PRO3384 – Finanças quantitativas

Responsável: Prof. Dra. Celma de Oliveira Ribeiro

Equipe: Dr. Pedro Gerber Machado

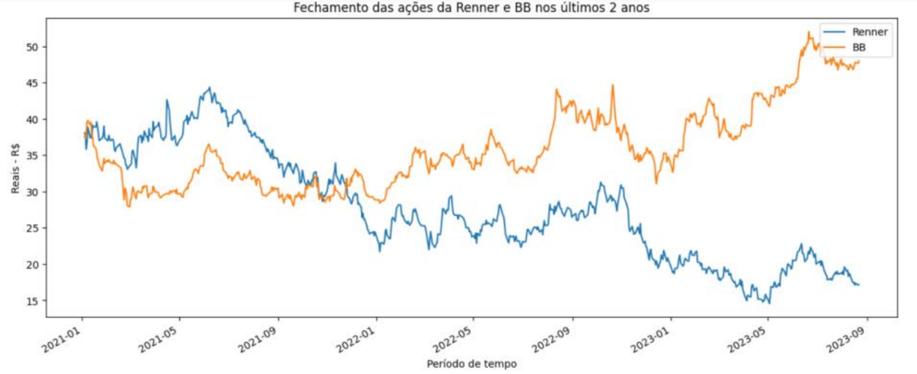
Monitor: Camila Corrêa de Melo

Segundo semestre - 2023

PRO - EPUSP

Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Problema:** Analisar conjuntamente os retornos



Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Problema:** Analisar conjuntamente os retornos

X/Y	0	1
0	0,10	0,20
1	0,40	0,20
2	0,10	0,00

São conhecidas as probabilidades $P(X=x\ ;\ Y = y) \geq 0$

Soma das probabilidades deve ser igual 1!!!!

Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Distribuição conjunta de X e Y**

$$P(X = x_i, Y = y_j) \geq 0 \quad \forall i, j$$

$$\sum_{x_i, y_j} P(X = x_i, Y = y_j) = 1$$

$$F(a,b) = \sum_{\substack{x_i \leq a \\ y_j \leq b}} P(X = x_i, Y = y_j) \quad \forall a, b$$

Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Covariância**

Hipótese: X e Y variáveis aleatórias distribuição conjunta conhecida

Como medir a "similaridade" entre as variáveis?

Covariância entre X e Y

$$\boldsymbol{\sigma_{XY} = cov(X, Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}$$

Onde $\boldsymbol{\mu_X}$ = E(X) e $\boldsymbol{\mu_Y}$ = E(Y) são os valores esperados para X e Y

Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Covariância**

Usando as propriedades do valor esperado:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
$$\sigma_{XY} = \mu_{XY} - \mu_X \mu_Y$$

Covariância

Propriedades:

- $\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- $\mathrm{var}(X) = \mathrm{cov}(X,X)$
- $\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{cov}(Y,X)$
- $\mathrm{cov}(\alpha X,Y) = \alpha\,\mathrm{cov}(X,Y)$
- $\mathrm{cov}(X+Z,Y) = \mathrm{cov}(X,Y)+\mathrm{cov}(Z,Y)$
- X e Y independentes $\Rightarrow$ $\mathrm{cov}(X,Y)= 0$

Covariância

Propriedades:

- var(X+Y) = var(X) + var(Y) + 2 cov(X,Y)
- var(X-Y) = var(X) + var(Y) - 2 cov(X,Y)

$$Var(\omega_1 X + \omega_2 Y) = \omega_1^2 Var(X) + \omega_2^2 Var(Y) + 2\omega_1\omega_2 \operatorname{cov}(X,Y)$$

Relação com risco

Grandeza dimensional!

Variáveis Aleatórias Bidimensionais

- **Correlação**

Coeficiente de correlação entre Y e X: $$\rho = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

Grandeza adimensional!!!

- $\sigma_{XY} = \operatorname{cov}(X, Y)$ é a covariância entre X e Y

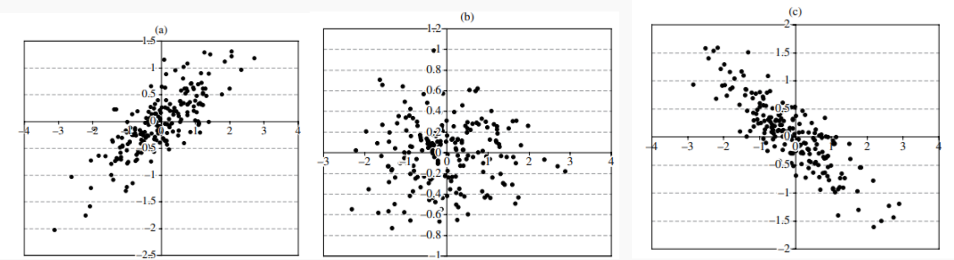
- σ_X e σ_y são os desvios padrão de X e Y, respectivamente.

