Derivadas parciais e diferenciabilidade

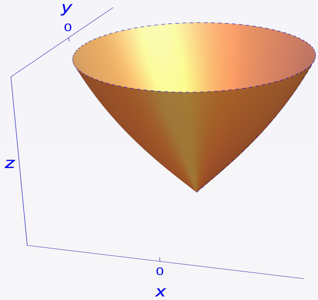
Edson Vargas

Universidade de São Paulo

Existência de Máximos e Mínimos e Continuidade

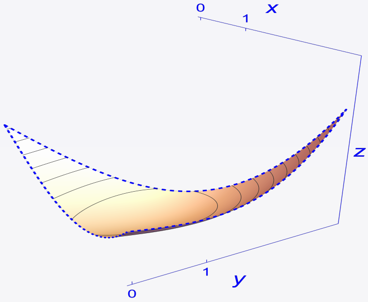
Continuidade é importante para garantir a existência de extremos absolutos mas não é suficiente.

A seguir ilustram-se situações em que o valor máximo (ou mínimo) absoluto não é atingido.



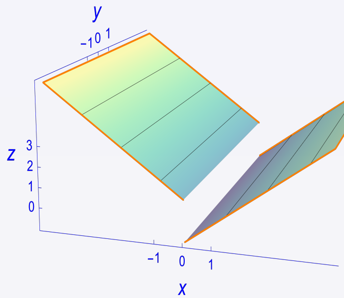
Domínio aberto

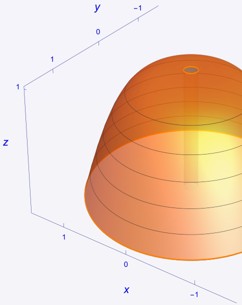
Não assume valor máximo



Domínio aberto

Não assume valor máximo





Descontinuidade

Não assume valor mínimo

Domínio não é fechado

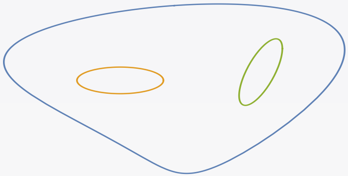
Não assume valor máximo

Definição

Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ é chamado compacto quando é limitado e contem a sua fronteira (ou bordo).

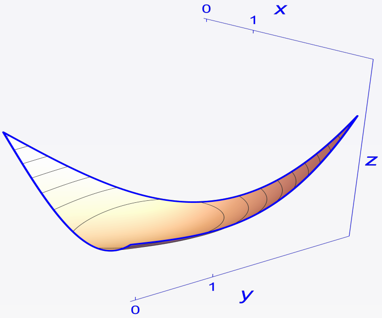
Exemplos:

1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3 \leq x \leq 2 \text{ e } 1 \leq y \leq 2\}$ é compacto.
2. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$ é compacto.
3. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ não é compacto.
4. Região limitada por curvas fechadas e sem auto-interseção e inclui estas curvas



Teorema (Weierstrass)

Seja $z = f(x, y)$ uma função contínua em $D \subset \mathbb{R}^2$. Se D é compacto, então f assume os seus valores máximos e mínimos absolutos em D.



Definição (Derivada Parcial)

Dados uma função $z = f(x, y)$ e $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$, consideramos a função (de uma variável) $g_1(x) = f(x, y_0)$. A derivada $g_1'(x_0)$, quando existe, é chamada derivada parcial de f em relação a x no ponto (x_0, y_0).

Notações: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ ou $\partial_x f(x_0, y_0)$ ou $f_x(x_0, y_0)$

Observação:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g_1'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

quando este limite existe.

Definição (Derivada Parcial)

Dados uma função $z = f(x, y)$ e $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$, consideramos a função (de uma variável) $g_2(y) = f(x_0, y)$. A derivada $g_2'(y_0)$, quando existe, é chamada derivada parcial de f em relação a y no ponto (x_0, y_0).

Notações: $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ ou $\partial_y f(x_0, y_0)$ ou $f_y(x_0, y_0)$

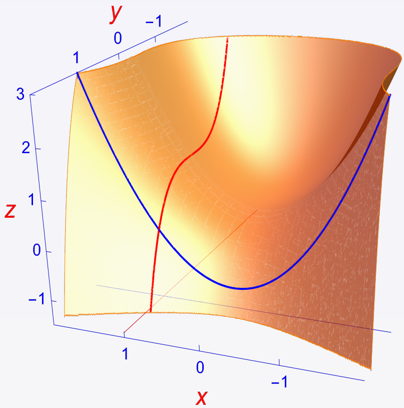
Observação:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = g_2'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h},$$

quando este limite existe.

AS DERIVADAS PARCIAIS DE $f(x,y) = x^2 - y^3$ EM $(1,1)$



$$g_1(x) = f(x,1) = x^2 - 1 \ \text{ e } \ g_2(y) = f(1,y) = 1 - y^3 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = g_1'(1) = 2 \ \text{ e } \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = g_2'(1) = -3$$

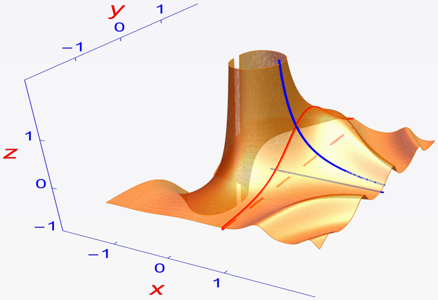
DERIVADAS PARCIAIS EM $(1, 0)$

$$f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{-3/2}\, e^{\sin(x^2 y)}$$

