Cálculo Diferencial e Integral II
Máximos e Mínimos

Edson Vargas

Universidade de São Paulo

MÁXIMOS E MÍNIMOS: CONSIDERE $z = f(x, y),\ (x, y) \in \mathcal{D}_f$

1. f é dita limitada $\Leftrightarrow |f(x, y)| \leq M$, para algum $M \in \mathbb{R}$.
2. $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é *ponto de máximo relativo* de f $\Leftrightarrow$ $f(x, y) \leq f(x_0, y_0),\ \forall\ (x, y) \in \mathcal{D}_f$ e próximo de (x_0, y_0). Então $f(x_0, y_0)$ chama-se *valor máximo relativo*.
3. $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é *ponto de máximo absoluto* de f $\Leftrightarrow$ $f(x, y) \leq f(x_0, y_0),\ \forall\ (x, y) \in \mathcal{D}_f$. Então $f(x_0, y_0)$ chama-se *valor máximo absoluto*
4. Valem análogos para mínimo (troque as desigualdades)
5. Pontos de máximo ou mínimo relativos são ditos *pontos extremos relativos* e os valores de f nesses pontos são ditos *valores extremos relativos*. Análogo para absoluto.
6. Desigualdades estritas $\Leftrightarrow$ extremos relativos estritos.

MÁXIMOS E MÍNIMOS: CONSIDERE $z = f(x,y), \quad (x,y) \in \mathcal{D}_f$

1. Ponto de máximo (ou mínimo) absoluto é ponto de máximo (ou mínimo) relativo. A recíproca pode ser falsa.
2. Se existem os valores máximo e mínimo absolutos, então a função é limitada. A recíproca pode ser falsa.
3. Se $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é um ponto de extremo relativo, único numa vizinhança, então o conjunto de nível $f(x,y) = k_0 = f(x_0, y_0)$ é o conjunto unitário $\{(x_0, y_0)\}$.

EXTREMOS DE $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2+1}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

1. $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \iff y = k(x^2+y^2+1)$ possui solução $(x,y) \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

(i) $\mathcal{N}_0$ é a reta $y = 0$

(ii) Para $k \neq 0$ tem-se $x^2+y^2-\dfrac{y}{k}+1=0,$ complete quadrado

$$x^2+(y-\frac{1}{2k})^2+1=\frac{1}{4k^2} \Rightarrow \frac{1}{4k^2} \geq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

2. $\operatorname{Im}(f) = [-1/2, 1/2], \quad \mathcal{N}_{1/2} = \{(0,1)\}$ e

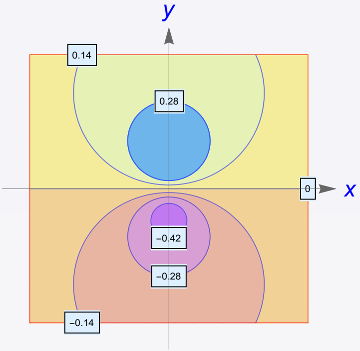
$\mathcal{N}_{-1/2} = \{(0,-1)\}$

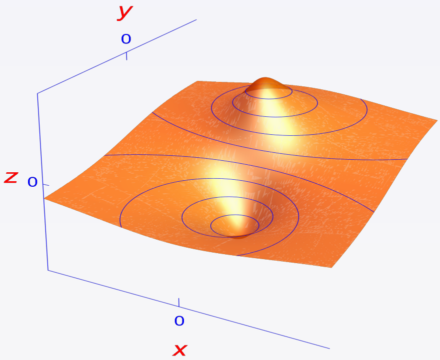
Em particcular $(0,1)$ e $(0,-1)$ são pontos de máximo e mínimo absolutos, respectivamente.

3. Para $-1/2 < k < 0$ ou $0 < k < 1/2$, $\mathcal{N}_k$ é a círcunferência

$$x^2+(y-\frac{1}{2k})^2=-1+\frac{1}{4k^2} \quad \Rightarrow \quad x^2+(y-\frac{1}{2k})^2=\frac{1-4k^2}{4k^2}$$

EXTREMOS DE $f(x,y) = \dfrac{y}{x^2+y^2+1}$





Definição (Ponto Crítico)

Considere uma função $z = f(x, y)$. Um ponto (x_0, y_0) no interior de $\mathcal{D}_f$ é chamado ponto crítico de f se as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem e se anulam.

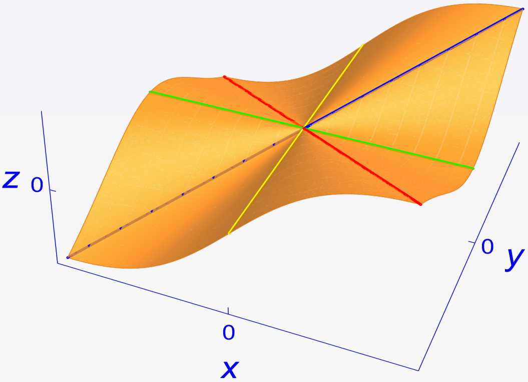
Teorema (Extremos e Pontos Críticos)

Considere uma função $z = f(x, y)$ e um ponto (x_0, y_0) no interior de $\mathcal{D}_f$. Se (x_0, y_0) é um ponto de extremo relativo de f e as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existem, então (x_0, y_0) é um ponto crítico de f.

Observação: A recíproca desse teorema pode ser falsa.

Ponto Crítico que não é Ponto de Extremo Relativo

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{se} \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$ $\Rightarrow$ $(0,0)$ é ponto crítico mas não é ponto de extremo relativo

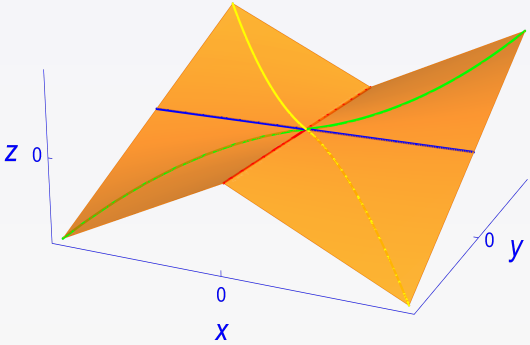


Derivadas Direcionais Nulas $\not\Rightarrow$ Extremo Relativo

Se $f(x,y) = |x|y$ e $\vec{v} = (a,b) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$ pois

$$h(t) = f(at,bt) = |at|bt = \begin{cases} |a|b\,t^2, & \text{se} \quad t \geq 0 \\ -|a|b\,t^2, & \text{se} \quad t \leq 0 \end{cases}$$

derivadas direcionais se anulam em $(0,0)$ mas não se trata de um ponto de extremo relativo

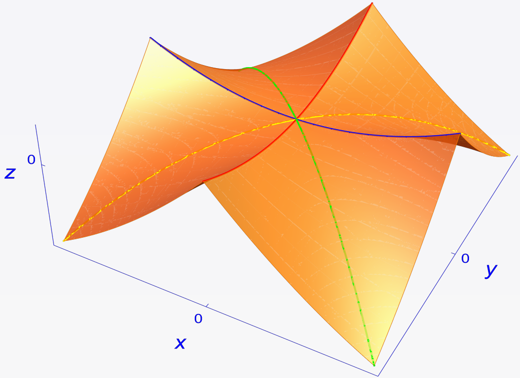


Derivadas Direcionais Nulas $\not\Rightarrow$ Extremo Relativo

Se $f(x,y) = (2|y| - |x|)(|y| - 2|x|)$ e $\vec{v} = (a,b)$ com $a,b \geq 0 \Rightarrow$

$h(t) = f(at,bt) = (2b\,|t| - a\,|t|)(b\,|t| - 2a\,|t|) =$

$= (2b-a)(b-2a)\,t^2 = (2b^2 - 5ab + 2a^2)\,t^2 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = 0$



EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y + 4$

Solução: Se f é diferenciável, então os seus extremos relativos no interior do seu domínio ocorrem em pontos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3 = 0$$

$$x = \pm 1 \quad \text{e} \quad y = \pm 1$$

Os pontos críticos de f são: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ e estes são os únicos candidatos a ponto de extremo relativo de f em $\mathbb{R}^2$.

EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x,y) = x\,y\,e^{-x^2-2y^2}$

Solução: Se f é diferenciável, então os seus extremos relativos no interior do seu domínio ocorrem em pontos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y-2x^2y)e^{-x^2-2y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-4xy^2)e^{-x^2-2y^2}$$

(**i**) $\quad y-2x^2y = y(1-2x^2) = 0$ e

(**ii**) $\quad x-4xy^2 = x(1-4y^2) = 0$

(**i**) $\Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad$ ou $\quad y = 0$

▷ Se $y = 0$, então $x = 0$ e temos o ponto $(0,0)$

▷ Se $x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, então $y = \pm\dfrac{1}{2}$ e temos os seguintes pontos:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{1}{2}\right) \text{ e } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

▷ Esses quatro pontos mais $(0,0)$ calculado antes são os únicos candidatos a pontos de extremos relativos.

Derivadas Parciais de Ordem Superior

$$f(x,y) = 4x^3y^5 - 3x^2y^3 + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 12x^2y^5 - 6xy^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 20x^3y^4 - 9x^2y^2 + 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 24xy^5 - 6y^3 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 80x^3y^3 - 18x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 60x^2y^4 - 18xy^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 60x^2y^4 - 18xy^2$$

Definição

Se $z = f(x,y)$ e suas derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ existem e são contínuas em um aberto $D \subset \mathbb{R}^2$, dizemos que f é de classe C^1 em D. Se existirem e forem contínuas todas as derivadas parciais até ordem 2, dizemos que f é de classe C^2.

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ PODE OCORRER

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy^2(x^2+y^2) - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = 1 \ \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

Teorema (Schwarz)

Se $z = f(x,y)$ é uma função de classe C^2 em um aberto $\mathcal{D}_f$, então $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ se verifica para todo $(x,y) \in \mathcal{D}_f$.

A matriz abaixo, chamada matriz hessiana, é simétrica

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix}$$

A Hessiana de uma Forma Quadrática

$$\boxed{f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2} = \boxed{(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2ax + 2by \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2bx + 2cy$$

Matriz Hessiana

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

O determinante da matriz Hessiana $\boxed{\det(\mathcal{H})(x,y) = 4(ac - b^2)}$

$$\boxed{f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2} = \boxed{(x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2ax + 2by \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2bx + 2cy$$

Matriz Hessiana $\Rightarrow$ $\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$

$$\det(\mathcal{H})(0,0) = 4(ac - b^2)$$

$$f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = a\left(x^2 + \frac{2b}{a}, xy + \frac{c}{a}y^2\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{a^2}\right)y^2\right) =$$

$$a\left(\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a^2}y^2\right)$$

Proposição (Extremos de uma Forma Quadrática)

Se (a,b) e (b,c) não são co-lineares, então $(0,0)$ é o único ponto crítico de $\boxed{f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2}$ e valem:

1. Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2a > 0$ $\left(\text{ou} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2c > 0\right)$ e $\det(\mathcal{H})(0,0) = 4(ac - b^2) > 0$, então $(0,0)$ é ponto de mínimo.
2. Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2a < 0$ $\left(\text{ou} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 2c < 0\right)$ e $\det(\mathcal{H})(0,0) = 4(ac - b^2) > 0$, então $(0,0)$ é ponto de máximo.
3. Se $\det(\mathcal{H})(0,0) = 4(ac - b^2) < 0$, então $(0,0)$ é ponto de sela.
4. $\det(\mathcal{H})(0,0) = 4(ac - b^2) = 0$, ocorre apenas se (a,b) e (b,c) são co-lineares.

