PRO3384 – Finanças quantitativas

Responsável: Prof. Dra. Celma de Oliveira Ribeiro
Equipe: Dr. Pedro Gerber Machado
Monitor: Camila Corrêa de Melo

Segundo semestre - 2023

PRO - EPUSP

Diagrama de um portfólio: Dois portfólios com correlações diferentes

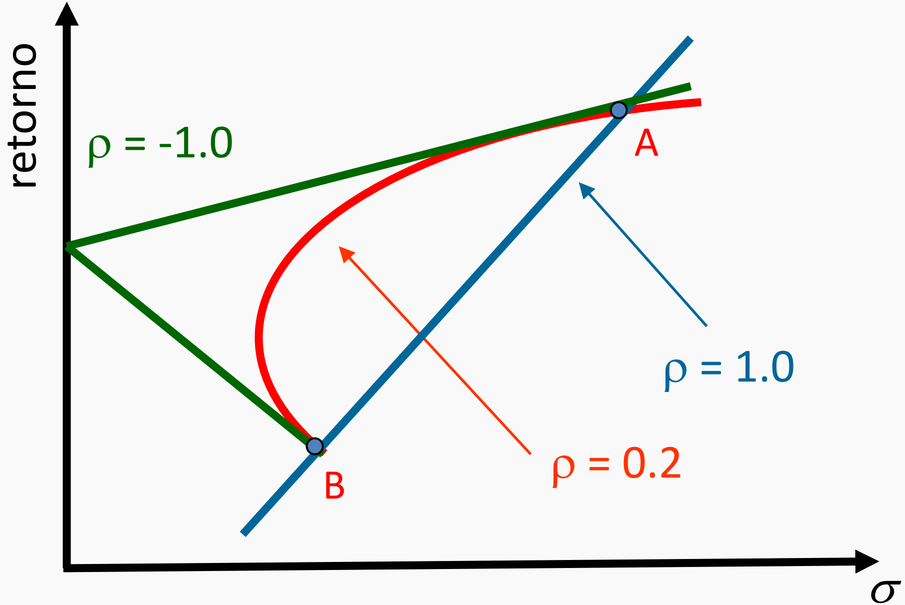
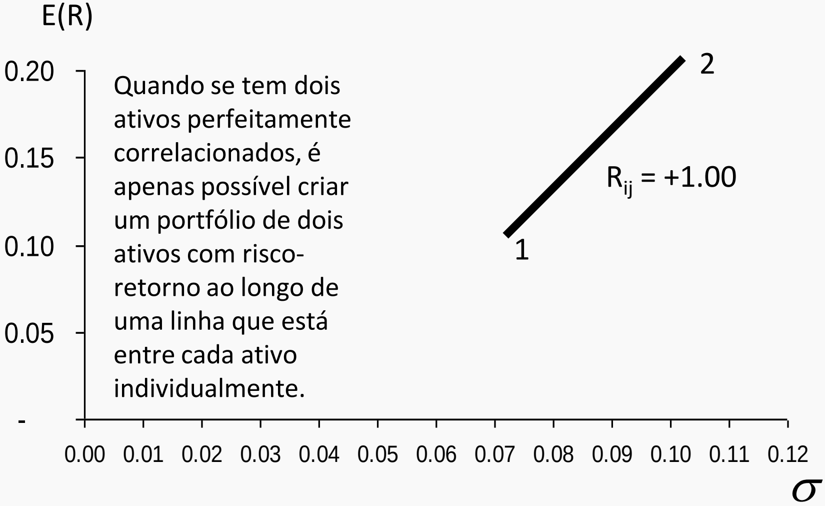


Diagrama de um portfólio: Dois portfólios com correlações diferentes



Quando se tem dois ativos perfeitamente correlacionados, é apenas possível criar um portfólio de dois ativos com risco-retorno ao longo de uma linha que está entre cada ativo individualmente.

