

# Classificação de modelos de resposta ao item policotômicos com aplicação ao marketing

*Jorge Luis Bazán<sup>1</sup>  
José Afonso Mazzon<sup>2</sup>  
Martín Hernani Merino<sup>3</sup>*

## Resumo

Têm sido comum trabalhos publicados em Administração e particularmente em Marketing utilizarem técnicas estatísticas aplicadas a escalas ordinais assumindo que estas fossem intervalares. Com o propósito de apresentar uma alternativa adequada a essa prática, apresenta-se, neste artigo, uma taxonomia de diversos modelos de teoria de resposta ao item policotômicos (TRIP) baseada nos tipos de logitos de passo de uma etapa do item (funções de resposta). A ênfase da apresentação é introdutória e a metodologia proposta é ilustrada com uma aplicação considerando uma escala de atitudes de consumidores de serviços bancários frente ao mobile banking, uma área de recente interesse em Marketing. Esse exemplo ilustra também o uso de software para implementar a maioria destes modelos.

**Palavras-chave:** Teoria de Resposta ao Item; Itens Policotômicos; Marketing.

---

<sup>1</sup> Professor da Pontificia Universidad Católica del Peru Correspondência: [jlbazan@pucp.edu.pe](mailto:jlbazan@pucp.edu.pe)

<sup>2</sup> Professor da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP Correspondência: [jamazzon@usp.br](mailto:jamazzon@usp.br)

<sup>3</sup> Doutorando na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP Correspondência: [martinhernani@usp.br](mailto:martinhernani@usp.br)

# 1. Introdução

O principal método de pesquisa empregado em marketing é o denominado survey, o qual se baseia na aplicação de questionários junto a uma amostra de consumidores de bens e serviços (Franses & Paap, 2001; Malhotra, 2011). Em termos de pesquisa de marketing, a maioria dos questionários aplicados a estudos do comportamento do consumidor em relação a produtos, preços, canais de distribuição, promoção e venda pessoal, satisfação, lealdade a marcas, dentre outros aspectos, usam predominantemente escalas de respostas denominadas policotômicas, no sentido de possibilitar ao consumidor um maior leque de categorias de respostas. É o caso, por exemplo, de escalas do tipo Likert variando de nenhuma importância a total concordância, nenhuma diferenciação a total diferenciação ou de total discordância a total concordância. O uso deste tipo de escalas policotômicas tem trazido contribuições extremamente úteis e são importantes, segundo reconhecem Singh, Howell e Rhoads (1990). Os motivos apontados pelos autores são: 1) muitas das escalas de atitudes em marketing utilizam categorias de resposta do tipo Likert; 2) para um conjunto fixo de itens, o uso de dados obtidos por meio dessa escala é conhecido por produzir mais informação sobre o nível de atitude de um respondente do que seria por dados dicotômicos.

Em geral os dados obtidos mediante estes instrumentos de coleta são analisados usando procedimentos de testes estatísticos clássicos (Pasquali, 2009). Questionamentos também são feitos ao uso de técnicas estatísticas aplicadas a escalas assumidas como intervalares, mas que na realidade são ordinais (Hair, Black, Babin, Anderson & Tatham, 2006; Mazzon, 1981). Uma das formas de superar tal problema reside na utilização de modelos da teoria de resposta ao item (TRI), os quais têm sido usados mais recentemente de forma crescente (Baker & Kim, 2004; Rao & Sinharay, 2006), principalmente nas áreas de educação (Andrade, Tavares & Valle, 2000), saúde (Cook, Taylor, Dodd, Teal & Mchorney, 2007), engenharia (Omar, Ghariebeh, Salazar & Saito, 2007) e psicologia (Tay, Diener, Drasgow & Vermunt, 2011).

As aplicações da TRI em marketing são ainda incipientes, tanto em termos acadêmicos quanto profissionais. Destaca-se aqui o trabalho pioneiro de Balasubramanian e Kamakura (1989), que aplicaram com sucesso, dentro de um contexto de pesquisa de comportamento do consumidor, modelos da TRI a dados dicotômicos (Ex: Sim/Não) e a dados policotômicos de uma escala tipo Likert de 7 pontos, dicotomizada para uma escala de 2 pontos. No ano seguinte, Singh, Howell e Rhoads (1990) apresentaram a TRI como um método alternativo para o tratamento de escalas do tipo Likert na implementação de pesquisas de marketing. Singh (2004) discutiu os princípios, as características e efetuou uma avaliação crítica do uso da TRI em marketing. Destaca-se ainda o trabalho realizado por De Jong, Steenkamp e Fox (2007), os quais aplicaram TRI hierárquico a uma pesquisa nacional de consumidores. Por último, Tay, Diner, Drasgow e Vermunt (2011) efetuaram uma aplicação de modelo TRI multinível para a mensuração de uma escala de emoções.

Mais recentemente, diante de um crescente interesse pela pesquisa do consumidor para testar medidas e teorias no contexto internacional em uma situação de (in)variância de mensurações para comparar nações, mercados e segmentos de consumidores, esse tema tornou-se de enorme importância (De Jong, Steenkamp & Fox, 2007). Esses autores trataram do assunto montando e testando um modelo hierárquico da TRI com o qual comparam países, apesar da falta de invariância de qualquer um dos itens. Na pesquisa, também se reconheceu a natureza ordinal dos dados através das diferenças das nações na escala de medida. Esses autores encontraram uma forte não invariância das métricas da escala e seu uso através dos países para o construto utilizado na pesquisa: suscetibilidade do consumidor para a influência normativa nas decisões de compra. Face à situação de elevado uso nas pesquisas de marketing de escalas de mensuração do tipo Likert, utilizando várias categorias de resposta – usualmente de 5 a 9 pontos – é que se apresentam a seguir alguns exemplos aplicados ao marketing para uma melhor visualização e compreensão de diferentes tipos de categorias de resposta.

Não obstante tais resultados, o uso de modelos TRI para dados policotômicos ainda se encontra quase que ausente na literatura de marketing, embora reconhecidos pesquisadores atestem sua contribuição na mensuração de variáveis latentes (Balasubramanian & Kamakura, 1989; Bechtel, 1985; Singh, 2004; Singh, Rowel e

Rhoads, 1990; Tay, Diner, Drasgow e Vermunt, 2011), sugerindo isso um potencial uso em pesquisas futuras.

Um tema recentemente estudado relaciona-se com atitudes e comportamentos de consumidores brasileiros em relação a um novo serviço financeiro: o mobile banking. Avaliar corretamente o que os consumidores pensam e como se comportam em relação a este serviço é fundamental para uma instituição financeira, pois além de adicionar valor ao cliente, o uso dessa ferramenta reduz significativamente o custo de uma transação, podendo assim gerar benefícios tanto aos clientes quanto aos bancos. Pousttchi e Schuring (2004) explicam que este conceito é uma parte do *e-commerce* e é uma forma de execução de serviços financeiros de forma que – dentro de um procedimento eletrônico sistematizado – o cliente utiliza técnicas de comunicação móvel conjuntamente com aparelhos celulares. Tezza, Bórnica e Andrade (2011) efetuaram uma aplicação de TRI na área de comércio eletrônico. Puschel, Mazzon e Hernandez (2010) elaboraram e testaram um modelo no qual aplicaram diversas teorias da psicologia social, difusão da inovação e adoção de tecnologias para descrever os fatores que influenciam o processo de adoção de mobile banking. Estes autores, após uma exaustiva revisão de literatura, propuseram um modelo integrativo de adoção de mobile banking composto por 14 fatores (variáveis latentes) com seus respectivos indicadores (61 itens) para atingir o propósito esboçado. Esses fatores e respectivos itens originam-se de diferentes teorias, a saber: Theory of Reasoned Action (TRA), Innovation Diffusion Theory (IDT), Technology Acceptance Model (TAM), Theory of Planned Behavior (TPB) e Decomposed Theory of Planned Behavior (DTPB) e são os seguintes: compatibilidade social; vantagem relativa; visibilidade; demonstração de resultados; imagem da instituição financeira; testabilidade do serviço, utilidade percebida do serviço; atitude em relação ao mobile banking; influência de amigos e colegas na decisão de compra; controle percebido sobre o comportamento; autoeficácia; condição facilitadora dos recursos disponíveis; condição facilitadora da tecnologia disponível e intenção de adotar o mobile banking em um dado período de tempo. Para mensurar cada um desses 61 itens, a pesquisa utilizou uma escala do tipo Likert aplicada na forma bi-etápica de concordância baseada em seis posições: discordo totalmente = 1; discordo muito = 2; discordo pouco = 3; concordo pouco = 4; concordo muito = 5 e concordo totalmente = 6.

No entanto, o uso de modelos da TRI para dados policotômicos não tem sido usado com este tipo de escala.

Com base nessas considerações, apresenta-se neste artigo uma caracterização e uma taxonomia dos diversos modelos da teoria de resposta ao item policotômicos (TRIP) baseadas nos tipos de logitos de passo (funções de resposta) de uma etapa do item assim como uma aplicação ao marketing de um desses modelos, especificamente a uma escala de mobile banking proposta por Puschel, Mazzon e Hernandez (2010). A natureza do trabalho é introdutória e semelhante a Andrade, Tavares e Valle (2000), estando focada na modelagem e apresentação de uma aplicação e não nos métodos de estimação. Assim, o propósito do artigo é contribuir para a discussão da escolha do modelo TRIP mais pertinente para uma particular aplicação.

A fundamentação do trabalho está apoiada nos artigos de Hemker (2001), Van der Ark (2001) e Vermunt (2001). A apresentação de alguns modelos da TRIP e de procedimentos de estimação com ênfase no processo de inferência estatística podem ser vistos em Azevedo (2003). Também podem ser consultados Van der Linden e Hambleton (1997) para modelos TRIP paramétricos e Boomsma, Van Duijn e Snijders (2001) para o caso de modelos TRIP não paramétricos.