FORMAS QUADRÁTICAS $f(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$

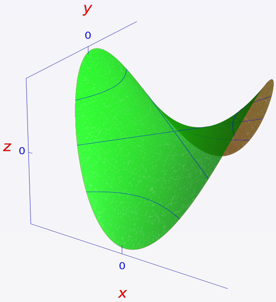


FIGURA: Sela,
$\det(\mathcal{H})(0,0) < 0$,
$f(x,y) = xy$

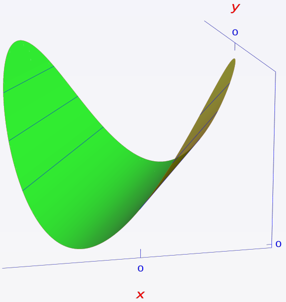


FIGURA: Degenerada,
$\det(\mathcal{H})(0,0) = 0$,
$f(x,y) = (x-y)^2$

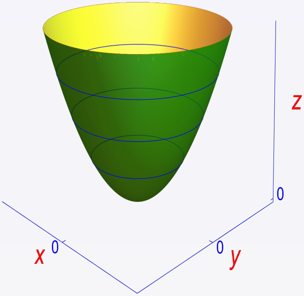


FIGURA: Mínimo,
$\det(\mathcal{H})(0,0) > 0$ e
$a > 0$,
$f(x,y) = x^2 + y^2$

EXTREMOS DE $f(x,y) = x^2 + 4xy - 5y^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4x - 10y \Rightarrow (0,0)$ é ponto crítico único

▷ $x^2 + 4xy - 5y^2 = (x+2y)^2 - y^2 \Rightarrow (0,0)$ é ponto de sela.

EXTREMOS DE $f(x,y) = x^2 + 2xy + 2y^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 4y \Rightarrow (0,0)$ é ponto crítico único

▷ $x^2 + 2xy + 2y^2 = (x+y)^2 + y^2 \Rightarrow (0,0)$ é ponto de mínimo.

EXTREMOS DE $f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y \Rightarrow (x,-x)$ são pontos críticos.

▷ $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2 \Rightarrow (x,-x)$ são pontos de mínimo.

PROPOSIÇÃO (CLASSIFICAÇÃO DE PONTOS CRÍTICOS I)

Sejam $z = f(x, y)$ uma função de classe C^2 no aberto $\mathcal{D}_f$ e $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$, um ponto de mínimo relativo de f, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \geq 0$$

Se $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$, é um ponto de máximo relativo de f, então

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \leq 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \leq 0$$

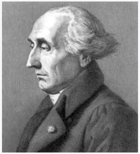
1. $(0, 0)$ é ponto crítico de $f(x, y) = x^2 + x^3y + xy^3 - y^2$ mas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -2 \Rightarrow (0, 0)$ é ponto de sela.

2. Não vale a recíproca: $(0, 0)$ é ponto crítico de $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ com $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 2$ mas $(0, 0)$ não é ponto de mínimo e nem de máximo, é ponto de sela.

Teorema (Taylor com Resto de Lagrange)

Se $z = f(x,y)$ é C^2 no aberto $\mathcal{D}_f$ que contém o segmento de (x_0, y_0) até (x,y), então existe $(\tilde{x}, \tilde{y})$ neste segmento tal que:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\tilde{x},\tilde{y})(x-x_0)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\tilde{x},\tilde{y})(x-x_0)(y-y_0) + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\tilde{x},\tilde{y})(y-y_0)^2\right)$$



Teorema (Classificação de Pontos Críticos II)

Sejam $z = f(x,y)$ uma função de classe C^2 no aberto $\mathcal{D}_f$ e (x_0, y_0) um ponto crítico de f em $\mathcal{D}_f$, então valem:

1. Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$ $\left(\text{ou} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) > 0\right)$ e $\boxed{\det(\mathcal{H})(x_0, y_0) > 0}$ então (x_0, y_0) é ponto de mínimo.
2. Se $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$ $\left(\text{ou} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) < 0\right)$ e $\boxed{\det(\mathcal{H})(x_0, y_0) > 0}$ então (x_0, y_0) é ponto de máximo.
3. Se $\boxed{\det(\mathcal{H})(x_0, y_0) < 0}$ então (x_0, y_0) é ponto de sela.
4. $\boxed{\det(\mathcal{H})(x_0, y_0) = 0}$ INCONCLUSIVO.

EXTREMOS DE $f(x,y) = x^3 - y^2 + xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + y \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + x$$

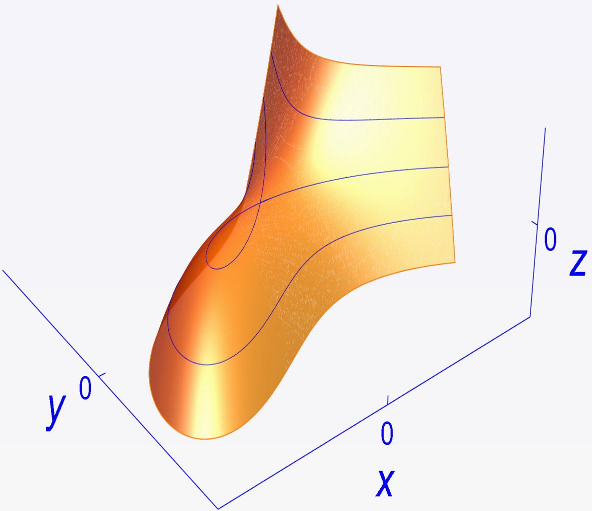
$$\begin{cases} 3x^2 + y & = 0 \\ -2y + x & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 6x^2 + x = 0 \quad \Rightarrow (0,0) \quad \text{e} \quad (-\tfrac{1}{6}, -\tfrac{1}{12})$$

Matriz Hessiana $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

$\det(\mathcal{H})(0,0) = -1 < 0 \quad \Rightarrow \quad (0,0)$ é ponto de sela.

$\det(\mathcal{H})(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}) = 2 - 1 = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad (-\frac{1}{6}, -\frac{1}{12})$ é ponto de máximo relativo.