Diagrama de um portfólio: Dois portfólios com correlações diferentes

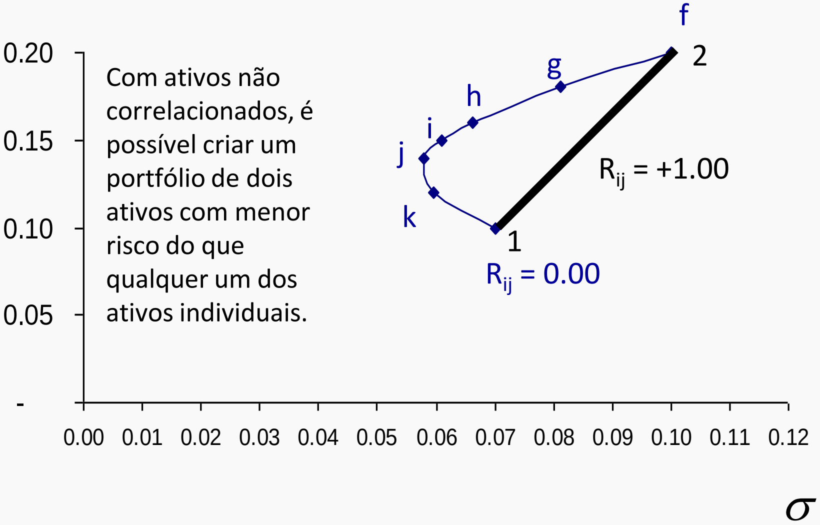


Diagrama de um portfólio: Dois portfólios com correlações diferentes

Com ativos correlacionados, é possível criar um portfólio de dois ativos que se situa entre as primeiras duas curvas.

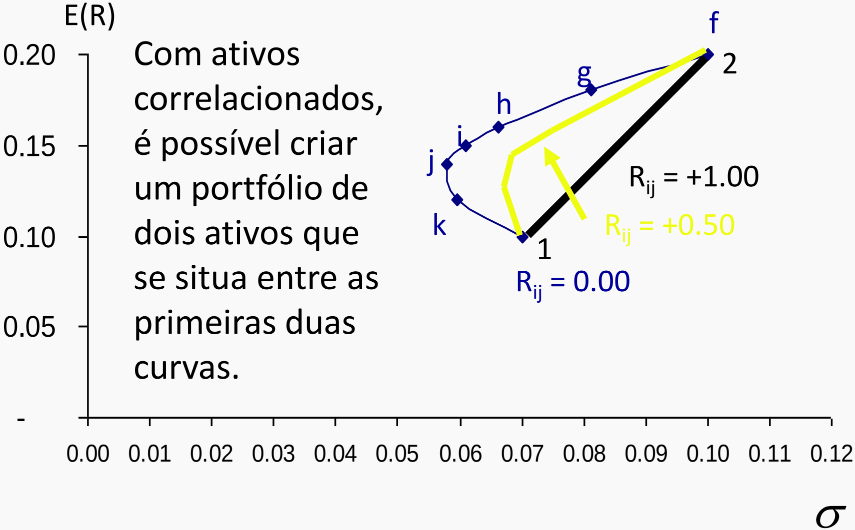
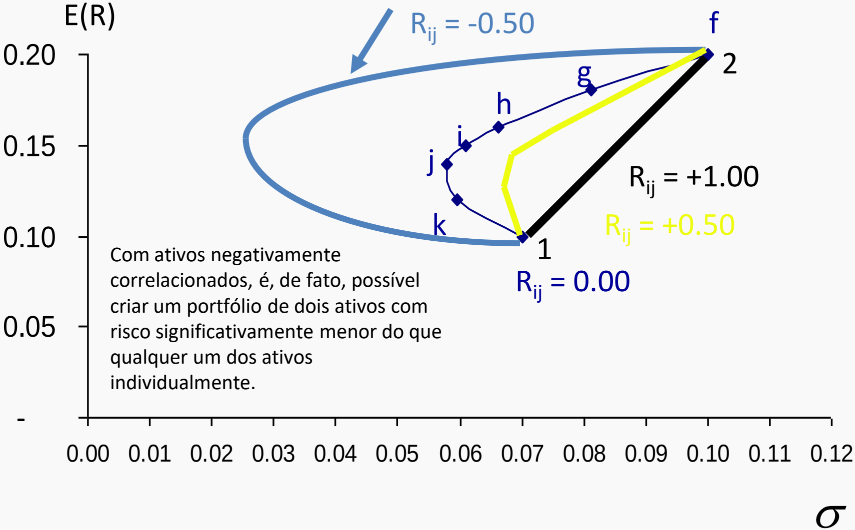


Diagrama de um portfólio: Dois portfólios com correlações diferentes



Com ativos negativamente correlacionados, é, de fato, possível criar um portfólio de dois ativos com risco significativamente menor do que qualquer um dos ativos individualmente.

