MAT-315 - Introdução à Análise (Real) - 2023

3ª Lista de exercícios

Sequências

1. Dê exemplos, caso existam de sequências:

   (a) Limitada mas não convergente;
   (b) Monótona, mas não convergente;
   (c) Convergente mas não limitada;
   (d) Estacionária mas não constante;
   (e) Divergente mas que possua subsequência convergente;
   (f) Monótona, limitada superiormente mas não convergente;
   (g) De termos negativos e cujo limite não seja negativo.

2. Prove, pela definição, que as sequências abaixo são convergentes encontrando seus limites.
   (a) $(\frac{5}{n})_{n\in\mathbb{N}}$; (b) $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}}$; (c) $(\frac{2n}{n+2})_{n\in\mathbb{N}}$;

3. Uma sequência é chamada de estacionária se é constante a partir de um certo índice $n \in \mathbb{N}$. Prove que tais sequências são convergentes.

4. Prove o teorema da conservação do sinal quando $a_n < 0$.

5. Mostre que se (a_n) converge e $a_n \leq b$ para todo n, então $\lim a_n \leq b$. *Sugestão: Suponha por absurdo que* $\lim a_n > b$ *e use um argumento parecido com o da conservação do sinal para chegar a uma contradição.*
   Mostre com um exemplo que mesmo tendo $a_n < b$ não é possível garantir que $\lim a_n < b$.

6. Prove que se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $a \in \mathbb{R}$, então a sequência $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $|a|$. *Sugestão: Use a desigualdade triangular ao contrário.* Dê um contra-exemplo para mostrar que a recíproca é falsa, salvo quando $a = 0$.

7. Prove que a sequência de termo geral $a_n = \frac{1}{n^2+\operatorname{sen} n+\pi^n}$ converge para zero. *Sugestão: Use o Teorema do Confronto.*

8. Prove que uma sequência decrescente e limitada inferiormente converge para o ínfimo do conjunto de seus termos.

9. Mostre que a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$

converge. *Sugestão: Mostre que é crescente e limitada superiormente*

10. Encontre pelo menos três subsequências convergentes da sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11. Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ duas sequências tais que $a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que se $a_n \to +\infty$ então $b_n \to +\infty$. Mostre também que se $b_n \to -\infty$ então $a_n \to -\infty$. Mostre que nada se pode concluir se $b_n \to +\infty$ ou se $a_n \to -\infty$.

12. Se $a_n \to +\infty$, mostre que $b_n = \frac{1}{a_n} \to 0$. Se $a_n \to 0$, o que se pode dizer sobre $b_n = \frac{1}{a_n}$? Muito cuidado nessa hora!!!

13. Mostre que toda subsequência de uma sequência limitada é também limitada.

14. Exiba uma sequência de termos distintos que possua uma subsequência convergindo para 1 e outra convergindo para -2.

15. Prove que toda sequência de Cauchy é limitada.

16. Mostre que se uma sequência de Cauchy possui uma subsequência convergente, então é convergente. Mostre que o mesmo não vale para sequências que não são de Cauchy.