EXTREMOS DE $f(x, y) = x^3 - y^2 + xy$



EXTREMOS DE $f(x,y) = x^3y + xy^2 - xy$

Cálculo dos pontos críticos

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2y + y^2 - y = (3x^2 - 1 + y)y & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 + 2xy - x = (x^2 + 2y - 1)x & = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow$$

(**i**) $y = 0 \Rightarrow (0,0), \quad (1,0), \quad (-1,0)$ ou

(**ii**) $y = -3x^2 + 1 \Rightarrow (-5x^2 + 1)x = 0 \Rightarrow (0,1), \left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2}{5}\right)$

Matriz Hessiana $\quad \Rightarrow \quad \mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 + 2y - 1 \\ 3x^2 + 2y - 1 & 2x \end{pmatrix}$

Extremos de $f(x,y) = x^3y + xy^2 - xy$

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}(-1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

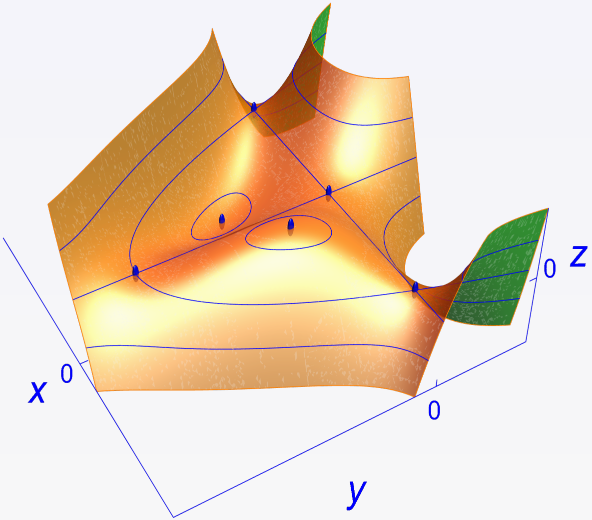
$$\mathcal{H}(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}\left(\tfrac{\sqrt{5}}{5}, \tfrac{2}{5}\right) = \begin{pmatrix} \frac{12\sqrt{5}}{25} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{H}\left(-\tfrac{\sqrt{5}}{5}, \tfrac{2}{5}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{12\sqrt{5}}{25} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

$\det(\mathcal{H})(0,0)$, $\det(\mathcal{H})(1,0)$, $\det(\mathcal{H})(-1,0)$ e $\det(\mathcal{H})(0,1)$ são negativos $\Rightarrow$ pontos de sela.

$\det(\mathcal{H})(\sqrt{5}/5, 2/5)$ e $\det(\mathcal{H})(-\sqrt{5}/5, 2/5)$ são positivos $\Rightarrow$ pontos de extremos, mínimo e máximo relativos.

EXTREMOS DE $f(x,y) = x^3y + xy^2 - xy$



EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ EM $\mathbb{R}^2$

f diferenciável $\Rightarrow$ extremos relativos em $\mathbb{R}^2$ são pontos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3 = 0 \Rightarrow$$

$x = \pm 1 \quad \text{e} \quad y = \pm 1$

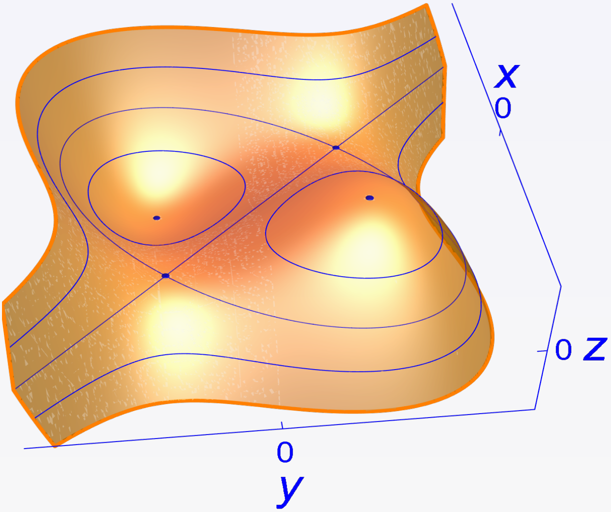
pontos críticos de f são: $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ e $(-1,-1)$ (são os únicos candidatos a ponto de extremo relativo de f em $\mathbb{R}^2$).

$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix} \Rightarrow \mathcal{H}(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \ \mathcal{H}(1,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{H}(-1,1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \ \mathcal{H}(-1,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$(1,-1)$ e $(-1,1)$ são pontos de sela, $(1,1)$ é ponto de mínimo relativo e $(-1,-1)$ é ponto de máximo relativo.

EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ EM $\mathbb{R}^2$



EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x,y) = x\,y\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$ EM $\mathbb{R}^2$

f diferenciável $\Rightarrow$ extremos relativos em $\mathbb{R}^2$ são pontos críticos.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (y - 2x^2y)e^{-x^2-2y^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x - 4xy^2)\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$$

$$\begin{cases} y - 2x^2y = y(1-2x^2) = 0 \\ x - 4xy^2 = x(1-4y^2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{(i)} \ \ y = 0 \Rightarrow p_1 = (0,0) \ \text{ ou}$$

$$\text{(ii)} \ \ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow p_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right), \ p_3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$p_4 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right) \ \text{e} \ \ p_5 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$$

EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x,y) = x\,y\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$ EM $\mathbb{R}^2$

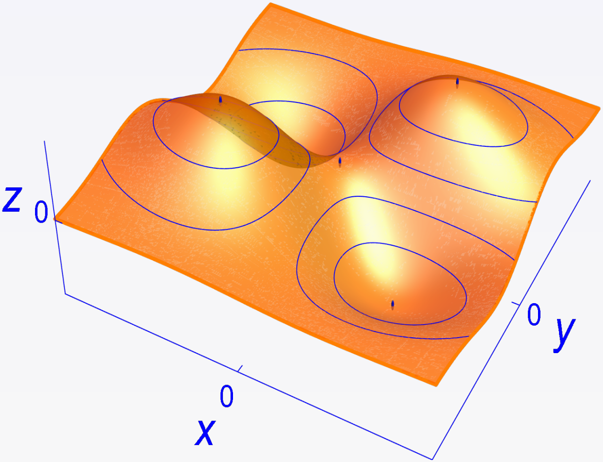
$$\mathcal{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy(-3+2x^2) & (-1+2x^2)(-1+4y^2) \\ (-1+2x^2)(-1+4y^2) & 4xy(-3+4y^2) \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{H}(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}(p_2) = \mathcal{H}(p_5) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2},$$

$$\mathcal{H}(p_3) = \mathcal{H}(p_4) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-2}$$

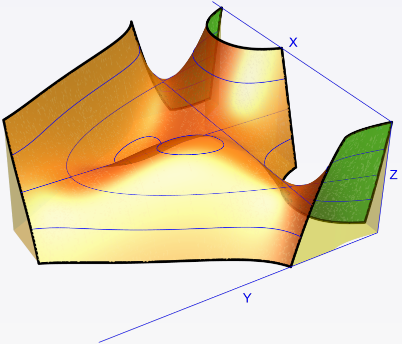
p_1 é ponto de sela, p_2 e p_5 são pontos de máximo relativo, p_3 e p_4 são pontos de mínimo relativo.