Diagrama de um portfólio: Dois portfólios com correlações diferentes

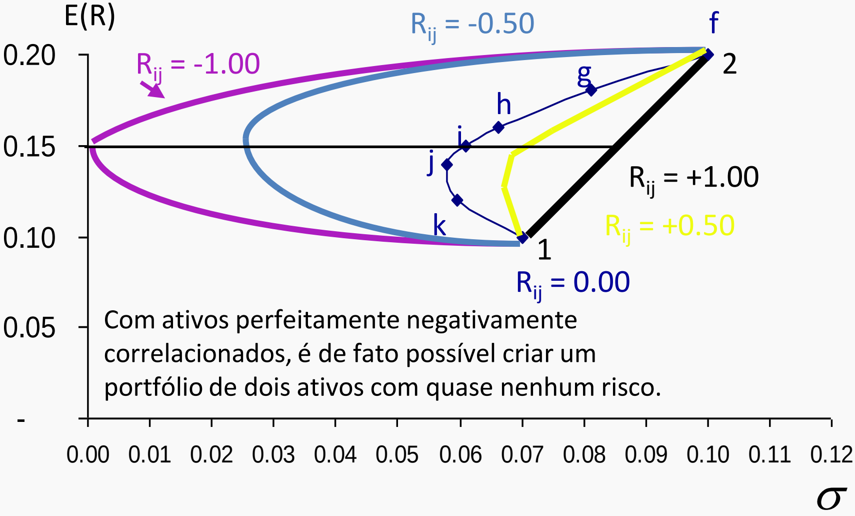


Diagrama de um portfólio: Dois portfólios com correlações diferentes

Considere dois ativos com médias conhecidas R1 e R2, variâncias σ_1^2 e σ_2^2, juntamente com o coeficiente de correlação ρ.

Seja 1 - α e α os pesos dos ativos 1 e 2 deste portfólio de dois ativos.

- Média do portfólio:

$$\boxed{R_P = (1 - \alpha)R_1 + \alpha R_1}$$

- Variância do portfólio:

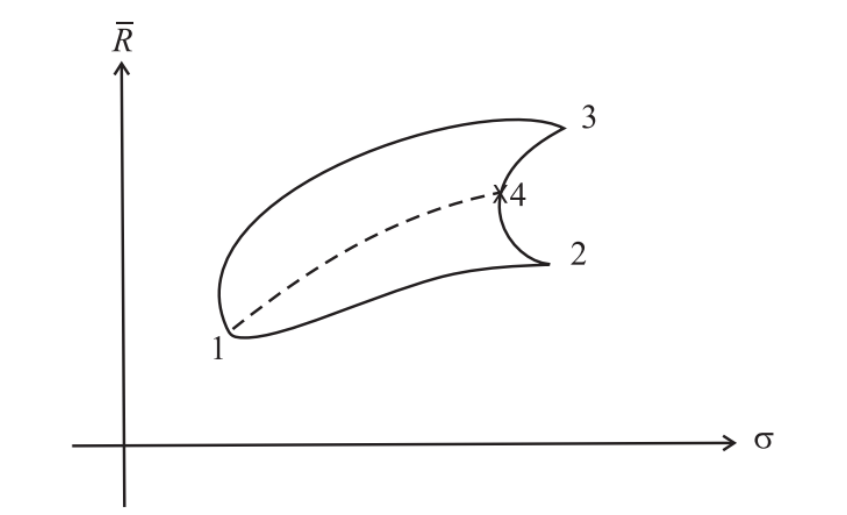
$$\boxed{\alpha_P^2 = (1 - \alpha)^2\sigma_1^2 + 2\rho\alpha(1 - \alpha)\sigma_1\sigma_2 + \alpha^2\sigma_2^2}$$

