

Instituto de Física da Universidade de São Paulo

Física II - 4300112

7ª Lista de exercícios - Relatividade Restrita - 2012

1. Uma barra que está colocada paralelamente ao eixo x de um sistema de referência S desloca-se ao longo deste eixo com velocidade $\frac{4\sqrt{5}}{9} c \sim 0.993808 c$. Seu comprimento de repouso é de 18 m. Qual será o comprimento medido no sistema S' ?

R: 2 m.

2. Uma barra de comprimento L' em repouso no referencial S' faz um ângulo θ' com o eixo x' .

(a) Mostre que o comprimento L medido por um observador em um referencial S , para quem a barra se move com velocidade v na direção x , é dado por $L = L' \sqrt{1 - \beta^2 \cos^2 \theta'}$, onde $\beta = v/c$.

(b) Mostre que o ângulo θ que esta barra em movimento faz com o eixo x do referencial S é dado por $\text{tg} \theta = \gamma \text{tg} \theta'$, onde γ é o fator de Lorentz, dado por $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$.

(c) Calcule L e $\text{tg} \theta$ para $L' = 1$ m, $\cos \theta' = \frac{3}{4}$ e $\beta = 0,8$.

R: (c) $L = 0,8$ m; $\text{tg} \theta = \frac{5\sqrt{7}}{9}$.

3. O tempo de vida média de múons encerrados numa caixa de chumbo num laboratório é de $2,2 \mu\text{s}$. O tempo de vida média de múons saindo de um acelerador de partículas é de $\frac{8,8}{\sqrt{7}} \mu\text{s} \sim 3,3261 \mu\text{s}$. Determine a velocidade dos múons que saem do acelerador.

R: $v = \frac{3}{4} c = 0,75 c$.

4. Um estudante vai realizar uma prova que deve durar 1 hora. Seu professor está em viagem e passará (sem parar) pela Terra com velocidade constante $v = 0,6 c$. O aluno propõe que a prova inicie quando o professor passar pela Terra e quando o professor, em seu próprio relógio, verificar que se passou 1 hora do início da prova ele envie um sinal luminoso à Terra. O aluno terminaria a prova quando recebesse o sinal luminoso.

(a) Quanto tempo o aluno teria para realizar a prova, de acordo com seu relógio?

(b) E quanto tempo o aluno teve para fazer a prova, de acordo com o relógio do professor?

(c) Qual desses intervalos de tempo realmente importa?

R: (a) 2 horas; (b) 2,5 horas; (c) O horário medido pelo aluno, claro!

5. Quando visto de um sistema inercial S , um evento ocorre no ponto x_A sobre o eixo x , e 10^{-6} s mais tarde um outro evento ocorre no ponto x_B , tal que $x_A - x_B = 600$ m, quando visto de S .

(a) Existe um outro sistema inercial S' , movendo-se com uma velocidade menor do que c paralela ao eixo x , para o qual os dois eventos são simultâneos? Se assim for, qual é o módulo e o sentido da velocidade de S' com relação a S ?

(b) Repita a parte (a) para o caso em que A e B estão separados somente de 100 m quando vistos de S .

R: (a) Sim, $\vec{v} = -0,5 c \hat{x}$; (b) $\vec{v} = -3 c \hat{x}$, impossível!

6. Um observador em S vê uma estrela com uma elevação angular θ em relação à horizontal Ox . Um segundo observador S' caminha na direção Ox com velocidade v relativa a S .

(a) Calcule o ângulo de elevação θ' da estrela, visto por S' , em relação a $O'x'$, sem utilizar os resultados da Teoria da Relatividade Restrita (cálculo clássico, conhecido pelos astrônomos como “aberração da luz estelar”).

(b) Calcule novamente o ângulo θ' , desta vez utilizando a Teoria da Relatividade Restrita.

(c) Compare os resultados dos itens anteriores quando $\frac{v}{c} \ll 1$.

R: (a) $\tan(\theta') = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta) + \frac{v}{c}}$; (b) $\tan(\theta') = \frac{1}{\gamma} \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta) + \frac{v}{c}}$.

7. Imagine um jogo de futebol relativístico em um Universo onde $c = 50$ m/s. Um atacante move-se em direção ao gol adversário com velocidade $v = 30$ m/s (em relação ao campo de futebol). Em seu referencial, S' , este atacante passa pelo zagueiro adversário em t'_2 e observa seu companheiro a uma distância $x'_1 = -L_0$ lançar a bola à sua frente no instante t'_1 . No referencial S , o juiz e o zagueiro estão na grande área e em repouso com relação

ao campo. Nesse referencial, as regras do futebol determinam que seja marcado impedimento se o atacante passar pelo zagueiro (instante t_2) antes de seu companheiro lançar a bola (instante t_1).

Obs: para efeitos de resolução deste problema, assumamos que as posições dos jogadores e do juiz permanecem colineares, com a mesma coordenada $y = y' = 0$.

