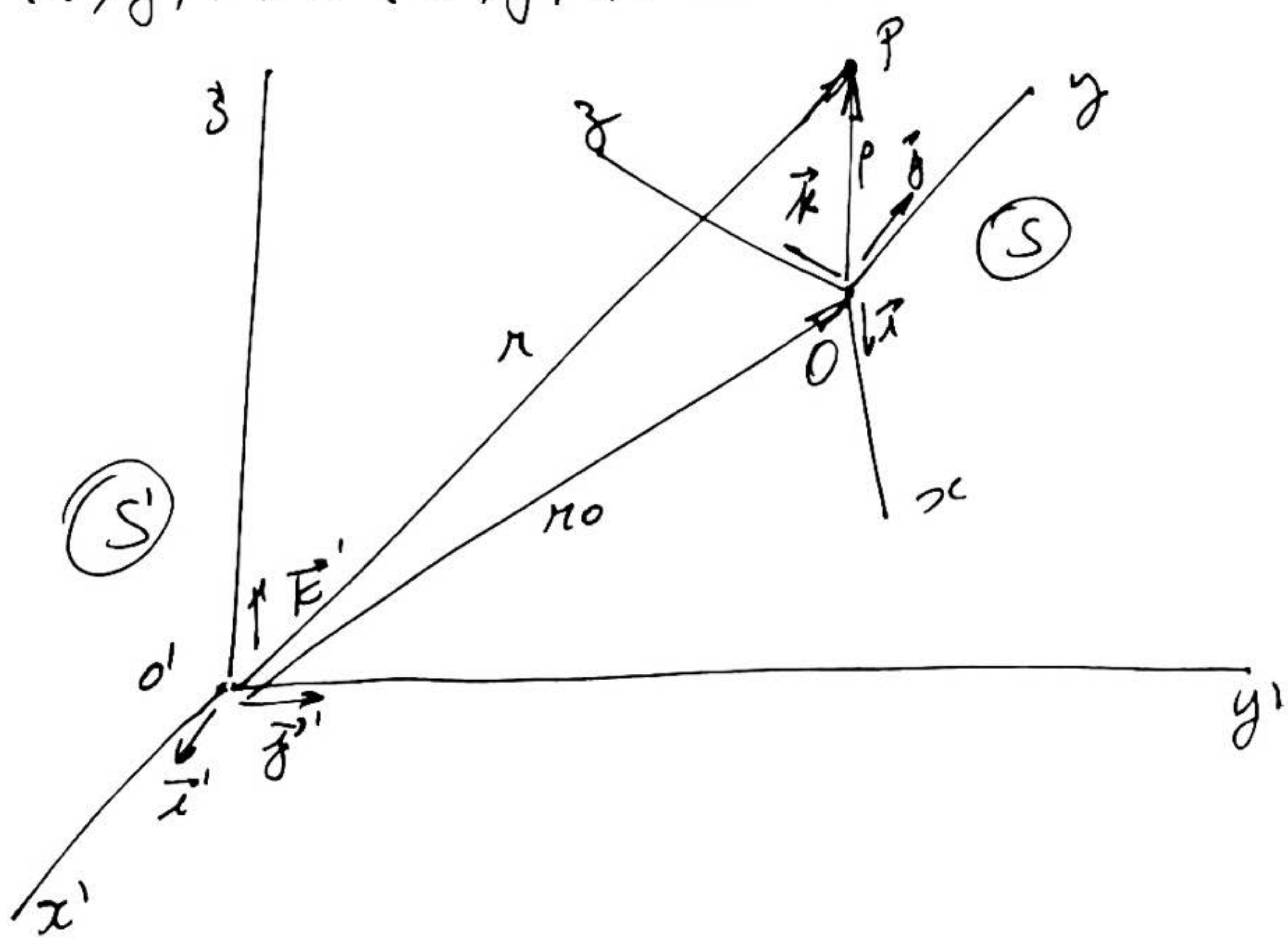
COMPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS

O MOVIMENTO DE UM SÓLIDO PODE SER DEFINIDO PELO VETOR VELOCIDADE DE UM DE SEUS PONTOS E PELO VETOR ROTAÇÃO DESSE SÓLIDO. COM ISTO, ATRAVÉS DA FÓRMULA DE POISON, PODEMOS CONHECER A VELOCIDADE DE QUALQUER OUTRO PONTO DO SÓLIDO.

