

FUNÇÕES DE 2 VARIÁVEIS, CONJUNTOS DE NÍVEL E LIMITES

Edson Vargas

Universidade de São Paulo

FUNÇÕES DE 2 VARIÁVEIS, DOMÍNIO, IMAGEM E GRÁFICO

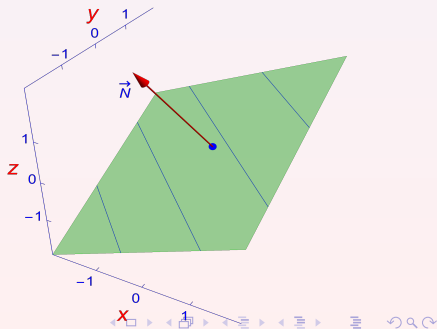
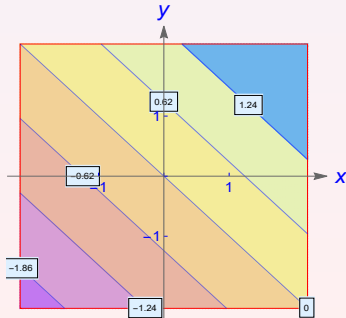
Seja f uma função que a cada (x, y) em um conjunto $\mathcal{D}_f \subseteq \mathbb{R}^2$, chamado **domínio** de f , associa um número real $z = f(x, y)$. A **imagem** de f é o conjunto $\text{Im}(f)$ de todos os valores de $z = f(x, y)$ para $(x, y) \in \mathcal{D}_f$. O **gráfico** de f é o conjunto $\text{Gr}(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \mathcal{D}_f\}$
Notações: $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ ou $z = f(x, y), (x, y) \in \mathcal{D}_f$

- 1- (x, y) são variáveis independentes (ou livres) no domínio \mathcal{D}_f , determinado por condições algébricas (ou físicas, químicas, etc) e z é variável dependente.
- 2- $\text{Im}(f)$ é um subconjunto de \mathbb{R} .
- 3- $\text{Gr}(f)$ é uma superfície no espaço \mathbb{R}^3 que representa a função geometricamente.

DEFINIÇÃO (CONJUNTO DE NÍVEL)

Dados $k \in \mathbb{R}$ e uma função $z = f(x, y)$, o conjunto dos (x, y) no domínio de f tais que $f(x, y) = k$ chama-se *conjunto de nível k* de f e denotamos \mathcal{N}_k .

- ▷ Plano: $f(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \Rightarrow$ domínio $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$
- ▷ Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2k\}$
- ▷ $\forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow \mathcal{N}_k \neq \emptyset \Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}$.
- ▷ \mathcal{N}_k é a reta $x + y = 2k$



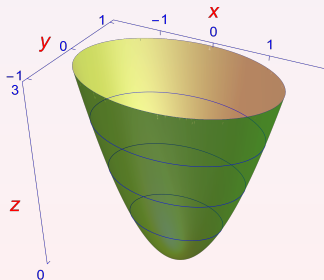
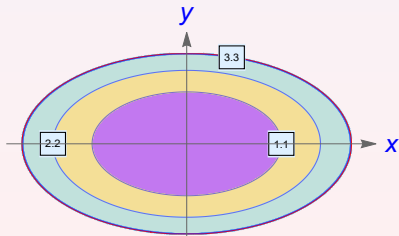
PARABOLOIDE

Seja $f(x, y) = x^2 + 3y^2$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

▷ Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 = k\}$

(i) $k < 0 \Rightarrow \mathcal{N}_k = \emptyset$, (ii) $\mathcal{N}_0 = \{(0, 0)\}$ ou (iii) $k > 0 \Rightarrow \mathcal{N}_k$ é uma elipse

▷ $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \geq 0 \Rightarrow \text{Im}(f) = [0, \infty)$



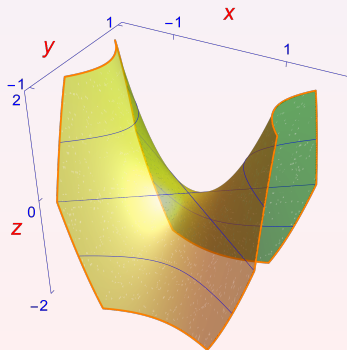
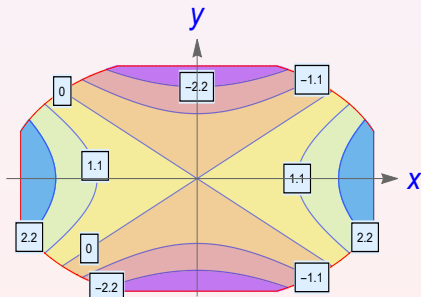
CONJUNTOS DE NÍVEL DA SELA