1. $f(x, 0) = x(x^2)^{-3/2} = x^{-2} \Rightarrow \partial_x f(x, 0) = -2\, x^{-3} \Rightarrow \partial_x f(1, 0) = -2$
2. $f(1, y) = (1 + y^2)^{-3/2} e^{\sin y} \Rightarrow$

$$\partial_y f(1, y) = -\frac{3}{2}(1 + y^2)^{-5/2}\, 2\, y\, e^{\sin y} + (1 + y^2)^{-3/2} e^{\sin y} \cos y =$$

$$= -3y(1 + y^2)^{-5/2} e^{\sin y} + (1 + y^2)^{-3/2} e^{\sin y} \cos y \Rightarrow \partial_y f(1, 0) = 1$$



EXISTÊNCIA DE DERIVADAS PARCIAIS $\not\Rightarrow$ CONTINUIDADE

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = ?$$

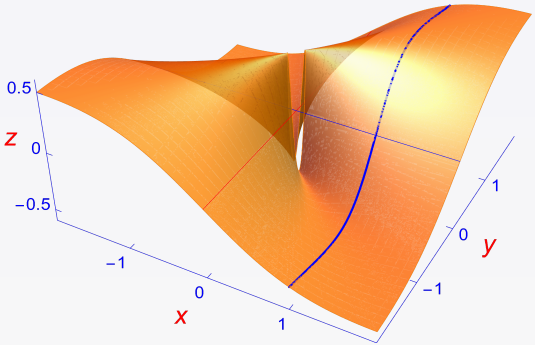
$$f(1,y) = \frac{y}{1+y^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,y) = \frac{1+y^2-2y^2}{(1+y^2)^2} = \frac{1-y^2}{(1+y^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1$$

Observação: f possui derivadas parciais em relação a x e y em $(0,0)$, mas não é contínua em $(0,0)$.

Ilustração

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

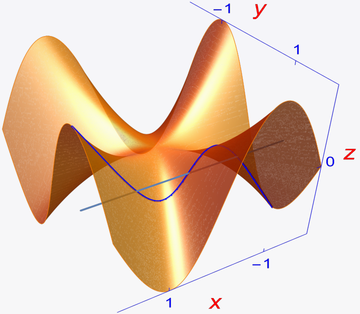


Exemplo

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y)=(0,0) \end{cases} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,y)=?$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}-0}{x}=\lim_{x\to 0} y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=-y$



Definição (Derivada Direcional)

Dados uma função $z = f(x, y)$, um ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ e um vetor unitário $\vec{v} = (a, b)$, consideramos a função (de uma variável) $h(t) = f(x_0 + a\,t, y_0 + b\,t)$. A derivada $h'(0)$, quando existe, é chamada derivada direcional de f em relação a $\vec{v}$ no ponto (x_0, y_0).

Notação: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$.

Observação: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = h'(0) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(x_0 + at, y_0 + bt) - f(x_0, y_0)}{t}$

quando este limite existe.

Se $\vec{v} = (1, 0) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$

Se $\vec{v} = (0, 1) \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

Existência de derivadas direcionais $\not\Rightarrow$ continuidade

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \ \text{ e } \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = ? \quad (\vec{v} = (a,b) \text{ é unitário})$$

seja $h(t) = f(a\,t, b\,t) = \dfrac{a\,b^2 t^3}{a^2 t^2 + b^4 t^4} = \dfrac{a\,b^2 t}{a^2 + b^4 t^2}$, quando $a \neq 0$.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = h'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{\dfrac{a\,b^2 t}{a^2 + b^4 t^2} - 0}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{a\,b^2}{a^2 + b^4 t^2} = \frac{b^2}{a}$$

Exemplo:

- se $\vec{v} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow \ \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- se $\vec{v} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) \Rightarrow \ \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \dfrac{3}{2}$

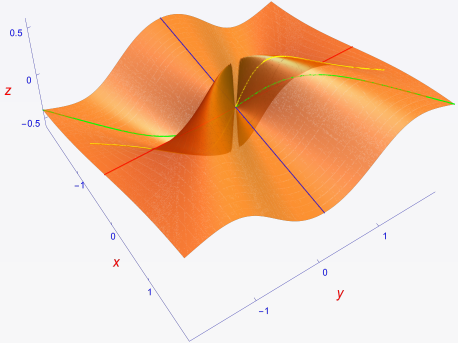
Existência de derivada direcional $\not\Rightarrow$ continuidade

também não garante relação entre $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$, e plano tangente pode não Existir

$$\vec{v} = (a, b) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{b^2}{a},\ a \neq 0$$

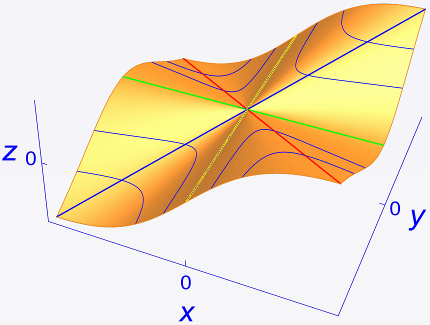
$$\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \frac{3}{2}$$



