TEORIA DOS MODELOS: TRABALHO 1

Instruções: Entregar até o dia 12 de setembro, na aula, ou por e-mail (até as 23h59min). Identifique-se nas folhas de sua solução. As sugestões são apenas para ajudar a quem não tenha ideia de como começar o exercício.

Exercício 1 (Filtros e Ultrafiltros)**.** No que segue, $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$.

(a) (1,5 pontos) Seja F o filtro de Fréchet sobre ω. Mostre que F é um filtro regular (ou seja, mostre que existem $X_n \in F$, $n \in \omega$, tais que para todo $k \in \omega$, o conjunto $\{n \in \omega : k \in X_n\}$ é finito).

(b) (1,0 ponto) Mostre que todo ultrafiltro não principal U sobre $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ é regular.

(c) (1,5 pontos) Mostre que um filtro U será um ultrafiltro sobre um conjunto (infinito) I, se e somente se, $X \cup Y \in U$ implicar que ou $X \in U$, ou $Y \in U$.

Exercício 2 (Compacidade)**.** (3,0 pontos) Um conjunto linearmmente ordenado $(X, \leq)$ é *bem ordenado*, se para todo $Y \subseteq X$, $Y \neq \varnothing$, existe $\min Y$. Mostre que não existe conjunto de sentenças T, tal que todo modelo de T seja um conjunto (infinito) bem ordenado. [Sugestão: olhe para um ultraproduto de ω, ou um argumento de compacidade, com novos símbolos de constantes. Observe que se X for bem ordenado, não existe sequência infinita estritamente decrescente em X.]

Exercício 3 (Consequência Lógica)**.** Sejam ϕ e ψ duas fórmulas e Γ um conjunto de fórmulas.

(a) (1,5 pontos) Mostre que se $\Gamma, \phi \models \psi$ e $\Gamma, (\neg\phi) \models \psi$, então $\Gamma \models \psi$. [Sugestão: todo modelo de Γ, ou é modelo de ϕ, ou de $(\neg\phi)$.]

(b) (1,5 pontos) Mostre que se $\Gamma \models \psi$, então existe $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ finito, tal que $\Gamma_0 \models \psi$. [Sugestão: argumente por contradição e compacidade.]