Seja $f(x, y) = x^2 - 3y^2$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

▷ Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 3y^2 = k\}$

(i) \mathcal{N}_0 é o par de retas: $x = \pm\sqrt{3}y$ ou (ii) $k \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}_k$ é hipérbole

▷ $\forall k \in \mathbb{R}$, tem-se $\mathcal{N}_k \neq \emptyset$ e portanto $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$



CONJUNTO DE NÍVEL DE $f(x, y) = x^2 + 4xy + 2y^2$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

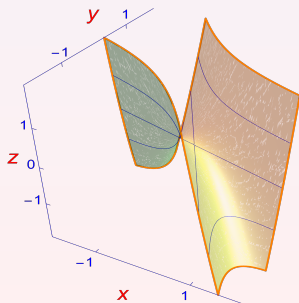
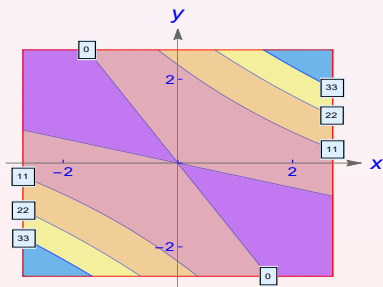
Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + 2y^2 = k\}$

▷ Complete quadrados:

$$x^2 + 4xy + 2y^2 = (x + 2y)^2 + 2y^2 - 4y^2 = (x + 2y)^2 - 2y^2$$

(i) \mathcal{N}_0 é as retas: $x = (-2 \pm \sqrt{2})y$ ou (ii) $k \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}_k$ é hipérbole

▷ $\forall k \in \mathbb{R}$, tem-se $\mathcal{N}_k \neq \emptyset$ e portanto $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$



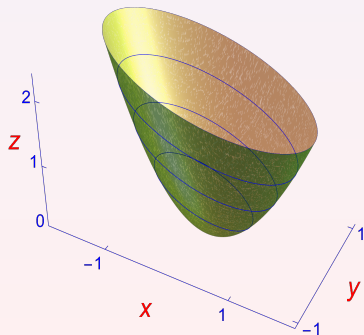
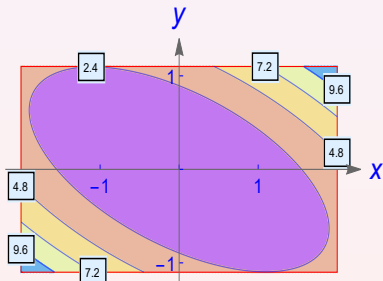
CONJUNTO DE NÍVEL DE $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2xy + 3y^2 = k\}$

▷ Complete quadrados: $x^2 + 2xy + 3y^2 = (x + y)^2 + 2y^2$

(i) $k < 0 \Rightarrow \mathcal{N}_k = \emptyset$, (ii) $\mathcal{N}_0 = \{(0, 0)\}$ ou (iii) $k > 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}_k$ é elipse

▷ $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \geq 0$, tem-se e portanto $\text{Im}(f) = [0, \infty)$



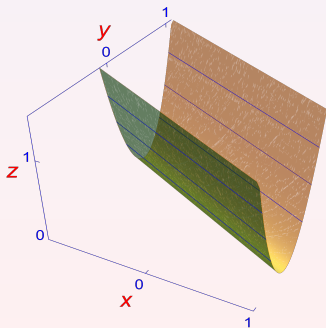
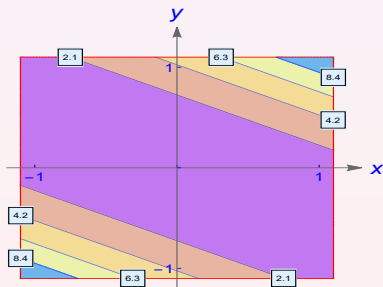
CONJUNTO DE NÍVEL DE $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$, $D_f = \mathbb{R}^2$

Conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4xy + 4y^2 = k\}$

▷ Complete quadrados: $x^2 + 4xy + 4y^2 = (x + 2y)^2$

(i) $k < 0 \Rightarrow \mathcal{N}_k = \emptyset$, (ii) \mathcal{N}_0 é a reta: $x = -2y$ ou (iii) $k > 0 \Leftrightarrow \mathcal{N}_k$ é as retas $x = -2y \pm \sqrt{k}$

▷ $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \geq 0$ e portanto $\text{Im}(f) = [0, \infty)$