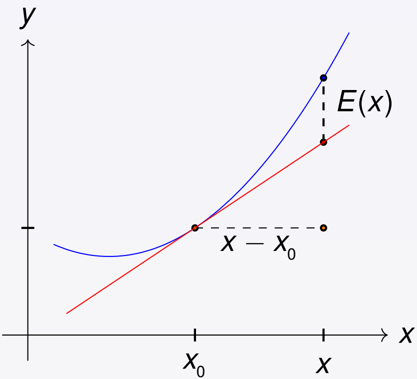
CONTINUIDADE + EXISTÊNCIA DE DERIVADAS DIRECIONAIS $\not\Rightarrow$ RELAÇÃO ENTRE $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ E $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ E PLANO TANGENTE PODE NÃO EXISTIR

$$f(x,y) = \\ = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



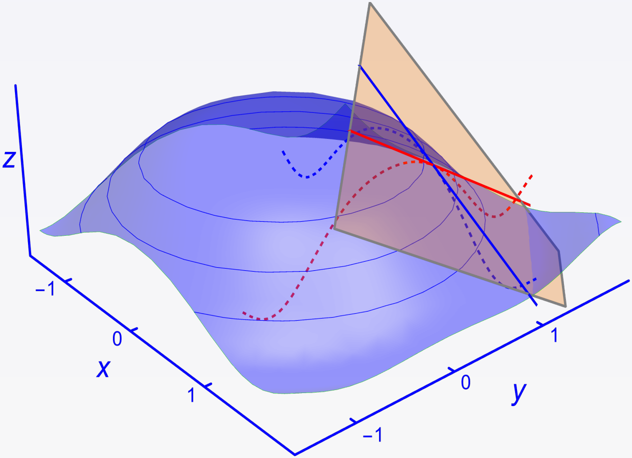
$$\vec{v} = (a,b) \text{ unitário } \Rightarrow f(a\,t, b\,t) = \frac{a\,b^2\,t}{a^2+b^2} = a\,b^2\,t \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = a\,b^2$$

Reta Tangente e Aproximação Linear para $y = f(x)$



- $P(x) = f(x_0) + A(x - x_0)$
- $E(x) = f(x) - P(x)$
- $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{E(x)}{x - x_0} = 0$
- $\displaystyle\frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{x - x_0} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0$
- $\displaystyle\exists\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = A$
- $P(x)$, aproximação linear de f em x_0.
- $y = P(x)$, reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$.

controle em todas as direções, existência de derivadas direcionais e relação entre elas

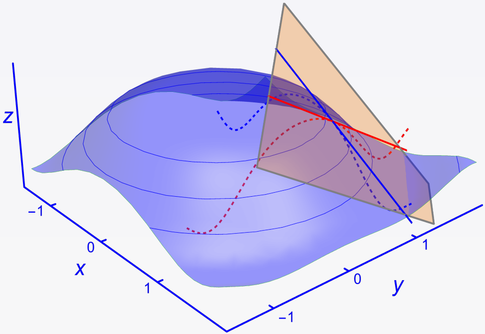


Definição (Diferenciabilidade)

Sejam $z = f(x, y)$ e (x_0, y_0) no interior de $\mathcal{D}_f$, dizemos que f é diferenciável em (x_0, y_0) se existem $A,\ B \in \mathbb{R}$ tais que:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + E(x, y)$$

satisfaz: $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x, y)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$$



Lema (Diferenciabilidade $\Rightarrow$ continuidade)

Se $z = f(x,y)$ é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$, ou seja, se

$f(x,y) = f(x_0,y_0) + A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + E(x,y)$, para todo (x,y) próximo de (x_0,y_0) e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$,

então $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$ e f é contínua em (x_0,y_0).

Prova. Por hipótese $(x_0,y_0) \in \mathcal{D}_f$ e $f(x_0,y_0)$ está bem definida.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - A\,(x-x_0) - B\,(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left[f(x,y) - f(x_0,y_0) - A\,(x-x_0) - B\,(y-y_0)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \qquad \square$$

LEMA (DIFERENCIABILIDADE $\Rightarrow$ DERIVADAS DIRECIONAIS)

Se $f(x,y) = f(x_0,y_0) + A(x-x_0) + B(y-y_0) + E(x,y)$, para todo (x,y) próximo de (x_0,y_0) e $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{E(x,y)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0$,

então, para todo $\vec{v} = (a,b)$ unitário vale que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = a\,A + b\,B$.

Em particular $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = A$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = B$

Prova. $\dfrac{f(x_0+a\,t, y_0+b\,t) - \left[f(x_0,y_0) + A\,a\,t + B\,b\,t\right]}{\sqrt{(a^2+b^2)t^2}} \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \Rightarrow$

$$\left|\frac{f(x_0+a\,t, y_0+b\,t) - f(x_0,y_0)}{t} - (a\,A + b\,B)\right| \xrightarrow[t\to 0]{} 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = a\,A + b\,B$$

Em particular: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0,y_0) = a\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + b\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ $\square$

f É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(0,0) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \Rightarrow P(x,y) = 0$$

