve-se $\mathbf{E}$ como:

$$[\mathrm{E}] = \begin{bmatrix} 0{,}00557 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}00194 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}0025 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Considere o cubo de aresta L representado na Figura 1 e sua configuração deformada definida na Figura 2:

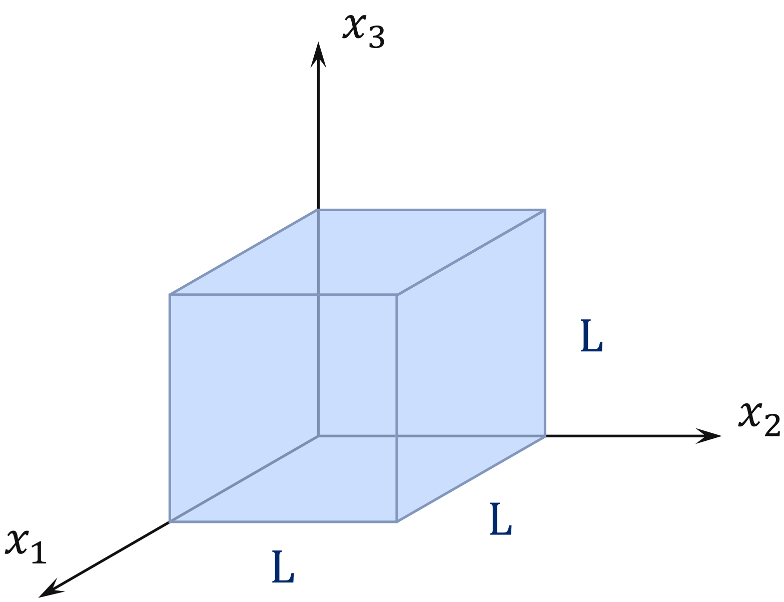


Figura 1

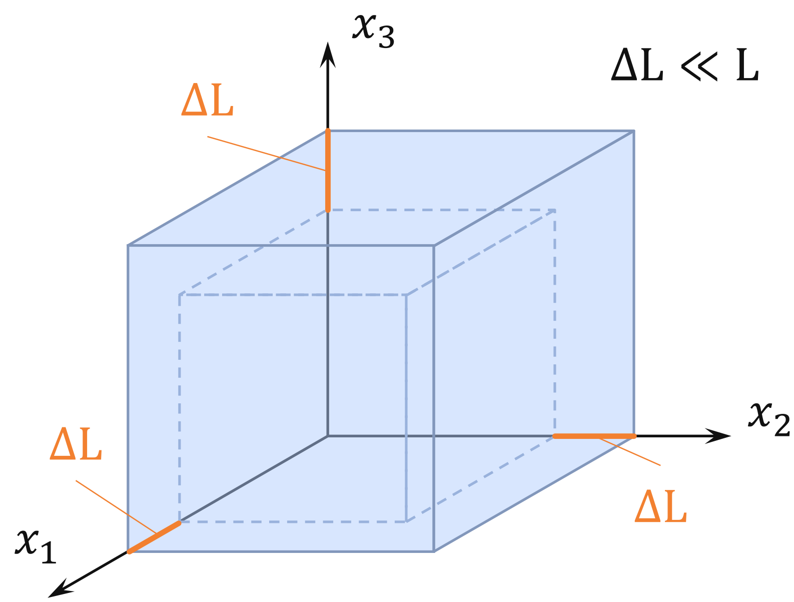


Figura 2

(i) Calcule por inspeção o tensor das deformações na base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$;

(ii) Interprete o resultado.

Exemplo 2

Nas três direções coordenadas há o mesmo alongamento:

$$E_{11} = E_{22} = E_{33} = \frac{(L + \Delta L) - L}{L} = \frac{\Delta L}{L}$$

Não há distorções entre qualquer par de fibras ortogonais paralelas aos vetores da base. Logo:

$$E_{12} = E_{23} = E_{31} = 0$$

Portanto, na base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$

$$[\mathrm{E}] = \begin{bmatrix} \Delta L/_L & 0 & 0 \\ 0 & \Delta L/_L & 0 \\ 0 & 0 & \Delta L/_L \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

- Pela estrutura diagonal do tensor das deformações obtido, conclui-se que as direções $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ são direções principais e as deformações principais valem ${}^{\Delta L}/_{L}$;

- Esse caso representa a situação em que os três autovalores são iguais. Portanto, todos os vetores são autovetores, ou seja, todas as direções são direções principais;

- Para qualquer base ortonormal escolhida, não haverá distorção entre quaisquer duas fibras ortogonais escolhidas.

