IV. DINÂMICA DOS SISTEMAS RÍGIDOS.

1. REDUÇÃO DE UM SISTEMA DE FORÇAS

SEJA UM CONJUNTO DE PONTOS MATERIAIS P_i DE MASSAS m_i. A RESULTANTE $\vec{F}_i$ DAS FORÇAS QUE AGEM EM P_i PODE SER ESCRITA COMO SEGUE:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \quad , \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n)$$

ONDE:

$\vec{F}_i^{ext}$: RESULTANTE DAS FORÇAS EXTERNAS QUE AGEM EM P_i

$\vec{F}_{ij}$: AÇÃO INTERNA DO PONTO P_j SOBRE P_i

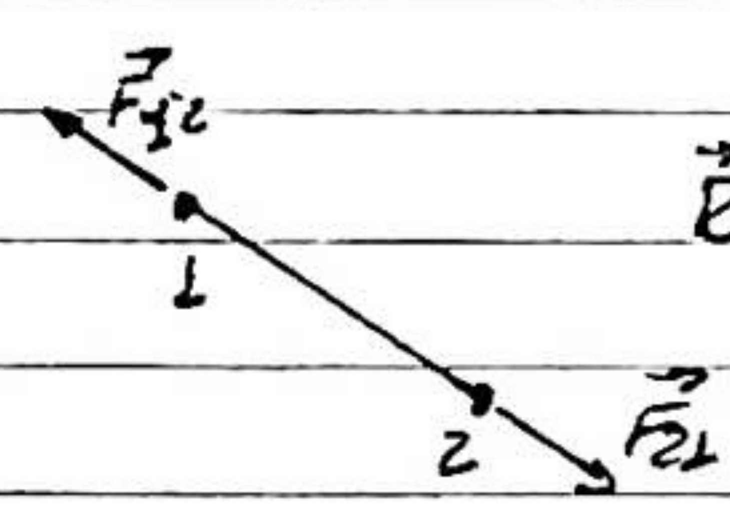
A) CALCULEMOS A RESULTANTE ~~DAS~~ TOTAL DO SISTEMA DE FORÇAS $(\vec{F}_i, P_i)$.

$$\vec{R} = \sum \vec{F}_i = \sum \left(\vec{F}_i^{ext} + \sum \vec{F}_{ij} \right) = \sum F_i^{ext} + \sum \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij}$$