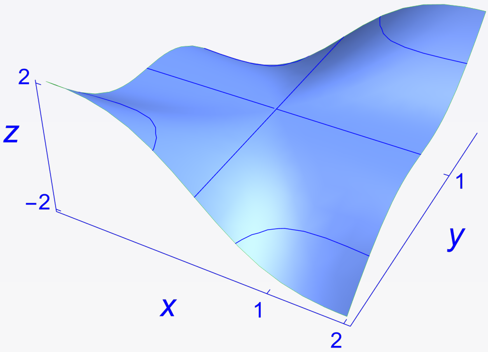
$$E(x,y) = f(x,y) - P(x,y) = f(x,y)$$

$$\frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\dfrac{xy^3}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy^3}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{x\,y\,y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 \qquad \Rightarrow f \ \text{ é diferenciável em } \ (0,0)$$

f É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



$z = f(x,y)$ É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(0,0) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \ \text{ e } \ \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \Rightarrow P(x,y) = 0$$

$$E(x,y) = f(x,y) - P(x,y) = f(x,y)$$

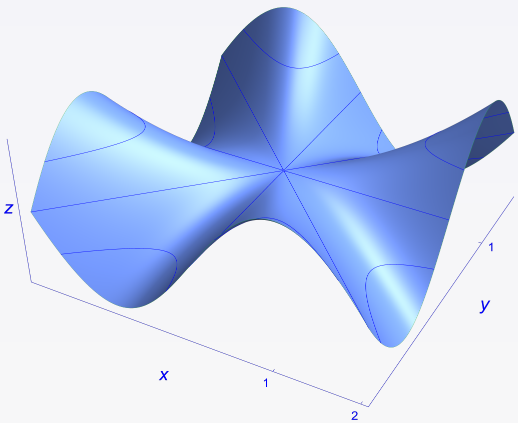
$$\frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{xy(x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} =$$

$$= \frac{x\,y\,x^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} - \frac{x\,y\,y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x^2+y^2)} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f é diferenciável em $(0,0)$.

$z = f(x, y)$ É DIFERENCIÁVEL EM $(0, 0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



f É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$?

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \text{ e } \quad P(x,y) = 0$$

Seja $\vec{v} = (a,b)$ unitário com $a \neq 0 \quad \Rightarrow$

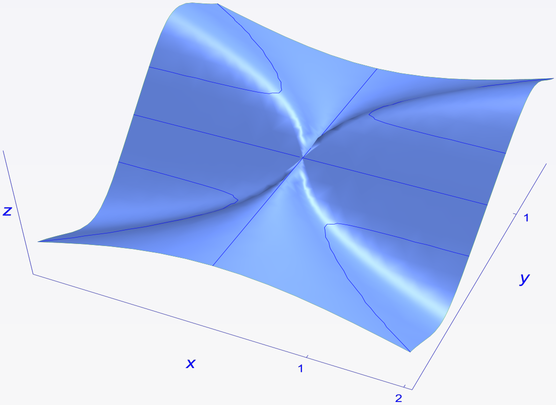
$$\frac{E(a\,t, b\,t)}{\sqrt{a^2 t^2 + b^2 t^2}} = \frac{f(a\,t, b\,t)}{|t|} = \frac{a^2 b\, t^3}{(a^2 t^2 + b^4 t^4)|t|} = \frac{a^2 b\, t}{(a^2 + b^4 t^2)|t|} =$$

$$\underset{t \to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} b, & \text{se} \quad t > 0 \\ -b, & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}, \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ f não é diferenciável em $(0,0)$

f NÃO É DIFERENCIÁVEL EM $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^4}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Exemplo: decida se f é diferenciável em $(0,0)$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2+y^2}\right), & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

▷ f é contínua em $(0,0)$ e $f(x,0) = \begin{cases} x^2\,\text{sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2\text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) - 0}{x} = \lim_{x\to 0} x\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \Rightarrow P(x,y) = 0 \quad \text{e} \quad \frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{(x^2+y^2)\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sqrt{x^2+y^2}\,\text{sen}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} = 0$$

$\Rightarrow$ f é diferenciável em $(0,0)$.

Plano tangente e vetor gradiente

Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$ então:

1. $P(x, y) = f(x_0, y_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$

   ▷ aproximação linear ou polinômio de Taylor de ordem 1
2. O plano $z = P(x, y)$ ▷ plano tangente ao gráfico
3. $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$ ▷ vetor ortogonal ao gráfico
4. $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)$ ▷ vetor gradiente
5. $P(x, y) = f(x_0, y_0) + \vec{\nabla} f(x_0, y_0).(x - x_0, y - y_0)$
6. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = a\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + b\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0).\vec{v}$

Gradiente e direção de crescimento máximo

Se $z = f(x, y)$ é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}_f$, então:

1. $\vec{v}$ unitário $\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0).\vec{v} = \|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\|.\cos\theta \Rightarrow$ é máximo quando $\theta = 0$ e mínimo quando $\theta = \pi$.

2. Se $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ e $\vec{v}$ é unitário, então a derivada direcional $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0)$ é máxima quando $\vec{v} = \dfrac{\vec{\nabla} f(x_0, y_0)}{\|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\|}$ e então o seu valor máximo é $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(x_0, y_0) = \vec{\nabla} f(x_0, y_0).\dfrac{\vec{\nabla} f(x_0, y_0)}{\|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\|} = \|\vec{\nabla} f(x_0, y_0)\|$

3. Se $\vec{\nabla} f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$ então o conjunto de nível de f em (x_0, y_0) é uma curva e é otogonal a $\vec{\nabla} f(x_0, y_0)$.

