Universidade de São Paulo
ICMC - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação
Professora: Regilene Delazari dos Santos Oliveira
Alunos:

Álgebra Linear - SMA0304
Atividade Bônus 3

30/08/2023

Para as questões a seguir, considere a seguinte definição:

Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial V. Dizemos que $U+W$ é uma soma direta de U e W se $U \cap W = \{0\}$.

Questão 1. Sejam $V = \mathbb{R}^2$ e

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 3y = 0\}$$
$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\}$$

Pergunta-se:

1. Os subconjuntos U e W são subespaços de V? Justifique.
2. A soma $U + W$ é direta?

Solução: Observe que U e W são retas em $\mathbb{R}^2$ que passam pela origem. De modo análogo ao caso dos planos de $\mathbb{R}^3$ (Questão 3, Atividade 2), esses subconjuntos são subespaços vetoriais. Alternativamente, temos também que U e W são os subespaços vetoriais gerados pelos vetores $(1,1)$ e $(1,-2/3)$, respectivamente. Verifiquemos agora a interseção dessas retas. Se $(x_0, y_0) \in U \cap W$, então as seguintes equações devem valer:

$$2x_0 + 3y_0 = 0$$
$$x_0 - y_0 = 0$$

Da segunda equação, $x_0 = y_0$ e da primeira, $2x_0 = -3x_0$. Isso implica que $x_0 = y_0 = 0$. Afirmamos que $U + W = \mathbb{R}^2$. Para isto, devemos mostrar que qualquer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é uma soma de um elemento de U e um elemento de W. Mas os elementos de U e W são da forma (α, α) e $(\beta, -\frac{2}{3}\beta)$, respectivamente, onde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Assim, buscamos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(x_0, y_0) = (\alpha, \alpha) + (\beta, -\frac{2}{3}\beta).$$

Comparando as coordenadas, chegamos ao seguinte sistema:

$$\alpha + \beta = x_0$$
$$\alpha - \frac{2}{3}\beta = y_0$$

Escrevendo matricialmente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Como o determinante da matrix associada é diferente de 0, esse sistema possui solução (única) para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e concluímos.

$\blacksquare$

Questão 2. Sejam $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\}$ e $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = 0\}$.

1. Justifique o porquê de U e V serem subespaços de $\mathbb{R}^3$.
2. Mostre que $U + V = \mathbb{R}^3$. A soma é direta? Justifique.

Solução: O conjunto U é um plano que passa pela origem, cuja equação é $x - z = 0$ e V representa uma reta, a saber, o eixo z. Novamente pela questão 3 da Atividade 2 e pelo fato de que o eixo z pode ser identificado como o subespaço gerado pelo vetor $(0,0,1)$, temos que tais subconjuntos são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$. Note que os elementos de U e V são da forma (x,y,x) e $(0,0,z)$, respectivamente. Para cada $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, podemos decompô-lo do seguinte modo:

$$(x,y,z) = (x,y,x) + (0,0,z-x),$$

o que mostra que $U + V = \mathbb{R}^3$. Se $(x_0, y_0, z_0) \in U \cap V$, então $x_0 = z_0$ e $x_0 = y_0 = 0$ e concluímos que $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ e, portanto, a soma é direta.

$\blacksquare$

Questão 3. Encontre o subespaço $U \cap W$, onde $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} ; a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{pmatrix} ; c, d \in \mathbb{R} \right\}$. Qual subconjunto finito S gera esse subespaço?

Solução: Temos que $U \cap W = \left\{ A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} ; x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}, A \in U \text{ e } A \in W \right\}$. Como $A \in U$, temos $x_2 = 0 = x_3$ e como $A \in W$, temos $x_1 = 0 = x_3$, daí, precisamos ter na interseção de U e W que $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Logo,

$$U \cap W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_4 \end{pmatrix} ; x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_4 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; x_4 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Podemos escrever também da forma

$$U \cap W = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

e assim vemos que $U \cap W$ é gerado pela matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\blacksquare$