Exemplo 2

- O alongamento linear é o mesmo para qualquer direção

Seja $\boldsymbol{m}^r = m_1\boldsymbol{e}_1 + m_2\boldsymbol{e}_2 + m_3\boldsymbol{e}_3$ um versor, o alongamento linear infinitesimal na direção de $\boldsymbol{m}^r$ é dado por:

$$\varepsilon_l(\boldsymbol{m}^r) = \boldsymbol{m}^r \cdot \mathbf{E}\,\boldsymbol{m}^r$$

Como $\mathbf{E} = \left({}^{\Delta L}/_{L}\right)\mathbf{I}$,

$$\varepsilon_l(\boldsymbol{m}^r) = \boldsymbol{m}^r \cdot \left({}^{\Delta L}/_{L}\right)\mathbf{I}\,\boldsymbol{m}^r = \left({}^{\Delta L}/_{L}\right)\underbrace{(\boldsymbol{m}^r \cdot \boldsymbol{m}^r)}_{1}$$

$$\boxed{\varepsilon_l(\boldsymbol{m}^r) = \frac{\Delta L}{L}}$$

Estado de dilatação uniforme

Exemplo 3

Considere o cubo de aresta L representado na Figura 1 e sua configuração deformada definida na Figura 2:

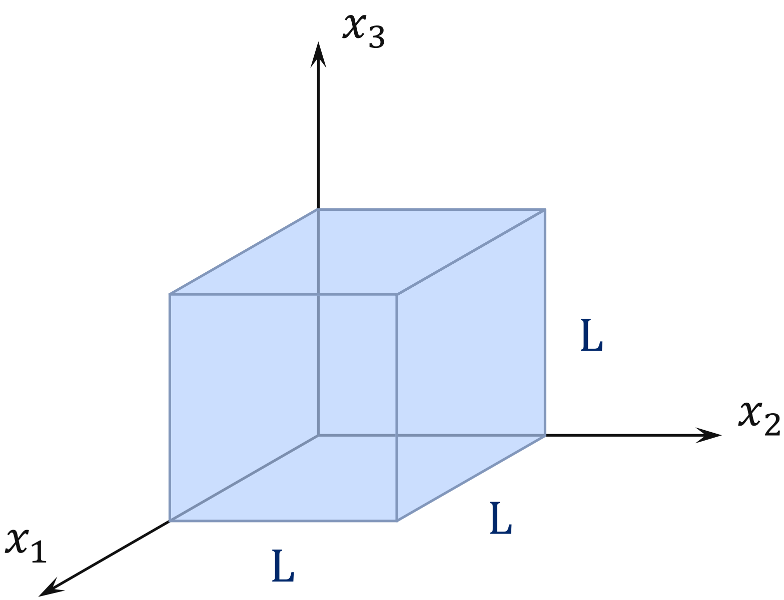


Figura 1

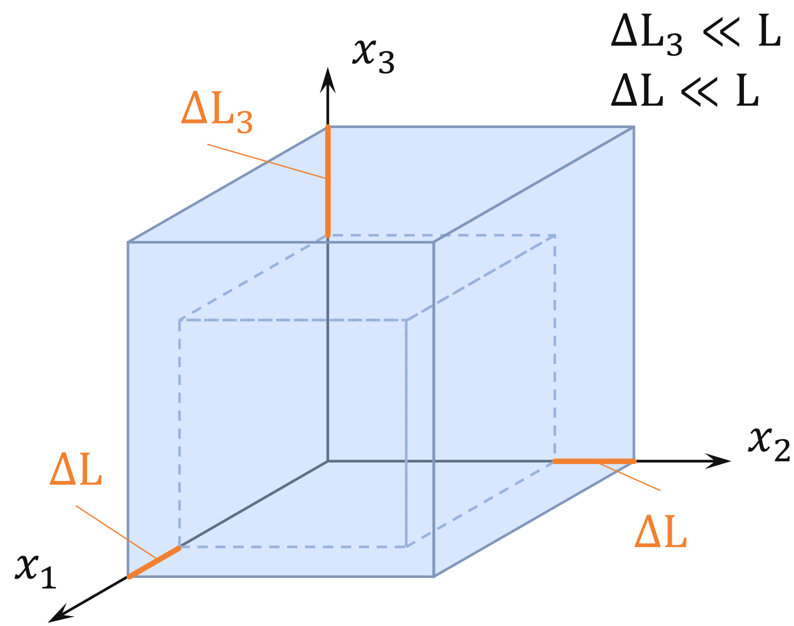


Figura 2

(i) Calcule por inspeção o tensor das deformações na base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$;

(ii) Interprete o resultado.

Exemplo 3

A diferença deste exemplo para o anterior é que o alongamento na direção $\boldsymbol{e}_3$ é diferente dos demais. Por inspeção, obtém-se:

$$E_{11} = E_{22} = \frac{\Delta L}{L}$$
$$E_{33} = \frac{\Delta L_3}{L}$$
$$E_{12} = E_{23} = E_{31} = 0$$