CONJUNTO DE NÍVEL DE $f(x, y) = 3\sqrt{1 - x^2 - 3y^2}$

domínio $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 3y^2 \leq 1\}$

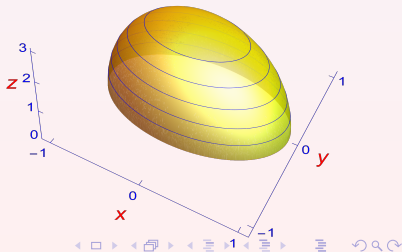
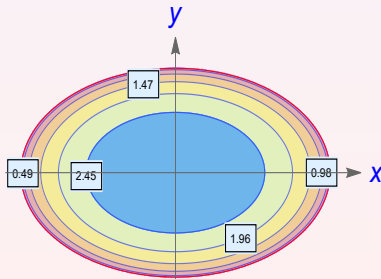
conjuntos de nível:

$$\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathcal{D}_f : 3\sqrt{1 - x^2 - 3y^2} = k\}$$

▷ $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \in [0, 3]$. Portanto $\text{Im}(f) = [0, 3]$.

(i) $\mathcal{N}_3 = \{(0, 0)\}$ ou (ii) $\forall k \in [0, 3)$, \mathcal{N}_k é a elipse

$$x^2 + 3y^2 = 1 - \frac{k^2}{9}$$



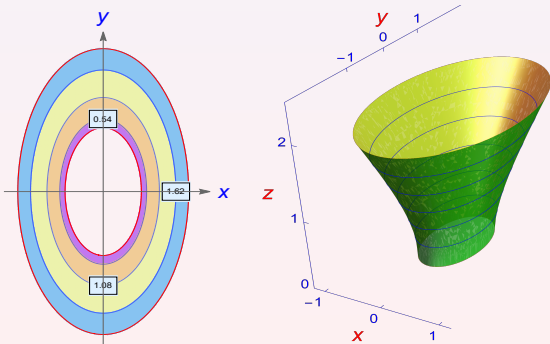
CONJUNTO DE NÍVEL DE $f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 1}$

domínio $\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \geq 1\}$

conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathcal{D}_f : \sqrt{4x^2 + y^2 - 1} = k\}$

▷ $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow k \in [0, \infty) \Rightarrow \text{Im}(f) = [0, \infty)$

▷ \mathcal{N}_k é a elipse $4x^2 + y^2 = 1 + k^2$



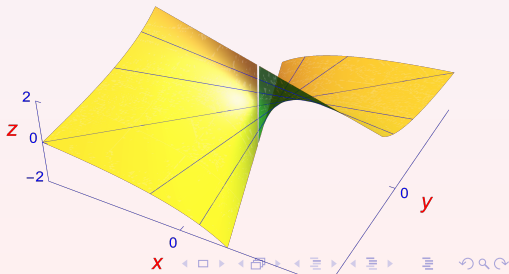
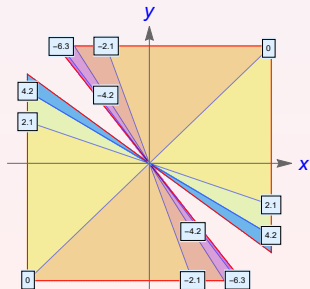
$$\text{CONJUNTO DE NÍVEL DE } f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}, \quad x + y \neq 0$$

conjuntos de nível: $\mathcal{N}_k = \{(x, y) \in \mathcal{D}_f : x - y = k(x + y)\}$

1. Nível \mathcal{N}_k : $x - y = kx + ky \Leftrightarrow (1 - k)x = (1 + k)y$

(i) \mathcal{N}_{-1} é a reta $x = 0$ ou (ii) $k \neq -1$ e \mathcal{N}_k é a reta $y = \frac{1 - k}{1 + k}x$

2. $\mathcal{N}_k \neq \emptyset, \forall k \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{R}$



CONJUNTO DE NÍVEL DE $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. $\mathcal{N}_k \neq \emptyset \Leftrightarrow y = k(x^2 + y^2 + 1)$ possui solução
 $(x, y) \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2$

(i) \mathcal{N}_0 é a reta $y = 0$

(ii) Se $k \neq 0$ tem-se $x^2 + y^2 - \frac{y}{k} + 1 = 0$, complete quadrado

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 + 1 = \frac{1}{4k^2} \Rightarrow \frac{1}{4k^2} \geq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

2. $\text{Im}(f) = [-1/2, 1/2]$, $\mathcal{N}_{1/2} = \{(0, 1)\}$ e
 $\mathcal{N}_{-1/2} = \{(0, -1)\}$

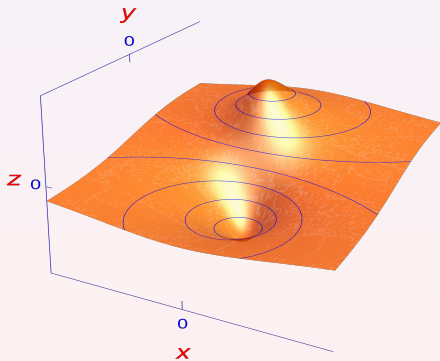
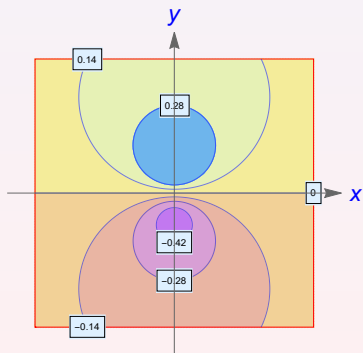
▷ $(0, 1)$ e $(0, -1)$ são pontos de máximo e mínimo absolutos, respectivamente.