SEJA $f(x,y) = 2 - x^2/4 - y^2/9$

a. Ache o vetor gradiente $\vec{\nabla} f(1,1)$

b. Ache o vetor unitário $\vec{v}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)$ é máxima

c. Ache a reta tangente ao conjunto de nível em $(1,1)$

d. Ache um vetor $\vec{N}$, ortogonal ao gráfico em $(1,1,59/36)$

e. Ache o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em $(1,1)$

f. Ache o plano tangente ao gráfico em $(1,1,59/36)$

a. $\vec{\nabla} f(1,1) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (-1/2, -2/9)$

b. $\vec{v} = \dfrac{\vec{\nabla} f(1,1)}{\|\vec{\nabla} f(1,1)\|} = 2\sqrt{81/97}\,(-1/2, -2/9) = \sqrt{81/97}\,(-1, -4/9)$

O valor máximo é

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \vec{\nabla} f(1,1).\frac{\vec{\nabla} f(1,1)}{\|\vec{\nabla} f(1,1)\|} = \sqrt{1/4 + 4/81} = \frac{1}{2}\sqrt{97/81}$$

SEJA $f(x,y) = 2 - x^2/4 - y^2/9$

c. Ache a reta tangente ao conjunto de nível em $(1,1)$

d. Ache um vetor $\vec{N}$, ortogonal ao gráfico em $(1,1,59/36)$

e. Ache o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em $(1,1)$

c. $\vec{\nabla} f(1,1) = (-1/2, -2/9) \neq \vec{0}$ e portanto o conjunto de nível em $(1,1)$ é uma curva ortogonal a $\vec{\nabla} f(1,1)$ e (x,y) está na reta tangente a essa curva em $(1,1)$ $\Leftrightarrow$ $(x-1, y-1)$ é ortogonal a $(-1/2, -2/9)$, ou seja: $9(x-1) + 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow\ 9x + 2y = 11$

d. $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1), \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1), -1\right) = (-1/2, -2/9, -1)$ é ortogonal ao gráfico. Escolha $\vec{N} = -18\,(-1/2, -2/9, -1) = (9, 2, 18)$

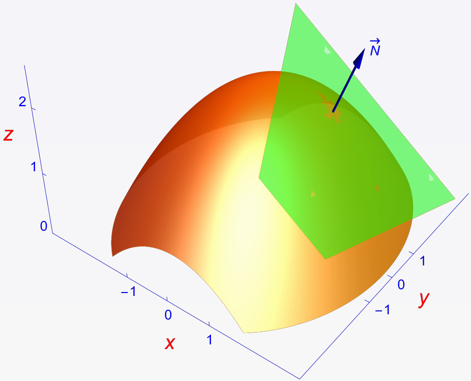
e. $P(x,y) = f(1,1) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1)\,(x-1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1)\,(y-1)$, ou seja:

$\triangleright$ $P(x,y) = 59/36 - 1/2(x-1) - 2/9(y-1)$

SEJA $f(x, y) = 2 - x^2/4 - y^2/9$

f. Ache o plano tangente ao gráfico em $(1, 1, 59/36)$

f. $z = 59/36 - 1/2(x - 1) - 2/9(y - 1)$



TEOREMA

Considere $z = f(x, y)$ e (x_0, y_0) no interior de $\mathcal{D}_f$. Se $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ existem em uma vizinhança de (x_0, y_0) e são contínuas em (x_0, y_0), então f é diferenciável em (x_0, y_0).

COROLÁRIO

Se $z = f(x, y)$ é de classe C^1 em um aberto D (ou seja, existem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ e são contínuas em todo $(x, y) \in D$), então f é diferenciável em D.

Exemplo: $p(x, y) = x^2y^5 - 3x^3y + xy$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ uma vez que as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^5 - 9x^2y + y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 5x^2y^4 - 3x^3 + x$ são contínuas em $\mathbb{R}^2$.

PROVA DO TEOREMA

1. $f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(x,y) - f(x_0,y) + f(x_0,y) - f(x_0,y_0) \overset{TVM}{=}$

$$\overset{TVM}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},y)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y})\,(y-y_0) \Rightarrow$$

pelo TVM, $\bar{x}$ está entre x e x_0 enquanto que $\bar{y}$ está entre y e y_0.

2. $f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},y)\,(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y})\,(y-y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0) \Rightarrow$$

Usamos (2) para analisar o limite do quociente abaixo:

3. $$\frac{\overbrace{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x-x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y-y_0)}^{f(x,y)-P(x,y)=E(x,y)}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

A igualdade em (2) implica que:

$$\overbrace{\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}}^{f(x,y)-P(x,y)=E(x,y)} = \tag{3}$$

$$\frac{\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{x},y)-\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0)+\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y})-\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

- Como $\dfrac{(x-x_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$ e $\dfrac{(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$ são limitadas e as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ são contínuas em (x_0,y_0), concluímos que o quociente em (3) tende a zero quando $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Então f é diferenciável em (x_0,y_0). $\square$

A recíproca do teorema é falsa

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^4}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

$$f(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0 \Rightarrow \quad P(x,y) = 0$$

1. $$\frac{E(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{f(x,y) - P(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2y^2}{(x^2+y^4)\sqrt{x^2+y^2}} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

▷ f é diferenciável em $(0,0)$ mas a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^6}{(x^2+y^4)^2}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$ é descontínua em $(0,0)$

Proposição (Operações com Funções Diferenciáveis)

Se $z = f_1(x, y)$ e $z = f_2(x, y)$ são diferenciáveis em (x_0, y_0), então:

1. $z = f_1(x, y) + f_2(x, y)$, $z = f_1(x, y) - f_2(x, y)$ e $z = f_1(x, y)\, f_2(x, y)$ são diferenciáveis em (x_0, y_0).
2. $z = \dfrac{f_1(x, y)}{f_2(x, y)}$ é diferenciável em (x_0, y_0), se $f_2(x_0, y_0) \neq 0$.
   Em particular toda função racional é diferenciável em todo ponto em que o denominador não se anula.