O artigo está organizado em cinco seções. Na seção 2 é apresentada uma caracterização dos modelos TRIP introduzindo aspectos preliminares da modelagem da resposta policotômica. Na seção 3 apresenta-se uma taxonomia dos modelos TRIP, seus casos particulares e as relações entre eles. Na seção 4 é apresentada uma aplicação baseada no uso de um modelo TRIP a uma escala de avaliação de mobile banking proposta por Puschel, Mazzon e Hernandez (2010), ilustrando o uso de um software específico para implementar a maioria destes modelos. A aplicação corresponde ao uso do modelo de resposta graduada para o estudo de uma escala de atitudes frente ao uso de mobile banking. Finalmente, a seção 5 apresenta a discussão e implicações dos resultados do estudo efetuado.

## 2. Caracterização dos modelos TRIP

### 2.1. Possíveis formatos de itens policotômicos

Consideremos o interesse de um pesquisador em avaliar atitudes e comportamentos dos consumidores em relação ao serviço de *mobile banking*. Imaginemos ainda diferentes formatos para mensuração de itens de um questionário, como os apresentados na figura a seguir.

<p>Exemplo 1.</p> <p>Item: Usar o <i>mobile banking</i> para fazer transferências bancárias é uma boa idéia.</p> <p>Categorias de resposta:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>a) Discorda muito</li><li>b) Discorda pouco</li><li>c) Nem concorda nem discorda</li><li>d) Concorda pouco</li><li>e) Concorda muito</li></ul>	<p>Exemplo 2.</p> <p>Item: Escreva e explique três atributos que caracterizam o <i>mobile banking</i> para um consumidor.</p> <p>Categorias de resposta:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>a) Não escreveu nenhum</li><li>b) Escreveu um atributo</li><li>c) Escreveu dois atributos</li><li>d) Escreveu três atributos</li></ul>
<p>Exemplo 3.</p> <p>Item: Realizar uma transferência bancária usando <i>mobile banking</i>.</p> <p>Categorias de resposta:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>a) Não faz nada</li><li>b) Entra na plataforma virtual mas não consegue realizar a transação</li><li>c) Realiza a transação mas não consegue confirmar o resultado</li><li>d) Realiza a transação corretamente</li></ul>	<p>Exemplo 4.</p> <p>Item: Qualificação do uso pelo consumidor do <i>mobile banking</i>.</p> <p>Categorias de resposta:</p> <ul style="list-style-type: none"><li>a) Insuficiente</li><li>b) Regular</li><li>c) Boa</li><li>d) Excelente</li></ul>

Figura 1. Exemplos de itens policotômicos de pesquisa sobre *mobile banking*

Embora todos os itens sejam focados a indagar o uso de *mobile banking* entre as pessoas, eles têm aspectos em comum como também têm aspectos diferenciados. Por exemplo, todos os itens da figura 1 apresentam respostas em mais de duas categorias ordenadas embora esse ordenamento não seja da mesma forma. Assim, no item 1 e 4, as categorias são fixas e exaustivas, mas no item 1 as categorias são estabelecidas pelo

pesquisador (nos estudos variam, em geral, de 5 a 9 categorias). Por outro lado, nos itens 2, 3 e 4, as categorias correspondem a fases parciais da solução do problema estabelecido no item e não podem ser variadas pelo pesquisador.

Estes tipos de formatos de categorias de itens são frequentes em pesquisa de avaliação e são denominados na literatura como itens policotômicos. Embora estes itens possam ser dicotomizados, a preferência por itens policotômicos frente a itens dicotômicos está baseada, segundo Van der Ark (2001), nos seguintes aspectos: a) o fato de poucos itens policotômicos serem necessários para obter o mesmo grau de fidedignidade (confiabilidade); b) alguns traços serem mais fáceis de ser medidos em escalas graduais; c) para algumas variáveis, respostas aos itens são mais bem expressas em uma escala ordinal. No caso dos itens apresentados, é fácil ver as vantagens das respostas ordinais policotômicas ao invés de usar respostas dicotômicas. Nos itens policotômicos, pode-se pensar que passar de uma categoria a outra superior supõe uma etapa maior (assim, por exemplo, nos itens apresentados, passar da categoria "a" à categoria "b" significa completar a primeira etapa). Deste modo, pensar em categorias ou etapas é equivalente, sendo que se o número de etapas é  $m$  o número de categorias é  $m + 1$ .

Analisando com maior cuidado as diferentes etapas dos itens policotômicos apresentados, nem sempre é possível pensar que as etapas são equivalentes ou igualmente espaçadas. Por exemplo, no item 3, não é claro que completar a etapa 1 (passar da categoria "a" à categoria "b") corresponde ao mesmo esforço que se precisa para completar a etapa 3 (passar da categoria "c" à "d"). Mas, no caso do item 2 isso é possível de sustentar. A suposição principal é que um processo cognitivo em etapas e ordenado é caracterizado através de um escore crescente, onde o escore da etapa é atingido se o avaliado completou satisfatoriamente até dita etapa e não falhou na etapa seguinte.

## **2.2. TRIP e logitos de passo**

Os modelos da teoria de resposta ao item adotam dois axiomas fundamentais segundo a visão de Pasquali (2009): a) o desempenho do sujeito numa tarefa (item do teste) se explica em função de um conjunto de fatores ou traços latentes (aptidões,

habilidades, etc.). O desempenho é o efeito e os traços latentes são as causas; b) a relação entre o desempenho na tarefa e o conjunto dos traços latentes pode ser descrita por uma equação monotônica crescente, chamada de curva característica do item (CCI). Esse autor argumenta que na TRI o pesquisador apresenta ao examinado um estímulo ou uma série de estímulos (tais como, por exemplo, itens de um teste ou itens motivadores da escolha de uma marca de produto) e ele responde aos mesmos. A partir das respostas dadas pelo sujeito, isto é, analisando as suas respostas aos itens específicos, pode-se inferir sobre o traço latente do examinado, hipotetizando-se múltiplas relações entre as respostas observadas deste sujeito com o nível do seu traço latente. Estas relações podem ser expressas através de uma equação matemática que descreve a forma da função que estas relações assumem.

Os modelos TRIP expressam as probabilidades de acerto para diferentes categorias baseadas em parâmetros relativos às categorias e a uma variável latente que expressa a propriedade que está sendo medida no item. Um acerto é considerado quando a pessoa escolhe uma alternativa qualificada numa categoria específica de resposta dentre as diferentes categorias de resposta disponíveis para o item.

Nos estudos de marketing é usual a inclusão de questões que contêm itens policotômicos que têm diferentes categorias de resposta e que são aplicados a um conjunto de consumidores. Denote como  $j = 1, \dots, I$  os itens do teste ou questionário considerado, e como  $i = 1, \dots, n$  as pessoas pesquisadas com o teste de tamanho  $I$ , e seja  $h_j = 0, 1, \dots, m_j$  as categorias de resposta possíveis do item  $j$ , que podem ser diferentes para cada item do teste. Sem perda de generalidade, vamos supor que essas categorias estão ordenadas em ordem crescente tal que o total de categorias de resposta é  $m$ , omitindo o subscrito  $j$ .

Considerando os itens da figura 1 sobre *mobile banking*, é razoável pensar que as diferentes categorias de resposta dos itens policotômicos têm diferentes probabilidades de ser registradas por um mesmo avaliado, mas que a soma dessas probabilidades é 1. Para modelar isto, denotemos essas probabilidades por  $P_{ijh}$  com os subscritos  $i, j$  e  $h$  para o avaliado, o item e as categorias, respectivamente, e por  $\sum_{h=0}^{m_j} P_{ijh} = 1$  quando somadas as probabilidades das diferentes categorias do item  $j$  para um mesmo avaliado



*i*. Considere também  $P^+_{ijh} = \sum_h^{m_j} P_{ijh}$  que denota as probabilidades acumuladas a partir da categoria *h* (à direita de *h*). Veja a tabela 1, baseada no item do exemplo 3, para um melhor entendimento da notação.

**Tabela 1. Notação para as probabilidades individuais e acumuladas à direita das categorias de resposta a um item *i* respondido por avaliado *j* usando o item do exemplo 3um**

Categorias de resposta	Não faz nada	Entra na plataforma virtual mas não consegue realizar a transação	Realiza a transação mas não consegue confirmar o resultado	Realiza a transação corretamente
<i>H</i>	0	1	2	3
Probabilidades individuais	$P_{ij0}$	$P_{ij1}$	$P_{ij2}$	$P_{ij3}$
Probabilidades acumuladas à direita	$P^+_{ij0} = P_{ij0} + P_{ij1} + P_{ij2} + P_{ij3} = 1$	$P^+_{ij1} = P_{ij1} + P_{ij2} + P_{ij3}$	$P^+_{ij2} = P_{ij2} + P_{ij3}$	$P^+_{ij3} = P_{ij3}$

Expressou-se que como as  $m+1$  categorias de resposta estão ordenadas, as diferenças entre duas categorias adjacentes podem ser pensadas como etapas do item. Assim um item com  $m+1$  categorias têm  $m$  etapas. Por causa disso o modelo pode enfatizar as etapas das categorias ou de maneira geral as respostas ordinais indistintamente (Agresti, 1990). Nesta forma, é possível re-escrever as probabilidades em função das etapas. Assim, para uma etapa *k*, pode-se escrever:

$$P_{ijk} = P_{ijh} \quad P^+_{ijk} = P^+_{ijh} \quad k = 1, \dots, m_j \quad \sum_{k=1}^{m_j} P_{ijk} = 1$$

É claro na representação da tabela 1, que cada etapa (ou categoria) do item pode ser pensada de maneira binária com duas possibilidades ("acertar" a etapa ou "falhar" a etapa, vale dizer, registrar ou não a categoria como resposta). Assim, para descrever os itens policotômicos, pode-se dividi-los em dicotomias que mantêm a natureza ordinal das categorias de resposta. Essas dicotomias são chamadas etapas de item (*item steps*).

