Aula 4 - Espaços Vetoriais

Def. Um conj. não vazio V é um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ se possuir duas operações, adição e multiplicação por escalar satisfazendo:

Adição. Dados $u, v \in V \rightsquigarrow u+v \in V$.

(A1) $u + v = v + u \quad \forall\, u, v \in V$

(A2) $u + (v + w) = (u + v) + w \quad \forall\, u, v, w \in V$

(A3) $\exists\; 0 \in V$ denominado vetor nulo com

$$v + 0 = v \quad \forall\, v \in V$$

(A4) Para cada $v \in V$, $\exists\; w \in V$ tal que

$v + w = 0$. w é chamado oposto ou simétrico de v que denotamos por $-v$.

(M) Dado $v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K} \rightsquigarrow \alpha v \in V$.

(M1) $(\alpha \beta) v = \alpha (\beta v) \quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall\, v \in V$

(M2) $1 \cdot v = v \quad \forall\, v \in V$ (1 é a identidade de $\mathbb{K}$)

Além disso, as operações adição e multiplicação por escalar se distribuem. Mais precisamente:

(D1) $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \quad \forall \alpha \in \mathbb{K} \quad \forall u,v \in V$

(D2) $(\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u \quad \forall \alpha,\beta \in \mathbb{K} \quad \forall u \in V$

OBS: (i) Os elementos de V são chamados vetores.

(ii) Veja que o vetor nulo e o vetor simétrico são únicos. De fato, se 0 e $\bar{0}$ são vetores nulos de V, temos $0 = 0 + \bar{0} = \bar{0} \rightsquigarrow 0 = \bar{0}$.

Se w e z são vetores opostos de $v \in V$, então

$$w = w + 0 = w + (v+z) = (w+v) + z = 0 + z = z$$

$\rightsquigarrow w = z$ e portanto o oposto de v é único.

Exemplos de espaços vetoriais

1) Todo corpo é um espaço vetorial sobre si mesmo.

Nesse caso se vê facilmente que o produto em $\mathbb{K}$ também define uma multiplicação por escalar.

2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ $\mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \dots \times \mathbb{K}$
$= \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{K} \ \forall i = 1, \dots, n\}$
possui uma estrutura de espaço vetorial com as operações:

- Adição: $\forall (a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \in \mathbb{K}^n$$

- Multiplicação por escalar:

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$

$$\alpha(a_1, \dots, a_n) = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n) \in \mathbb{K}^n$$

Com isso, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{Z}_p^n$ são espaços vetoriais sobre eles mesmos.

3) $\mathbb{C}^2$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com:

- $(a,b)+(c,d) = (a+c, b+d) \in \mathbb{C}^2$

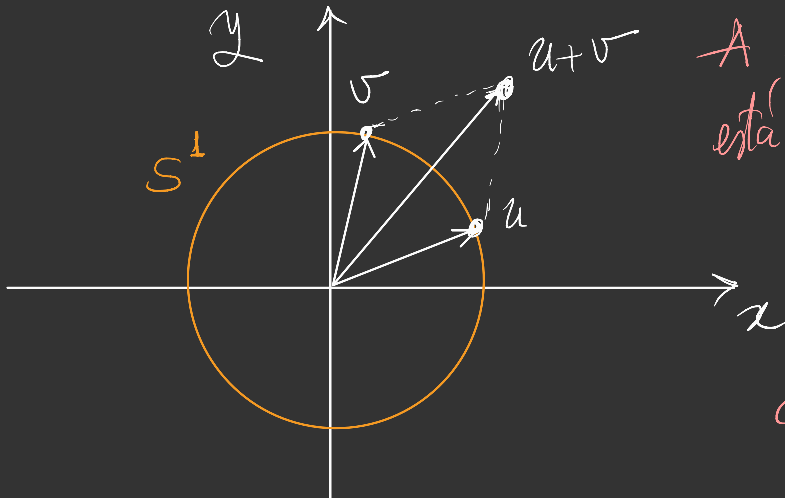
$$\forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{C}^2$$

- $\alpha(a,b) = (\alpha a, \alpha b) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall (a,b) \in \mathbb{C}^2$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Analogamente se obtém que $\mathbb{C}^n$ é espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

OBS: Sobre as operações usuais não se obtém que $\mathbb{R}^n$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Isto ocorre porque αx, para $\alpha \in \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{R}$ pode não pertencer a $\mathbb{R}$. A multiplicação por escalar não está definida $(i \cdot 1 = i \notin \mathbb{R})$.

