Funções Diferenciáveis:

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x,y)$, e $(x_0, y_0) \in D$. Dizemos que f é diferenciável no ponto (x_0, y_0) se existem números reais α e β tais que

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0)}{\|(x,y) - (x_0, y_0\|} = 0$$

Neste caso, o plano definido por $z = f(x_0, y_0) + \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0)$ denomina-se plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Fazendo-se $\begin{cases} x - x_0 = h \\ y - y_0 = k \end{cases}$

obtemos uma escrita equivalente para expressar o limite acima:

$$\lim_{(h,k)\longrightarrow(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \alpha h - \beta k}{\|(h,k)\|} = 0.$$

Proposição: Se $z = f(x,y)$ é diferenciável em (x_0, y_0) então f é contínua neste ponto, e, além disso,

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ e } \beta = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Exemplos:

(1) A função constante $f(x,y) = c$, é diferenciável.

(2) As funções $z = x$ e $z = y$ são diferenciáveis.

Teorema: Sejam $f, g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em $(x_0, y_0, y_0) \in D$. Então:

(i) $f + g$ é diferenciável em (x_0, y_0).

(ii) se $c \in \mathbb{R}$ então cf é diferenciável.

(iii) fg é diferenciável.

(iv) se $g(x_0, y_0) \neq 0$ então $\dfrac{f}{g}$ é diferenciável em (x_0, y_0).

Teorema: Seja $z = f(x,y)$, $\forall\ (x,y) \in D$. Se existem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ em D e são funções contínuas então f é diferenciável em D.