3. Se $-1/2 < k < 0$ ou $0 < k < 1/2$, \mathcal{N}_k é a circunferência

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 = -1 + \frac{1}{4k^2} \Rightarrow x^2 + \left(y - \frac{1}{2k}\right)^2 = \frac{1 - 4k^2}{4k^2}$$

CONJUNTOS DE NÍVEL E O GRÁFICO DE

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}$$



MÁXIMOS E MÍNIMOS: SEJA $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}_f$.

1. f é dita limitada $\Leftrightarrow |f(x, y)| \leq M$, para algum $M \in \mathbb{R}$.
2. $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é **ponto de máximo relativo** de $f \Leftrightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f$ e **próximo** de (x_0, y_0) .
Então $f(x_0, y_0)$ chama-se **valor máximo relativo**.
3. $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é **ponto de máximo absoluto** de $f \Leftrightarrow f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, $\forall (x, y) \in \mathcal{D}_f$. Então $f(x_0, y_0)$ chama-se **valor máximo absoluto**.
4. Valem análogos para mínimo (troque as desigualdades)
5. Pontos de máximo ou mínimo relativos são ditos **pontos extremos relativos** e os valores de f nesses pontos são ditos **valores extremos relativos**. Análogo para absoluto.
6. Desigualdades estritas \Leftrightarrow extremos relativos estritos.

MÁXIMOS E MÍNIMOS: SEJA $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}_f$

1. Ponto de máximo (ou mínimo) absoluto é ponto de máximo (ou mínimo) relativo. A recíproca pode ser falsa.
2. Se existem os valores máximo e mínimo absolutos, então a função é limitada. A recíproca pode ser falsa.
3. Se $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ é um ponto de extremo relativo, único numa vizinhança, então o conjunto de nível $f(x, y) = k_0 = f(x_0, y_0)$ é o conjunto unitário $\{(x_0, y_0)\}$.

EXEMPLO

$$\text{seja } f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

1. O conjunto de nível k é não-vazio apenas para $-1/2 \leq k \leq 1/2$.
2. $\text{Im}(f) = [-1/2, 1/2]$ e portanto f é limitada.
3. $(0, 1)$ é ponto de máximo absoluto e $f(0, 1) = 1/2$ é o valor máximo absoluto.
4. $(0, -1)$ é ponto de mínimo absoluto e $f(0, -1) = -1/2$ é valor mínimo absoluto.
5. f não possui outros pontos de máximos ou mínimos relativos além dos pontos de máximo e mínimo absolutos.
6. Em vizinhanças de $(0, 1)$ e $(0, -1)$ os conjuntos de nível são circunferências.

DEFINIÇÃO (LIMITE)

Considere uma função $z = f(x, y)$; $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ e um ponto (x_0, y_0) . Um número real L é dito limite de $z = f(x, y)$ quando $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ tende para $(x_0, y_0) \Leftrightarrow f(x, y)$ se aproxima de L quando $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ se aproxima de (x_0, y_0) .

Notação: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$ ou $f(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} L$

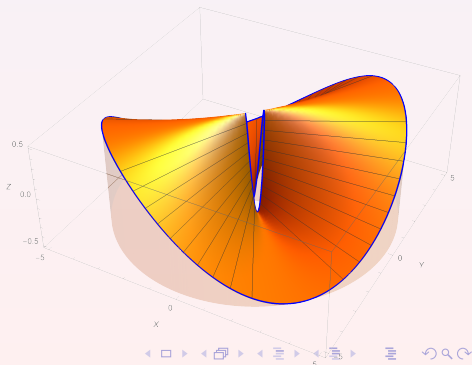
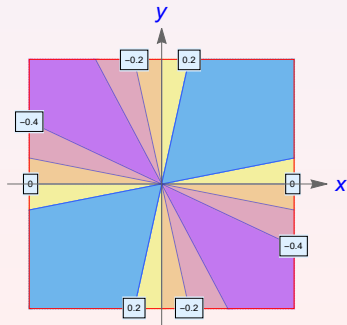
Observação: pode ser que $(x_0, y_0) \notin \mathcal{D}_f$.