$$\therefore \quad \underline{\vec{R} = \vec{R}^{ext} + \vec{R}^{int}}$$

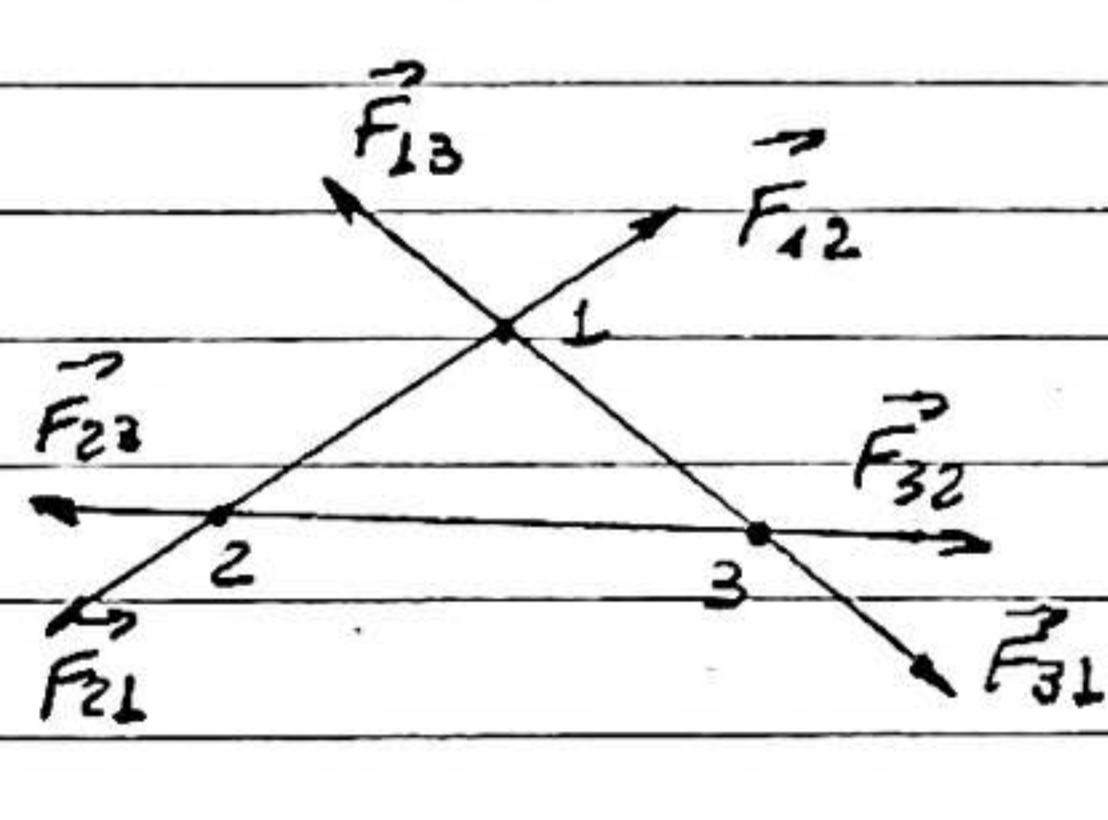
ONDE: $\vec{R}^{ext}$ – RESULTANTE DAS FORÇAS EXTERNAS
$\vec{R}^{int}$ – " " " INTERNAS

MAS, NOTE QUE: P/ $n = 2$



$\vec{R}^{int} = \vec{O}$

P/ $n = 3$



$\vec{R}^{int} = \vec{O}$

OU SEJA, PARA CADA $\vec{F}_{ij}$ TEMOS UMA $\vec{F}_{ji}$ TAL QUE:

$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, DAÍ TEREMOS $\vec{R}^{int} = \vec{0}$

E $\underline{\underline{\vec{R} = \vec{R}^{ext}}}$

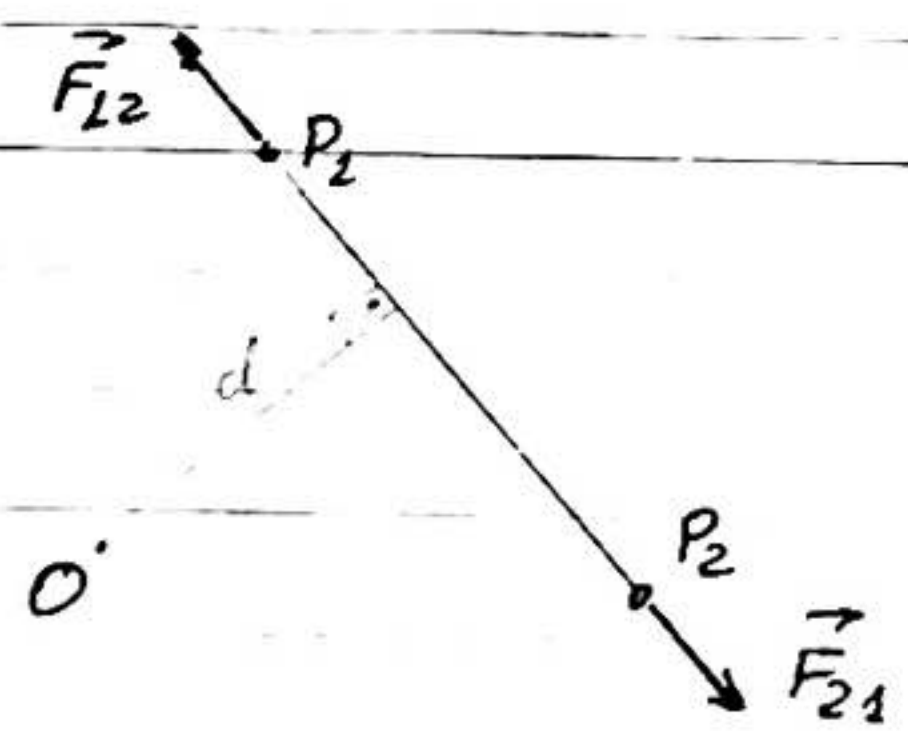
OU: "A RESULTANTE DE TODAS AS FORÇAS QUE AGEM NOS PONTOS DE UM SISTEMA É IGUAL À RESULTANTE DAS FORÇAS EXTERNAS AO SISTEMA CONSIDERADO, A RESULTANTE DAS FORÇAS INTERNAS É NULA."