EXTREMOS RELATIVOS DE $f(x,y) = x\,y\,\mathrm{e}^{-x^2-2y^2}$ EM $\mathbb{R}^2$



Teorema (Weierstrass)

Seja $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma função contínua em $D \subset \mathbb{R}^n$. Se D é compacto, então f assume os seus valores máximos e mínimos absolutos em D.



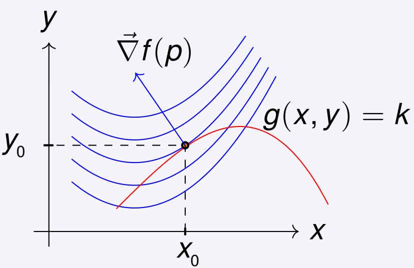
EXTREMOS ABSOLUTOS DE UMA FUNÇÃO f, DE CLASSE C^1, EM UM COMPACTO D CONTIDO NO SEU DOMÍNIO $\mathcal{D}_f$

1. ache os pontos críticos de f no interior de D (sem classificá-los)
2. se a fronteira de D é da forma $g(x, y) = k$, ache os pontos críticos de g nessa fronteira (possíveis "bicos" da fronteira).
3. ache os pontos da fronteira que satisfazem:

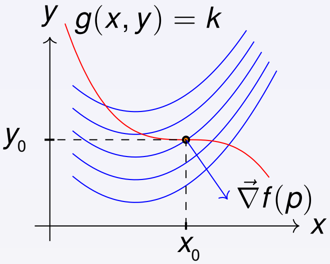
   $\vec{\nabla} f(p_1, \ldots, p_n) = \lambda \vec{\nabla} g(p_1, \ldots, p_n)$ teorema abaixo
4. Avalie f nos pontos e escolha os valores máx. e mín. absolutos.

TEOREMA (MULTIPLICADORES DE LAGRANGE)

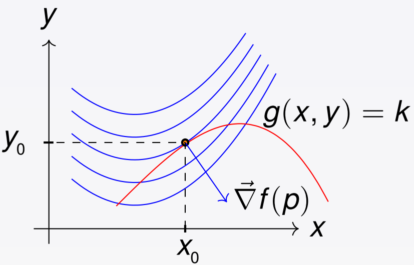
Sejam $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ e $z = g(x_1, \ldots, x_n)$, funções C^1 numa vizinhança de $(p_1, \ldots, p_n)$. Se $(p_1, \ldots, p_n)$ é ponto de extremo relativo de f sujeito à restrição $g(x_1, \ldots, x_n) = k$, então $\vec{\nabla} f(p_1, \ldots, p_n) = \lambda \vec{\nabla} g(p_1, \ldots, p_n)$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ ou $\vec{\nabla} g(p_1, \ldots, p_n) = (0, \ldots, 0)$



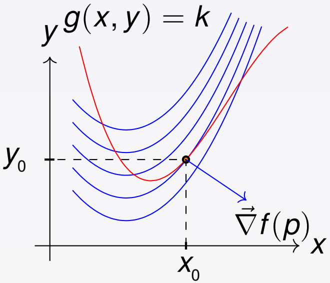
ponto de máximo



não é ponto de extremo

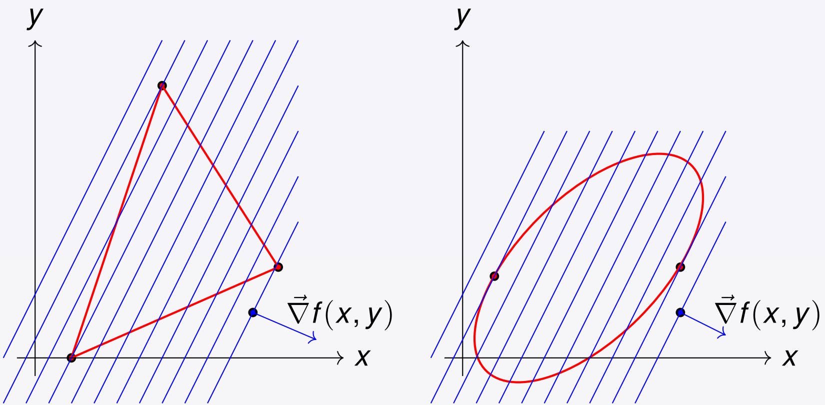


ponto de mínimo



não é ponto de extremo

MAXIMIZANDO FUNÇÃO LINEAR $f(x, y) = a + bx + cy$



EXTREMOS DE FUNÇÃO LINEAR $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$

no triângulo D de vértices $(0,0), (4,0)$ e $(4,5)$

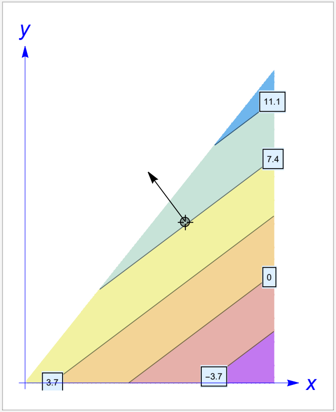
1. $\vec{\nabla} f(x,y) = (-3,4) \Rightarrow \nexists$ extremos no interior do triângulo.
2. Lado $(0,0)$ a $(4,0)$ é conjunto de nível de $g_1(x,y) = y$, mas $\vec{\nabla} f(x,y) = (-3,4)$ e $\vec{\nabla} g_1(x,y) = (0,1)$ são LI
3. Lado $(4,0)$ a $(4,5)$ é c on junto de nível de $g_2(x,y) = x$, mas $\vec{\nabla} f(x,y) = (-3,4)$ e $\vec{\nabla} g_1(x,y) = (1,0)$ são LI
4. Lado $(0,0)$ a $(4,5)$ é conjunto de nível de $g_3(x,y) = 5x - 4y$, mas $\vec{\nabla} f(x,y) = (-3,4)$ e $\vec{\nabla} g_3(x,y) = (5,-4)$ são LI

conclusão: $\vec{\nabla} f(x,y)$ e $\vec{\nabla} g_1(x,y)$ não são co-lineares $\Rightarrow$ não há extremo no interior do lado $y = 0$. Análogo para os outros lados. Resulta que os únicos candidatos a extremos são os vértices.