Exemplo: Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x + y}$,

As retas $r_1 : y = x$ e $r_2 : y = -2x$ passam por $(0, 0)$ e $f(x, y)$ se anula em r_1 e vale -3 em $r_2 \Rightarrow$ o limite não existe.

CALCULE $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$

- ▷ O limite está indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$
- ▷ As retas $y = x$ e $y = -x$ passam por $(0,0)$ mas f vale $1/2$ na primeira e $-1/2$ na segunda. Portanto o limite não existe.



CALCULE $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$

1. O limite está indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$

2. A reta $\alpha(t) = (at, bt)$, $-1 < t < 1$, passa por $(0, 0)$.

▷ $a \neq 0$ e $t \neq 0 \Rightarrow$

$$f(\alpha(t)) = \frac{ab^3 t^4}{a^2 t^2 + b^6 t^6} = \frac{ab^3 t^2}{a^2 + b^6 t^4} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

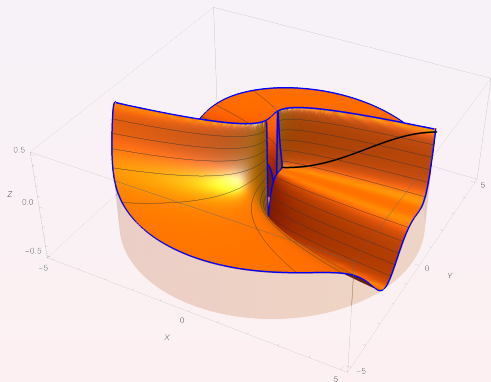
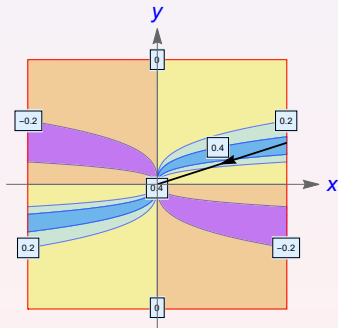
Cuidado: isto não garante que o limite acima é nulo!

3. O conjunto de nível k é dado por $xy^3 = kx^2 + ky^6$, a qual é satisfeita pela curva $\gamma(t) = (t^3, t)$, $t \neq 0$, quando $k = 1/2$.

▷ Então o Traço(γ) está contido no conjunto de nível $1/2$ e passa por $(0, 0)$, portanto o limite não existe.

ILUSTRANDO A NÃO-EXISTÊNCIA DO

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$$



CALCULE $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$

1. O limite está indeterminado do tipo $\frac{0}{0}$

2. A reta $\alpha(t) = (at, bt)$, $-1 < t < 1$, passa por $(0, 0)$.

▷ $a \neq 0$ e $t \neq 0 \Rightarrow$

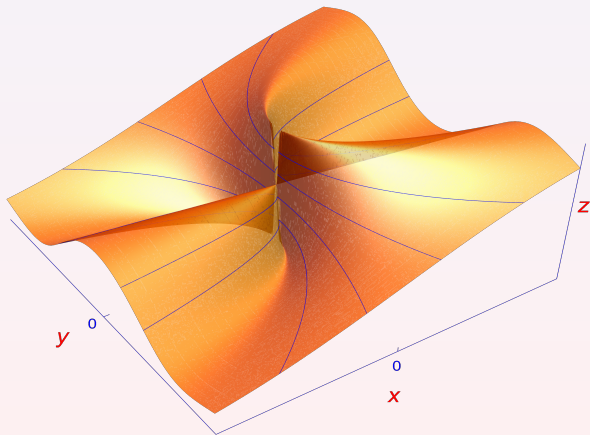
$$f(\alpha(t)) = \frac{ab^2 t^3}{a^2 t^2 + b^4 t^4} = \frac{ab^2 t}{a^2 + b^4 t^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Cuidado: isto não garante que o limite acima é nulo!

3. O conjunto de nível k é dado por $xy^2 = kx^2 + ky^4$, que é satisfeita pela curva $\gamma(t) = (t^2, t)$, $t \neq 0$, quando $k = 1/2$.

▷ Então o Traço(γ) está contido no conjunto de nível $1/2$ e passa por $(0, 0)$, portanto o limite não existe.

ILUSTRANDO A NÃO-EXISTÊNCIA DO $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$



PROPOSIÇÃO

Considere uma função $z = f(x, y)$; $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ e as curvas $\gamma, \alpha : (a, b) \rightarrow \mathcal{D}_f$ tais que $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \alpha(t) = (x_0, y_0)$. Se os limites $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\gamma(t))$ e $\lim_{t \rightarrow t_0} f(\alpha(t))$ são diferentes ou se algum deles não existe, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ não existe.