B) CALCULEMOS AGORA O MOMENTO TOTAL DE TODAS AS FORÇAS QUE AGEM SOBRE O SISTEMA COM RELAÇÃO A UM PÓLO $\underline{O}$.

$$\vec{M}_O = \Sigma (P_i - O) \wedge \vec{F}_i$$

$$\vec{M}_O = \Sigma (P_i - O) \wedge (\vec{F}_i^{ext} + \Sigma \vec{F}_{ij}) =$$
$$= \Sigma (P_i - O) \wedge \vec{F}_i^{ext} + \Sigma \left[(P_i - O) \wedge \Sigma \vec{F}_{ij} \right]$$

P / n = 2



$$(P_1 - O) \wedge \vec{F}_{12} + (P_2 - O) \wedge \vec{F}_{21} =$$
$$= F_{12}\, d\, \vec{k} + (-F_{12})\, d\, \vec{k} = \vec{0}$$

P / n = 3

$$\Sigma (P_i - O) \wedge \Sigma \vec{F}_{ij} = \overbrace{\vec{OP_1} \wedge \vec{F}_{13} + \vec{OP_3} \wedge \vec{F}_{31}}^{\vec{0}} +$$
$$+ \overbrace{\vec{OP_2} \wedge \vec{F}_{21} + \vec{OP_1} \wedge \vec{F}_{12}}^{\vec{0}} +$$
$$+ \overbrace{\vec{OP_2} \wedge \vec{F}_{23} + \vec{OP_3} \wedge \vec{F}_{32}}^{\vec{0}} = \vec{0}$$

OU SEJA CADA PAR $\vec{F}_{ij}$ e $\vec{F}_{ji}$ TEM MESMO MOMENTO MAS COM SINAL CONTRÁRIO COM RELAÇÃO A $\forall$ PÓLO O, DAÍ OBTEMOS:

$$\Sigma\left[(P_i-O)\wedge\Sigma\vec{F}_{ij}\right]=\vec{0}=\vec{M}_0^{int}$$

$$\text{E}\quad \vec{M}_0=\Sigma(P_i-O)\wedge\vec{F}_i^{ext}=\vec{M}_0^{ext}$$

OU: "O MOMENTO TOTAL DAS FORÇAS QUE AGEM NOS PONTOS DE UM SISTEMA É IGUAL AO MOMENTO DAS FORÇAS EXTERNAS AO SISTEMA CONSIDERADO E O MOMENTO DAS FORÇAS INTERNAS É NULO.

OBS: $\vec{R}^{int}=\vec{0}$ E $\vec{M}_0=\vec{0}$ PODEMOS DIZER QUE "O SISTEMA DE FORÇAS INTERNAS A UM CONJUNTO DE PONTOS MATERIAIS É EQUIVALENTE A ZERO".

2. TEOREMA DO MOVIMENTO DO BARICENTRO

"O BARICENTRO DE UM SISTEMA SE MOVE COMO SE NELE FOSSE CONCENTRADA A MASSA TOTAL DO SISTEMA E NELE AGISSE UMA FORÇA CUJO VETOR REPRESENTATIVO É A RESULTANTE DAS FORÇAS EXTERNAS AO SISTEMA".