UM SISTEMA DE REFERÊNCIA, COM UM SISTEMA DE COORDENADAS $(Oxyz)$ FIXO EM RELAÇÃO A ELE, PODE SER CONSIDERADO COMO UM SÓLIDO E, ASSIM, SEU MOVIMENTO PODE SER DESCRITO PELA VELOCIDADE DA ORIGEM O E PELO VETOR DE ROTAÇÃO DESSE SISTEMA, EM RELAÇÃO A OUTRO REFERENCIAL.

SEJAM DOIS REFERENCIAIS, S E S', DE EIXOS (Ox, Oy, Oz), $(O'x', O'y', O'z')$ E VERSORES $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ RESPECTIVAMENTE.



SUPÕE-SE S' FIXO E CONHECE-SE O MOVIMENTO DE S EM RELAÇÃO A S', OU SEJA, CONHECE-SE A FUNÇÃO $\vec{r}_0(t)$ E O VETOR ROTAÇÃO $\vec{\omega}(t)$ DE S MEDIDO POR UM OBSERVADOR EM S'.

CHAMAREMOS $\vec{\omega}$ DE "VETOR DE ROTAÇÃO DE ARRASTAMENTO".

DEFINIREMOS:

- <u>MOVIMENTO RELATIVO DE P (EM RELAÇÃO A S)</u>: É O MOVIMENTO DE P VISTO POR UM OBSERVADOR EM S (NOTE-SE QUE P É UM PONTO MÓVEL - NÃO ESTÁ FIXO EM S NEM EM S')

- <u>MOVIMENTO DE ARRASTAMENTO</u>: É O MOVIMENTO, EM RELAÇÃO A S', DO PONTO DE S QUE, NAQUELE INSTANTE, COINCIDE COM P. É O MESMO QUE SUPOR P FIXO EM S A CADA INSTANTE, E OBSERVAR SEU MOVIMENTO EM RELAÇÃO A S'.

- <u>MOVIMENTO ABSOLUTO OU RESULTANTE</u>: É O MOVIMENTO DE P EM RELAÇÃO A S'.

O PROCESSO QUE PERMITE CORRELACIONAR OS 3 TIPOS DE MOVIMENTOS CHAMA-SE <u>"COMPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS"</u>, E PRESSUPÕE CONHECIDO O MOVIMENTO DE S EM RELAÇÃO A S'.

ATÉ AGORA TEMOS EXPRESSÕES PARA O MOVIMENTO

ABSOLUTO. VAMOS REDEDUZIR AQUELAS EXPRESSÕES (VELOCIDADE E ACELERAÇÃO), SEPARANDO AS PARCELAS COMPONENTES A CADA TIPO DE MOVIMENTO.

A COMPOSIÇÃO DE MOVIMENTOS PODE SER FEITA A PARTIR DA EXPRESSÃO:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\rho}$$

ONDE: $\vec{\rho} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

DERIVANDO EM RELAÇÃO AO TEMPO:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_0 + \dot{\vec{\rho}} = \dot{\vec{r}}_0 + x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}} + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \qquad (I)$$

JÁ VIMOS QUE:

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \wedge \vec{i}$$
$$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}$$
$$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}$$

PORTANTO: $\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P-O) + \vec{v}_r$

DE ACORDO COM AS DEFINIÇÕES APRESENTADAS, VEMOS:

$\vec{v}$ → VELOCIDADE ABSOLUTA (OU RESULTANTE) DO PONTO P

$\vec{v}_r$ → VELOCIDADE RELATIVA DO PONTO P.

$\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P-O)$ → SERIA A VELOCIDADE DE P SE ESTE ESTIVESSE RIGIDAMENTE LIGADO A S, OU SEJA, É A VELOCIDADE DE ARRASTAMENTO DE P.