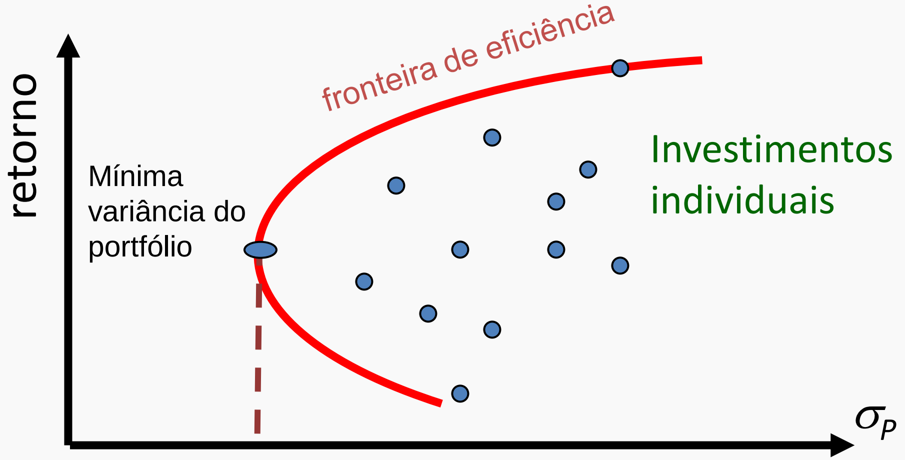
Diagrama de um portfólio: Dois portfólios com correlações diferentes

- A relação depende do coeficiente de correlação.
- $-1.0 < \rho < +1.0$
- Quanto menor a correlação, maior o potencial de redução de risco.
- Se $\rho = +1.0$, não é possível reduzir o risco.

- n ativos
- Podemos representá-los como pontos em um diagrama de média-desvio padrão.
- Em seguida, formamos portfólios a partir desses n ativos, usando todos os possíveis esquemas de ponderação.

Conjunto eficiente com vários ativos





É possível identificar a variância mínima do portfólio

- n ativos: i = 1, 2, ..., n
- Retorno de cada ativo: $\mathbf{R} = [R_1, R_2, \dots, R_n]$
- Média e covariância:

$$E[\mathbf{R}] = \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \mathrm{Cov}[\mathbf{R}] = \Sigma =$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{11} & \cdots & \sigma_{mm} \end{bmatrix}$$

- Portfólio: m – vetor de pesos indica a fração para cada ativo do portfólio

$$\mathbf{w} = (w_1 \quad \cdots \quad w_m) \rightarrow \sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

- Retorno do portfólio:

$$R_w = \boldsymbol{w}^T \boldsymbol{R} = \sum_{i=1}^{m} w_i R_i$$

- $\mathrm{E}[R_w] = \boldsymbol{w}^T \alpha$
- $\mathrm{var}[R_w] = \boldsymbol{w}^T \sum \boldsymbol{w}$

- Avaliando diferentes portfólios **w** usando o par média-variância $(\alpha_{\boldsymbol{W}}, \alpha_{\boldsymbol{W}}^2)$:
  - Maior retorno esperado
  - Menor variância

- Problema de minimização:

$$\text{Minimize } \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T \sum \boldsymbol{w}$$

- Sujeito a

$$\boldsymbol{w}^T \alpha = \alpha_0$$
$$\boldsymbol{w}^T 1_m = 1$$

- Avaliando diferentes portfólios **w** usando o par média-variância $(\alpha_{\boldsymbol{W}}, \alpha_{\boldsymbol{W}}^2)$:
  - Maior retorno esperado
  - Menor variância

- Problema de minimização:

$$\text{Minimize } \frac{1}{2}\boldsymbol{w}^T \sum \boldsymbol{w}$$

- Sujeito a

$$\boldsymbol{w}^T \alpha = \alpha_0$$
$$\boldsymbol{w}^T 1_m = 1$$

Solução: método de Lagrage

O que é um ativo livre de risco?

DEFINIÇÃO: ativo cujo valor final é certo

variância do retorno= 0,

covariância com outros ativos = 0

se $\sigma_i = 0$

então $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$

$= 0$

O retorno esperado da carteira é uma **relação linear**, sendo a média ponderada dos dois retornos.

$$E(R_{port}) = W_{RF}(RFR) + (1 - W_{RF})E(R_i)$$

Desvio padrão:

$$E(\sigma^2_{port}) = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2r_{1,2}\sigma_1\sigma_2$$

$$E(\sigma^2_{port}) = w^2_{RF}\sigma^2_{RF} + (1 - w_{RF})^2\sigma_i^2 + 2w_{RF}(1 - w_{RF})r_{RF,i}\sigma_{RF}\sigma_i$$