DE FATO: $m(G-O)=\Sigma m_i(P_i-O)$ (DEF. DE BARICENTRO)

DERIVANDO EM RELAÇÃO AO TEMPO:

$$m(\vec{v}_G-\vec{v}_0)=\Sigma m_i(\vec{v}_i-\vec{v}_0)$$

$$m\vec{v}_G-\cancel{m\vec{v}_0}=\Sigma m_i v_i-\Sigma \cancel{m_i v_0}\quad,\ \Sigma m_i=m$$

$$m\vec{v}_G = \Sigma m_i \vec{v}_i$$

DERIVANDO NOVAMENTE! $m\vec{a}_G = \Sigma m_i \vec{a}_i = \vec{R}$

OU $\quad m\vec{a}_G = \vec{R}$

CONSEQUÊNCIAS IMPORTANTES

1. TEOREMA DA CONSERVAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

"SE $\vec{R}=\vec{0}$, O BARICENTRO DO SISTEMA ESTÁ EM EQUILÍBRIO OU EM MOVIMENTO RETILÍNEO E UNIFORME"

$$\Sigma m_i \vec{a}_i = \Sigma m_i \dot{\vec{v}}_i = \dot{Q} = \vec{R}$$

$$\therefore \vec{R}=\vec{0} \Rightarrow m\vec{a}_G = \vec{0} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}_G}{dt} = 0$$

O QUE IMPLICA QUE $\vec{v}_G = CTE$ OU $\vec{v}_G = \vec{0}$

OBS: SE $\vec{v}_G = \vec{0} \Rightarrow (G-O) = CTE \Rightarrow$ A POSIÇÃO DO BARICENTRO NÃO SE ALTERA.!!

2. SE A SOMA DAS PROJEÇÕES DAS FORÇAS EXTERNAS NUMA CERTA DIREÇÃO $\vec{u}$ FOR NULA, ENTÃO:

$$\vec{R}\vec{u} = \vec{0}$$

$$m\vec{a}_{G(\vec{u})} = \vec{0} \rightarrow \vec{v}_{G(\vec{u})} = CTE$$
$$\rightarrow \vec{v}_{G(\vec{u})} = \vec{0}$$