ASSIM, A LEI DE COMPOSIÇÃO DE VELOCIDADES É:

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_a + v_r}$$

COM: $\vec{v}_a = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P-O)$ E $\vec{v}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$

LEMBRETE: $\vec{v}_0, \vec{\omega} \rightarrow$ EM RELAÇÃO A S'

$\vec{v}_a \leftrightarrow$ P FIXO EM S

$\vec{v}_r \leftrightarrow$ S FIXO, IGNORA-SE S'.

DERIVANDO-SE NOVAMENTE (I) EM RELAÇÃO AO TEMPO OBTEMOS:

$$\ddot{\vec{x}} = \vec{a} = \frac{d}{dt}\left[\dot{\vec{r}}_0 + \vec{\omega} \wedge (P-O) + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right]$$

TEMOS:

$$\ddot{\vec{r}}_0 = \vec{a}_0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{\omega} \wedge (P-O)\right] = \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge (\vec{v} - \vec{v}_0) =$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (P-O) + \vec{v}_r\right] =$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (P-O)\right] + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right] = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \dot{x}\dot{\vec{i}} + \dot{y}\dot{\vec{j}} + \dot{z}\dot{\vec{k}} =$$

$$= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \left[\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\right] =$$

$$= \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

ASSIM PODEMOS ESCREVER:

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} + \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (P-O)\right] + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

O TRINÔMIO: $\vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)]$
CORRESPONDE À ACELERAÇÃO DE P CONSIDERADO RIGIDAMENTE LIGADO A S: É A ACELERAÇÃO DE ARRASTAMENTO

$$\vec{a}_a = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge [\vec{\omega} \wedge (P-O)]$$

OS TERMOS: $\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$ CORRESPONDEM À ACELERAÇÃO RELATIVA:

$$\vec{a}_r = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

FINALMENTE, O TERMO QUE RESTA:

$$2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

É A CHAMADA "ACELERAÇÃO COMPLEMENTAR OU CORIOLIS"

DESTA FORMA, A LEI DE COMPOSIÇÃO DE ACELERAÇÕES SERÁ:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_a + \vec{a}_r + \vec{a}_c}$$

PARA CORPOS RÍGIDOS

SEJA $\vec{\Omega}$ — VETOR DE ROTAÇÃO ABSOLUTA DO CORPO.

$\vec{\Omega}_r$ — VETOR DE ROTAÇÃO RELATIVA DO CORPO, EM RELAÇÃO AO REFERENCIAL MÓVEL.

$\vec{\omega}$ — VETOR DE ROTAÇÃO DO REFERENCIAL MÓVEL (ABSOLUTA, OBVIAMENTE).

TEMOS, PARA UM PONTO P DO CORPO, SENDO A OUTRO PONTO DO CORPO:

$$\vec{v}_{P(abs)} = \vec{v}_{A(abs)} + \vec{\Omega} \wedge (P-A) \qquad (A)$$

$$\vec{v}_{P,r} = \vec{v}_{A,r} + \vec{\Omega}_r \wedge (P-A)$$

$$\vec{v}_{P,a} = \vec{v}_{A,a} + \vec{\omega} \wedge (P-A)$$

MAS, $\vec{v}_{P(abs)} = \vec{v}_{P,r} + \vec{v}_{P,a} =$

$$= \vec{v}_{A,r} + \vec{v}_{A,a} + (\vec{\Omega}_r + \vec{\omega}) \wedge (P-A) =$$

$$= \vec{v}_{A(abs)} + (\vec{\Omega}_r + \vec{\omega}) \wedge (P-A) \qquad (B)$$

COMO (A) E (B) DEVEM SER VÁLIDAS PARA QUALQUER PONTO P DO SÓLIDO, CHEGA-SE A:

$$\boxed{\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_r + \vec{\omega}}$$ "LEI DE COMPOSIÇÃO DE VETORES DE ROTAÇÃO"

DERIVANDO:

$$\boxed{\dot{\vec{\Omega}} = \dot{\vec{\Omega}}_r + \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \wedge \vec{\Omega}_r}$$ "LEI DE COMPOSIÇÃO DE ACELERAÇÕES ROTACIONAIS ANGULARES"