4) Seja $S^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$ com as operações herdadas de $\mathbb{R}^2$. Então S^1 não é um espaço vetorial.



A soma não está bem definida. Tão pouco a multiplicação por escalar.

5) O conjunto dos polinômios

$$\mathcal{P}(\mathbb{K}) = \{ p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n : n \in \mathbb{N} \text{ e } a_i \in \mathbb{K} \ \forall i = 0, 1, \dots, n \}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com:

- soma: $p(x) + q(x) = (a_0 + \dots + a_n x^n) + (b_0 + \dots + b_m x^m)$

$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n + b_{n+1}x^{n+1} + \dots + b_m x^m$$

analogamente se $n > m$.

- multiplicação: $\alpha p(x) = \alpha a_0 + \dots + \alpha a_n x^n$

$\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ o conjunto

$$\mathcal{P}_n(\mathbb{K}) = \{ a_0 + \dots + a_n x^n : a_i \in \mathbb{K} \ \forall i = 0, 1, \dots, n \}$$

dos polinômios de grau menor ou igual a n também formam um espaço vetorial.

6) O conjunto das matrizes $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ também formam um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com a adição e multiplicação por escalar já definidas.

7) O conjunto solução S de um sistema linear homogêneo com as operações herdadas de $\mathbb{K}^n$ também formam um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Com efeito, $S = \{ X \in \mathbb{K}^n : AX = 0 \}$ para alguma matriz de coeficientes $A = (a_{ij})$ e $X = (x_j)$.

Dados $X_1, X_2 \in S$, então $A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2$
$= 0 + 0 = 0$

$\rightsquigarrow X_1 + X_2 \in S$.

Logo a soma de $\mathbb{K}^n$ está bem definida em S e deve satisfazer as mesmas propriedades pois $S \subset \mathbb{K}^n$.

Dados $\alpha \in \mathbb{K}$ e $X \in S$ temos que $A(\alpha X) = \alpha(AX) = \alpha \cdot 0 = 0 \leadsto \alpha X \in S$. Daí, a multiplicação por escalar também está bem definida em S e satisfaz as mesmas propriedades.

Logo, S é espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Espaços de funções

Seja X um conjunto não vazio e $\mathbb{K}$ um corpo.

Denote por $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ o conjunto de todas as funções $f : X \to \mathbb{K}$. Defina:

- Adição: $\forall\, f, g \in \mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ seja $f + g$ em $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$ a função $(f+g)(x) = f(x) + g(x) \in \mathbb{K}$ $\forall x \in X$

• Multiplicação por escalar: $\alpha f := \alpha f(x) \in \mathbb{K}$ $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall x \in X$.

Como $\mathbb{K}$ é um corpo tais operações estão bem definidas e satisfazem todas as propriedades de espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$.

OBS: A função identicamente nula é o elemento neutro.

1) Se $X = \mathbb{N}$, então $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ é o conjunto das sequências em $\mathbb{K}$ que denotamos por $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

2) Seja $X = \mathbb{K} = \mathbb{C}$. Então $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ é um espaço vetorial próprio de $\mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$, i.e., $\mathcal{P}(\mathbb{C}) \subsetneq \mathcal{F}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

3) $X = [a,b] \subset \mathbb{R}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. O conjunto

$$\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R}) = \{ f : [a,b] \mapsto \mathbb{R} : f \text{ é contínua} \} \subset \mathcal{F}([a,b], \mathbb{R})$$

também define um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações introduzidas acima.

4) Seja $X = \mathbb{N}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$c_0 = \{ (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \to +\infty} x_n = 0 \} \text{ e}$$

$$\ell_\infty = \{ (x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_n| \leq M \text{ para algum } M \in \mathbb{R} \}$$

são espaços vetoriais com as operações definidas acima. Para tanto, basta verificar que a adição e multiplicação por escalar estão bem definidas nestes subconjuntos.

Exercícios: Seção 2.1.5: 1, 3, 4, 5, 7.