Considere $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + y^4}$

a. Ache todos os (x, y) nos quais f é diferenciável.

b. Ache o plano tangente ao gráfico de f em $(1, 1, \sqrt[3]{2})$.

c. Ache o vetor unitário $\vec{v}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)$ é máxima.

a. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{4y^3}{3\sqrt[3]{(x^2+y^4)^2}}$ existem e são contínuas em todo $(x,y) \neq (0,0)$. Portanto f é diferenciável em todo $(x,y) \neq (0,0)$.

▷ Como $f(x,0) = \sqrt[3]{x^2}$ não é diferenciável em $x = 0$ resulta que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe e portanto f não é diferenciável em $(0,0)$.

CONSIDERE $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2 + y^4}$

a. Ache todos os (x,y) nos quais f é diferenciável.

b. Ache o plano tangente ao gráfico de f em $(1,1,\sqrt[3]{2})$.

c. Ache o vetor unitário $\vec{v}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)$ é máxima.

b. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \dfrac{4}{3\sqrt[3]{4}} = \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3}$

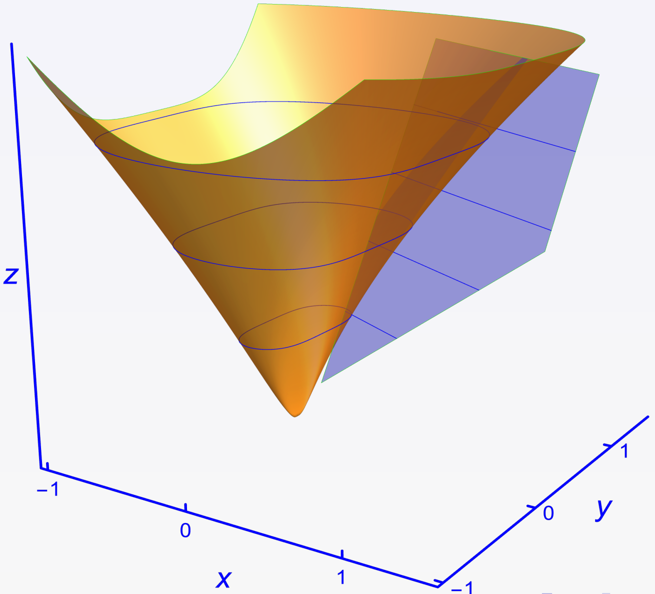
$$z = \sqrt[3]{2} + \frac{\sqrt[3]{2}}{3}(x-1) + \frac{2\sqrt[3]{2}}{3}(y-1)$$ ▷ plano tangente

c. $\vec{\nabla} f(1,1) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}, \dfrac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right) = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}(1,2)$ e $\|\vec{\nabla} f(1,1)\| = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}\sqrt{5}$

$\Rightarrow \vec{v} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$ é o vetor unitário com $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)$ máxima

▷ $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \vec{\nabla} f(1,1).\vec{v} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{3}(1,2).\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,2) = \dfrac{\sqrt[3]{2}\sqrt{5}}{3}$

$f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^4}$



Teorema (Regra da Cadeia)

Sejam $z = f(x, y)$, diferenciável no aberto $\mathcal{D}_f$ e $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, diferenciável em $t \in (a, b)$. Se $\text{traço}(\gamma) \subset \mathcal{D}_f$, então $z = f \circ \gamma(t)$ é diferenciável em $t \in (a, b)$ e vale:

$$\frac{dz}{dt}(t) = (f \circ \gamma)'(t) = \vec{\nabla} f(\gamma(t)).\gamma'(t) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, y'(t)$$

Corolário

Nas condições do teorema acima, se γ é uma curva de nível de f e $\vec{\nabla} f(\gamma(t)) \neq \vec{0}$, então $\vec{\nabla} f(\gamma(t))$ é ortogonal a $\gamma'(t)$.

Prova da Regra da Cadeia

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{e} \quad \gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$$

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,(y - y_0) + E(x,y)$$

$$f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0)) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(\gamma(t_0))\,(x(t) - x(t_0)) + \frac{\partial f}{\partial y}(\gamma(t_0))\,(y(t) - y(t_0))}_{\vec{\nabla} f(\gamma(t_0)).(\gamma(t) - \gamma(t_0))} + E(\gamma(t))$$

$$\frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} = \vec{\nabla} f(\gamma(t_0)).\left(\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}\right) + \frac{E(\gamma(t))}{\|\gamma(t) - \gamma(t_0)\|}\left\|\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0}\right\|\frac{|t - t_0|}{t - t_0}$$

Então $\quad \dfrac{d(f\circ\gamma)}{dt}(t_0) = (f\circ\gamma)'(t_0) = \vec{\nabla} f(\gamma(t_0)).\gamma'(t_0)$

$\square$

Exercício

Se $f(x,y) = x\,e^{x^2-4y^2}$ e $\gamma(t) = (t^2 - t, \operatorname{sen}(2\pi t))$, ache $\dfrac{d}{dt}(f \circ \gamma)(1)$