Na TRIP, como será apresentado, três diferentes definições da etapa de um item podem ser predominantes: a acumulativa, a de crédito parcial e a condicional (Hemker, 2001). Cada definição está baseada nas diferentes maneiras de dividir o escore de um

item policotômico. Assim, para a acumulativa se considera  $P_{ijk}^+$ , para a de crédito parcial

se toma  $\frac{P_{ijk}}{P_{ijk-1} + P_{ijk}}$  e para a condicional é considerado  $\frac{P_{ijk}^+}{P_{ijk-1}^+}$ .

Para as três definições a probabilidade de passar de uma etapa do item a outra pode ser escrita como uma função de um traço latente unidimensional  $U$ , onde tais funções são chamadas funções de resposta da etapa de um item (FREI). Consequentemente, existem três definições de FREI e cada definição leva a diferentes famílias de modelos TRIP, tal como será apresentado na seção 2.4.

Segundo Agresti (1990) e Van der Ark (2001), pode-se estabelecer três tipos de logitos de transição da  $k$ -ésima resposta ordinal do item  $j$  da pessoa  $i$  ( $L_{ijk}$ ) aplicando o logito para as diferentes FREI. Assim, para o caso de FREI acumulativa seu logito é chamado de acumulativo, para a FREI de crédito parcial seu logito é chamado de categorias adjacentes, e para o caso da FREI condicional seu logito é chamado de razão-continuação. Isto é mostrado na tabela 2 a seguir:

**Tabela 2. Função de resposta e logitos de passo de uma etapa de um item policotômico (com respostas ordinais)**

Funções de resposta de uma etapa do item (FREI) (HEMKER, 2001)	Logitos de passo de uma etapa do item ( $L_{ijk}$ ) (VAN DER ARK, 2001)
<i>Acumulativo:</i> $P_{ijk}^+$	<i>Acumulativo:</i> $L_{ijk} = \text{logito}(P_{ijk}^+) = \log\left(\frac{P_{ijk}^+}{1 - P_{ijk}^+}\right)$
<i>De crédito parcial:</i> $\frac{P_{ijk}}{P_{ijk-1} + P_{ijk}}$	<i>De categorias adjacentes:</i> $L_{ijk} = \text{logito}\left(\frac{P_{ijk}}{P_{ijk-1} + P_{ijk}}\right) = \log\left(\frac{P_{ijk}}{P_{ijk-1}}\right)$
<i>Condicional:</i> $\frac{P_{ijk}^+}{P_{ijk-1}^+}$	<i>De razão-continuação:</i> $L_{ijk} = \text{logito}\left(\frac{P_{ijk}^+}{P_{ijk-1}^+}\right) = \log\left(\frac{P_{ijk}^+}{P_{ijk-1}^+ - P_{ijk}^+}\right)$

em que dada uma proporção  $p$  o logito é uma função definida como  $\text{logito}(p) = \frac{p}{1-p}$ .

### 2.3. Modelagem da TRIP

Na modelagem da TRIP, as probabilidades  $P_{ijk}$  introduzidas acima, são probabilidades condicionais. Para isso, são considerados dois tipos de variáveis aleatórias: uma variável aleatória observável  $x$ , e uma variável aleatória não observável ou latente  $u$ . Na literatura psicométrica é frequente denotar  $u$  por  $\theta$  para enfatizar que se trata de um parâmetro do modelo referido aos respondentes. Consideramos ainda mais apropriado o *status* de variável aleatória, conforme apresentado por Bartholomew e Knoop (1999).

A variável  $x$  toma diferentes valores categóricos ordenados, em que  $x=0$  significa que o avaliado não completou nenhuma etapa e se situa na primeira categoria de resposta do item, enquanto  $x=m_i$  expressa que o avaliado completou todas as etapas da tarefa e se situa na última categoria de resposta do item.

A variável latente  $u$  é suposta contínua, pois se estabeleceu a suposição do continuum dada por Pfanzagl, Baumann e Huber (1971), ou seja, que o item mede uma propriedade do construto (educacional, psicológico, ou de qualquer área de pesquisa) que as pessoas possuem em diferentes graus mas que não é observável diretamente senão sob a forma de  $x$ , que neste caso toma valores ordenados finitos, vale dizer, como uma variável policotômica. Este construto é considerado aqui, de modo geral, como uma habilidade ou traço latente.

As probabilidades condicionais individuais  $P_{ijk}$  são supostas monotonicamente crescentes a respeito da variável latente  $u$ , o que equivale dizer ao maior valor da variável latente, maior probabilidade de obter uma determinada categoria e, portanto, são da forma  $P_{ijh} = P_{ik}(u_i) = P(x_{ij} = h / u_i)$ , expressando a probabilidade que o avaliado  $i$  responda corretamente à etapa  $k$  do item  $i$  dada sua habilidade latente  $u$ . Por outro lado, as probabilidades acumuladas à direita são da forma  $P_{ijh}^+ = P(x_{ij} \geq h / u_i)$ , e expressam a probabilidade de que o avaliado  $i$  responda corretamente à etapa  $k$  ou uma superior do item  $j$  dada sua habilidade latente  $u_i$ . As probabilidades  $P_{ijk}$  correspondem à componente aleatória **observável** do modelo TRIP.

Considere também a seguinte componente  $\eta_i = a_{jk} (u_i - b_{jk})$  que corresponde a uma função linear relativa à habilidade latente  $u_i$  em que  $a_{jk}$  é um parâmetro de intercepto da resposta ordinal  $k$  do item  $j$ , e  $b_{jk}$  é um parâmetro de localização da resposta ordinal  $k$  do item  $j$  definido sobre toda a reta real. Esta componente é uma componente aleatória **latente** do modelo da TRIP.

Finalmente, a componente  $L_{ijk}$  definida acima está baseada na probabilidade  $P_{ijk}$ , denotando que  $L_{ijk} = g(P_{ijk})$  onde  $g$  é uma função monótona não decrescente e diferenciável com respeito a  $P_{ijk}$  e, portanto, de  $u_i$ . Ao se conectar a componente aleatória observável do modelo com a componente aleatória latente, tem-se que  $L_{ijk} = g(P_{ijk}) = \eta_i = a_{jk} (u_i - b_{jk})$ , considerada uma função de **ligação** do modelo da TRIP que relaciona as componentes aleatórias observáveis e latentes.

Desta maneira pode-se escrever que o modelo da TRIP relaciona uma componente aleatória dada pelas probabilidades das respostas ordinais com uma componente linear a respeito de uma variável latente através de uma função de ligação, que neste caso são diferentes logitos que podem ser estabelecidos. Os modelos que satisfazem estas características são denominados modelos da TRIP logísticos paramétricos. Os modelos não paramétricos não estabelecem a componente aleatória latente da forma linear, mas mantêm a idéia que a componente aleatória latente expressa pela função de ligação é monótona não decrescente e diferenciável com respeito a  $u_i$  sem estabelecer uma forma funcional específica.

Esta caracterização também pode ser usada para o caso dicotômico ( $h=2$  ou  $k=1$  nas expressões anteriores e, portanto, este subscrito pode ser omitido). A componente aleatória observável é dada por  $P_{ij} = P_j(u_i) = P(x_{ij} = 1 / u_i)$ , a componente aleatória latente é  $\eta_i = a_j (u_i - b_j)$ , e a função de ligação  $L_{ij} = g(P_{ij})$  é o logito de  $P_{ij}$ .

Assim, tem-se que  $g(P_{ij}) = a_j (u_i - b_j)$  corresponde ao **logito**  $(P_{ijk}) = \log\left(\frac{P_{ijk}}{1 - P_{ijk}}\right) = a_j (u_i - b_j)$  ou da forma conhecida  $P_{ij} = \frac{\exp[a_j (u_i - b_j)]}{1 + \exp[a_j (u_i - b_j)]} = \frac{1}{1 + \exp[a_j (u_i - b_j)]^{-1}}$

que é o modelo logístico de 2 parâmetros em que a expressão anterior é chamada CCI.

Da mesma forma, para o caso policotômico, diferentes modelos da TRIP podem ser definidos relacionando os logitos acumulativos, de razão-continuação e de categorias adjacentes dados na tabela 2 com a função linear da variável latente  $u_i$ . O uso dos logitos é justificado pois preservam a relação monótona crescente com respeito à habilidade ou traço latente, o que equivale dizer, a maior habilidade latente com maior chance de resposta correta.

### 3. Modelos da TRIP

#### 3.1. Famílias de modelos TRIP paramétricos

Considerando os três tipos de funções de ligação dadas pelos logitos para respostas ordinais na seção 2.2, bem como as componentes aleatórias observável e latente definidas na seção 2.3, pode-se estabelecer as seguintes famílias de modelos de resposta ao item policotômicos paramétricos:

a) Modelo de Resposta Gradual (*Graded Response Model*): GRM

Este modelo foi originalmente derivado por Samejima (1969). Considerando o logito acumulativo como função de ligação da resposta ordinal com a componente aleatória latente, tem-se:

$$\text{logito}(P_{ijk}^+) = \log\left(\frac{P_{ijk}^+}{1 - P_{ijk}^+}\right) = a_{jk}(u_i - b_{jk}) \quad \text{para } k=1, \dots, m_j, ; i=1, \dots, n \text{ e } j=1, \dots, l$$

Alternativamente:

$$P_{ijk}^+ = \frac{\exp[a_{jk}(u_i - b_{jk})]}{1 + \exp[a_{jk}(u_i - b_{jk})]} = \frac{1}{1 + \exp[-a_{jk}(u_i - b_{jk})]} \quad \text{para } k=1, \dots, m_j, ; i=1, \dots, n \text{ e } j=1, \dots, l$$

Este modelo é considerado um "modelo de diferenças", pois claramente a probabilidade de um avaliado  $j$  receber um escore  $k$  no item  $i$  é dada por  $P_{ijk} = P_{ijk}^+ - P_{ijk+1}^+$  (Andrade, Tavares & Valle, 2000; Samejima, 1997). Por conveniência de notação é considerada  $P_{ij0}^+ = 1$  e  $P_{ijm+1}^+ = 0$ . Além disso, os parâmetros de localização devem satisfazer  $b_{j1} < b_{j2} < \dots < b_{jm}$  (Samejima, 1969), ou seja, devem estar perfeitamente ordenados.

