Bases

Def. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

(i) $v \in V$ é combinação linear dos vetores $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$ se existem $\alpha_i \in \mathbb{K}$ tal que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$.

(ii) $\mathcal{B} \subset V$ é conjunto gerador de V se todo elemento de V é combinação linear de um nº finito de elementos de $\mathcal{B}$.

(iii) Seja $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Denotamos por $[v_1, \dots, v_n]$ o subconjunto de V formado por todas as combinações lineares de $v_1, \dots, v_n$.

OBS:

(a) Por convenção diremos que o conjunto vazio gera o espaço vetorial nulo $\{\bar{0}\}$.

(b) Todo espaço vetorial é conjunto gerador dele mesmo. Assim todo espaço vetorial possui conjunto gerador.

(c) $[v_1, \dots, v_n]$ é um $\mathbb{K}$ espaço vetorial.

Exemplos.

(a) $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ é um conjunto gerador de $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$. De maneira geral, $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{K}^n$ com $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, é um conj. gerador de $\mathbb{K}^n$ sobre $\mathbb{K}$.

$\uparrow$ k-ésima posição

(b) $\{1, x, \dots, x^n, \dots\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{K})$ é um conjunto gerador de $\mathcal{P}(\mathbb{K})$.

(c) $\{(1,0), (0,1)\}$ é um conjunto gerador para $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$ mas não é um conjunto gerador para $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

(d) $\{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\}$ é conjunto gerador para $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$.

(e) $\{1, \sqrt{2}\}$ é conjunto gerador para $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Em geral um espaço vetorial V possui muitos conjuntos geradores. É importante termos um conjunto gerador que seja o menor possível.

Def. Sejam V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e $\mathcal{B} \subset V$ um subconjunto. Dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente independente (ou l.i.) se $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = 0$ para $v_i \in \mathcal{B}$ e $\alpha_i \in \mathbb{K}$ implica $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$. Caso contrário dizemos que $\mathcal{B}$ é linearmente dependente.

OBS: (a) Por convenção dizemos que vazio é l.i.

(b) Todo conjunto $\mathcal{B}$ contendo o vetor nulo 0 é l.d.

(c) Todo subconjunto formado por um único elemento não nulo em V é um conj. linearmente independente.

(d) Todo subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente.

Exemplos: 1) $\{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{K}^n$ é l.i. em $\mathbb{K}^n$ sobre $\mathbb{K}$.

2) $\{(0,1), (1,1), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ é l.d.

3) $\mathcal{B} = \{(1,0), (i,0), (0,1), (0,i)\} \subset \mathbb{C}^2$.

Se considerarmos $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, $\mathcal{B}$ é l.d. pois

$$\underbrace{i}_{} \cdot (1,0) + \underbrace{(-1)}_{} \cdot (i,0) + 0 \cdot (0,1) + 0 \cdot (0,i) = (0,0).$$

são não nulos

Se considerarmos $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ é l.i.

4) $\{\operatorname{sen} x, \cos x\}$ é l.i. no espaço vetorial das funções contínuas $\mathcal{C}([0,2\pi], \mathbb{R})$.

5) Seja c_0 o $\mathbb{K}$-espaço vetorial das sequências com limite zero em $\mathbb{K}$. Considere a sequência $e_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ que tem 1 na k-ésima posição e zero nas demais. Então $\mathcal{B} = \{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto infinito l.i. em c_0.

Def. Dizemos que $\mathcal{B}$ subconj. de um espaço vetorial V sobre $\mathbb{K}$ é uma base se:

(i) $\mathcal{B}$ é conj. gerador de V.

(ii) $\mathcal{B}$ é l.i.

(base algébrica)

Exemplos:

1) $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\} \subset \mathbb{K}^n$ (espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$) é chamada base canônica de $\mathbb{K}^n$.

2) $\{1, \dots, x^n, \dots\}$ é base para $\mathcal{P}(\mathbb{K}^n)$ sobre $\mathbb{K}$.

3) Encontre uma base para o conjunto solução de

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_4 = 0 \\ -6x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Exercícios. seção 2.2.10: 3, 5, 7, 9, 12, 13.