Teste 1-
SME0800-Probabilidade I

Aluno:

N^0 USP:

1. Seis amigos desejam viajar de trem composta por três vagões. Se cada um escolhe seu vagão em forma aleatória. Qual e a probabilidade que estejam distribuídos nos três vagões?

2. Um dado equilibrado é lançado n vezes. Determinar a probabilidade de que haja pelo menos um seis nos n lançamentos.

3. Dado um espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$, seja $B_1 \ldots, B_n \in \mathcal{F}$ mutuamente exclusivos e $B = \cup_{i=1}^{n} B_i$. Suponha que $P[B_j] > 0$ e $P(A|B_j) = p$ para $j = 1, \ldots, n$. Mostre que $P[A|B] = p$.

4. Dado um espaço de probabilidade $(S, \mathcal{F}, P)$, seja A, $B \in \mathcal{F}$ tal que, $P[A] = 0,5$ e $P(A \cup B) = 0.7$: (a) Determine $P[B]$ se A e B são mutuamente exclusivos. (B) Determine $P[B]$ se $P[A|B] = 0,5$.

Solução:

1. Cada um dos 6 amigos tem 3 formas diferentes de escolher um vagão. Assim o número de elementos que tem o espaço amostral é: $\#S = 3^6 = 729$.

   Seja o evento B: "os seis amigos estão distribuídos nos 3 vagões". Isto pode ser feito particionando as 6 pessoas em 3 grupos. As diferentes partições dos seis em grupos de 3 são:

   (i) Haja 4 pessoas em um grupo e 1 em cada grupo restante. Isto é feito de $\binom{6}{4,1,1}$. Nesta partição os grupos podem ser colocados nos vagões de $\binom{3}{2,1} = 3$ formas diferentes. Assim, o número total de formas de situar as pessoas nessa condição é $3\binom{6}{4,1,1} = 90$ formas diferentes.

   (ii) Haja 1,2 e 3 em cada vagão respectivamente, o qual é realizado de $\binom{6}{3,2,1}$ formas diferentes. Nessa partição os grupos podem ser situados nos vagões de 3! formas diferentes. Portanto, o número total de formas de situar as 6 pessoas satisfazendo é $3!\binom{6}{3,2,1} = 360$ formas.

   (i) Haja 2 pessoas em cada grupo, isto ocorres $\binom{6}{2,2,2}$ formas. Nessa partição, os grupos se situam nos vagões de uma única forma. Assim, o número total de formas de distribuir as 6 pessoas em grupos de 2 é, $\binom{6}{2,2,2} = 90$ formas.

   De (i), (ii) e (iii) o número de elementos do evento B é $\#B = 90 + 360 + 90 = 540$. A probabilidade do evento B é:

   $$P[B] = \frac{540}{790} = 0,6835.$$

2. O espaço amostral tem a seguinte forma

   $$S = \{(w_1, \ldots, w_n); w_i = 1, 2, \ldots, 6\ , i = 1, \ldots, n\}\,.$$

   O número de elementos do espaço amostral é; $\#S = 6^n$.

   Seja o evento A: "haja pelo menos um 6 nos n lançamentos "e o evento complementar $\bar{A}$: "não haja nenhum 6 nos n lançamentos"

   Da propriedade de probabilidade tem-se $P[A] = 1 - P[\bar{A}]$.

   O evento $\bar{A}$ é composta n-uplas. Assim, no primeiro lançamento há 5 possibilidade de que resulte um número diferente de 6 , no segundo lançamento também é 5, assim sucessivamente no n-ésimo lançamento também é 6. Portanto, pelo princípio da multiplicação o número de elementos do evento $\bar{A}$ é, $\#\bar{A} = \underbrace{5 \times 5\times, \ldots, \times 5}_{nvezes} = 5^n$. Daí a $P[\bar{A}] = \frac{5^n}{6^n}$. Daí tem-se

   $$P[A] = 1 - P[\bar{A}] = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

3. Da definição de probabilidade condicional tem-se

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{P[A \cap (\cup_{i=1}^{n} B_i)]}{P[\cup_{i=1}^{n} B_i]} = \frac{P[\cup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)]}{P[\cup_{i=1}^{n} B_i]}$$

Como os eventos B_is são mutuamente exclusivos os eventos $B_1 \cap A, \ldots, B_n \cap A$ são mutuamente exclusivos. Dai tem-se

$$P[A|B] = \frac{P[\cup_{i=1}^{n} (A \cap B_i)]}{P[\cup_{i=1}^{n} B_i]} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P[A \cap B_i]}{\sum_{i=1}^{n} P[B_i]} = \frac{\sum_{i=1}^{n} P[A|B_i]P[B_i]}{\sum_{i=1}^{n} P[B_i]} = \frac{p\sum_{i=1}^{n} P[B_i]}{\sum_{i=1}^{n} P[B_i]} = p\Box.$$

4.

(4a) Se A e B mutuamente exclusivos, então $A \cap B = \phi$.

$$\begin{aligned} P[A \cup B] &= P[A] + P[B] - P[A \cap B] \\ 0,7 &= 0,5 + P[B] - 0, \Longrightarrow P[B] = 0,2. \end{aligned}$$

(4b) Dos dados tem-sw $P[A \cap B] = P[A|B]P[B] = 0,5P[B]$

$$\begin{aligned} P[A \cup B] &= P[A] + P[B] - P[A \cap B] \\ P[A \cup B] &= P[A] + +P[B] - P[A|B]P[B] \\ 0,7 &= 0,5 + P[B] - 0,5P[B] \Longrightarrow P[B] = 0,4. \end{aligned}$$