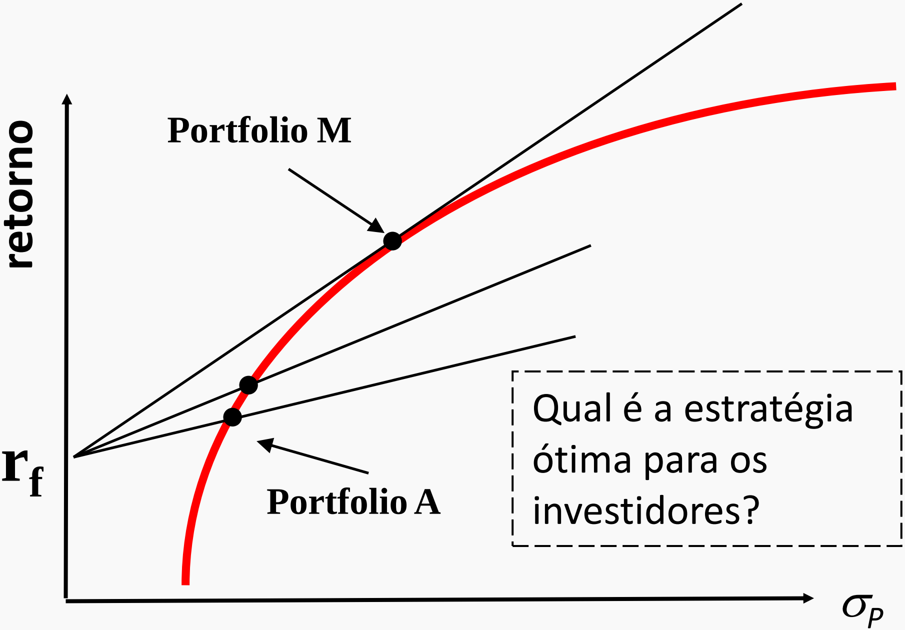
Como sabemos que a variância do ativo livre de risco é zero e que a correlação entre o ativo livre de risco e qualquer ativo arriscado "i" é zero, podemos ajustar a fórmula.

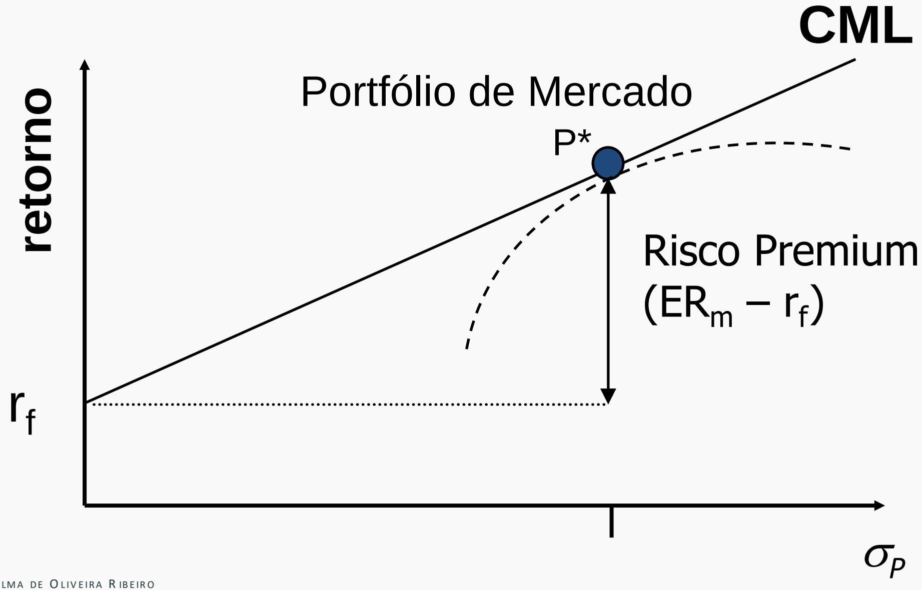
$$\boxed{E(\sigma^2_{port}) = (1 - w_{RF})^2\sigma_i^2}$$

- Uma vez que tanto o retorno esperado quanto o desvio padrão do retorno de tal carteira são combinações lineares, um gráfico dos possíveis retornos e riscos da carteira parece uma linha reta entre os dois ativos.

- Portanto, a existência de um ativo livre de risco acrescenta valor aos investidores, ampliando o conjunto de carteiras disponíveis para eles.