A FREI que se considera na família de modelos de resposta gradual (GRM) é a FREI acumulada. Assume-se uma ordem estrita nas etapas do item. Se uma etapa não é atingida (acontece uma falha), todas as etapas seguintes não são atingidas; se uma etapa é atingida (ou passada), as etapas anteriores também são passadas. Isto implica que todos os possíveis escores dizem alguma coisa acerca de todas as outras etapas. As pessoas que passam a etapa  $k$  de um item  $j$  têm um escore ao menos igual a  $k$ . Pessoas com escore do item menores que  $k$  falham na etapa  $k$ ; se uma pessoa tem escore do item igual a  $k$ , ela passa os primeiros  $k$  itens e falha nos seguintes  $m-k$  itens. Estes tipos de modelos são chamados modelos acumulativos (Moleenar, 1983; Samejima, 1969). Eles também são conhecidos como modelos de probabilidade acumulados (Mellenberg, 1995), modelos de diferença (Thissen & Steinberg, 1986), modelos de Thurstone (Andrich, 1995) e modelos de gradação (Van Engelenburg, 1997).

No caso do item do exemplo 1 da escala de mobile banking apresentada na figura 1, as categorias têm uma ordem estrita que pode ser numerada de 1 a 5. É claro que o avaliado precisa analisar todas as categorias antes de escolher uma, e se, por exemplo, ele escolhe a categoria "indistinto" significa que ele não optou por nenhuma das categorias prévias nem por nenhuma das categorias seguintes; portanto, seu escore deve ser 3. Observe que os outros itens apresentados não satisfazem estas características.

#### b) Modelo de Crédito Parcial (Partial Credit Models): PCM

Este modelo foi originalmente derivado por Masters (1982). Considerando o logito de categorias adjacentes como função de ligação da resposta ordinal com a componente aleatória latente, tem-se:

$$L_{ijk} = \text{logito} \left( \frac{P_{ijk}}{P_{ijk-1} + P_{ijk}} \right) = \log \left( \frac{P_{ijk}}{P_{ijk-1}} \right) = a_{jk} (u_i - b_{jk})$$

para  $k=1, \dots, m_i$  ;  $i=1, \dots, n$  e  $j=1, \dots, l$

Alternativamente:

$$\frac{P_{ijk}}{P_{ijk-1} + P_{ijk}} = \frac{\exp[a_{jk}(u_i - b_{jk})]}{1 + \exp[a_{jk}(u_i - b_{jk})]} = \frac{1}{1 + \exp[a_{jk}(u_i - b_{jk})]}^{-1}$$

Este modelo é também denominado de "modelo dividido pelo total", pois:

$$P_{ijk} = \frac{\exp \left[ \sum_{v=0}^k a_{jv}(u_i - b_{iv}) \right]}{\sum_{v=0}^m \exp \left[ \sum_{u=0}^v a_{ju}(u_i - b_{iu}) \right]} \quad \text{para } k=0, \dots, m_i ; i=1, \dots, l \text{ e } j=1, \dots, n$$

considerando-se, por conveniência de notação,  $b_{i0} \equiv 0$ .

A FREI que se considera na família de modelos de resposta de crédito parcial (PCM) é a FREI de crédito parcial. Implica que só as pessoas que passam a etapa  $k$  do item são as que têm escores  $k$ , e só as que falham a etapa  $k$  são as que têm escores  $k-1$ . Só os escores  $k$  e  $k-1$  têm influência direta na FREI, e não a avaliação de todas as etapas, como na FREI acumulativa. Saliente-se que, indiretamente, todas as etapas anteriores e seguintes influem em cada etapa, o que complica a interpretação da dificuldade da etapa do item (Moleenar, 1983; Verhelst & Verstralen, 1997). Esses tipos de modelos são chamados modelos de crédito parcial (Moleenar, 1983). Eles também são conhecidos como modelos de categorias adjacentes (Mellenberg, 1995), modelos de Rasch (Andrich, 1995), ou modelos de partição (Van Engelenburg, 1997).

No caso dos itens dos exemplos 2 e 3 da escala de avaliação de *mobile banking* descrita na figura 1, o avaliado constrói sua solução independentemente de conhecer todas as etapas do problema. É o avaliador que qualifica sua resposta de acordo com o critério definido nas categorias do item, que neste caso pode ser de 0 a 3. O avaliador atribui os escores dependendo se cada etapa é apresentada na solução do avaliado. Para cada etapa da solução presente, o avaliador atribui um "crédito" ou escore igual a 1. Se o avaliador não encontra a etapa (falha), então o avaliado fica com os "créditos

acumulados" ou o escore até a etapa prévia. Observe que aqui o avaliado pode tentar todas as etapas, mas o escore que ele consegue depende de quantas etapas ele completa corretamente.

c) Modelo Sequencial (*Sequential Models*): SM

Este modelo, originalmente proposto por Tutz (1990), considera o logito de razão-continuação como função de ligação da resposta ordinal com a componente aleatória latente, ou seja:

$$L_{ijk} = \text{logito} \left( \frac{P_{ijk}^+}{P_{ijk-1}^+} \right) = \log \left( \frac{P_{ijk}^+}{P_{ijk-1}^+ - P_{ijk}^+} \right) = a_{jk} (u_i - b_{jk})$$

para  $k=1, \dots, m_i$ ;  $i=1, \dots, n$  e  $j=1, \dots, l$

Alternativamente:

$$\frac{P_{ijk}^+}{P_{ijk-1}^+} = \frac{\exp[a_{jk}(u_i - b_{jk})]}{1 + \exp[a_{jk}(u_i - b_{jk})]}$$

Este modelo pode ser expresso (Akkermans, 1998) por:

$$P_{ijk} = \prod_{r=1}^k \frac{P_{ijr}^+}{P_{ijr-1}^+} - \prod_{r=1}^{k+1} \frac{P_{ijr}^+}{P_{ijr-1}^+} = \left\{ \prod_{r=1}^k \frac{\exp[a_{jr}(u_i - b_{jr})]}{1 + \exp[a_{jr}(u_i - b_{jr})]} \right\} \left[ \frac{1}{\exp[a_{j(k+1)}(u_i - b_{j(k+1)})]} \right],$$

$k=0, 1, \dots, m$

considerando-se, por conveniência de notação:

$$\prod_{r=1}^0 \frac{P_{ijr}^+}{P_{ijr-1}^+} \equiv 1 \quad \text{e} \quad \prod_{r=1}^{m+1} \frac{P_{ijr}^+}{P_{ijr-1}^+} \equiv 0$$

A FREI que se considera na família de modelos de resposta sequencial (SM) é a FREI condicional. Também se assume uma ordem estrita das etapas do item como no caso da família GRM. Em contraste com a FREI acumulada, falhar numa etapa aqui implica que as etapas seguintes do item nunca são consideradas, isto é, falhou na passagem. Passar uma etapa do item implica que a etapa seguinte é considerada. Assim, a etapa do item  $k$  é atingida por todas as pessoas com um escore igual ou maior



que  $k$ , e não atingidas pelas pessoas com escores iguais a  $k-1$ ; as únicas pessoas que falham nesta etapa do item são aquelas que têm um escore total igual a  $k-1$ . Pessoas com escores do item baixos não tentam na etapa  $k$  do item, e assim não há falha. Isto significa que só escores iguais ou maiores que  $k-1$  dizem algo a respeito da etapa  $k$ , a qual considera que o número de escores que têm implicações na etapa do item depende da etapa do item. Estes tipos de modelos são chamados modelos condicionais (Moleenar, 1983) ou modelos sequenciais (Van Engelenburg, 1997).

No caso do item 4, semelhante ao item 1, as etapas do problema são conhecidas pelo avaliado e, também semelhante ao item 3, é atribuído um escore com o qual se consegue calcular a etapa correspondente. É o avaliador que qualifica sua resposta de acordo com o critério definido nas categorias do item que, neste caso, foi de 0 a 3. O avaliador atribui os escores dependendo se cada etapa é apresentada na solução do avaliado. Observe que a diferença do item 3 em relação ao item 4 é que neste o avaliador não precisa observar a solução das etapas seguintes, pois claramente essas não estão presentes. Se acontecer uma falha numa etapa o processo cessa e as etapas seguintes não são consideradas.

#### d) Modelos particulares da TRIP paramétricos

As famílias de modelos TRIP são consideradas restritas quando são impostas restrições para os parâmetros de item de intercepto ( $a_{jk}$ ) e de localização ( $b_{jk}$ ) em  $\eta_i$  que leva a casos particulares da componente aleatória latente e, portanto, a modelos particulares na família de modelos da TRIP paramétricos. Tem-se assim:

Restrições no parâmetro de intercepto:

1. Os modelos com  $a_{jk}$  diferentes e, portanto,  $\eta_i = a_{jk}(u_i - b_{jk})$ , são chamados modelos com parâmetros de intercepto não restrito e são denotados como modelos  $2P(jk)$ .
2. Os modelos com  $a_{jk} = a_j$  para todo  $i$ , portanto,  $\eta_i = a_j(u_i - b_{jk})$ , são chamados modelos com parâmetros de intercepto restrito ao item e são denotados como modelos  $2P(j)$ .
3. Os modelos com  $a_{jk} = a_k$  para todo  $k$ , portanto,  $\eta_i = a_k(u_i - b_{jk})$ , são chamados modelos com parâmetros de intercepto restrito à resposta ordinal e são denotados como modelos  $2P(k)$ .

4. Os modelos com  $a_{jk}=1$  para todo  $k$  e todo  $i$ , portanto,  $\eta_i=(u_i-b_{jk})$ , são chamados modelos sem parâmetros de intercepto ou modelos de Rasch, sendo denotados como modelos 1P.