Correlação

Propriedades:

- $-1 \leq \rho \leq 1$
- ρ não indica uma relação causa-efeito
- ρ indica a existência (ou não) de uma relação linear entre duas variáveis
- $\rho_{XX} = 1$
- $\sigma_{XY} = \rho\, \sigma_X \sigma_Y$

Correlação



(a) correlação +0,75; (b) correlação 0; (c) Correlação -0,75

Matriz de covariância

- A matriz de covariância é uma matriz quadrada e simétrica de variâncias e covariâncias de um vetor de retornos m×1, onde as variâncias dos retornos são exibidas ao longo da diagonal e suas covariâncias são exibidas nos demais elementos.

- **V** = $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$

- **V** é uma denotação arbitrária para a matriz de covariância dos retornos.

Matriz de correlação

- Variáveis aleatórias X_1, X_2, X_2, ρ_{ij} é o coeficiente de correlação entre X_i, X_j

- **Corr(X) = C =** $\begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

Matriz de Covariância

- Propriedade:
- Seja **S** a matriz diagonal dos desvios padrão dos retornos, então COV (Y) = **S** X CORR(Y) X **S**

- COV (Y) = $\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \cdots & \sigma_m^2 \end{bmatrix}$ =

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \ldots & \rho_{1m} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{m1} & \rho_{m2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_m \end{bmatrix}$$

Matriz de Covariância

- Seja Y um vetor aleatório: $\mathrm{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_k]$
- O vetor de esperanças de Y é $\mathrm{E(Y)} = [E(Y_1), E(Y_2), \dots, E(Y_k)]$
- Se $W = [W_1, W_2, \dots, W_k]$ é um vetor (determinístico) então:

a) a variável aleatória $W^t Y$ satisfaz $E(W^t Y) = W^t E(Y)$

b) e $Var(W^t Y) = W^t COV(Y) W$

Matriz de Covariância

Outra forma de escrever

Se: $\mathrm{C} = \alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2 + \alpha_3 R_3 + \ldots + \alpha_n R_n$

$$\sigma_C^2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

Matriz de Covariância

Na forma matricial:

Se: $\sigma_C^2 = \alpha^t COV(Y)\alpha$

Retorno de carteiras

- **Hipótese:** há n ativos disponíveis
- **Definição:** Uma carteira (portfolio) é um ativo obtido através da alocação de um valor inicial X0 a n diferentes ativos.

Ou seja,

$X_{0i} = \omega_i X_0$ com $$\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$$

Retorno de carteiras

O valor gerado pelo ativo i é $R_i \omega_i X_0$

Assim, o retorno da carteira será

$$\mathrm{R}_{\mathrm{C}} = \frac{\sum_{j=1}^{n} R_j \omega_j X_0}{X_0} = \sum_{j=1}^{n} R_j \omega_j$$

Retorno de carteiras

Retorno da carteira:

$$R_C = \frac{\sum R_j \omega_j X_0}{X_0} = \sum R_j \omega_j$$

Taxa de retorno da carteira:

$$r_C = \sum r_j \omega_j$$

Média e variância das carteiras

$$E(r_C) = E(\sum r_{\mathrm{j}}\omega_{\mathrm{j}}) = \sum \omega_{\mathrm{j}} E(r_{\mathrm{j}})$$

$$\sigma^2(r_C) = \sigma^2(\sum r_{\mathrm{j}}\omega_{\mathrm{j}}) = \sum \omega_j^2 \sigma^2(r_{\mathrm{j}}) + \sum_{i \neq j} \omega_i \, \omega_j \sigma_{ij}$$

$$\sigma_{ij} = \mathrm{cov}(r_i, r_j)$$

Gráfico de risco retorno – Carteira com 2 ativos

Composição: $\omega = \left[\omega_A, 1-\omega_A\right]^t$

Retorno médio:

$$E(Rc) = \omega_A E(R_A) + (1-\omega_A) E(R_B)$$

Variância:

$$\sigma^2(Rc) = \omega_A^2 \sigma^2(R_A) + (1-\omega_A)^2 \sigma^2(R_B) + 2\omega_A(1-\omega_A)\sigma_A \sigma_B \rho_{AB}$$

Gráfico de risco retorno – Carteira com 2 ativos