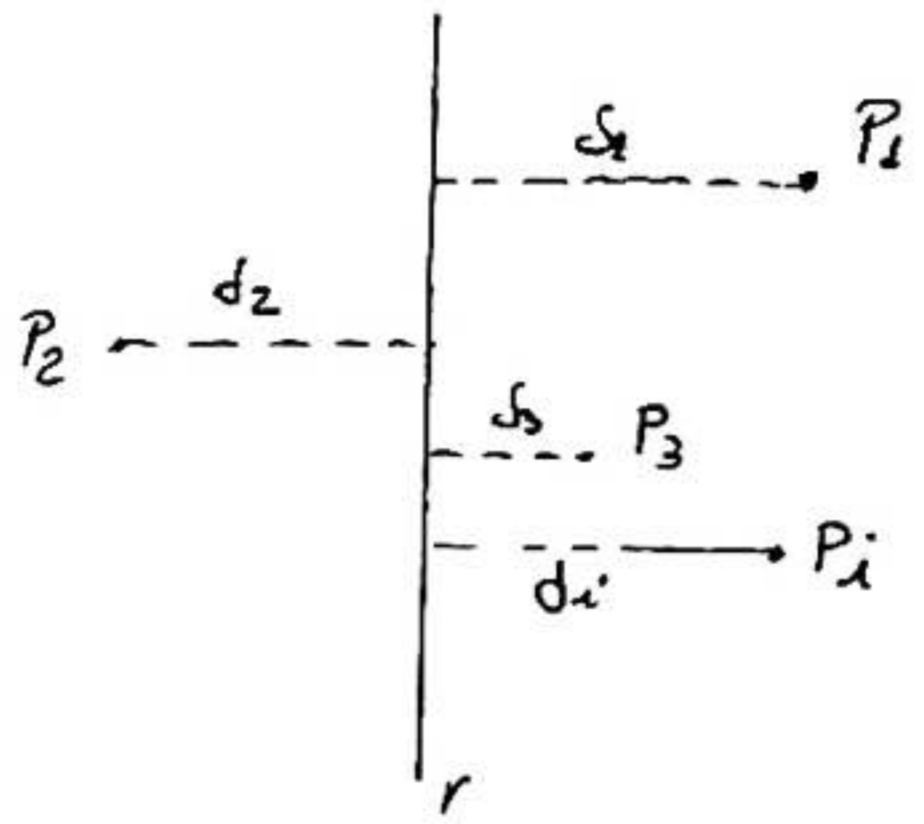
3. MOMENTOS E PRODUTOS DE INÉRCIA

3.1. APRESENTAÇÃO

VAMOS DEFINIR ALGUMAS QUANTIDADES QUE FORNECEM IMPORTANTES INDICAÇÕES SOBRE A DISTRIBUIÇÃO DA MATÉRIA NOS SISTEMAS MATERIAIS. ESTAS QUANTIDADES TÊM IMPORTÂNCIA QUER EM PROBLEMAS DE RESISTÊNCIA DOS MATERIAIS (DIMENSIONAMENTO, FLAMBAGEM, ETC...) QUER EM PROBLEMAS DE DINÂMICA COMO VEREMOS. ESTES RECEBEM O NOME DE MOMENTOS DE SEGUNDA ORDEM (MOMENTOS E PRODUTOS DE INÉRCIA).