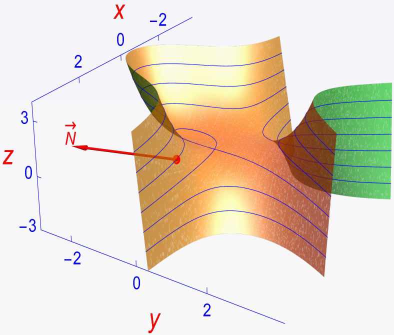
$$\vec{\nabla} f(x,y) = \left(e^{x^2-4y^2} + 2x^2 e^{x^2-4y^2}, -8\,x\,y\,e^{x^2-4y^2}\right)$$

$$\gamma(1) = (0,0), \quad \gamma'(t) = (2t-1, 2\pi\cos(2\pi t)) \quad \text{e} \quad \gamma'(1) = (1, 2\pi)$$

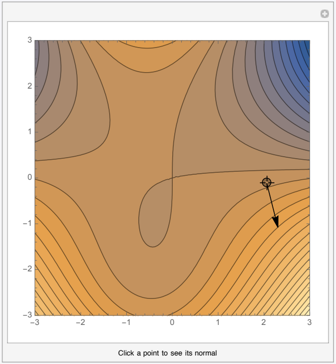
$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(1) = \vec{\nabla} f(\gamma(1)).\gamma'(1) = (1,0).(1,2\pi) = 1$$

Ache a reta tangente à curva de nível em $(2, 0)$ e o plano tangente ao gráfico em $(2, 0, 1)$ de $f(x, y) = x^2/4 - x^2y - xy + y^4/16$

▷ $\vec{\nabla} f(2, 0) = (1, -6)$, então reta tangente é $(x - 2) - 6y = 0$ e o plano tangente é $z = 1 + (x - 2) - 6y$



Out[•]=



Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, diferenciável e tal que o seu gráfico contém os traços de $\gamma(t) = (-t/2, t/2, t/2)$ e $\sigma(u) = (u+1, u, u+2+1/u)$, $u \neq 0$. Ache $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1/2, -1/2)$, onde $\vec{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

$$t/2 = f(-t/2, t/2) \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}(-t/2, t/2) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(-t/2, t/2)$$

$$u + 2 + \frac{1}{u} = f(u+1, u) \Rightarrow 1 - \frac{1}{u^2} = \frac{\partial f}{\partial x}(u+1, u) + \frac{\partial f}{\partial y}(u+1, u)$$

$$t = -1 \text{ e } u = -1/2 \Rightarrow \begin{cases} 1 = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(1/2, -1/2) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1/2, -1/2) \\ -3 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1/2, -1/2) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(1/2, -1/2) \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{\nabla} f(1/2, -1/2) = (-2, -1)$ e se $\vec{v} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1/2, -1/2) = (-2, -1).(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2) = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Sejam $f(x,y) = xy$ e $\gamma(t) = (ae^t + be^{-t}, ce^t + de^{-t})$, onde $t \in \mathbb{R}$. Assuma que $\gamma(0) = (-1,3)$ e $\gamma'(0)$ tem a direção e sentido do vetor unitário $\vec{v}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(-1,3)$ é máxima. Se $\|\gamma'(0)\| = \sqrt{10}$ determine o ponto em que γ cruza o eixo $\mathcal{O}y$.

$$\vec{\nabla} f(-1,3) = (3,-1) \Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1) \Rightarrow \gamma'(0) = (3,-1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ c+d=3 \\ a-b=3 \\ c-d=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=1 \\ d=2 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{e}^t - 2\mathrm{e}^{-t} = 0 \Rightarrow \mathrm{e}^{2t} = 2 \Rightarrow t = \ln\sqrt{2}$$

▷ cruza o eixo $\mathcal{O}y$ em $y = \mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}} + 2\,\mathrm{e}^{-\ln\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \dfrac{2}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

Seja $z = f(x, y)$, diferenciável em $\mathbb{R}^2$, cujo gráfico contém o traço de $\gamma(t) = (t^2, 3 - t, 4t^2)$, $t \in \mathbb{R}$. Se $\sigma(t) = (t, t^2 + 1)$, $t \in \mathbb{R}$, é curva de nível de f, ache $\vec{\nabla} f(1, 2)$ e o plano tangente ao gráfico de f em $(1, 2, 4)$.

▷ $f(t^2, 3 - t) = 4t^2 \Rightarrow 2\,t\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(t^2, 3 - t) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(t^2, 3 - t) = 8t$

$t = 1 \Rightarrow 2\,\dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) - \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 8$

▷ $f(t, t^2 + 1) = \text{const} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, t^2 + 1) + 2\,t\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(t, t^2 + 1) = 0$

$t = 1 \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 2) + 2\,\dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 0$

$\vec{\nabla} f(1, 2) = \dfrac{1}{5}(16, -8)$ e plano tangente $z = 4 + \dfrac{16}{5}(x - 1) - \dfrac{8}{5}(y - 2)$

Corolário (regra da cadeia)

Sejam $z = f(x, y)$, diferenciável no aberto $\mathcal{D}_f$, $x = g(u, v)$ e $y = h(u, v)$, diferenciáveis no aberto $\mathcal{D}_g$. Se $(g(u, v), h(u, v)) \in \mathcal{D}_f$, então $z = F(u, v) = f(g(u, v), h(u, v))$ possui derivadas parciais em relação a u e v e valem:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v), h(u, v))\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v), h(u, v))\frac{\partial h}{\partial u}(u, v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(g(u, v), h(u, v))\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(g(u, v), h(u, v))\frac{\partial h}{\partial v}(u, v)$$