Conjunto eficiente com vários ativos



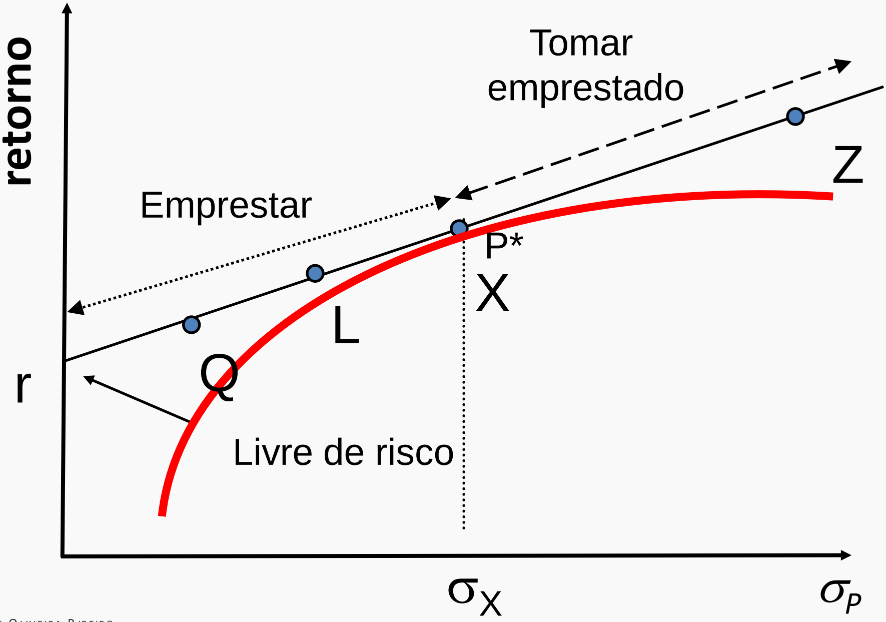

CML
Portfólio de Mercado
P*
retorno
Risco Premium
$(ER_m - r_f)$
r_f
σ_P

Equação do Capital Market Line (CML)

$$E(R_C) = R_F + \sigma_C \left[\frac{E(R_P) - R_F}{\sigma_P} \right]$$

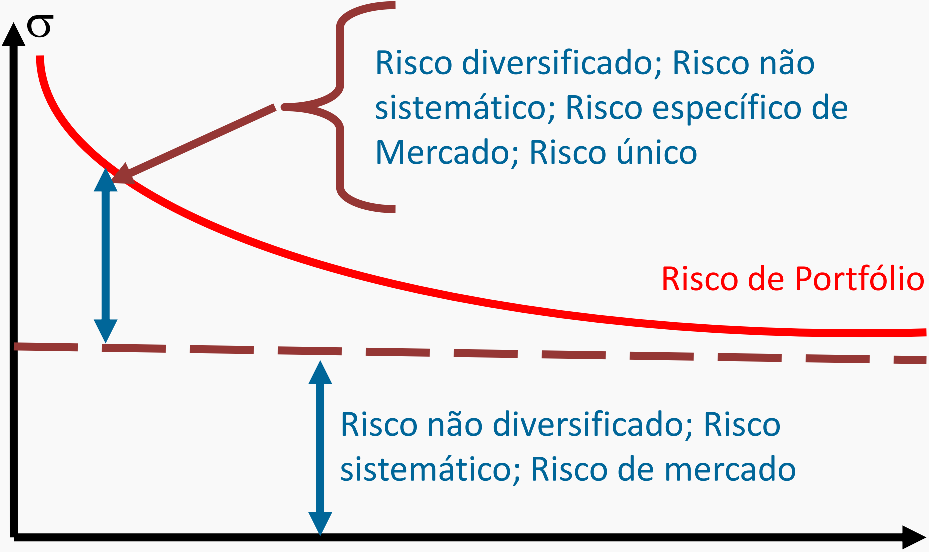
Essa fronteira eficiente linear, composta por várias combinações do ativo livre de risco e da carteira arriscada P*.

Capital Market Line (CML)



- Por conter todos os ativos arriscados, é uma carteira P* completamente diversificada (uma vez que você já possui tudo, não pode diversificar mais!), o que significa que todo o risco único dos ativos individuais (risco não sistemático) é diversificado (todo o risco que sobra é, por definição, risco sistemático).

- Apenas o risco sistemático permanece na carteira de mercado.
- O risco sistemático é a variabilidade em todos os ativos arriscados causada por variáveis macroeconômicas.
- O risco sistemático pode ser medido pelo desvio padrão dos retornos da carteira de mercado e pode (e de fato) mudar ao longo do tempo.



Portanto, a diversificação pode eliminar parte, mas não todo o risco de títulos individuais.