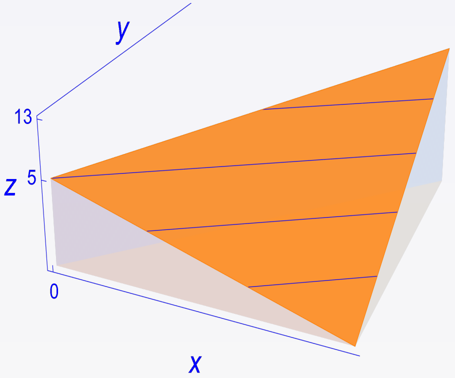
▷ $f(0,0) = 5$, $f(4,5) = 13$ e $f(4,0) = -7 \Rightarrow$ $(4,5)$ é ponto de máximo absoluto e $(4,0)$ é ponto de mínimo absoluto.

EXTREMOS DE FUNÇÃO LINEAR $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$

Out[ ]=



Click a point to see its normal



EXTREMOS DE FUNÇÃO LINEAR $f(x,y) = 5 - 3x + 4y$

na região D, limitada por $x^2 + 4y^2 = 4$

1. pontos críticos de f no interior não existem pois $\vec{\nabla} f(x,y) = (-3,4)$.

2. pontos críticos de $g(x,y) = x^2 + 4y^2$ na fronteira não existem pois $\Rightarrow \vec{\vec{\nabla}} g(x,y) = (2x, 8y)$

3. pontos da fronteira com $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$

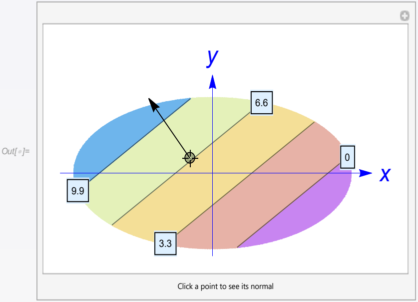
$$\begin{cases} -3 = 2\lambda x \\ 4 = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 2\lambda x \\ -8\lambda x = 24\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0 \\ x = -3y \\ y = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases}$$

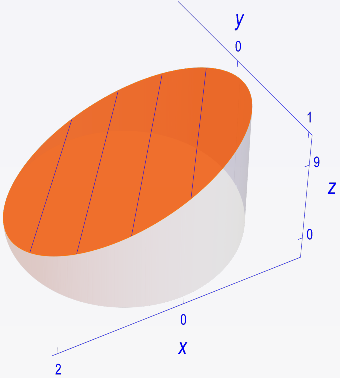
conclusão: $p_1 = (\frac{6\sqrt{13}}{13}, -\frac{2\sqrt{13}}{13})$ e $p_2 = (-\frac{6\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13})$ são os únicos candidatos.

EXTREMOS DE FUNÇÃO LINEAR $f(x, y) = 5 - 3x + 4y$

na região D, limitada por $x^2 + 4y^2 = 4$

4. Avaliando: $f(p_1) = 5 - 2\sqrt{13}$ e $f(p_2) = 5 + 2\sqrt{13} \Rightarrow$ Portanto p_2 é ponto de máximo absoluto e p_1 é ponto de mínimo absoluto.





EXTREMOS DE $f(x,y) = xy$ EM $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$

1. pontos críticos de f no interior não existem pois
$\Rightarrow \vec{\nabla} f(x,y) = (y,x) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

2. pontos críticos de $g(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ na fronteira não existem pois $\Rightarrow \vec{\nabla} g(x,y) = (2x-2, 2y) = (0,0) \Rightarrow (x,y) = (1,0)$

3. pontos da fronteira com $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$

$$\begin{cases} y = 2\lambda(x-1) \\ x = 2\lambda y \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = 2\lambda(x-1)x \\ xy = 2\lambda y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

(i) $\lambda = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ ou (ii) $(x-1)x = y^2 \Rightarrow$

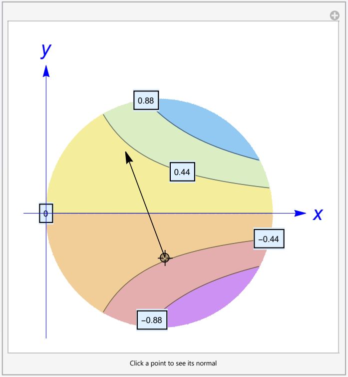
$$(x-1)^2 + (x-1)x = 1 \Rightarrow 2x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

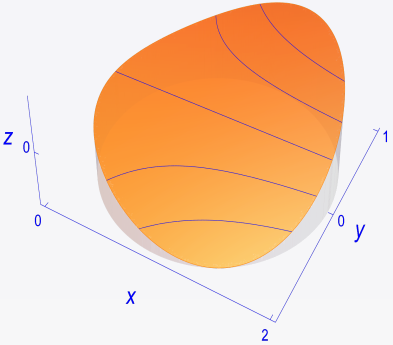
$p_1 = (0,0)$, $p_2 = (\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e $p_3 = (\frac{3}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ são os únicos candidatos.

4. Avaliando: $f(p_1) = 0$, $f(p_2) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ e $f(p_3) = -\dfrac{3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

p_2 é ponto de máximo absoluto e p_3 é ponto de mínimo absoluto.