Ex: $f = f(x,y)$ é C^2 em $\mathbb{R}^2$ e $g(u,v) = uf(u^2 - v, u+2v)$

$3x + 5y = z + 26$ é plano tangente ao gráfico de f em $(1,4,f(1,4))$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,4) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4) = 1$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,4) = -1$. Calcule $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3)$

1. $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = -u\frac{\partial f}{\partial x}(u^2 - v, u+2v) + 2u\frac{\partial f}{\partial y}(u^2 - v, u+2v)$
2. $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) =$
$-\frac{\partial f}{\partial x}(u^2-v,u+2v)-2u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(u^2-v,u+2v)-u\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(u^2-v,u+2v)+$
$2\frac{\partial f}{\partial y}(u^2-v,u+2v)+4u^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(u^2-v,u+2v)+2u\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(u^2-v,u+2v)$
3. $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(-2,3) = -3 - 8 + 2 + 10 + 16 + 4 = 21$

Ache o plano por $P = (0, 1, 5)$ e $Q = (0, 0, 6)$ que é tangente ao gráfico de $g(x, y) = x^3 y$

$\vec{N} = (3x^2 y, x^3, -1)$ é ortogonal ao gráfico no ponto $G = (x, y, x^3 y)$.

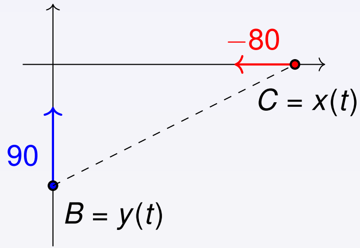
Ache $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\vec{PG}$ e $\vec{QG}$ sejam ortogonais a $\vec{N}$, ou seja:

$$\begin{cases} (i)\ (x, y-1, x^3y-5).(3x^2y, x^3, -1) = 3x^3y + x^3y - x^3 - x^3y + 5 = 0 \\ (ii)\ (x, y, x^3y-6).(3x^2y, x^3, -1) = 3x^3y + x^3y - x^3y + 6 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow\ 3x^3y = -6\ \text{ e }\ x^3 + 1 = 0 \Rightarrow (x, y) = (-1, 2) \Rightarrow\ G = (-1, 2, -2)$

$z = -2 + 6(x+1) - (y-2)$ (ou $(z = 6x - y + 6)$ $\triangleright$ plano tangente

EXERCÍCIO



C viaja para oeste a 80 km/h, B para o norte a 90 km/h e se aproximam da interseção das rodovias. Se C está a 0.4 km e B a 0.3 km da interseção, qual a taxa de variação da distância de C e B?

$$x(t) = 0.4 - 80\,t, \quad y(t) = -0.3 + 90\,t \quad \text{e} \quad f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x'(0) = -80 \;\text{ e}$$

$$y'(0) = 90 \quad \Rightarrow \frac{d}{dt} f(x(t),y(t))\Big|_{t=0} = \vec{\nabla} f(x(0),y(0)).(x'(0),y'(0)) =$$

$$= \vec{\nabla} f\left(\frac{4}{10}, -\frac{3}{10}\right).(-80,90) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right).(-80,90) = -118$$

Seja $f(x,y) = \ln(3x+4y)$, onde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $3x+4y > 0$. Ache o polinômio de Taylor de ordem 1 de f em $(-1,1)$ e calcule $f(-1.001, 1.002)$, aproximadamente.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3}{3x+4y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{4}{3x+4y}, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(-1,1) = 3,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(-1,1) = 4, \quad f(-1,1) = 0 \Rightarrow P(x,y) = 3\,(x+1) + 4\,(y-1)$$

$$f(-1.001, 1.002) \approx P(-1.001, 1.002) = 3(-0.001) + 4(0.002) =$$

$$= 0.005$$

CONSIDERE $f(x,y) = x\, e^{x^2-y^2}$

a. Ache (x,y) tais que f é diferenciável em (x,y)

b. Ache o plano tangente ao gráfico de f em $(1,1,1)$

c. Ache a aproximação linear de $f(1.01, 1.002)$

d. Ache o vetor unitário $\vec{v}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)$ é máxima

a. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x^2-y^2} + 2x^2 e^{x^2-y^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2\,x\,y\,e^{x^2-y^2}$

existem e são contínuas em $\mathbb{R}^2$, portanto f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

b. $f(1,1) = 1$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 3$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -2 \Rightarrow$

$z = 1 + 3(x-1) - 2(y-1)$ é o plano tangente ao gráfico em $(1,1,1)$.

CONSIDERE $f(x,y) = x\,e^{x^2-y^2}$

c. Ache a aproximação linear de $f(1.01, 1.002)$

d. Ache o vetor unitário $\vec{v}$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)$ é máxima

c. Polinômio de Taylor de ordem 1 em $(1,1)$ é:

$P(x,y) = 1 + 3(x-1) - 2(y-1) \Rightarrow$

$$f(1.01, 1.002) \approx P(1.01, 1.002) = 1 + 3(0.01) - 2(0.002) =$$
$$= 1 + 0.03 - 0.004 = 1.026 \qquad \triangleright \text{ aproximação linear}$$

d. O gradiente de f em $(1,1)$ é $\vec{\nabla} f(1,1) = (3,-2)$ e o vetor unitário $\vec{v}$ que maximiza $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1)$ é $\vec{v} = \dfrac{\vec{\nabla} f(1,1)}{\|\vec{\nabla} f(1,1)\|} = \dfrac{1}{\sqrt{13}}(3,-2)$

$$\triangleright \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \sqrt{13}$$