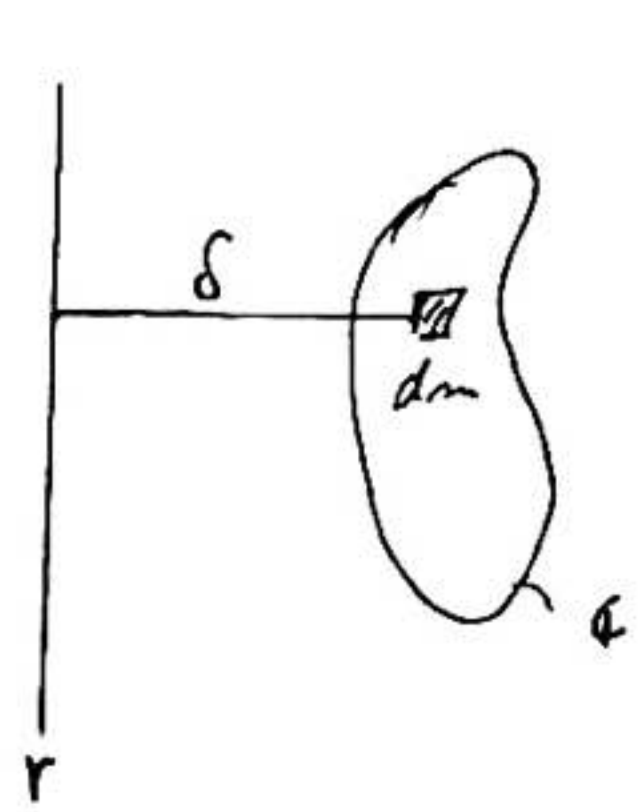
3.2 MOMENTO DE INÉRCIA

A) DE UM SISTEMA DE PONTOS (MATERIAIS) RÍGIDOS DE MASSAS m_i, COM RELAÇÃO A UM EIXO r



$$J_r = \sum m_i \delta_i^2$$

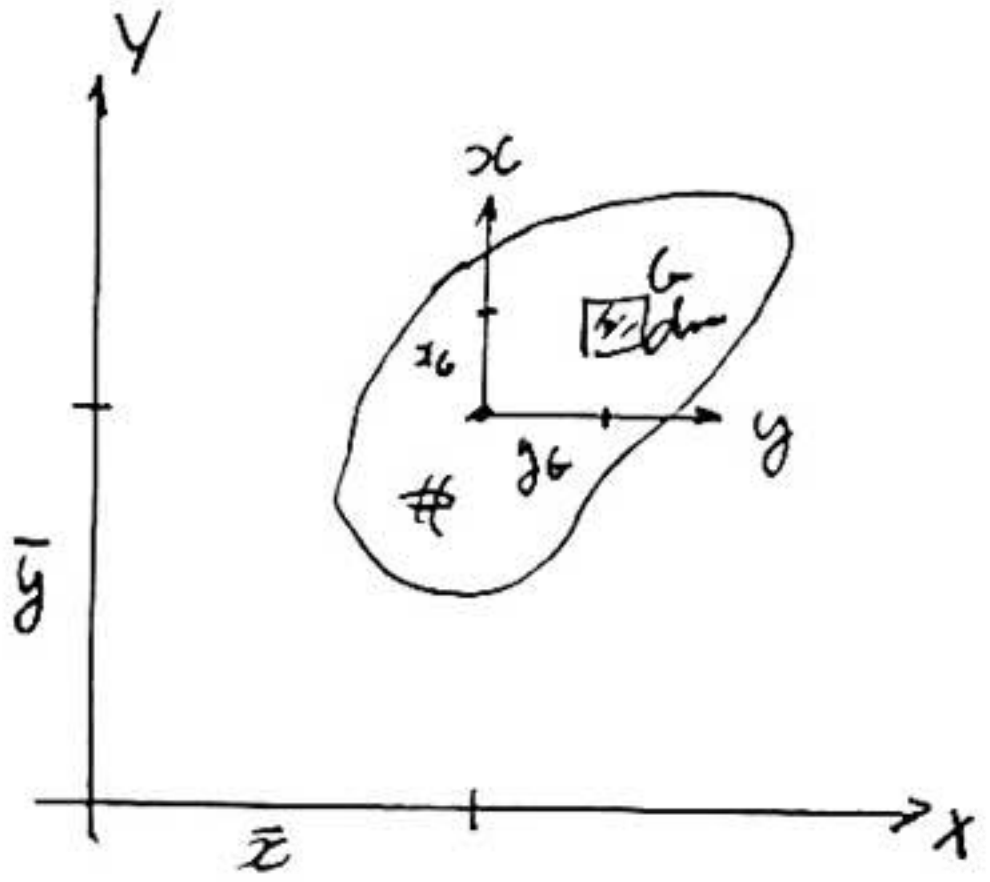
B) CASO CONTÍNUO



$$J_r = \int_C \delta^2 dM = \int_C \delta^2 \rho \, dC$$

$dM = \rho \, dC$, ρ = DENSIDADE.

3.3. TEOREMA DE STEINER (TRANSPORTE)



SEJA FIG PLANA AO LADO:

$$J_X = \int_C y^2\, dm = \int_C (\bar{y} + y_G)^2\, dm$$

$$J_X = \int (\bar{y}^2 + 2\bar{y}y_G + y_G^2)\, dm = \int_C \bar{y}^2 dm + 2\bar{y}\int_C y_G\, dm + \int_C y_G^2\, dm$$

DA DEF. DE BARICENTRO: $\bar{y}_G \cdot \int_C dm = \int_C y_G\, dm = 0$

NO CASO VIDE FIGURA

$$\underline{J_X = \bar{y}^2 m + J_{x_G}}$$

ANALOGAMENTE:

$$\underline{J_Y = \bar{x}^2 m + J_{y_G}}$$

F4

3.4. RAIO DE GIRAÇÃO

SEJA $\underline{m}$ A MASSA TOTAL DO SISTEMA DE PONTOS MATERIAIS

$$m = \Sigma m_i \quad \text{OU} \quad m \int_C \rho\, d\sigma \quad \text{(CASO CONTÍNUO)}$$