COROLÁRIO

Considere uma função $z = f(x, y)$; $(x, y) \in \mathcal{D}_f$ e um ponto (x_0, y_0) . Se $k_1 \neq k_2$ e existem curvas de níveis k_1 e k_2 que tendem a (x_0, y_0) , então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y)$ não existe.

TEOREMA (CONFRONTO)

Se $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$ e $z = h(x, y)$, estão definidas em (x, y) próximos de (x_0, y_0) , e $g(x, y) \leq f(x, y) \leq h(x, y)$, então:

1. Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x, y) = L,$

então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = L$

2. Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x, y) = \infty,$ então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = \infty$

3. Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x, y) = -\infty,$ então

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = -\infty$

COROLÁRIO (CONFRONTO)

Sejam $z = g(x, y)$ e $z = h(x, y)$; funções definidas em (x, y) próximos de (x_0, y_0) . Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x, y) = 0$ e g é limitada, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} h(x, y) g(x, y) = 0$

Prova. Se g é limitada temos que $-M \leq g(x, y) \leq M$ e portanto $-M h(x, y) \leq h(x, y) g(x, y) \leq M h(x, y)$

Exemplo: Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)$ Oscilação

Aplique o corolário acima com $g(x, y) = \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)$ e $h(x, y) = x$ e conclua que o limite pedido é nulo.

CALCULE $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$

1. indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

2. $0 \leq \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x| x^2}{x^2 + y^2} \leq |x|$

3. Confronto: $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = |x|$ e
 $f(x, y) = \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right|$

4. conclua que: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2} = 0$$

CALCULE $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

1. indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$

2. $0 \leq \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq |x|$

3. Use confronto: $g(x, y) = 0$, $h(x, y) = |x|$ e

$$f(x, y) = \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right|$$

4. conclua que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

CALCULE $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 - y^2}$

1. indeterminação $\frac{0}{0}$

2. a reta $\gamma(t) = (at, bt)$, $t \in \mathbb{R}$, passa por $(0,0)$

$$a \neq \pm b \text{ e } t \neq 0 \Rightarrow f(at, bt) = \frac{ab^2 t^3}{a^2 t^2 - b^2 t^2} = \frac{ab^2 t}{a^2 - b^2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

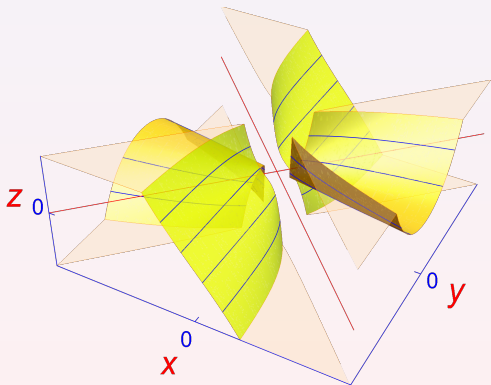
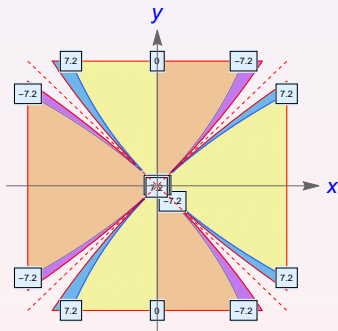
Cuidado: isto não garante que o limite pedido é nulo!

3. O conjunto de nível $k = 1$ tem equação $xy^2 = x^2 - y^2 \Rightarrow (1+x)y^2 = x^2 \Rightarrow$

$$\alpha(t) = \left(t, \frac{|t|}{\sqrt{1+t}}\right), t > -1, \text{ passa por } (0,0)$$

▷ O Traço(α) está contido no conjunto de nível 1 e passa por $(0,0)$, portanto o limite não existe.

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 - y^2}$$



PROPOSIÇÃO (OPERAÇÕES COM LIMITES)

Se $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f_1(x,y) = L_1$ e

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f_2(x,y) = L_2$, então valem:

1. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f_1(x,y) \pm f_2(x,y)) = L_1 \pm L_2$

2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f_1(x,y) f_2(x,y)) = L_1 L_2$

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} = \frac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$.

4. $L_1 > 0 \Rightarrow f_1(x,y) > 0, \quad \forall (x,y)$ próximo de (x_0, y_0) .