Portanto, na base $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$

$$[\mathrm{E}] = \begin{bmatrix} {\Delta L}/{L} & 0 & 0 \\ 0 & {\Delta L}/{L} & 0 \\ 0 & 0 & {\Delta L_3}/{L} \end{bmatrix}$$

Exemplo 3

- Pela estrutura diagonal do tensor das deformações obtido, conclui-se que as direções $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ formam uma base de autovetores;

- Os autovalores são ${}^{\Delta L}/_{L}$ e ${}^{\Delta L_3}/_{L}$;

- Esse caso representa a situação com dois autovalores iguais e um distinto ($\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$);

- O versor $\boldsymbol{e}_3$ é um autovetor correspondente ao autovalor ${}^{\Delta L_3}/_{L}$;

- Qualquer vetor ortogonal a $\boldsymbol{e}_3$, como é o caso de qualquer versor no plano x_1x_2, é um autovetor correspondente ao autovalor ${}^{\Delta L}/_{L}$.

Exemplo 3

De fato, seja um versor $\boldsymbol{m}^r = m_1\boldsymbol{e}_1 + m_2\boldsymbol{e}_2$:

$$[\mathrm{E}]\{m^r\} = \begin{bmatrix} {}^{\Delta L}/_{L} & 0 & 0 \\ 0 & {}^{\Delta L}/_{L} & 0 \\ 0 & 0 & {}^{\Delta L_3}/_{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta L}{L} \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{\Delta L}{L}\{m^r\}$$

ou

$$\mathbf{E}\,\boldsymbol{m}^r = \left({}^{\Delta L}/_{L}\right)\boldsymbol{m}^r$$