Out[ ]=





EXTREMOS DE $f(x,y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ EM $x^2 + 4y^2 \leq 4$

1. Pontos críticos de f no interior $\Rightarrow p_1 = (0,0)$ pois $\vec{\nabla} f(x,y) = (4x+y, x+4y)$

▷ $\det(\mathcal{H})(0,0) = 15 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 4 > 0 \Rightarrow$ p_1 é ponto de mínimo relativo de f (essa classificação não é necessária para o cálculo dos extremos absolutos)

2. pontos críticos de $g(x,y) = x^2 + 4y^2$ na fronteira não existem pois $\vec{\nabla} g(x,y) = (2x, 8y)$

3. pontos da fronteira com $\vec{\nabla} f(x,y) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y)$

$$\begin{cases} 4x + y = 2\lambda x \\ x + 4y = 8\lambda y \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16xy + 4y^2 = 8\lambda xy \\ x^2 + 4xy = 8\lambda xy \\ x^2 + 4y^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow 12xy + 4y^2 = x^2$$

$$\Rightarrow 3xy + 2y^2 = 1 \Rightarrow x = \frac{1-2y^2}{3y} \Rightarrow$$

$$\frac{1-4y^2+4y^4}{9y^2} + 4y^2 = 4 \Rightarrow 1-4y^2+4y^4+36y^4 = 36y^2 \Rightarrow$$

$$40y^4 - 40y^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = \frac{10 \pm 3\sqrt{10}}{20}$$

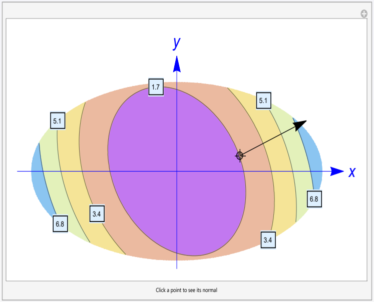
$$\Rightarrow x^2 = 4 - 4y^2 = 4 - \frac{10 \pm 3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{10 \mp 3\sqrt{10}}{5}$$

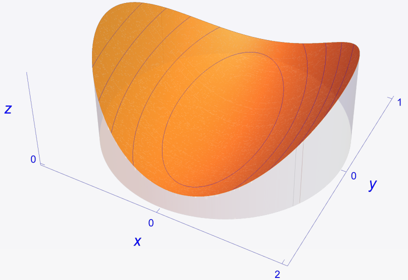
$$(\pm\sqrt{\frac{10-3\sqrt{10}}{5}}, \pm\sqrt{\frac{10+3\sqrt{10}}{20}}); \; (\pm\sqrt{\frac{10+3\sqrt{10}}{5}}, \pm\sqrt{\frac{10-3\sqrt{10}}{20}})$$

Extremos de $f(x,y) = 2x^2 + xy + 2y^2$ em $x^2 + 4y^2 \le 4$

$$2y^2 = 3\frac{10 \pm 3\sqrt{10}}{30}, \quad 2x^2 = 12\frac{10 \mp 3\sqrt{10}}{30}, \quad xy = \pm\frac{3\sqrt{10}}{30}$$

4. Avaliando: $2x^2 + xy + 2y^2 = \dfrac{150 \pm 27\sqrt{10}}{30} \pm \dfrac{3\sqrt{10}}{30}$





EXTREMOS DE $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ EM $x^2 + y^2 \leq 1$

1. pontos críticos de f no interior $\Rightarrow p_1 = (0,0)$ pois $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = (6x^2, 4y^3)$.

▷ $\det(\mathcal{H})(0,0) = 0$ e nada podemos concluir através do critério de classificação de pontos críticos. No entanto notamos que $f(x,0) = 2x^3$ e então concluímos que $(0,0)$ não é ponto de extremo (classificação não-necessária para o cálculo dos extremos absolutos).

2. pontos críticos de $g(x,y) = x^2 + y^2$ na fronteira não existem.
3. pontos da fronteira com $\overrightarrow{\nabla} f(x,y) = \lambda \overrightarrow{\nabla} g(x,y)$

$$\text{ou} \begin{cases} 6x^2 = 2\lambda x \\ 4y^3 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 y = 2\lambda xy \\ 4xy^3 = 2\lambda xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 6x^2 y = 4xy^3 \Rightarrow$$

EXTREMOS DE $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ EM $x^2 + y^2 \leq 1$

(i) $x = 0 \Rightarrow p_2 = (0,1)$ e $p_3 = (0,-1)$ ou

(ii) $y = 0 \Rightarrow p_4 = (1,0)$ e $p_5 = (-1,0)$ ou

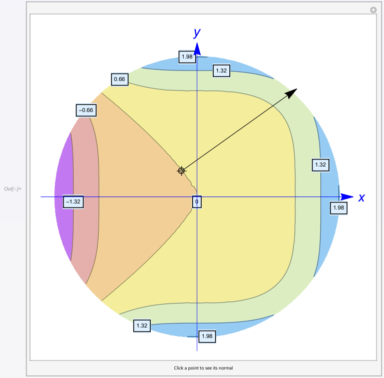
(iii) $y^2 = \dfrac{3x}{2} \Rightarrow x^2 + \dfrac{3x}{2} = 1 \Rightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$

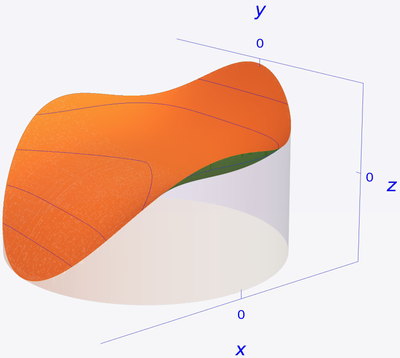
(fora da fronteira) ou $x = 1/2 \Rightarrow p_6 = (1/2, \pm\sqrt{3}/2)$

4. Avaliando: $f(p_1) = 0$ $f(p_1) = 0$, $f(p_2) = f(p_3) = 1$,
$f(p_4) = 2$, $f(p_5) = -2$, $f(p_6) = f(1/2, -\sqrt{3}/2) = 25/16$

p_4 é ponto de máximo absoluto e p_5 é ponto de mínimo absoluto.

