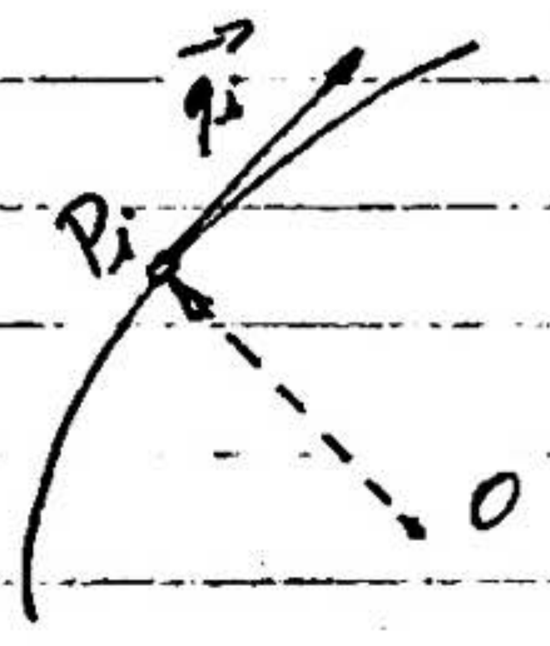
5. TEOREMA DO MOMENTO ANGULAR

5.1. CÁLCULO DO MOMENTO ANGULAR DE UM SISTEMA DE PONTOS (RÍGIDOS).



SENDO A QUANTIDADE DE MOVIMENTO UM VETOR APLICADO, PODEMOS TOMAR SEU MOMENTO EM RELAÇÃO A UM POLO O QUALQUER.

$$\vec{H}_{O,i} = (P_i - O) \wedge \vec{q}_i = (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i$$

E PARA UM SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS TEREMOS:

$$\vec{H}_O = \Sigma (P_i - O) \wedge m_i \vec{v}_i \qquad (F)$$

E NO CASO DE UMA DISTRIBUIÇÃO CONTÍNUA DE MASSA:

$$\vec{H}_O = \int_{G} (P - O) \wedge \rho \vec{v} \, dG$$

ADOTANDO UM REFERENCIAL ONDE A ORIGEM COINCIDA COM O POLO O, TEREMOS UM SISTEMA RÍGIDO.

$$P_i - O = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \quad , \ O \in \text{AO SÓLIDO EM } (I)$$

$$\vec{H}_O = \Sigma (P_i - O) \wedge m_i \left[\vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_i - O) \right]$$

$$\vec{H}_O = m (G - O) \wedge \vec{v}_O + \Sigma m_i (P_i - O) \wedge \left(\vec{\omega} \wedge (P_i - O) \right)$$

$$\vec{H}_O = m (G - O) \wedge \vec{v}_O + \Sigma m_i (x_i, y_i, z_i) \wedge \left[(\omega_x, \omega_y, \omega_z) \wedge (x_i, y_i, z_i) \right]$$

DONDE

$$\vec{H_O} = m(G-O)\wedge\vec{v_O} + (J_x\vec{i} - J_{xy}\vec{j} - J_{xz}\vec{k})\,\omega_x +$$
$$+ (-J_{xy}\vec{i} + J_y\vec{j} - J_{yz}\vec{k})\,\omega_y + (-J_{xz}\vec{i} - J_{yz}\vec{j} + J_z\vec{k})\,\omega_z.$$

OU NA FORMA MATRICIAL:

$$\vec{H_O} = m(G-O)\wedge\vec{v_O} + (\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})\,[J]\begin{pmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{pmatrix}$$

ONDE $[J]$ É A MATRIZ DE INÉRCIA DO SISTEMA MATERIAL EM RELAÇÃO AOS EIXOS DO REFERENCIAL $Oxyz$.

PARA O MOVIMENTO NO PLANO TEREMOS $\vec{\omega} = \omega\vec{k}$

$$\therefore\ \vec{H_O} = m(G-O)\wedge\vec{v_O} + J_z\,\omega\,\vec{k} \qquad (II)$$

E SE AINDA O FOR FIXO OU $O \equiv G$, (II) TORNA-SE:

$$\vec{H_O} = J_z\,\omega\,\vec{k},$$

COM O EIXO z PASSANDO POR O ($\perp$ AO PLANO).