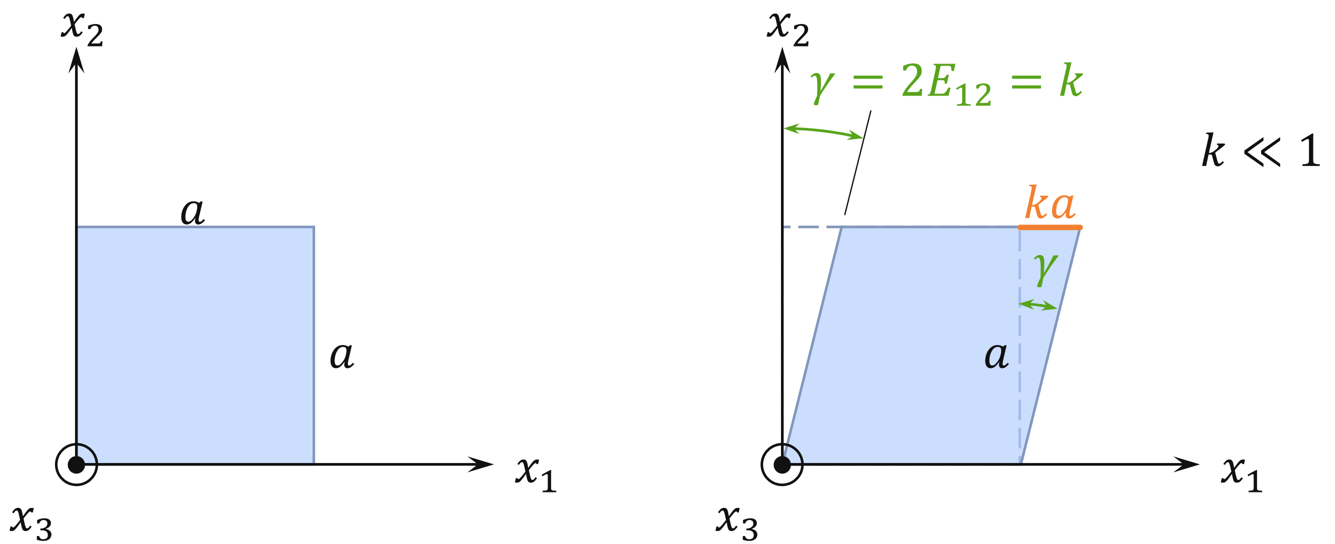
E o alongamento linear:

$$\varepsilon_l(\boldsymbol{m}^r) = \boldsymbol{m}^r \cdot \mathbf{E}\,\boldsymbol{m}^r = \boldsymbol{m}^r \cdot \left({}^{\Delta L}/_{L}\right)\boldsymbol{m}^r = \left({}^{\Delta L}/_{L}\right)\underbrace{(\boldsymbol{m}^r \cdot \boldsymbol{m}^r)}_{1}$$

$$\varepsilon_l(\boldsymbol{m}^r) = \frac{\Delta L}{L}$$

Exemplo 4

Considere a deformação ilustrada abaixo. Calcule as direções principais



Bloco na configuração indeformada

Bloco na configuração deformada

Tensor das deformações: $[\mathrm{E}] = \begin{bmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Exemplo 4

Determinando a equação característica $\det([\mathrm{E}] - \lambda[\mathrm{I}]) = 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & k/2 & 0 \\ k/2 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$$

onde:

$$I_1 = E_{11} + E_{22} + E_{33} = 0$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{22} & E_{23} \\ E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} E_{33} & E_{31} \\ E_{13} & E_{11} \end{vmatrix} = -\frac{k^2}{4}$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo 4

PEFUSP

Equação característica: $\lambda^3 - \frac{k^2}{4}\lambda = 0$

Resolvendo: $\lambda_1 = \frac{k}{2}$ $\lambda_2 = 0$ $\lambda_3 = -\frac{k}{2}$

Determinando o autovetor associado a $\lambda_1 = {}^{k}/_{2}$

$$\begin{bmatrix} -{}^{k}/_{2} & {}^{k}/_{2} & 0 \\ {}^{k}/_{2} & -{}^{k}/_{2} & 0 \\ 0 & 0 & -{}^{k}/_{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Como o sistema é indeterminado, deve-se escolher duas equações linearmente independentes e considerar a equação adicional:

$$(h_1)^2 + (h_2)^2 + (h_3)^2 = 1$$

Exemplo 4

$$\frac{k}{2} h_1 - \frac{k}{2} h_2 = 0$$
$$- \frac{k}{2} h_3 = 0$$
$$(h_1)^2 + (h_2)^2 + (h_3)^2 = 1$$

Resolvendo o sistema, chega-se a: $h_1 = h_2 = \sqrt{2}/2$ $\quad h_3 = 0$

Para $\lambda_2 = 0$, chega-se a: $h_1 = h_2 = 0$ $\quad h_3 = 1$

Para $\lambda_3 = -k/2$, chega-se a: $h_1 = -h_2 = -\sqrt{2}/2$ $\quad h_3 = 0$

As direções principais não triviais $\boldsymbol{h}^{(1)}$ e $\boldsymbol{h}^{(3)}$ pertencem ao plano $x_1 x_2$ (onde a deformação efetivamente ocorre)