Restrições no parâmetro de localização:

5. O parâmetro  $b_{jk}$  pode ser descomposto em dois componentes aditivos,  $b_{jk} = \delta_j + \tau_k$ , em que  $\delta_j$  é um componente do item, e  $\tau_k$  é um componente da resposta ordinal, de modo que  $\sum_{k=1}^m \tau_k = 0$ . Esta decomposição na componente sistemática define modelos de escala gradual (*rating scale*) e, nesse caso, os modelos podem ser denotados adicionando -R.

Como exemplo da notação introduzida, o modelo denotado por 1P-SM-R corresponde ao modelo com um parâmetro (sem parâmetro de intercepto) da família sequencial que admite uma escala gradual por decomposição do parâmetro de localização. O modelo denotado por 2P(jk)-PCM corresponde ao modelo com dois parâmetros sem restrições no parâmetro de intercepto da família de crédito parcial.

De acordo com as restrições dos parâmetros de intercepto e de localização parece possível considerar até oito modelos particulares ( $4 \times 2$ ) para cada uma das três famílias de modelos policotômicos. No entanto, esses 24 modelos paramétricos não existem. Os modelos que existem (Van der Ark, 2001) aparecem na tabela a seguir:

**Tabela 3. Modelos particulares na família de modelos paramétricos policotômicos, segundo Van der Ark (2001)**

Restrições para o parâmetro de intercepto	Famílias de modelos paramétricos					
	Resposta Gradual		Crédito Parcial		Seqüencial	
	Não admite escala gradual	Admite escala gradual	Não admite escala gradual	Admite escala gradual	Não admite escala gradual	Admite escala gradual
Não restrito	-	-	-	-	2P(jk)-SM	-
Restrito ao item	2P(j)-GRM Samejima (1969)	-	2P(j)-PCM Muraki (1992)	-	2P(j)-SM	-
Restrito à resposta ordinal	-	-	2P(k)-PCM	-	2P(k)-SM	-
Sem parâmetro de intercepto	1P-GRM	1P-GRM-R	1P-PCM Masters (1982)	1P-PCM-R Andrich (1978)	1P-SM Tutz (1990)	1P-SM-R Tutz (1990)

Existem diferentes fatos que explicam porque alguns modelos não existem. Por exemplo, para a família de resposta gradual, o parâmetro de intercepto não pode mudar sobre as respostas ordinais do mesmo item e, assim, modelos 2P(jk) e 2P(k) não existem (Mellenberg, 1995).

O modelo de aceleração de Samejima (*Acceleration Models*): AM

Este modelo não é um modelo logístico (Samejima, 1995) e é definido por:

$$\frac{P_{ijk}^{+e}}{P_{ijk-1}^+} = \left\{ \frac{\exp(a_{jk}(u_i - b_{jk}))}{1 + \exp(a_{jk}(u_i - b_{jk}))} \right\}^{\varepsilon_j}$$

em que  $P_{ijk}^{+e} = P(x_{ij} > k \mid u_j)$  e  $\varepsilon_j \geq 0$

Alternativamente:

$$\text{logito} \left( \frac{P_{ijk}^{+e}}{P_{ijk}^+} \right)^{1/\varepsilon_j} = a_{jk}(u_i - b_{jk})$$

Observe que se  $\varepsilon_j = 1$ , tem-se o modelo sequencial SM. Saliente-se que  $\varepsilon_j$  é considerado como um novo parâmetro de item e também a expressão acima é considerada uma nova CCI de tipo assimétrico. Para o caso dicotômico veja o trabalho de Bolfarine e Bazán (2010).

### 3.2 Modelos TRIP não paramétricos

Considerando as funções de ligação definidas na tabela 2 e sem assumir que a componente aleatória latente tem a forma linear dada na seção 2.3, mas mantendo que as funções de ligação implicam que as probabilidades  $P_{ijk}$  são não decrescentes em  $u_i$ , pode-se ter modelos não paramétricos alternativos para cada família de modelos de resposta policotômicos paramétricos. Esses modelos correspondem ao modelo de resposta gradual não paramétrico (NP-GRM), o modelo de resposta de crédito parcial não paramétrico (NP-PCM) e o modelo sequencial não paramétrico (NP-SM).

Boomsma, A., Van Duijn, M.A.J., & Snijders

A área de pesquisa de modelos não paramétricos tem sido bastante desenvolvida ultimamente (Boomsma, Van Duijn & Snijders, 2001; Hardouin, Bonnaud-Antignac & Sébille, 2011; Sijtsma & Molenaar, 2002; Xu & Douglas, 2006;). Van der Ark (2001) considera alguns modelos NP-GRM que assumem diferentes propriedades a mais para os logitos acumulativos:

- a) os logitos não se interceptam (modelo DMM);
- b) os logitos são invariavelmente ordenados para todos os itens, ou seja, satisfazem  $\text{logito}(P_{ijk}^+) < \text{logito}(P_{ljk}^+)$  para todo j e todo k (modelo ISOP);
- c) os logitos não se interceptam e são invariavelmente ordenados para todos os itens (Modelo SDMM).

O modelo DMM ou de dupla monotonicidade é apresentado em Moolenaar (1997); o modelo SDMM ou de dupla monotonicidade forte é apresentado por Sijtsma e Hemker (1998), enquanto o modelo ISOP ou probabilístico ordinal isotônico é apresentado em Junker (1998) e Scheiblechner (1995).

a) Relações entre os modelos TRI policotômicos

A figura 2, devida a Van der Ark (2001), apresenta uma estrutura hierárquica entre diversos modelos TRIP. As provas desses resultados estão referidas em Van der Ark (1999).

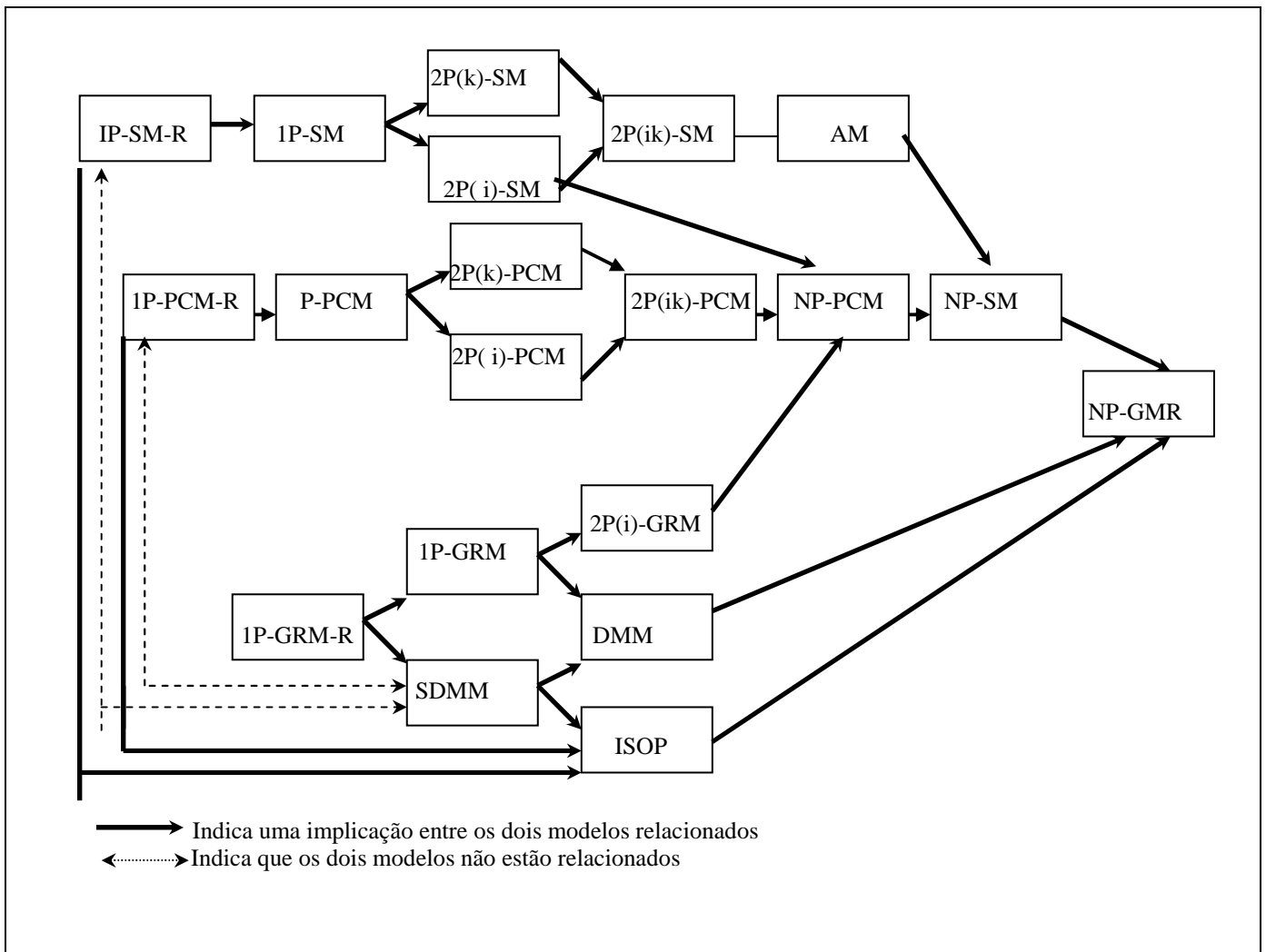


Figura 2. Estrutura hierárquica de modelos TRI policotômicos, segundo Van der Ark (2001)

Uma flecha sólida retrata uma implicação, enquanto uma flecha de duas vias pontilhada indica que dois modelos não estão relacionados – salientando-se que a existência de um não implica a exclusão do outro. Os modelos 1P-PCM-R, 1P-SM-R e 1P-GRM-R são os modelos mais restritivos. O modelo NP-GMR é o modelo mais geral. A importância dos resultados apresentados na figura 2 é que quando se pesquisa sobre modelos alternativos para analisar dados deve-se começar com o modelo mais restritivo e, se ele não se ajusta, trata-se o próximo modelo na ordem hierárquica.