EXTREMOS DE $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ EM $x^2 + y^2 \leq 1$





EXTREMOS DE $f(x,y,z) = y\mathrm{e}^{-x+z}$ EM $9x^2+4y^2+36z^2 \leq 36$

1. pontos críticos de f no interior não existem pois

$$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \left(-y\mathrm{e}^{-x+z}, \mathrm{e}^{-x+z}, y\mathrm{e}^{-x+z}\right)$$

2. pontos críticos de $g(x,y,z) = 9x^2+4y^2+36z^2$ na fronteira não existem pois $\vec{\nabla} g(x,y,z) = (18x, 8y, 72z)$

3. pontos da fronteira com $\vec{\nabla} f(x,y,z) = \lambda \vec{\nabla} g(x,y,z)$

$$\begin{cases} -y\mathrm{e}^{-x+z} = 18\lambda x \\ \mathrm{e}^{-x+z} = 8\lambda y \\ y\mathrm{e}^{-x+z} = 72\lambda z \\ 9x^2+4y^2+36z^2 = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 18\lambda x = -72\lambda z \Rightarrow x = -4z \\ 8\lambda y^2 = -18\lambda x \Rightarrow 4y^2 = -9x = 36z \\ 9x^2+4y^2+36z^2 = 36 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 144z^2+36z+36z^2 = 36 \Rightarrow 36(5z^2+z-1) = 0 \Rightarrow$$

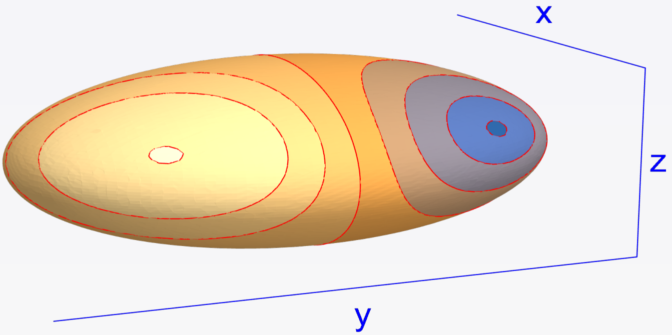
$$z = \frac{-1+\sqrt{21}}{10}, \quad x = \frac{4-4\sqrt{21}}{10} \quad \text{e} \quad y = \pm 3\sqrt{\frac{-1+\sqrt{21}}{10}}$$

EXTREMOS DE $f(x,y,z) = ye^{-x+z}$ EM $9x^2 + 4y^2 + 36z^2 \leq 36$

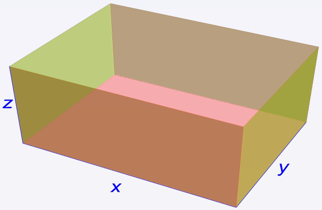
$p_1 = \left(\frac{4-4\sqrt{21}}{10}, 3\sqrt{\frac{-1+\sqrt{21}}{10}}, \frac{-1+\sqrt{21}}{10}\right)$; $p_2 = \left(\frac{4-4\sqrt{21}}{10}, -3\sqrt{\frac{-1+\sqrt{21}}{10}}, \frac{-1+\sqrt{21}}{10}\right)$

4. avaliando: $f(p_1) = 3\sqrt{\frac{-1+\sqrt{21}}{10}}e^{\frac{3-3\sqrt{21}}{10}}$; $f(p_2) = -3\sqrt{\frac{-1+\sqrt{21}}{10}}e^{\frac{3-3\sqrt{21}}{10}}$

p_1 é ponto de máximo absoluto e p_2 é ponto de mínimo absoluto.



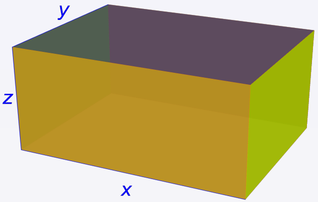
Caixa retangular sem tampa de volume máximo

	área superficial $27\mathrm{cm}^2$
	$A(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz = 27$
	$V(x,y,z) = xyz$

$$\begin{cases} yz = \lambda(y+2z) \\ xz = \lambda(x+2z) \\ xy = \lambda(2x+2y) \\ xy+2xz+2yz = 27 \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq 0 \ \text{ e } \begin{cases} xyz = \lambda(xy+2xz) \\ xyz = \lambda(xy+2yz) \\ xyz = \lambda(2xz+2yz) \\ xy+2xz+2yz = 27 \end{cases} \Rightarrow$$

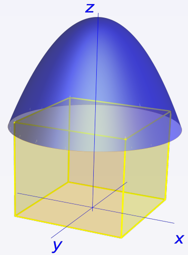
$$2xz = 2yz = xy \Rightarrow \begin{cases} 2xz = 2yz = xy = 9 \\ x = y = 2z \end{cases} \Rightarrow (3,3,3/2)$$

PERDA DE CALOR MÍNIMA

	volume total 1000 ft^3
	$V(x,y,z) = xyz = 1000$
	$T(x,y,z) = 6xy + 6xz + 6yz$

$$\begin{cases} 6y + 6z = \lambda yz \\ 6x + 6z = \lambda xz \\ 6x + 6y = \lambda xy \\ xyz = 1000 \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq 0 \ \text{ e } \begin{cases} 6xy + 6xz = \lambda xyz \\ 6xy + 6yz = \lambda xyz \\ 6xz + 6yz = \lambda xyz \\ xyz = 1000 \end{cases} \Rightarrow$$

$$xz = yz = xy \Rightarrow \ x = y = z \Rightarrow \ (10, 10, 10)$$



	vértices (x, y, z) no parabolóide
	$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z = 4$
	$V(x, y, z) = 4xyz$

$$\begin{cases} 4yz = 2\lambda x \\ 4xz = 2\lambda y \\ 4xy = \lambda \\ x^2 + y^2 + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \lambda \neq 0 \text{ e } \begin{cases} 4xyz = 2\lambda x^2 \\ 4xyz = 2\lambda y^2 \\ 4xyz = \lambda z \\ x^2 + y^2 + z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2x^2 = 2y^2 = z \Rightarrow 4x^2 = 4 \Rightarrow x = 1, \ y = 1 \text{ e } z = 2$$

- vértices $(\pm 1, \pm 1, 0)$ e $(\pm 1, \pm 1, 2)$