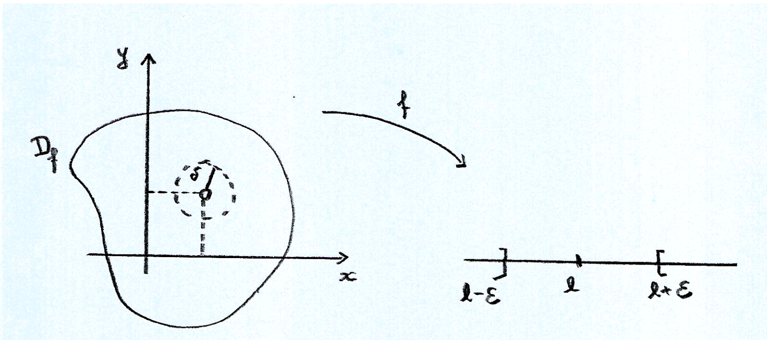
Limite e continuidade para função de duas variáveis



Seja $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de f e $l \in \mathbb{R}$. Dizemos que o limite de $f(x, y)$, quando (x, y) tende a (x_0, y_0) é l, e escrevemos $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ se:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l \;\leftrightarrow\; \forall\, \epsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 : 0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow \; |f(x, y) - l| < \epsilon.$$

Se $(x_0, y_0) \in D_f$ e $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, f é dita contínua no ponto (x_0, y_0).
Se f é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos simplemente que f é contínua.

Algumas propriedades referentes a limite e continuidade

Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $z = f(x, y)$ uma função, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D e $l \in \mathbb{R}$.

(1) Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ então f é localmente limitada em (x_0, y_0), isto é: existem $r > 0$ e $M > 0$ tais que $|f(x, y)| \leq M$, $\forall (x, y) \in D$ com $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$.

(2) (Teorema da Conservação do Sinal): Se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l$ e $l > 0$ então existe $r > 0$ tal que $f(x, y) > 0$, para todo $(x, y) \in D$ com $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < r$.

Teorema: Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções, $z = f(x, y)$, $z = g(x, y)$, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D e $l_1, l_2 \in \mathbb{R}$, e suponhamos que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l_1$ e $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = l_2$. Então:

(3) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f(x, y) + g(x, y)) = l_1 + l_2 = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y)$.

(4) Para $c \in \mathbb{R}$, $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} cf(x, y) = l_1 = c \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = l_1$.

(5) $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} (f(x,y)g(x,y)) = l_1 l_2 = (\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y))\ (\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} g(x,y))$

(6) Se $l_2 \neq 0$ então $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \dfrac{1}{g(x,y)} = \dfrac{1}{l_2} \ = \dfrac{1}{\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} g(x,y)}$.

(7) Se $l_2 \neq 0$ então $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} = \dfrac{1}{l_2} \ = \dfrac{\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} g(x,y)}$.

Teorema: Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D, e $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções verificando as seguintes condições:

(i) $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$.

(ii) a função g é limitada, isto é: existe $M > 0$ tal que $|g(x,y)| \leq \ M$, $\forall\ (x,y) \in D$.

Então $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} (f(x,y).g(x,y)) = 0$

Teorema do Confronto: Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D, e suponhamos $f, g, h : D \longrightarrow \mathbb{R}$ três funções tais que

$$f(x,y) \leq g(x,y) \leq h(x,y),\ \forall\ (x,y) \in D,\ (x,y) \neq (x_0,y_0).$$

Se $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} f(x,y) = l$ e $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} h(x,y) = l$ então $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} g(x,y) = l$.

Sejam $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ duas funções, $z = f(x,y)$, $z = g(x,y)$, (x_0, y_0) um ponto de acumulação de D e suponhamos que f e g sejam contínuas em (x_0, y_0). Então:

(8) $f + g$ é contínua em (x_0, y_0).

(9) Se $c \in \mathbb{R}$, cf é contínua em (x_0, y_0).

(10) $f.g$ é contínua em (x_0, y_0).

(11) Se $g(x_0, y_0) \neq 0$, $\dfrac{1}{g}$ é contínua em (x_0, y_0).

(12) Se $g(x_0, y_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ é contínua em (x_0, y_0).