5. se $\lim_{z \rightarrow L_1} g(z) = G$, então $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(f_1(x,y)) = G$,

desde que

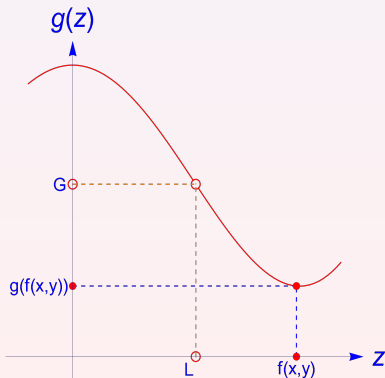
g seja contínua em L_1 ou $f_1(x,y) \neq L_1, \quad \forall (x,y)$ próximo de (x_0, y_0)

PROPOSIÇÃO (COMPOSIÇÃO E LIMITE)

Se $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$, $\lim_{z \rightarrow L} g(z) = G$ e g é contínua em L

ou $f(x,y) \neq L$, para todo (x,y) próximo de (x_0,y_0) , então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(f(x,y)) = G$$



$$1. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} =? \quad \triangleright \text{ indeterminação } \frac{0}{0}$$

$f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow f(x, y) \neq 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 \text{ e } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\text{sen } z}{z} = 1 \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = 1$$

2. sejam $f(x, y) = x \text{ sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right)$ e

$$g(z) = \begin{cases} 0, & \text{se } z \neq 0 \\ 1, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

note que $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = 0$ e $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$, mas

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(f(x, y))$ não existe.

3. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (3x^2 + y^2) \ln(3x^2 + y^2) = ?$ \triangleright indeterminação $0 \cdot \infty$

$f(x, y) = 3x^2 + y^2 \Rightarrow f(x, y) \neq 0$, para todo $(x, y) \neq (0, 0)$,
 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ e $\lim_{z \rightarrow 0} z \ln z = 0$ (use L'Hôpital aqui),
 então

conclua que: $\triangleright \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (3x^2 + y^2) \ln(3x^2 + y^2) = 0$


4. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(3x^2 + y^2) = 0$. Para isto usamos o limite em (3),

as desigualdades

$$(3x^2 + y^2) \ln(3x^2 + y^2) \leq x^2 \ln(3x^2 + y^2) \leq 0$$

e o teorema do confronto.

5. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 \ln(3x^2 + y^2) \arctan\left(\frac{1}{y^2 - x^2}\right) = 0$. Para isto

usamos o limite em (4) e que a função $\arctan(z)$ é limitada. 

$$6. \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{(x-1)(x^2+y^2)} - 1}{(x-1)(x^2+y^2)} =? \quad \triangleright \text{ indeterminação } \frac{0}{0}$$

Observe que: (i) para todo (x, y) próximo de $(0, 0)$ vale que $f(x, y) = (x-1)(x^2+y^2) \neq 0$, (ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$ e

(iii) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$ (use L'Hôpital aqui). Então conclua que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{(x-1)(x^2+y^2)} - 1}{(x-1)(x^2+y^2)} = 1$$

$$7. \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sin(2x-y)}{2x-y} =? \quad \triangleright \text{ indeterminação } \frac{0}{0}$$

$$\triangleright \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \text{ e } \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} (2x-y) = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{\sin(2x-y)}{2x-y} = 1$$

EXERCÍCIOS

$$1. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$3. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + yx^2 + x^3}{x^2 + y^2 + x^4}$$

$$5. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

$$7. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 2y^2 + 3xy}{x^2 + y^2 + y^3}$$

$$9. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy - 2y}{x^2 + y^2 - 4x + 4}$$

$$2. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$4. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$6. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(x - y)}{x^4 + y^4}$$

$$8. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{x^2 + y^6}$$

$$10. \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

LEMA (COORDENADAS POLARES)

Se $\lim_{r \rightarrow 0} f(x_0 + r \cos \theta, y_0 + r \text{sen} \theta) = L$, então

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

CALCULE $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ E $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3(1 - \cos(x^2 + y^2))}{(x^2 + y^2)^3}$

ambos indeterminados do tipo $\frac{0}{0}$

1. Em coordenadas polares $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \frac{r^3(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)}{r^2} = r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)$$

como $\lim_{r \rightarrow 0} r(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) = 0$, resulta que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\begin{aligned} 2. \frac{x^3(1 - \cos(x^2 + y^2))}{(x^2 + y^2)^3} &= \frac{x^3 \sin^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^3(1 + \cos(x^2 + y^2))} = \\ &= \frac{x^2}{x^2 + y^2} \left(\frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right)^2 \frac{x}{1 + \cos(x^2 + y^2)} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 \end{aligned}$$

DEFINIÇÃO (FUNÇÕES CONTÍNUAS)

Uma função $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, é dita **contínua** em (x_0, y_0) se, e somente se, valem:

- 1 Existe $f(x_0, y_0)$, ou seja, $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$
- 2 Existe o limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$
- 3 $L = f(x_0, y_0)$

Se f é contínua em todo $(x, y) \in \mathcal{D}_f$, f é dita contínua em \mathcal{D}_f

Exemplos 1. Polinômios em 2 variáveis, $z = p(x, y)$, são contínuos em \mathbb{R}^2 , **ex:** $p(x, y) = x^2y - 3xy^3$, é contínuo em \mathbb{R}^2