O fato das famílias de modelos de resposta gradual, de crédito parcial e sequencial aparecerem separadas significa que os parâmetros de item que pertencem ao logito de uma classe de modelos não podem ser escritos como função dos parâmetros das outras famílias (Mellenbergh, 1995; Thissen & Steinberg, 1986, para as famílias PCM e GRM). Isto também deve ser considerado no momento de decidir as análises a serem implementadas para um conjunto particular de dados policotômicos. Antes de considerar outra família deve-se optar por outro modelo dentro da mesma família com outra especificação de parâmetros.

#### **4. Aplicação da TRI a uma escala de atitudes em Marketing**

O estudo de *mobile banking* de Puschel, Mazzon e Hernandez (2010) apresenta uma escala composta de 14 dimensões. Para o propósito da presente ilustração, escolheu-se a dimensão de atitudes em que os itens são mostrados na tabela 4. Os dados correspondem a 333 não usuários de *mobile banking*, mas que possuem ao menos uma conta bancária e serviço de celular, obtidos de uma amostra intencional. Para detalhes, veja Puschel, Mazzon e Hernandez (2010).

Para estes dados, ajustou-se um modelo de resposta gradual considerando o pacote *ltm* em R (Rizopoulos, 2006). Para uma discussão dos *softwares* que podem ser usados na estimação de modelos TRIP veja o Apêndice. O *ltm* foi usado para ajustar o modelo de resposta graduada de Samejima (1969). A decisão para o uso deste modelo está baseada no tipo de itens considerados e os logitos de passo que podem ser assumidos para estes itens. A mostra de itens aparece na tabela 4 e corresponde a quatro itens de uma escala do tipo Likert de concordância com base em seis posições, anteriormente apresentada.

Estimativas dos parâmetros dos itens da escala foram obtidas considerando a teoria clássica dos testes (TCT) e TRI. Considerando a TCT foram obtidas a média (dificuldade clássica) e desvio padrão das respostas policotômicas, as correlações item/total (índice de discriminação). Considerando o modelo GRM da TRI foi obtida a dificuldade e discriminação dos itens e a função de informação dos itens e da escala, a qual proporciona a quantidade de informação em cada ponto do traço latente. Por fim,

uma análise fatorial exploratória (AFE) considerando o eixo principal, residual mínimo e mínimos quadrados ponderados foi obtida por meio do pacote *psych* de R.

Tabela 4. Itens, estatísticas de itens baseada na TCT, resultados da análise fatorial exploratória (AFE) e estimativas dos parâmetros dos itens usado o modelo GRM da TRI

Itens	TCT			Análise Fatorial	TRI					
	Média dos escores	Desvio Padrão dos scores	CITC	FL	b1	b2	b3	b4	b5	A
Usar o mobile banking para fazer transferências bancárias é uma boa idéia	4.1	1.5	0.70	0.77	-1.625	-1.024	-0.553	0.188	1.084	2.746
Utilizar o mobile banking é uma idéia inteligente	4.7	1.3	0.74	0.81	-2.154	-1.746	-1.065	-0.269	0.671	3.042
Gosto da idéia de utilizar o mobile banking	4.1	1.5	0.82	0.91	-1.411	-0.944	-0.565	0.210	0.955	4.251
É/Seria muito divertido utilizar o mobile banking	3.6	1.6	0.63	0.69	-1.370	-0.860	-0.163	0.708	1.561	2.002

*Nota: CITC = correlação item total corrigido; FL = carga fatorial; bj = parâmetro de dificuldade; a = parâmetro de discriminação.*

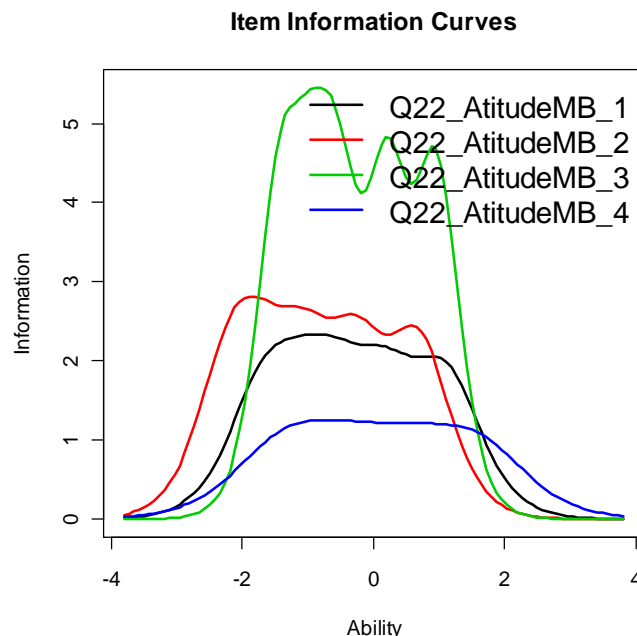
Baseados na AFE identificou-se a soma de quadrados de cargas (2,56), a qual representa a proporção de variância explicada de .64. O teste de hipótese indica que um fator é suficiente para explicar os itens analisados. Os graus de liberdade para o modelo nulo é 6 e a função objetivo foi de 2,07 com qui-quadrado de 683,71. Os graus de liberdade do modelo foram 2 e a função objetivo foi 0,01. Adicionalmente a RMSR foi de 0,01. O Tucker Lewis Index of Factoring Reliability foi 0,996 e o índice RMSEA foi 0,036. A correlação dos escores com o fator foi de 0,95. Desta forma temos uma escala de atitudes frente ao *mobile banking* que comportasse de modo unidimensional considerando os quatro itens apresentados.

Embora não exista um critério de corte para o parâmetro de discriminação *a*, Zickar, Russel, Smith, Bohle e Tilley (2002) sugerem que todos os parâmetros que são maiores que 1 indicam uma discriminação aceitável entre pessoas. Hafsteinsson, Donovan e Breland (2007) sugerem que quando existem poucos itens em uma escala

(foram usadas três escalas de 8, 8 e 5 itens), um padrão alto de qualidade do item pode requerer um valor 2,0 ou mais, para que se atinja uma alta qualidade de medição. Na escala utilizada como exemplo encontrou-se nos quatro itens de atitudes valores acima de 2, atingindo-se portanto estes padrões de qualidade.

Os valores do parâmetro de discriminação a da TRI, mostram grande diferenciação na indicação da qualidade do item em relação ao expresso pelo índice de discriminação na TCT. Por exemplo, o item 1 e 2 tem CIRC 0,70 e 0,74, com os valores do parâmetro a sendo 2,746 e 3,042, respectivamente. Informação adicional é proporcionada pelas funções de informação dos itens na figura 3, a qual revela que a maioria dos itens provê uma boa informação para os valores do traço latente; no entanto, o item 4 (É/Seria muito divertido utilizar o *mobile banking*) apresenta menos quantidade de informação em relação aos valores comuns do traço latente: atitude frente ao *móbile banking*.

Por considerando o sinal dos valores dos parâmetros b identificou se as “dificuldades” de passo entre as categorias de resposta. Assim no caso do item 2 (Utilizar o mobile banking é uma idéia inteligente) é mais fácil atingir a ultima categoria (concordância total) do que nos outros itens. O contrário acontece no item 4.



**Figura 3. Função de informação dos itens para os quatro itens que compõem a escala de atitudes frente ao *mobile banking*.**



## 5. Discussão dos resultados

A taxonomia apresentada das famílias dos modelos de resposta ao item policotômicos na base dos tipos de logitos ou as FREI para as etapas do item, é uma caracterização semelhante a dos modelos lineares generalizados. Moustaki e Knott (2000) introduzem o nome de modelos de traços latentes generalizados para o caso em que a distribuição da variável aleatória manifesta pertence à família exponencial. Eles denominam também a componente aleatória latente como componente sistemática na tradição dos modelos lineares generalizados, sem notar que uma distribuição aleatória é considerada para a variável latente  $e$ , portanto, não são valores conhecidos. Note-se que os logitos introduzidos são função de ligação  $e$ , desse modo, outras funções de ligação que preservem a monotonia não decrescente em relação à variável latente são possíveis de serem introduzidas (Hemker, 2001). Veja, por exemplo, os trabalhos de Bazán (2005) e Bolfarine e Bazán (2010).

Esta caracterização pode ser útil no desenvolvimento da inferência estatística dos modelos TRI policotômicos. Métodos de estimação, propriedades assintóticas, análises de pressupostos e testes de hipótese relativos a estes modelos poderão utilizar a notação introduzida neste artigo. Outros aspectos da taxonomia apresentada que foram explorados referem-se à correspondência da escala com a realidade psicológica medida, a interpretação dos parâmetros para cada tipo de família e as propriedades de medição que caracterizam estas três famílias.

Uma comparação teórica dos três tipos de famílias de itens policotômicos leva a pensar no paralelismo da medida psicológica com a realidade (Samejima, 1995), isto é, se o tipo de itens ou de regras de formação de escore pode ser aplicado à situação a ser modelada. Duas classificações similares, mas que têm diferentes ênfases, foram introduzidas para avaliar essa questão. A primeira focaliza na classificação dos modelos por meio das características da tarefa (Van Engelenburg, 1997); a segunda classificação focaliza o procedimento ou regras de formação de escore (Akkermans, 1998). Destaque-se ainda a possibilidade das tarefas dos itens serem diferentes se as regras de formação de escore forem diferentes, e vice-versa, além da existência de uma relação direta entre as duas. Ambas as classificações estão baseadas em várias questões.

A primeira questão refere-se ao processo de etapas: são as etapas do item simultâneas ou separadas? As etapas são tomadas simultaneamente se o avaliado atribui um juízo completo numa escala (características da tarefa), ou se o avaliado é considerado num juízo completo (regra de escore). Este processo ou tipo de itens é descrito pela família de modelos com logitos acumulados.

No caso em que as etapas dentro de um item são tomadas separadamente, o segundo critério de classificação é a regra de continuação, com a seguinte questão relacionada: a formação de escore ou a tarefa é continuada depois de falhar a etapa, ou a formação do escore ou tarefa é parada depois de ser falhada? Se o sujeito tenta todas as etapas e o escore é a soma de escores dessas tarefas separadas (binárias), isto é chamado formação de escore paralela. Este tipo de processo do item é descrito pela família de modelos com logitos de crédito parcial.

A terceira questão relaciona-se ao caso da formação de escore ser sequencial, isto é, se o processo ou regra de parar é aplicado quando acontece uma falha. Nesta situação, a questão é a seguinte: é o ordenamento das etapas completamente fixo ou não? Unicamente se uma formação de escore fixa é assumida, os modelos da família de logitos sequências descrevem estes itens (ou o processo). Se não existe ordenamento fixo das etapas, não existe um tipo específico de modelos relativos ao processo. Registre-se que se a reversibilidade acontece, as etapas podem ser invertidas, o que significa que a ordem das etapas não é completamente fixa. Assim, o resultado da reversibilidade não acontece para os modelos sequenciais em concordância com o pressuposto de ordenamento fixo das etapas para este tipo de modelo.

Conclui-se, assim, que é fundamental conhecer as características que distinguem os modelos de modo a serem consideradas pelos construtores de itens e pelos avaliados que atribuem o escore de uma tarefa.

Com respeito à interpretação dos parâmetros dos modelos considere-se, por exemplo, que em alguns testes, falhar na  $k$ -ésima etapa leva a um escore de  $k-1$ . Passar a  $k$ -ésima etapa significa que a categoria  $k+1$  pode ser tentada, levando a um escore de ao menos  $k$ . Tais itens com escore sequencial podem ser analisados pelos modelos TRI-SM. Nessas situações, os parâmetros de localização podem ser interpretados como parâmetros de dificuldade para cada etapa do item. Isto é, se os avaliados com valor  $U$  menor ou igual que  $\beta_{ik}$  têm uma probabilidade de passar o item maior que 0,5. Por outro

lado, existe uma literatura recente sobre a taxonomia dos modelos TRI que usa as propriedades de medição (Van der Ark, 2001). Esta literatura deve ser revisada para complementar os resultados apresentados neste artigo, entre elas Sijtsma e Hemker (2000) e Van der Ark (2001).

A hierarquização dos modelos da teoria de resposta ao item policotômicos, dada pela figura 2, pode ser usada na avaliação dos modelos para um mesmo conjunto de dados identificando o modelo seguinte na hierarquia. Esta estratégia pode ser usada para a verificação dos modelos a serem implementados pelos avaliadores. Na base desta caracterização podem ser revisados os distintos *softwares* disponíveis para identificar os modelos que estes estimam e as re-parametrizações que usam.

A aplicação apresentada mostra o potencial de uso destes modelos no campo do marketing. Áreas de conhecimento como saúde, educação, psicologia e análise política, dentre outras, também podem ser beneficiadas com a discussão a respeito do uso de diferentes modelos TRIP, tanto do ponto de vista da construção de escalas considerando os diferentes formatos de itens discutidos, assim como quanto à decisão do modelo estatístico a ser usado para os itens considerados. Ao respeito veja por exemplo o trabalho de De Jong, Steenkamp, Fox e Baumgartner (2008) e De Jong, Steenkamp e Veldkamp (2009).

Finalmente, os modelos da TRI descritos aqui têm sido de natureza cumulativa. Eles sugerem que níveis mais elevados do traço latente (ie, níveis mais elevados de capacidade, maiores níveis de satisfação) deve, com toda a probabilidade, levar a maior pontuação do item, que, por sua vez, deve levar a maior pontuação total do teste. No entanto, este não é freqüentemente o caso para algumas respostas graduadas de concordância (ou seja, discordo totalmente, discordo, Discordo ligeiramente, Ligeiramente Concordo, concordo, concordo totalmente). Essas respostas podem ser consistentes com um modelo diferente - um modelo referido como modelos ordinais de desdobramento ou não acumulativos (*unfolding models* em inglês). Para maiores detalhes veja por exemplo Roberts, Donoghue e Laughlin (2000), Samartini (2006) e Bortolotti (2010).

## Referências bibliográficas

- Agresti, A. (1990). *Categorical data analysis*. New York: Wiley.
- Akkermans, W. (1998). *Studies on statistical models for polytomous items*. Unpublished doctoral dissertation. The Netherlands: Twente University.
- Andrade, D. F., Tavares, H. R., & Valle, R. C. (2000). *Introdução a Teoria da Resposta ao Item: Conceitos e Aplicações*. In: 14°. SIMPÓSIO DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA. Caxambu.
- Andrich, D. (1978). A rating formulation for ordered response categories. *Psychometrika*, 43, 561-73.
- Andrich, D. (1995). Models for measurement, precision, and the nondichotomization of graded responses. *Psychometrika*, 60, 7-26.
- Azevedo, C. L. N. (2003). *Métodos de estimação na teoria de resposta ao item*. Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Baker, F. B., & Kim, S. H. (2004). *Item response theory: parameter estimation techniques (2a ed.)*. New York: Marcel Dekker.
- Balasubramanian, S., & Kamakura, W. A. (1989). Measuring consumer attitudes toward the marketplace with tailored interviews. *Journal of Marketing Research*, 26, 311-26.
- Bartholomew, D. J., & Knoot, M. (1999). *Latent Variable Models and Factor Analysis*. Great Britain: Arnold.
- Bazán, J. L. (2005). *Uma família de modelos de resposta ao item normal assimétrica*. Tese de Doutorado, Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Bechtel, G. G. (1985). Generalizing the Rash Model for consumer rating scales. *Marketing Science*, 4, 62-73.
- Bolfarine, H.; Bazán, J. L. (2010). Bayesian estimation of the logistic positive exponent irt model. *Journal of Educational Behavioral Statistics*, 35(6), 693-713.
- Boomsma, A., Van Duijn, M.A.J., & Snijders, T.A.B. (Ed.). (2001). *Essays on item response theory*. New York: Springer-Verlag.
- Bortolotti, S.L.V. (2010). *Resistência à Mudança Organizacional: Medida de Avaliação por Meio da Teoria da Resposta ao Item*, Tese de doutorado, Departamento de Engenharia da Produção, UFSC, Florianópolis.
- Childs, R. A., & Chen, W. H. (1999). Obtaining Comparable Item Response Parameter Estimates in MULTILOG and PARSCALE for Two Polytomous IRT Models. *Applied Psychological Measurement*, 23, 371-79.
- Cook, K. F., Taylor, P. W., Dodd, B. G., Teal, C. R., & Mchorney, C. A. (2007). Evidence-based practice for equating health status items: sample size and IRT model. *J Appl Meas*, 8(2), 175-189.
- Curtis, S. M. (2010). BUGS Code for Item Response Theory. *Journal of Statistical Software*, 36. Recuperado em 20 de janeiro de 2011, de <http://www.jstatsoft.org/v36/c01/paper>
- De Jong, M. G., Steenkamp, J., & Fox, J. P. (2007). Relaxing measurement invariance in cross-national consumer research using a hierarchical IRT model. *Journal of Consumer Research*, 24(2), 260-278.
- De Jong, M. G., Steenkamp, J., Fox, J. & Baumgartner, H. (2008). Using item response theory to measure extreme response style in marketing research: A global investigation. *Journal of Marketing Research*, 45, 104-115.

- De Jong, M. G., Steenkamp, J. & Veldkamp, B. (2009). A model for the construction of country-specific yet internationally comparable short-form marketing scales. *Marketing Science*, 28(4), 674-689.
- Franses, P. H., & Paap, R. (2001). *Quantitative Models in Marketing Research*. Cambridge: University Press.
- Hafsteinsson, L. G., Donovan, J. J., & Breland, B. T. (2007). An item response theory examination of two popular goal orientation measures. *Educational and Psychological Measurement*, 67, 719-39.
- Hair, J. F. JR, Black, W. C., Babin, B. J., Anderson, R. E., & Tatham, R. L. (2006). *Multivariate Data Analysis*. (6a ed.). Upper Saddle River: Prentice-Hall.
- Hardouin J.B., Bonnaud-Antignac A., & Sébille V. (2011). Non parametric Item Response Theory using Stata. *The Stata Journal*, 11(1), 30-51.
- Heinen, T. (1996). *Latent class and discrete latent trait models: Similarities and differences*. Thousand Oaks CA: Sage.
- Hemker, B. T. (2001). Reversibility revisited and other comparison of tree types of polytomous IRT models. In: A. Boomsma, M. A. J. Van Duijn, & T. A. B. Snijders (Ed.). *Essays on item response theory* (pp. 277-96). New York: Springer-Verlag.
- Junker, B. W. (1998). Some remarks on Scheiblenchner's treatment of ISOP models. *Psychometrika*, 63, 73-85.
- Malhotra, N. K. (2011). *Pesquisa de Marketing: Foco na Decisão*. (3a ed.). São Paulo: Pearson.
- Masters, G. (1982). A Rasch model for partial credit scoring. *Psychometrika*, 47, 149-74.
- Mazzon, J. A. (1981). *Avaliação do Programa de Alimentação do Trabalhador sob o Conceito de Marketing Social*. Tese de Doutorado, Faculdade de Economia Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Mellenberg, G. H. (1995). Conceptual notes on models for discrete polytomous item responses. *Applied Psychological Measurement*, 19, 91-100.
- Moolenaar, I. W. (1983). *Item steps* (Heymans Bulletins HB-83-630-EX). Groningen, The Netherlands: University of Groningen.
- Moolenaar, I. W. (1997). Nonparametric models for polytomous responses. In: W. J. Van der Linden, & R. K. Hambleton (Ed). *Handbook of Modern Item Response Theory* (pp. 369-380). New York: Springer.
- Moustaki, I., & Knott, M. (2000). Generalized Latent Trait Models. *Psychometrika*, 65, 391-411.
- Muraki, E. (1992). A generalized partial credit model: Application of an EM algorithm. *Applied Psychological Measurement*, 16, 159-77.
- Muraki, E., & Bock, R. D. (1996). *PARSCALE: IRT based test scoring and item analysis for graded open-ended exercises and performance task*. Version 3. Chicago: Scientific Software.
- Omar, M. A., Ghariebeh, B., Salazar, A., & Saito, K. (2007). IRT and UVF fluorescence for marine coatings inspection. *International Journal of nondestructive testing and evaluation*, 40, 62-70.
- Pasquali, L. (2009). *Psicometria: teoria dos testes na psicologia e na educação* (3a ed.). Petrópolis, RJ: Vozes.
- Pfanzagl, J., Baumann, V., & Huber, H. (1971). *Theory of Measurement*. Physica-Verl.
- Pousttchi, K., & Schurig, M. (2004). Assessment of today's mobile banking applications from the view of customer requirements. In: 37th ANNUAL HAWAII INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEM SCIENCES. HAWAII (pp. 1-10). Hawaii.

- Puschel, J., Mazzon, J. A., & Hernandez, J. M. (2010). Mobile banking: proposition of an integrated adoption intention framework. *International Journal of Bank Marketing*, v. 28, n. 5, p. 389-409.
- Rao, C. R., & Sinharay, S. (2006). *Handbook of Statistics 26: Psychometrics*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier.
- Rizopoulos, D. (2006). ltm: An R package for latent variable modeling and item response theory analyses. *Journal of Statistical Software*, 17, 1–25.
- Roberts, J. S., Donoghue, J. R., & Laughlin, J. E. (2000). A general item response theory model for unfolding unidimensional polytomous responses. *Applied Psychological Measurement*, 24, 3-32.
- Samartini, A. L. S. (2006). *Modelos com Variáveis Latentes Aplicados à Mensuração de Importância de Atributos*, Tese de doutorado, Escola de Administração de Empresas de São Paulo.
- Samejima, F. (1969). Estimation of latent ability using a response pattern of graded scores. *Psychometric Monograph*, 17.
- Samejima, F. (1995). Acceleration model in the heterogeneous case of the general graded response model. *Psychometrika*, 60, 549-72.
- Samejima, F. (1997). Graded Response Model. In: W. J. Van der Linden, & R. K. Hambleton (Ed.). *Handbook of Modern Item Response Theory* (pp. 85-100). New York: Springer.
- Scheiblechner, H. (1995). Isotonic ordinal probabilistic models (ISOP). *Psychometrika*, 60, 281-304.
- Sijtsma, K., & Hemker, B. T. (1998). Nonparametric polytomous IRT models for invariant item ordering, with results for parametric models. *Psychometrika*, 63, 183-200.
- Sijtsma, K., & Hemker, B. T. (2000). A taxonomy of IRT models for ordering persons and items using simple sum scores. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 25, 391-415.
- Sijtsma, K., & Molenaar, I. W. (2002). *Introduction to nonparametric item response theory*. Thousand Oaks, CA: Sage.
- Singh, J., Howell, R. D., & Rhoads, G. K. (1990). Adaptive designs for likert-type data: an approach for implementing marketing surveys. *Journal of Marketing Research*, 27(3), 304-21.
- Singh, J. (2004). Tackling measurement problems with Item Response Theory: principles, characteristics, and assessment, with an illustrative example. *Journal of Business Research*, 57, 184-208.
- Tay, L., Diener, E., Drasgow, F., & Vermunt, J. K. (2011). Multilevel mixed-measurement IRT analysis: An explication and application to self-reported emotions across the world. *Organizational Research Methods*, 14, 177-207.
- Tezza, R., Bornia, A. C., & Andrade, D. F. (2011). Measuring web usability using item response theory: Principles, features and opportunities. *Interacting with Computers*, 23(2), 167-75.
- Thissen, D., & Steinberg, L. (1986). A taxonomy of item response models. *Psychometrika*, 51, 567-77.
- Thissen, D. (1991). *MULTILOG user's guide: Multiple, categorical item analysis and test scoring using item response theory*. Version 6.0. Chicago: Scientific Software.
- Tutz, G. (1990). Sequential item response models with an ordered response. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, 43(1), 39-55.
- Van der Ark, L. A. (1999). A reference card for the relationships between IRT models for ordered polytomous items and some relevant properties. The Netherlands: Tilburg University. Working Paper No. 99.10.02.

- Van der Ark, L. A. (2001). Relationships and properties of polytomous item response theory models. *Applied Psychological Measurement*, 25, 273-82.
- Van der Linden, W. J., & Hambleton, R. K. (Ed). (1997). *Handbook of moderns item response theory*. New York: Springer.
- Van Engelenburg, G. (1997). On psychometric models for polytomous items with ordered categories within the framework of item response theory. Unpublished doctoral dissertation. The Netherlands: University of Amsterdam.
- Verhelst, N. D., & Verstralen, H. H. F. M. (1997). Modeling sums of binary responses by the partial credit model. *Measurement and Research Department Reports 97-7*. Arnhem: CITO.
- Vermunt, J. K. (1997). EM: A general program for the analysis of categorical data. Manuscrito não publicado. The Netherlands: Tilburg University. Recuperado em 17 de dezembro de 2005, de <http://www.kub.nl/faculteiten/fsw/organisatie/departementen/mto/software2.html>
- Vermunt, J. K. (2001). The use of restricted latent class models for defining and testing nonparametric and parametric item response theory models. *Applied Psychological Measurement*, 25, 283-94.
- Von Davier, M. (1996). WINMIRA VI.68: A program system for analysis with the Rasch model, with the latent class analysis and with the mixed Rasch model (Software manual). Recuperado em 17 de dezembro de 2005, de <http://www.winmira.von-davier.de>
- Xu, X., & Douglas, J. (2006). Computerized adaptive testing under nonparametric IRT models. *Psychometrika*, 71,(1), 121-137.
- Zickar, M. J., RusseL, S. S., Smith, C. S., Bohle, P., & Tilley, A. J. (2002). Evaluating two morningness scales with item response theory. *Personality and Individual Differences*, 33, 11–24.

### Abstract

It has been common works published in Management and particularly in Marketing using statistical techniques applied to ordinal scales assuming that these were interval. In order to provide a suitable alternative to this practice, it is presented in this article, a taxonomy of different models of item response theory polychotomous (TRIP) based on the types of logit step from one stage of the item (response functions). The emphasis of the presentation is introductory and the proposed methodology is illustrated with an application considering a range of attitudes of consumers towards banking services, with respect to mobile banking, an area of recent interest in Marketing. This example also illustrates the use of software to implement most of these models.

**Keywords:** Item Response Theory; Polychotomous Items; Marketing.

## **Apêndice. Softwares para estimar os modelos de resposta ao item policotômicos**

Modelos TRI paramétricos são frequentemente estimados usando máxima verossimilhança marginal, na qual quadraturas normais são usadas para resolver as integrais que aparecem na função de verossimilhança. Isto implicitamente assume uma discretização da variável latente (Vermunt, 2001).

Assim, para estimar os parâmetros dos modelos de resposta gradual 2P-GRM(i) e de crédito parcial generalizado 2P(ik)-PCM e, portanto, dos modelos hierarquicamente mais restritivos, podem ser usados os softwares MULTILOG (Thissen, 1991) e PARSCALE (Muraki & Bock, 1996), os quais são parametrizados diferentemente.

Em Childs e Chen (1999) são descritos os procedimentos para obter estimadores comparáveis desses modelos considerados ambos os programas. Tanto MULTILOG como PARSCALE usam o algoritmo EM usando como default uma distribuição normal padrão para a variável latente  $u$ ; contudo, o número de pontos de quadratura e os critérios de convergência diferem significativamente nos dois programas (Childs & Chen, 1999). Não se dispõe de muitos softwares para estimar os modelos sequenciais; no entanto, o WINMIRA (Von Davier, 1996) pode estimar o modelo 1P-SM.

Um programa que pode ser usado com propósitos acadêmicos para o caso de poucos itens é o LEM (Vermunt, 1997), o qual permite tratar a maioria dos modelos apresentados neste artigo. O programa usa a existência de similaridade entre o modelo de classe latente e a teoria de resposta ao item (Heinen, 1996). Modelos de classe latente de ordem restrita podem ser usados para estimar modelos de resposta ao item policotômicos não paramétricos, enquanto modelos de classe latente log-lineares podem ser usados para estimar modelos de resposta ao item policotômicos paramétricos (Vermunt, 2001). O procedimento de estimação usa o método de máxima verossimilhança e um algoritmo EM é implementado. Recentemente, modelos policotômicos podem ser obtidos em alguns aplicativos no programa R. Um número especial do Journal of Statistical Software foi dedicado à Psicometria utilizando o software R.

Podem ainda ser citados os pacotes *erm* e *ltm*. O primeiro lida com modelos tipo Rasch, ou seja, o modelo de escala de classificação (RSM) e sua extensão linear (LRSM), o modelo de crédito parcial (PCM) e sua extensão linear (LPCM) usando estimativa ML condicional. O pacote *ltm* também ajusta o modelo simples RM. Além disso, implementa funções para estimar os modelos de Birnbaum de dois e três parâmetros com base numa abordagem de máxima verossimilhança marginal, bem como o modelo de resposta graduada para dados policotômicos.



Além disso, sob a perspectiva bayesiana, podem ser citados os pacotes MCMCpack e pscl. Finalmente o programa WinBUGS tem se mostrado uma excelente ferramenta para implementar diversos modelos de resposta ao item como discutidos aqui sob a perspectiva bayesiana, tal como implementado em Curtis (2010).