SEJA $\underline{J_r}$ O MOMENTO DE INÉRCIA EM RELAÇÃO A UM EIXO $\underline{r}$

AO ESCALAR $\quad R_r = \sqrt{J_r / m}$

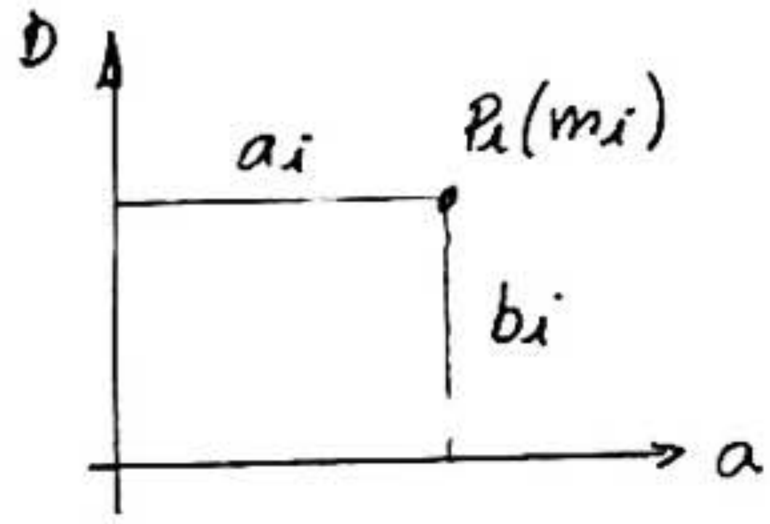
DÁ-SE O NOME DE "RAIO DE GIRAÇÃO" DO SISTEMA EM RELAÇÃO AO EIXO r

INTERPRETAÇÃO: COMO $J_r = m R_r^2$, R_r É A DISTÂNCIA AO EIXO r DE UM PONTO ONDE PODEMOS CONCENTRAR TODA A MASSA DO SISTEMA S/ ALTERAR SEU MOMENTO DE INÉRCIA.

E S

3.5. PRODUTOS DE INÉRCIA (MOM. CENTRÍFUGOS DE INÉRCIA)

A) DEFINIÇÃO:



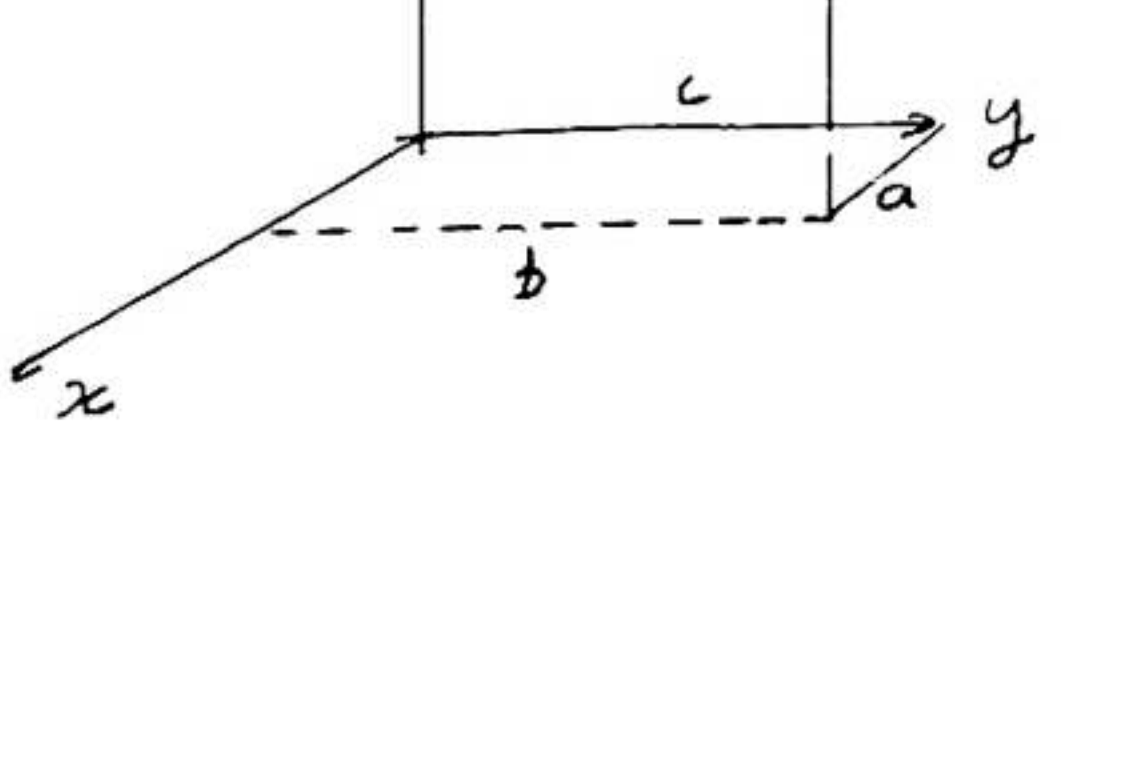
$$J_{ab} = \Sigma a_i b_i m_i$$

NO CASO CONTÍNUO:

$$J_{ab} = \int_C a b \cdot dm = \int_C a b \rho \, d\ell$$

DAÍ: $J_{xy} = \int_C xy \, dm$; $J_{xz} = \int_C xz \, dm$; $J_{yz} = \int_C yz \, dm$.

B) TRANSPORTE:



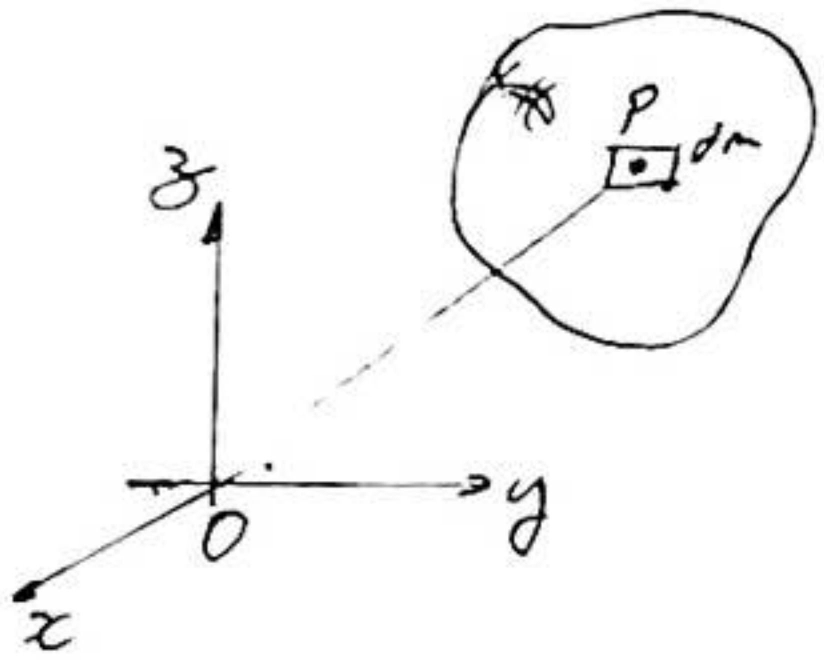
$$J_{xy} = J_{XY} + mab$$

$$J_{xz} = J_{XZ} + mac$$

$$J_{yz} = J_{YZ} + mbc$$

3.6. MOMENTO POLAR (EM RELAÇÃO A UM POLO)

$$J_O = \int_C (P-O)^2 \, dm \qquad \text{OU} \qquad J_O = \int_C (x^2+y^2+z^2) \, dm$$



OU $\quad 2J_O = J_x + J_y + J_z$

NO PLANO: $J_O = J_z = J_x + J_y$

3.7. MATRIZ DE INÉRCIA.

À TODO CORPO RÍGIDO ESTÁ ASSOCIADA UMA MATRIZ SIMÉTRICA, DEFINIDA DA SEGUINTE FORMA:

$$\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_z \end{pmatrix}$$

3.8. COMPOSIÇÃO DE MOMENTOS DE INÉRCIA.

O MOMENTO DE INÉRCIA DE UM CORPO FORMADO POR DOIS OU MAIS CORPOS É A SOMA DOS MOMENTOS DE INÉRCIA DOS COMPONENTES.