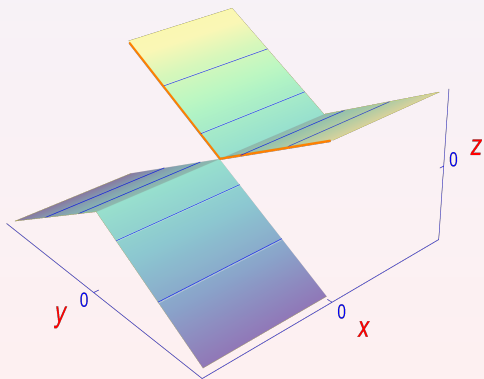
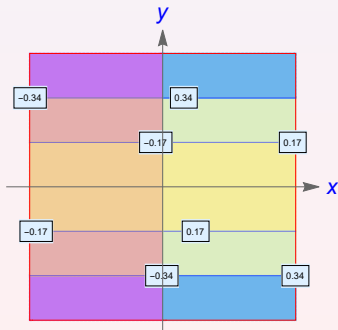
$$2. f(x, y) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ B, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

escolhendo $B = 0$, f torna-se contínua em $(0, 0)$

EXEMPLO

$$f(x, y) = \begin{cases} |y|, & \text{se } x \geq 0 \\ -|y|, & \text{se } x < 0 \end{cases}, \quad f \text{ é contínua em } (0, 0) \text{ pois}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0) \text{ mas é descontínua em } (0, 1)$$

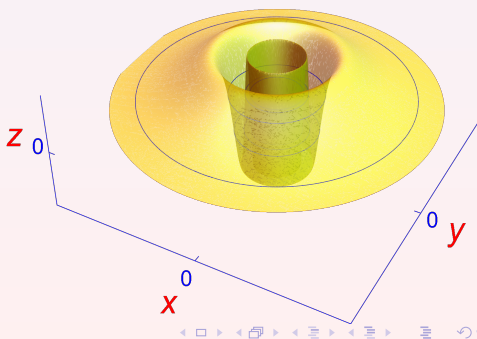
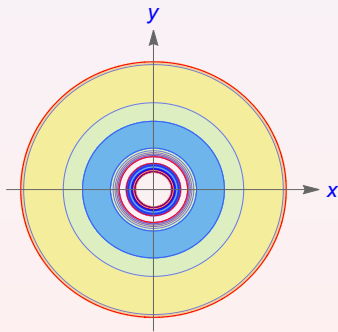


EXEMPLO

$$f(x, y) = \begin{cases} \operatorname{sen} \left(\frac{1}{x^2 + y^2} \right), & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ B, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

qualquer que seja B , f é descontínua em $(0, 0)$ pois

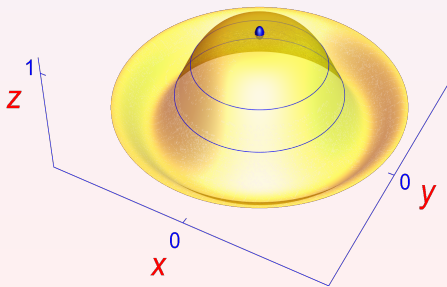
$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ não existe.



EXEMPLO

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ B, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}, \text{ como}$$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 1$ a escolha $B = 1$ torna f contínua em $(0, 0)$



EXEMPLOS

$$1. f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ B, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\triangleright \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = \frac{\sin^2(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} \frac{1}{1 + \cos(x^2 + y^2)} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

Portanto, a escolha $B = 0$ torna f contínua em $(0, 0)$.

$$2. f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{(x-1)(x^2+y^2)} - 1}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ B, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\triangleright \frac{e^{(x-1)(x^2+y^2)} - 1}{x^2 + y^2} = \frac{(e^{(x-1)(x^2+y^2)} - 1)(x - 1)}{(x - 1)(x^2 + y^2)} \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} -1$$

Portanto, a escolha $B = -1$ torna f contínua em $(0, 0)$.

PROPOSIÇÃO (OPERAÇÕES COM FUNÇÕES CONTÍNUAS)

Se $z = f_1(x, y)$ e $z = f_2(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0) , então valem:

1. $z = f_1(x, y) + f_2(x, y)$, $z = f_1(x, y) - f_2(x, y)$ e $z = f_1(x, y) f_2(x, y)$ são contínuas em (x_0, y_0) .
2. $z = \frac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$ é contínua em (x_0, y_0) , se $f_2(x_0, y_0) \neq 0$.
3. Se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ é contínua em t_0 e $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$, então $z = f_1(\gamma(t))$ é contínua em t_0 .
4. Se $w = g(z)$ é contínua em $z_0 = f_1(x_0, y_0)$, então $w = g(f_1(x, y))$ é contínua em (x_0, y_0) .