2^a Lista de Dinâmica Estocástica e Irreversibilidade-2/2023

Movimento Browniano e Equação de Fokker-Planck

1) Obtenha as expressões para $\langle v^2 \rangle$, $\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$, $\langle x^2 \rangle$ e $\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ em função do tempo t e seus limites assintóticos $t \to \infty$, algumas delas já calculadas em sala de aula.

2) *Partícula Browniana sob a influência de um "driving" periódico*

Considere uma partícula browniana de massa $m << 1$ ("overdamped limit") em contato com um reservatório térmico à temperatura T sob influência de uma força do tipo $f = f(x) + f^{ext}(t)$, de forma que $f(x) = -kx$ é a força elástica e $f^{ext}(t)$ é uma força externa periódica dada por $f^{ext}(t) = f_0 \cos(\omega t)$.
a) Conforme vimos em sala de aula, mostre que este sistema é descrito por uma equação de Fokker-Planck do tipo

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}, \tag{1}$$

onde

$$J = -\frac{kx + f^{ext}(t)}{\alpha} P - \frac{k_{\mathrm{B}} T}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{2}$$

onde $V = kx^2/2$.
b) Mostre que a distribuição de probabilidades é $P(x,t) = A \exp\{-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}\}$. Identifique o parâmetro A e escreva as equações para a evolução das correlações $\langle x^2 \rangle$, $\langle x \rangle$ bem como suaas expressões como função de t e dos parâmetros do problema.

3) *Partícula Browniana sob a influência de uma temperatura oscilante no tempo*

Considere uma partícula browniana de massa $m << 1$ ("overdamped limit") sob influência de uma força do tipo $f = f(x)$, de forma que $f(x) = -kx$ é a força elástica e $f^{ext}(t)$ e em contato com um reservatório térmico à temperatura oscilante no tempo, sob a forma $T = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$, onde $T_1 < T_0$.
a) Conforme vimos em sala de aula, mostre que este sistema é descrito por uma equação de Fokker-Planck do tipo

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}, \tag{3}$$

onde

$$J = -\frac{kx}{\alpha} P - \frac{k_{\mathrm{B}} T}{\alpha} \frac{\partial P}{\partial x}, \tag{4}$$

onde $V = kx^2/2$.
b) Escreva as equações para a evolução das correlações $\langle x^2 \rangle$, $\langle x \rangle$. Considerando o regime estacionário, obtenha suas expressões como função de t e dos parâmetros do problema e verifique que a distribuição de probabilidades é $P(x,t) = A \exp\{-\frac{1}{2} b x^2\}$.

Dica: Talvez seja mais fácil obter a equação de evolução para $\langle x^2 \rangle = 1/b$. Maiores detalhes, ver a maravilhosa referência Phsyical Review E **99***, 052131 (2019).*

4) *Partícula Browniana sob a influência de um "driving" periódico*

Considere uma partícula browniana de massa m em contato com um reservatório térmico à temperatura T sob influência de uma força do tipo $f = f(x) + f^{ext}(t)$, de forma que $f(x) = -kx$ é a força elástica e $f^{ext}(t)$ é uma força externa periódica dada por $f^{ext}(t) = f_0 \cos(\omega t)$.
a) Mostre que este sistema é descrito por uma equação de Fokker-Planck do tipo

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\left(v\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{m}f\frac{\partial P}{\partial v} + \frac{\partial J}{\partial v}\right), \tag{5}$$

onde

$$J = -\gamma v P - \frac{\gamma k_{\mathrm{B}} T}{m}\frac{\partial P}{\partial v}. \tag{6}$$

A quantidade γ denota a constante de "fricção", respectivamente, sendo f a força atuando sobre a partícula definida acima.
b) Escreva as equações para a evolução das correlações $\langle v^2 \rangle$, $\langle v \rangle$, $\langle x \rangle$, $\langle x^2 \rangle$ e $\langle xv \rangle$.
Maiores detalhes, ver a maravilhosa referência Phsyical Review E **101**, 012132 (2020).

5) *Sistema formado por duas partícula Brownianas interagentes*
Considere um sistema formado por duas partículas brownianas interagentes de massas iguais m, cada sujeita a uma força externa e estando em contato com um reservatório de temperatura T_i, $i = \{1, 2\}$. Suas posições e velocidades, x_i and v_i, evoluem de acordo com as equações abaixo

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{m}F_1^*(x_1, x_2) + \frac{1}{m}\tilde{F}_1(t) - \gamma v_1 + \zeta_1, \tag{7}$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{m}F_2^*(x_1, x_2) + \frac{1}{m}\tilde{F}_2(t) - \gamma v_2 + \zeta_2, \tag{8}$$

and

$$\frac{dx_1}{dt} = v_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = v_2, \tag{9}$$

respectivamente. Há oito forças atuando sobre o sistema: duas forças $F_i^*(x_1, x_2)$, relacionadas com o potencial harmônico entre as partículas, duas forças externas $\tilde{F}_i(t)$, além das forças resistivas $-\gamma v_i$ A primeira força pode ser descrita em termos da derivada de um potencial V_i dado por $F_i^*(x_1, x_2) = -\partial V_i/\partial x_i$, enquanto as forças estocásticas por meio de um ruído gaussiano: $\langle \zeta_i(t) \rangle = 0$ and $\langle \zeta_i(t)\zeta_j(t') \rangle = 2\ \gamma k_B T_i \delta_{ij} \delta(t - t')/m$.

a) Mostre que o sistema acima apresenta distribuição de probabilidades $P(x_1, x_2, v_1, v_2, t)$ governada pela equação de Fokker-Planck-Kramers

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{2} \left(v_i \frac{\partial P}{\partial x_i} + [F_i^* + \tilde{F}_i(t)] \frac{\partial P}{\partial v_i} + \frac{\partial J_i}{\partial v_i} \right), \tag{10}$$

where

$$J_i = -\gamma v_i P - \frac{\gamma k_{\mathrm{B}} T_i}{m} \frac{\partial P}{\partial v_i}. \tag{11}$$

b)Escreva as equações de evolução para as médias $\langle v_i \rangle$ bem como para as covariâncias $b_{ij}^{xv} = \langle x_i y_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle v_j \rangle$, onde o subscrito i, j denotam as partículas 1 e 2.
c) Obtenha explicitamente as expressões para $\langle x_i \rangle^2$, $\langle v_i \rangle^2$, $\langle x_i v_j \rangle$, $\langle v_i x_j \rangle$ e $\langle x_i x_j \rangle$ para $i, j \in \{1, 2\}$.
d) Obtenha as expressões para $\langle v_i \rangle^2$ ($i \in \{1, 2\}$) no regime estacionário. Maiores detalhes, ver as referências Physical Review E **101**, 012132 (2020), Phys. Rev. E **82**, 021120 (2010) e Physical Review E **105**, 024106 (2022).