- (a) Para o atacante em S' , $L_0 = 50$ m e ele percebe que ultrapassou o zagueiro antes do lançamento de seu companheiro tal que $\Delta t' = t'_2 - t'_1 = -0,5$ segundos. O juiz deve marcar impedimento?
- (b) No item anterior, existe um comprimento L_0 limite que determina a existência ou não do impedimento? Obtê-lo em caso positivo.
- (c) Na continuação do lance, o juiz permanece junto ao zagueiro (ainda dentro da grande área) em $x = 0$, mas tem sua visão do lance encoberta por ele. No referencial S do juiz, o atacante cai 0,08 segundos após passar pelo zagueiro. Um movimento brusco do zagueiro sugeriu a intenção de derrubar o atacante. Como critério, o juiz marcaria pênalti se, no referencial S' do atacante, a queda ocorrer após a passagem do atacante pelo zagueiro. Neste caso, determine qual atitude o juiz deve tomar.
- (d) No item anterior, existe uma velocidade limite de um observador externo onde o jogador cai antes de passar pelo zagueiro? Determine-a em caso positivo.

R: (a) não; (b) sim, $L_0 = \frac{125}{3}$ m $\approx 41,6$ m; (c) marcar o pênalti; (d) não.

8. Um trem de comprimento próprio L_0 move-se com velocidade $v = 0,8 c$ em relação à estrada e dirige-se para uma ponte com extensão d , medida no referencial da estrada (S). No momento em que a dianteira do trem (A) passa pelo ponto O , no início da ponte, dois flashes de luz são disparados simultaneamente no referencial do trem (S'), nas extremidades do trem (A e B). Nesse instante, dois observadores, um em A e outro em O , sincronizam seus cronômetros em $t = t' = 0$ com a origem dos sistemas de referência S e S' coincidentes.

- (a) No referencial da estrada, qual o intervalo de tempo Δt entre os flashes de luz emitidos em A e B ?
- (b) No referencial da estrada, em que instante t_1 o flash emitido em A atinge o ponto B ?
- (c) No referencial do trem, quanto tempo ele leva para percorrer completamente a ponte?

R: (a) $|\Delta t| = \frac{4}{3} \frac{L_0}{c}$; (b) $t_1 = \frac{1}{3} \frac{L_0}{c}$; (c) $\delta t' = \frac{5L_0 + 3d}{4c}$.

9. Num referencial S duas espaçonaves A e B movem-se com velocidades de módulo $u = 0,5 c$ na mesma direção,

mas em sentidos opostos. Cada espaçonave tem comprimento próprio igual a 100 m. Quando a espaçonave A passa pela origem O , um feixe de luz é emitido partindo de O , formando um ângulo de $\theta = 60^\circ$ em relação ao eixo Ox .

- (a) Determine a velocidade da espaçonave A em relação a B .
- (b) Qual a inclinação θ' do feixe de luz medido pelo observador na espaçonave B ?
- (c) Os resultados obtidos nos itens anteriores são compatíveis com os postulados da relatividade? Explique.

R: (a) $u'_a = 0,8 c$; (b) $\theta' = \arctan\left(\frac{3}{4}\right)$; (c) Sim, é compatível: a velocidade escalar do raio de luz permanece sendo c .

10. Uma partícula de raio cósmico aproxima-se da Terra ao longo de seu eixo com uma velocidade de $0,80 c$ em direção ao polo norte e uma outra, com velocidade $0,60 c$, em direção ao polo sul. Qual é a velocidade relativa de aproximação entre as duas partículas?

R: $0,9459 c$.

11. Um satélite artificial deslocando-se com relação à Terra a uma velocidade de $0,90 c$ comunica-se por transmissão numa frequência (medida no referencial do satélite) de 100 MHz. Para que frequência deve a Terra ajustar seus receptores para receber este sinal?

R: 22,94 MHz.

12. Observações da luz emitida por um certo quasar mostraram um deslocamento para o vermelho ("red shift") de uma linha espectral de 130 nm para 500 nm. Ele está se aproximando ou se afastando de nós? Qual é a velocidade do quasar?

R: $0,873 c$.

13. Determine a quantidade de trabalho que deve ser fornecida a um elétron, inicialmente em repouso com massa $m_0 = 0,5 \text{ MeV}/c^2$, para que ele atinja as seguintes velocidades:

- (a) $0,50 c$,
- (b) $0,99 c$,
- (c) $0,9999 c$.

R: (a) 77,35 keV; (b) 3,0444 MeV; (c) 34,856 MeV.

14. Considere uma partícula movendo-se relativisticamente a uma velocidade u .

(a) Mostre que u difere da velocidade da luz c por

$$\Delta u = c - u \approx \frac{c}{2} \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^2,$$

onde E é a energia total.

Esta é uma aproximação útil para altas energias. Encontre esta quantidade para um elétron cuja energia cinética é:

(b) 100 MeV,

(c) 25 GeV.

R: (b) 3,75 km/s; (c) 6 cm/s.

15. Mostre que a expressão relativística para a energia cinética pode também ser escrita como:

$$K = \left(\frac{\gamma^2}{1 + \gamma} \right) m_0 u^2 \quad \text{ou} \quad K = \frac{p^2}{m_0 (1 + \gamma)}.$$

Observe que estas expressões reproduzem a expressão da mecânica clássica para $\gamma = 1$.

16. Encontre o parâmetro de velocidade β e o fator de Lorentz γ para uma partícula com energia cinética $K = 10$ MeV se a partícula é:

(a) um elétron,

(b) um próton,

(c) uma partícula alfa.

R: (a) 0,9989; 21,0; (b) 0,145; 1,01; (c) 0,073; 1,0027.

17. Duas partículas idênticas, cada uma com massa de repouso m_0 , movendo-se com velocidades iguais mas opostas de $0,60 c$ no referencial do laboratório, colidem e “grudam” formando uma única partícula de massa de repouso M_0 . Expresse M_0 em termos de m_0 .

R: $M_0 = 2,5 m_0$.

18. O núcleo ^{12}C consiste de 6 prótons (^1H) e 6 nêutrons (n) que se mantêm unidos por fortes forças nucleares. As massas de repouso (em unidades de massa atômica) são:

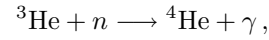
$$^{12}\text{C} : 12,0000 \text{ u.m.a.}, \quad ^1\text{H} : 1,007825 \text{ u.m.a.},$$

$$n : 1,008665 \text{ u.m.a.}$$

Quanta energia é necessária para separar um núcleo de Carbono-12 em seus constituintes (nêutrons e prótons)? Obs: Esta energia é denominada energia de ligação do núcleo de Carbono-12.

R: $E \approx 92,1$ MeV.

19. Um núcleo de Hélio-3 (massa nuclear: 3.01493 u.m.a.) captura um nêutron lento (massa: 1.00867 u.m.a.) e forma um núcleo de Hélio-4 (massa nuclear: 4.00151 u.m.a.), de acordo com a reação



onde o símbolo γ representa um raio gama emitido na reação de fusão. Qual a energia do raio gama?

R: 20,6 MeV.

20. Um próton (massa de repouso m_0) em um acelerador de partículas adquire uma energia cinética K , sendo posteriormente guiado a colidir com um segundo próton “parado” no acelerador. A colisão é tal que a soma de todas as energias iniciais (cinéticas e de repouso dos dois prótons) é suficiente para a criação de ao menos um par de próton-antipróton, não necessariamente em repouso no laboratório. Em outras palavras, trata-se de uma colisão completamente inelástica.

(a) Mostre que ϵ , definida como a energia disponível para a criação de novas partículas, é dada por

$$\epsilon = 2m_0 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{K}{2m_0 c^2} \right)}.$$

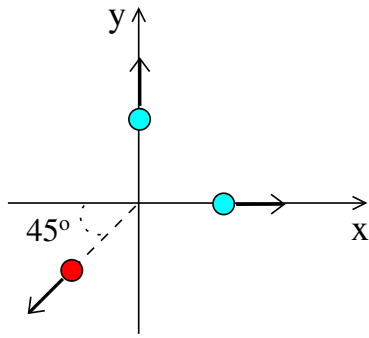
(b) Qual o valor de ϵ quando prótons de 100 GeV colidem desta maneira?

(c) Qual é o valor da energia cinética K que o próton incidente deve atingir para que se tenha $\epsilon = 100$ GeV?

R: (b) 13,825 GeV; (c) 5329 GeV.

21. Uma partícula e sua anti-partícula, ambas com massa de repouso m_0 tal que $m_0 c^2 = 2,4$ MeV colidem, aniquilando-se mutuamente, e gerando 3 fótons (partículas de massa nula e energia $hf = hc/\lambda$, onde f é a frequência, λ o comprimento de onda da radiação, e h a constante de Planck). A anti-partícula se desloca na direção y . A velocidade inicial da partícula em um dado referencial S é $v_i = 0,6 c$ na direção x . Um dos fótons é emitido nesta mesma direção (no sentido positivo de x), outro na direção y (também no sentido positivo), ambos com mesmo comprimento de onda λ , e o terceiro fóton é emitido na diagonal (a 45° com relação ao eixo x), na direção do quadrante de x e y negativos (figura).

após a colisão (ref. S)



Utilizando sempre o referencial S:

- (a) Calcule a energia (E_1) da partícula e seu momento linear (p_1).

- (b) Determine as componentes x e y do momento linear p_2 da anti-partícula e sua energia E_2 .
- (c) Determine a energia total dos fótons emitidos.
- (d) Determine a energia de cada fóton.
- (e) Calcule a variação da energia cinética entre os estados inicial e final.

Obs: Dê suas respostas em unidades de MeV e MeV/c, conforme o caso. Utilize $\sqrt{2} \approx 1,4$ para facilitar as contas.

R: (a) $p_1 = 1,8 \text{ MeV}/c$ e $E_1 = 3 \text{ MeV}$; (b) $p_2 = 1,8 \text{ MeV}/c \hat{y}$ e $E_2 = 3 \text{ MeV}$; (c) $E_f = 6 \text{ MeV}$; (d) $f_{f1}c = p_{f2}c = 2,5 \text{ MeV}$; (e) $4,8 \text{ MeV}$.