5.2. O TEOREMA DO MOMENTO ANGULAR (MOM. CINÉTICO).

COMO VIMOS O MOMENTO ANGULAR DE UM SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS P_i DE MASSAS m_i, $i=1,2,..,n$ EM RELAÇÃO A UM POLO O ARBITRÁRIO É:

$$\vec{H_O} = \Sigma(P_i - O)\wedge m_i\vec{v_i}$$

DERIVANDO EM RELAÇÃO AO TEMPO:

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum_i (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i (P_i - O) \wedge m_i \dot{\vec{v}}_i$$

$$\dot{\vec{H}}_O = \sum_i (-\vec{v}_O) \wedge m_i \vec{v}_i + \sum_i (P_i - O) \wedge \vec{F}_i^{ext}$$

POIS $\vec{v}_i \wedge \vec{v}_i = \vec{O}$

PORTANTO: $\dot{\vec{H}}_O = \sum m_i \vec{v}_i \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{ext}$

$$\underline{\underline{\dot{\vec{H}}_O = m \vec{v}_G \wedge \vec{v}_O + \vec{M}_O^{EXT}}}$$

E FINALMENTE, ESCOLHENDO UM POLO $\underline{O}$ FIXO OU $O \equiv G$, TEREMOS

$$\underline{\underline{\dot{\vec{H}}_O = \vec{M}_O^{Ext}}}$$

QUE É A EXPRESSÃO DO <u>TMA</u>:

"A VARIAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR DE UM SISTEMA MATERIAL EM RELAÇÃO A UM POLO FIXO OU COINCIDENTE COM O BARICENTRO É IGUAL AO MOMENTO DE TODAS AS FORÇAS EXTERNAS APLICADAS AO SISTEMA, EM RELAÇÃO AO MESMO POLO $\underline{\underline{O}}$"

** <u>TEOREMA DA CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR</u>:

"SE O MOMENTO DAS FORÇAS EXTERNAS EM RELAÇÃO A UM POLO FIXO OU AO BARICENTRO É NULO, ENTÃO O MOMENTO ANGULAR EM RELAÇÃO A ESTE POLO É CONSTANTE".

CASOS PARTICULARES.

A) TRANSLAÇÃO : $\vec{v_i} = \vec{v_G}$ E $\vec{\omega} = \vec{0}$

COMO $\vec{H_O} = m(G-O) \wedge \vec{v_O} + (\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})[J]\begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$

NA EXPRESSÃO DO MOMENTO ANGULAR (EM RELAÇÃO A G)

$$\vec{H_G} = \vec{0} \therefore \dot{\vec{H_G}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_G^{EXT} = \vec{0},$$

PORTANTO, QUANDO O SÓLIDO EFETUA UMA TRANSLAÇÃO PURA, O MOMENTO DAS FORÇAS EXTERNAS COM RELAÇÃO AO BARICENTRO É NULO.

B) OBSERVE QUE A RECÍPROCA NÃO É VERDADEIRA, POIS

$\vec{M}_G^{EXT} = \vec{0} \longrightarrow \vec{H_G} = \text{CTE}$ E O SISTEMA DE FORÇAS NÃO ALTERA A VEL. ANGULAR.

C) ROTAÇÃO AO REDOR DE UM EIXO FIXO.

$\vec{v_O} = \vec{0}$, COM O NO EIXO FIXO

$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$, $\underline{z}$ É O EIXO DE ROTAÇÃO, COM $\vec{i}$ E $\vec{j}$ LIGADOS AO SÓLIDO, OBTEMOS:

$$\vec{H_O} = (-J_{xz}\omega\vec{i} - J_{yz}\omega\vec{j} + J_z\omega\vec{k})$$

DERIVANDO EM RELAÇÃO AO TEMPO E OBSERVANDO QUE: J_z, J_{xz}, J_{yz} SÃO CTES E $\dot{\vec{i}} = \omega\vec{j}$, $\dot{\vec{j}} = -\omega\vec{i}$ $(\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}\wedge\vec{i}, \dot{\vec{j}} = \vec{\omega}\wedge\vec{j})$, TEMOS:

$$\dot{\vec{H}}_O = \dot{\omega}\left[-J_{xz}\,\omega\,\vec{i} - J_{yz}\,\omega\,\vec{j} + J_z\,\omega\,\vec{k}\right] + \omega^2\left(-J_{xz}\,\vec{j} + J_{yz}\,\vec{i}\right) =$$

$= \vec{M}_O^{Ext}$, DEVIDO AO T.M.A.

DE ONDE:

$$\left\| \begin{array}{l} J_z\,\dot{\omega} = M_z^{Ext} \\ -J_{xz}\,\dot{\omega} + J_{yz}\,\omega^2 = M_x^{Ext} \\ -J_{yz}\,\dot{\omega} - J_{xz}\,\omega^2 = M_y^{Ext} \end{array} \right.$$

EM PARTICULAR, SE O SÓLIDO FOR SIMÉTRICO EM RELAÇÃO AO EIXO DE ROTAÇÃO, OS PRODUTOS DE INÉRCIA SERÃO NULOS:

$$J_{xz} = J_{yz} = 0$$

$\Rightarrow \vec{H}_O = J_z\,\omega\,\vec{k}$, $O \in$ EIXO z

D) A EXPRESSÃO DE $\vec{H}_O$ É VÁLIDA SE Oz É EIXO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO

$$\vec{H}_O = \omega\left(J_z\,\vec{k} - J_{xz}\,\vec{i} - J_{yz}\,\vec{j}\right)$$

MAS AS DERIVADAS J_z, J_{xz} E J_{yz} EM GERAL VARIAM COM O EIXO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO.