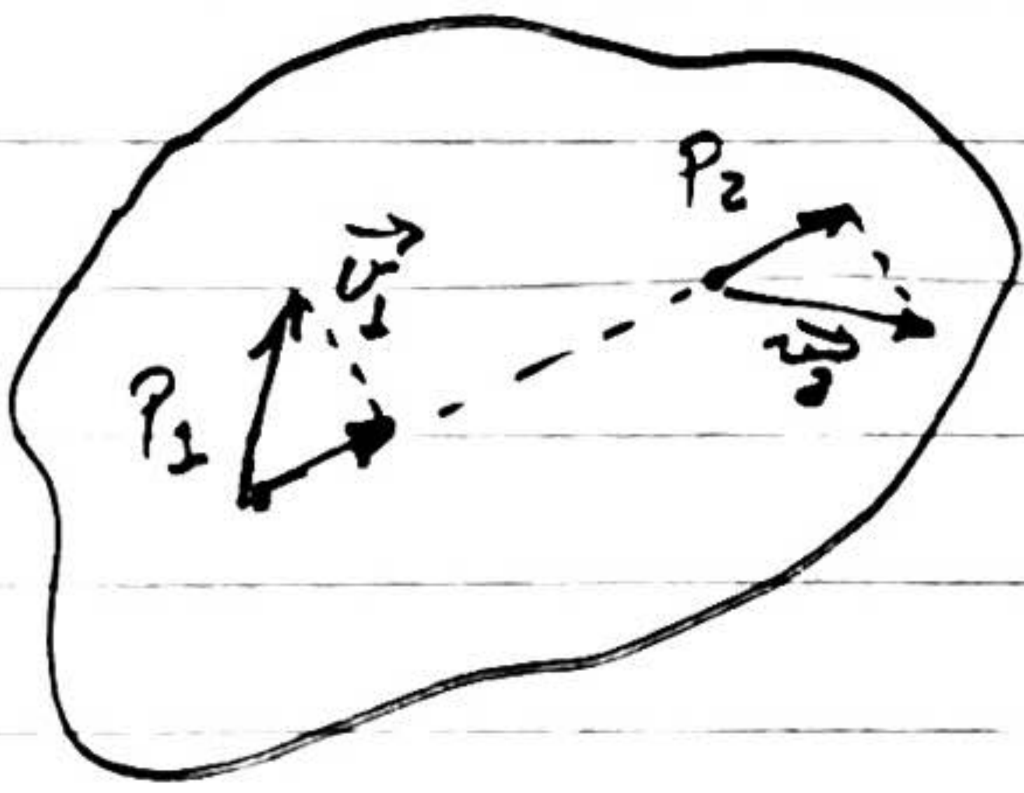
VI. CINEMÁTICA DO CORPO RÍGIDO

VI.1. CONCEITO DE CORPO RÍGIDO

UM CORPO RÍGIDO, OU SÓLIDO (INDEFORMÁVEL), É UM SISTEMA MATERIAL EM QUE AS DISTÂNCIAS ENTRE PONTOS E ÂNGULOS ENTRE RETAS DESSE SÓLIDO PERMANECEM CONSTANTES.

PROPRIEDADE FUNDAMENTAL (IMPORTANTE):



AS PROJEÇÕES DOS VETORES VELOCIDADE DE DOIS PONTOS DE UM SÓLIDO NA DIREÇÃO DA RETA QUE OS UNE SÃO IGUAIS:

$$\vec{v}_1 (P_1 - P_2) = \vec{v}_2 (P_1 - P_2)$$

$$\text{OU} \quad (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) . (P_1 - P_2) = 0$$

DE FATO, PARA UM SÓLIDO: $|P_1 - P_2| = cte \Rightarrow (P_1 - P_2)^2 = CTE$

$$\frac{d}{dt}(P_1 - P_2)^2 = 2(P_1 - P_2)\frac{d}{dt}(P_1 - P_2) = 0 \Rightarrow (P_1 - P_2)(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = 0$$

NOTAS:

A) "DESLOCAMENTOS RÍGIDOS" E "ATO DE MOVIMENTO" DE UM SÓLIDO.

DESLOCAMENTO RÍGIDO É O DESLOCAMENTO DE UM CORPO RÍGIDO ENTRE UMA POSIÇÃO INICIAL (NUM INSTANTE t) E OUTRA POSIÇÃO

(NUM INSTANTE $t+\Delta t$). REFERE-SE APENAS A ESSAS DUAS POSIÇÕES ("DUAS FOTOGRAFIAS"), NÃO LEVANDO EM CONTA O QUE OCORREU NOS INSTANTES INTERMEDIÁRIOS. O ESTUDO GEOMÉTRICO DOS DESLOCAMENTOS RÍGIDOS FORNECE RECURSOS PARA PASSAR AO ESTUDO DOS MOVIMENTOS PROPRIAMENTE DITOS, PERMITINDO DETERMINAR A DISTRIBUIÇÃO NUM DADO INSTANTE, DAS VELOCIDADES DOS PONTOS QUE CONSTITUEM O SÓLIDO. ESSE CONJUNTO DE VELOCIDADES CONSTITUI O CHAMADO "ATO DE MOVIMENTO DE UM SÓLIDO".

B) "GRAUS DE LIBERDADE" DE UM MOVIMENTO SÓLIDO

UM SÓLIDO NO ESPAÇO TEM SUA POSIÇÃO DEFINIDA QUANDO SE FIXAM TRÊS DOS SEUS PONTOS (NÃO ALINHADOS):

1º PONTO $P_1 \rightarrow$ FIXA 3 PARÂMETROS

2º PONTO $P_2 \rightarrow$ FIXA 2 PARÂMETROS

3º PONTO $P_3 \rightarrow$ FIXA 1 PARÂMETRO

VI.2. TIPOS DE MOVIMENTO DE UM SÓLIDO

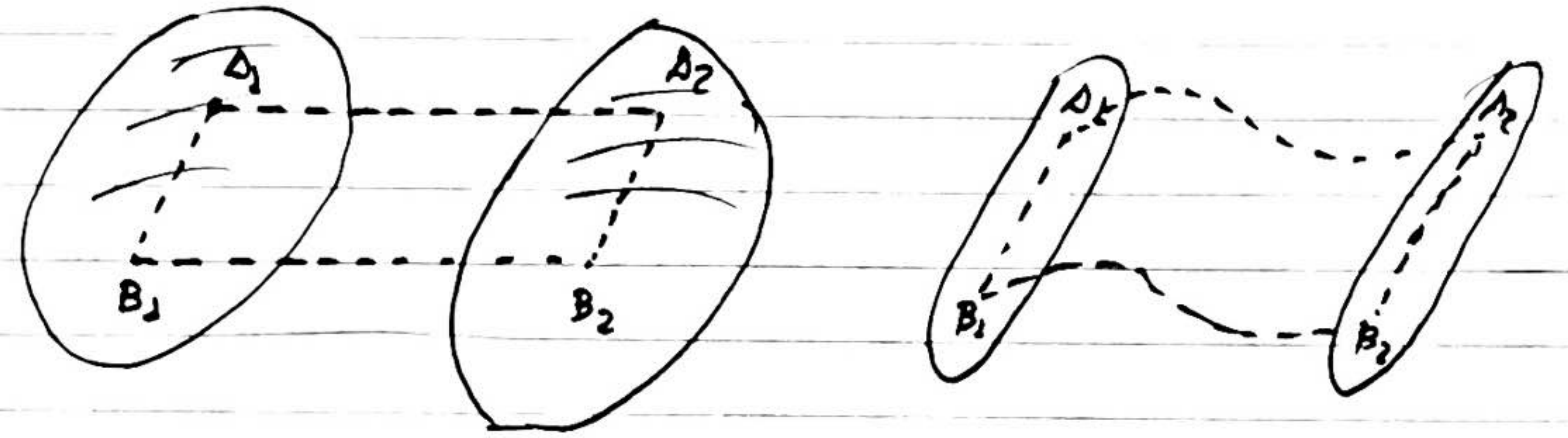
PODEMOS CLASSIFICAR OS MOVIMENTOS POSSÍVEIS DE UM SÓLIDO NOS SEGUINTES TIPOS:

1. TRANSLAÇÃO
2. ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO
3. MOVIMENTO ROTO-TRANSLATÓRIO
4. MOVIMENTO PLANO GERAL
5. MOVIMENTO AO REDOR DE UM PONTO FIXO
6. MOVIMENTO HELICOIDAL
7. MOVIMENTO GERAL.

VI.2.1. TRANSLAÇÃO

QUALQUER RETA DO SÓLIDO MANTÉM A DIREÇÃO DURANTE O MOVIMENTO. AS TRAJETÓRIAS DOS PONTOS SÃO "PARALELAS".

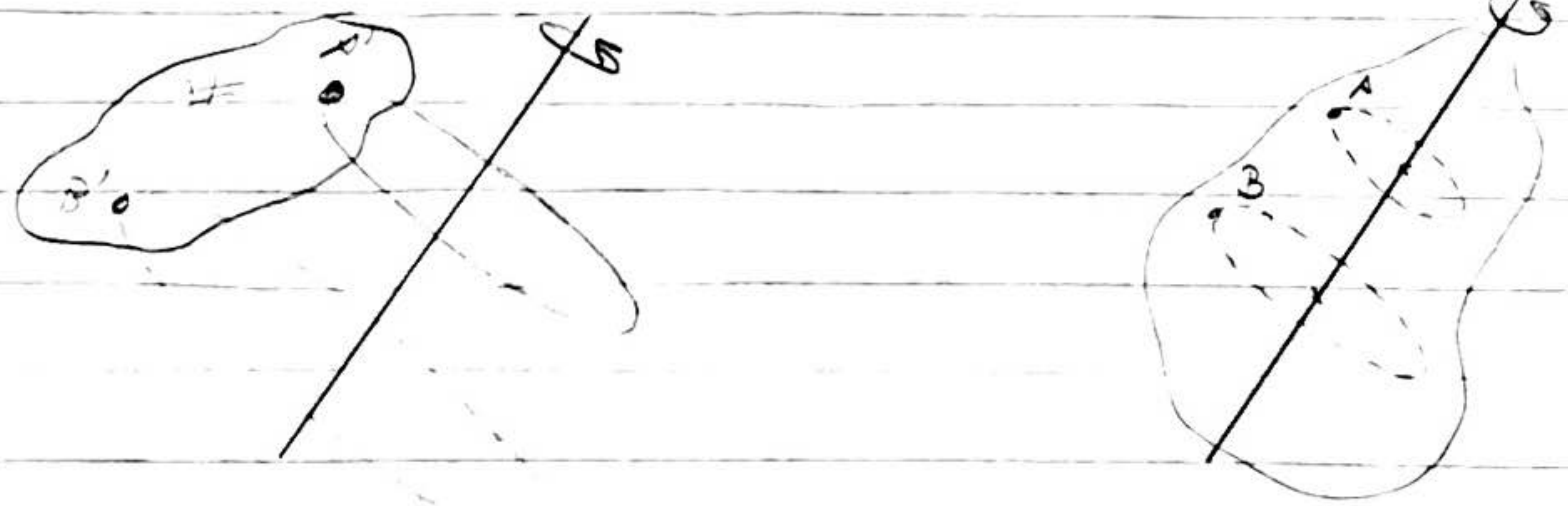
SE AS TRAJETÓRIAS SÃO RETAS : TRANSLAÇÃO RETILÍNEA
CASO CONTRÁRIO : TRANSLAÇÃO CURVILÍNEA



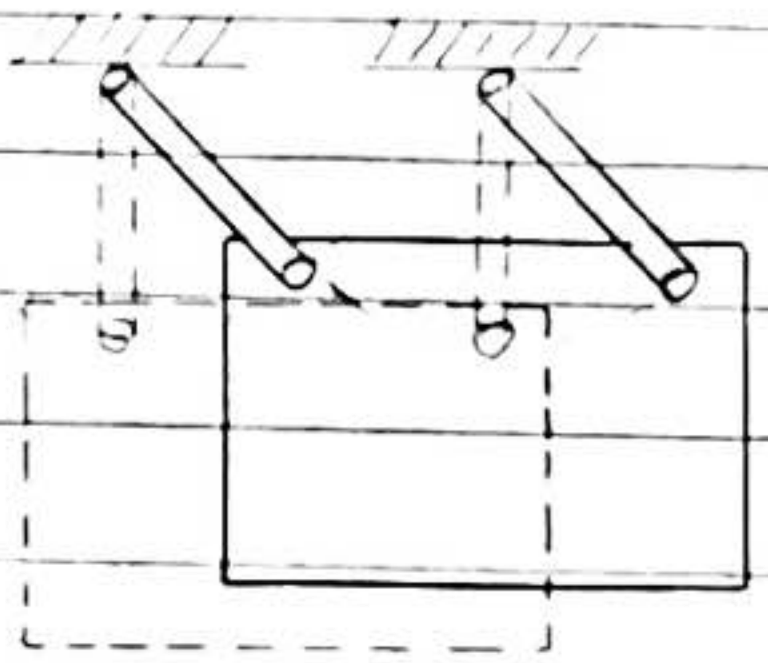
TRANSLAÇÃO RETILÍNEA   TRANSLAÇÃO CURVILÍNEA.

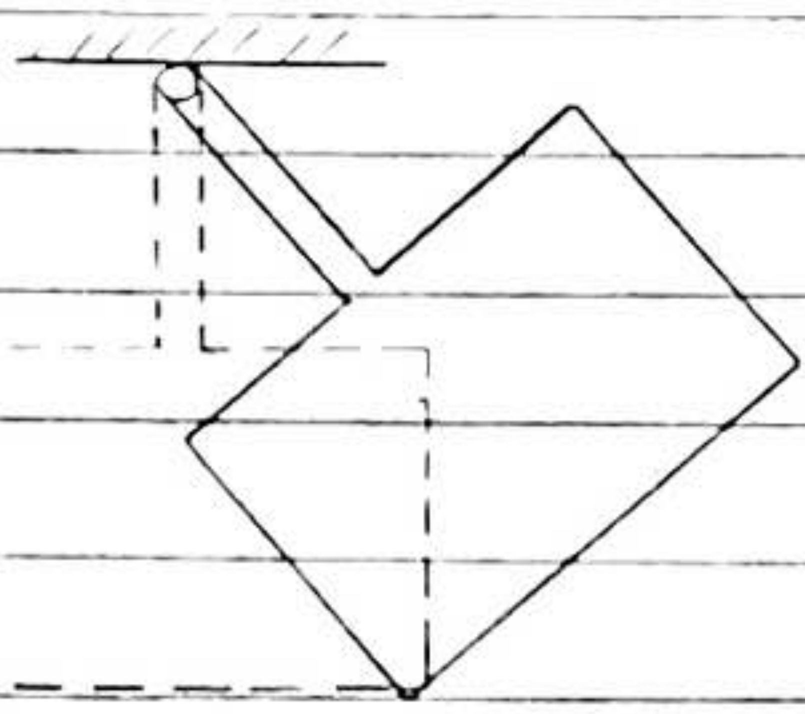
VI.2.2 - ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO

OS PONTOS SE DESLOCAM EM PLANOS PARALELOS, DESCREVENDO CIRCUNFERÊNCIAS CUJOS CENTROS ESTÃO SOBRE AQUELE EIXO. SE O EIXO, CHAMADO DE "EIXO DE ROTAÇÃO", INTERCEPTA O SÓLIDO, OS PONTOS SITUADOS SOBRE ELE TÊM VELOCIDADE E ACELERAÇÃO NULAS.



NÃO CONFUNDIR ROTAÇÃO COM CERTOS TIPOS DE TRANSLAÇÃO CURVILÍNEA :





PLACA EM TRANSLAÇÃO CURVILÍNEA   PLACA EM ROTAÇÃO

VI-2-3. MOVIMENTO ROTO TRANSLATÓRIO

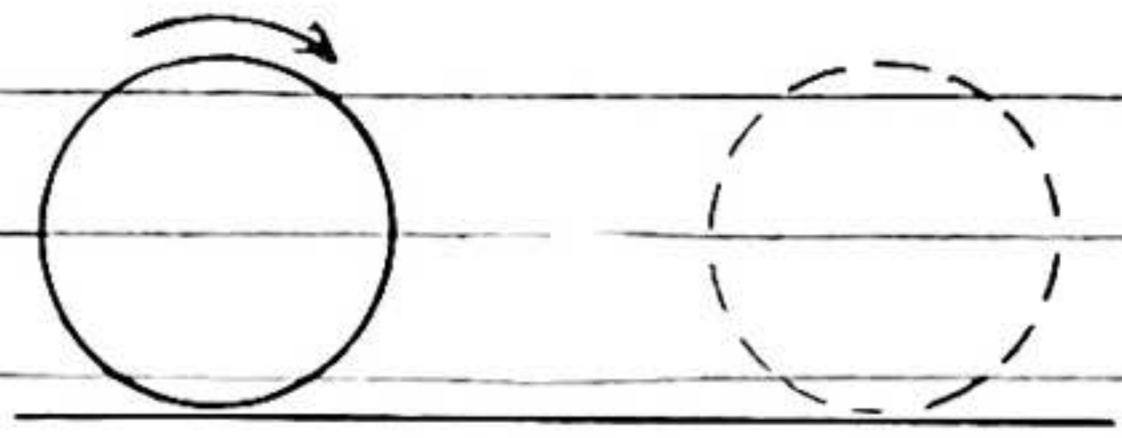
PRESERVA (MANTÉM) A DIREÇÃO DO EIXO DE ROTAÇÃO, OU SEJA, O EIXO DE ROTAÇÃO TEM UM MOVIMENTO DE TRANSLAÇÃO.

VI.2.4. MOVIMENTO PLANO GERAL.

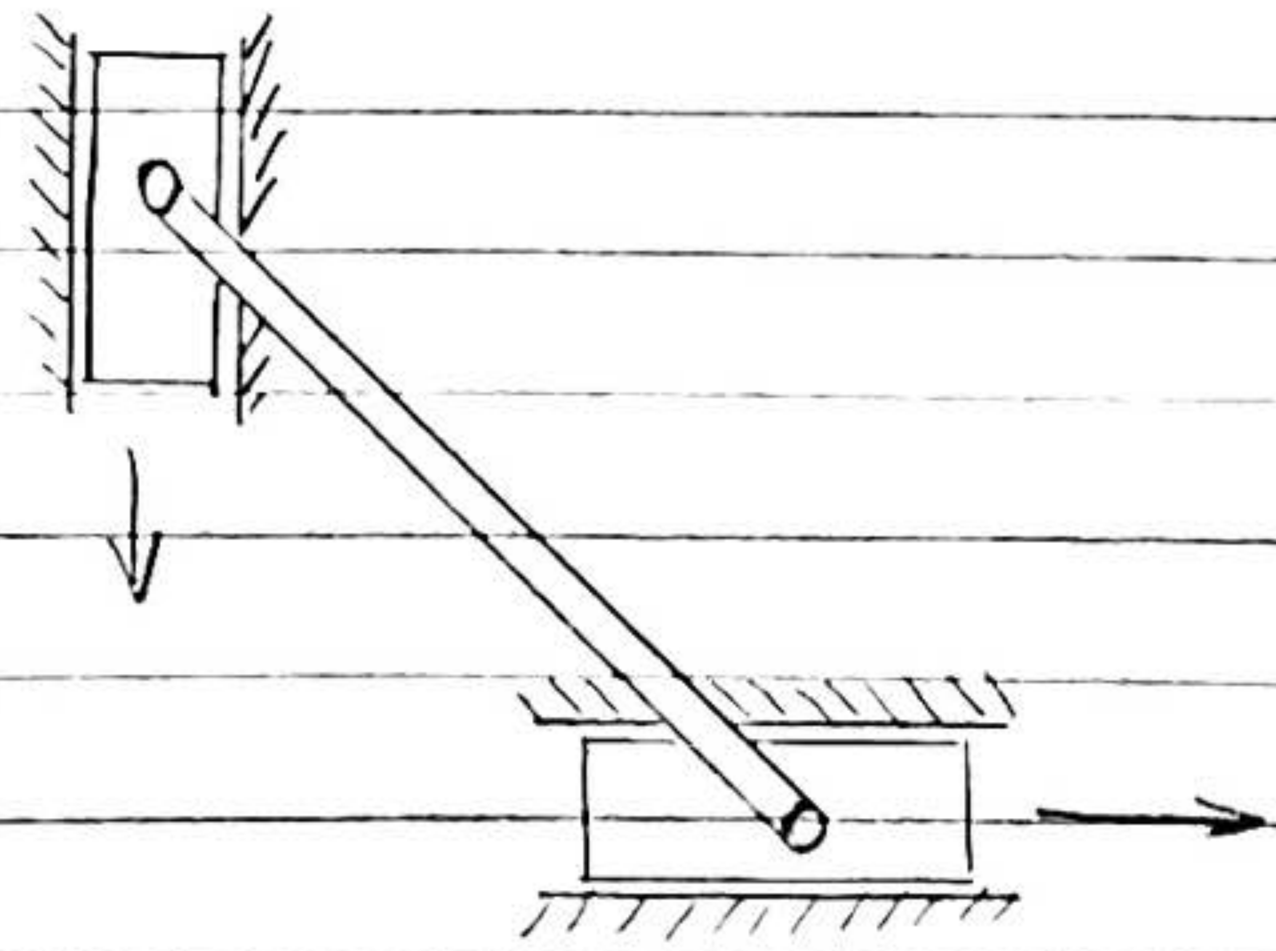
É UM MOVIMENTO ROTO-TRANSLATÓRIO EM QUE TODAS AS VELOCIDADES SÃO ORTOGONAIS AO EIXO DE ROTAÇÃO (OU SEJA, O EIXO DE ROTAÇÃO DESLOCA-SE APENAS TRANSVERSALMENTE).

TODOS OS PONTOS DESLOCAM-SE EM PLANOS PARALELOS.

EXEMPLOS: RODA:



HASTE DESLIZANTE:



VI-2.5 - MOVIMENTO AO REDOR DE UM PONTO FIXO.

TODAS AS PARTÍCULAS DESCREVEM TRAJETÓRIAS EM SUPERFÍCIES ESFÉRICAS COM CENTRO NAQUELE PONTO.

EXEMPLOS: PIÃO; AEROMODELO; HASTE DE "JOY STICK", ETC...

VI.2.6 - MOVIMENTO HELICOIDAL

MANTÉM UMA RETA SE DESLOCANDO SOBRE SI MESMA.

EXEMPLOS: BROCA DE FURADEIRA; HÉLICE DE AVIÃO (EM LINHA RETA)

VI.2.7 - MOVIMENTO GERAL

QUALQUER MOVIMENTO DE CORPO RÍGIDO, INCLUÍDO OU NÃO NOS ANTERIORES.

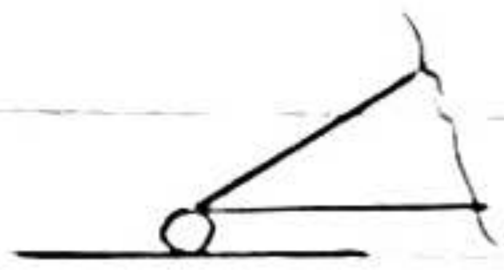
VI-2.8 - GRAUS DE LIBERDADE DE UM SÓLIDO

UM SÓLIDO NO ESPAÇO TEM SEIS GRAUS DE LIBERDADE, OU SEJA TEM SUA POSIÇÃO DEFINIDA POR SEIS PARÂMETROS <u>INDEPENDENTES</u>, POR EXEMPLO, EM UM SISTEMA CARTESIANO, PELAS TRÊS COORDENADAS DE UM DE SEUS PONTOS E OS TRÊS ÂNGULOS QUE A DIREÇÃO DE UM DE SEUS PLANOS, ORIENTADO, FAZ COM OS EIXOS Ox, Oy e Oz.

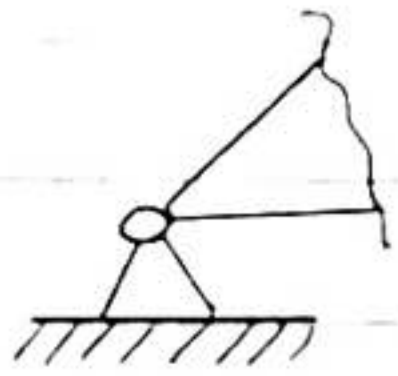
VI-2.9 - VÍNCULOS

VÍNCULOS SÃO RESTRIÇÕES AOS GRAUS DE LIBERDADE. VEJAMOS ALGUNS DELES, IDEAIS:

A) ARTICULAÇÃO:



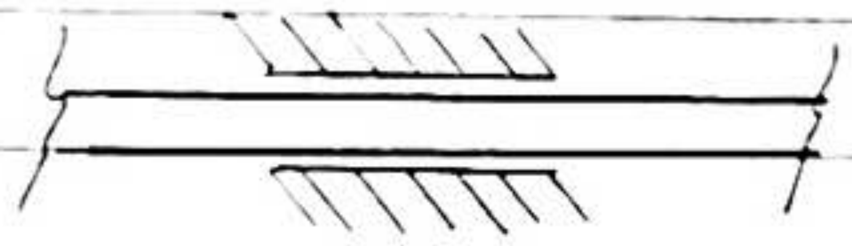
OU



IMPEDE QUE O PONTO VINCULADO SE MOVA EM QUALQUER DIREÇÃO. O SÓLIDO PODE GIRAR AO REDOR DESSE PONTO.

EXEMPLOS: ANTENA TV; "JOY-STICK".

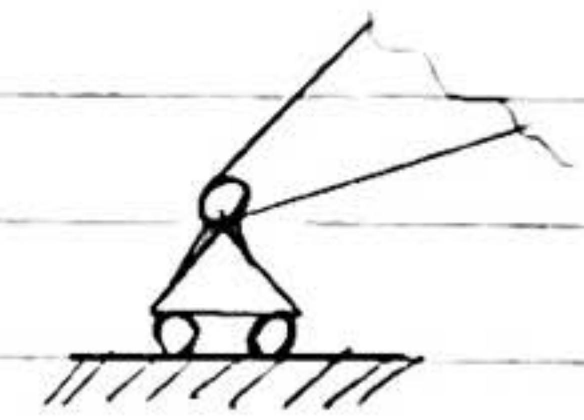
B) ANEL:



CORRESPONDE A UMA CIRCUNFERÊNCIA (ANEL) FIXA, IMPEDINDO O MOVIMENTO DO PONTO EM QUALQUER DIREÇÃO ORTOGONAL AO EIXO DO ANEL. NÃO IMPEDE GIRO DO SÓLIDO

EXEMPLO: MANCAL DE EIXOS.

C) APOIO SIMPLES:



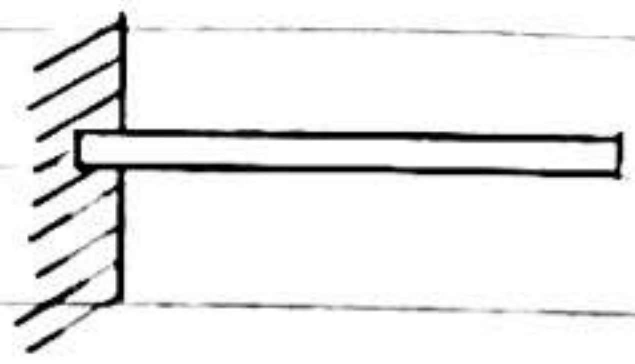
IMPEDE O DESLOCAMENTO DO PONTO NA DIREÇÃO ORTOGONAL AO PLANO DE APOIO.

SE EM AMBOS OS SENTIDOS → BILATERAL

CASO CONTRÁRIO → UNILATERAL.

EXEMPLO: RODAS DE CADEIRA DE ESCRITÓRIO; MESA DE TV; ETC

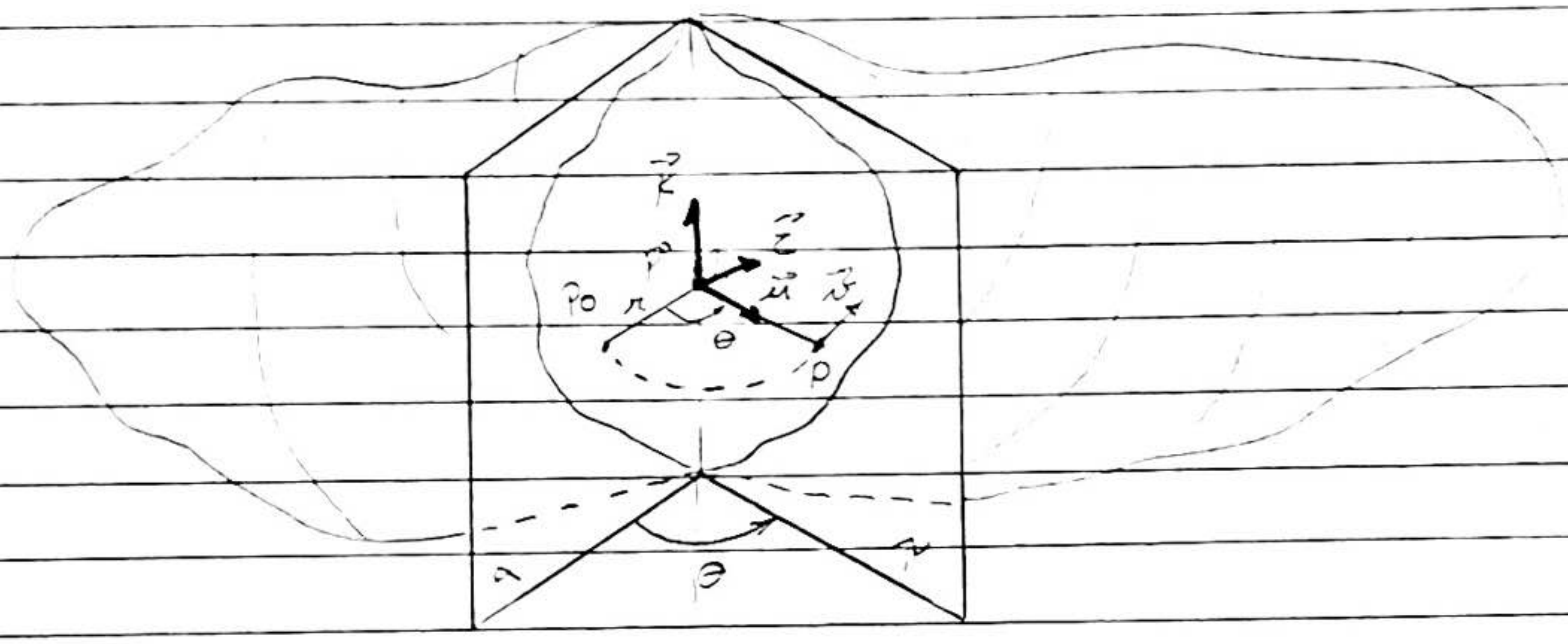
D) ENGASTE:



IMPEDE O MOVIMENTO DO ~~SÓLIDO~~ PONTO EM QUALQUER DIREÇÃO E TAMBÉM O GIRO DO SÓLIDO.

II.3. VETOR DE ROTAÇÃO E FÓRMULA DE POISSON.

II.3.1. ROTAÇÃO EM TORNO DE UM EIXO FIXO.



NO CASO DE ROTAÇÃO DE UM CORPO RÍGIDO EM TORNO DE UM EIXO FIXO, EM QUALQUER INSTANTE TODOS OS PONTOS À MESMA DISTÂNCIA DO EIXO TÊM A MESMA VELOCIDADE E ACELERAÇÃO (DECORRE DA RIGIDEZ DO SÓLIDO).

ASSIM, TODOS OS PONTOS QUE PERTENCEM A UM PLANO QUE PASSA PELO EIXO MANTÊM-SE NESSE PLANO, ENQUANTO ESTE GIRA EM TORNO DAQUELE EIXO.

DESTA FORMA, TOMANDO UM PLANO FIXO DE REFERÊNCIA (α), QUE PASSA PELO EIXO, E UM PLANO (π) DO SÓLIDO, QUE NO INSTANTE INICIAL COINCIDE COM α, A VARIAÇÃO DO ÂNGULO ENTRE OS DOIS PLANOS POR UNIDADE DE TEMPO É A <u>VELOCIDADE ANGULAR</u> DO SÓLIDO.

DEFINIDO O VERSOR $\vec{k}$, ARBITRARIAMENTE, SOBRE O EIXO DE ROTAÇÃO, PODEMOS ASSOCIAR O SENTIDO POSITIVO DE θ COM O SENTIDO DE $\vec{k}$, ATRAVÉS DA "REGRA DA MÃO DIREITA":

$\vec{k}\ \odot$ θ POSITIVO $\qquad$ $\vec{k}\ \odot$ θ NEGATIVO.

A VELOCIDADE ANGULAR SERÁ:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}$$

AO VETOR $\vec{\omega}$ DEFINIDO POR:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \dot{\theta} \vec{k}$$

DÁ-SE O NOME DE <u>VETOR DE ROTAÇÃO</u> DO SÓLIDO.

QUALQUER PONTO P DO SÓLIDO, FORA DO EIXO DE ROTAÇÃO, DESCREVE UMA CIRCUNFERÊNCIA EM TORNO DESSE EIXO. OS PONTOS P' DO EIXO ESTÃO PARADOS. ASSIM, O VETOR POSIÇÃO DE P PODE SER ESCRITO COMO:

$$P - P' = \vec{r} = r\vec{u}$$

A VELOCIDADE SERÁ:

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(P-P') = \frac{dP}{dt} - \vec{0} = r\dot{\vec{u}}$$

POIS r (DISTÂNCIA DE P A P') É CONSTANTE.

OS VERSORES $\vec{u}$ E $\vec{\tau}$ FORMAM UM SISTEMA DE COORDENADAS POLARES E, ASSIM:

$$\dot{\vec{u}} = \dot{\theta}\vec{\tau} = \omega\vec{\tau}$$
$$\dot{\vec{\tau}} = -\dot{\theta}\vec{u} = -\omega\vec{u}$$

ALÉM DISSO, COMO $\vec{\tau} = \vec{k} \wedge \vec{u}$, PODEMOS ESCREVER:

$$\vec{v} = r\dot{\vec{u}} = \omega r \vec{\tau} = \omega r(\vec{k} \wedge \vec{u}) = (\omega\vec{k}) \wedge (r\vec{u}) = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

O ESCALAR $v = \omega r$ É A CHAMADA VELOCIDADE ESCALAR DE P.

MAIS ADIANTE, VEREMOS QUE A RELAÇÃO $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$ É DE FUNDAMENTAL IMPORTÂNCIA NA CINEMÁTICA DOS SÓLIDOS.

A ACELERAÇÃO ANGULAR DO SÓLIDO É DEFINIDA POR:

$$\dot{\omega} = \ddot{\theta}$$

E O VETOR ACELERAÇÃO ANGULAR É, POR DEFINIÇÃO:

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}\vec{k} = \ddot{\theta}\vec{k}$$

VISTO SER $\vec{k}$ UM VERSOR FIXO.

A ACELERAÇÃO DO PONTO P PODE SER OBTIDA DERIVANDO-SE SUA VELOCIDADE EM RELAÇÃO AO TEMPO

$$\vec{v} = \omega r \vec{\tau}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{\omega} r \vec{\tau} + \omega r \dot{\vec{\tau}} = \dot{\omega} r \vec{\tau} - \omega^2 r \vec{u}$$

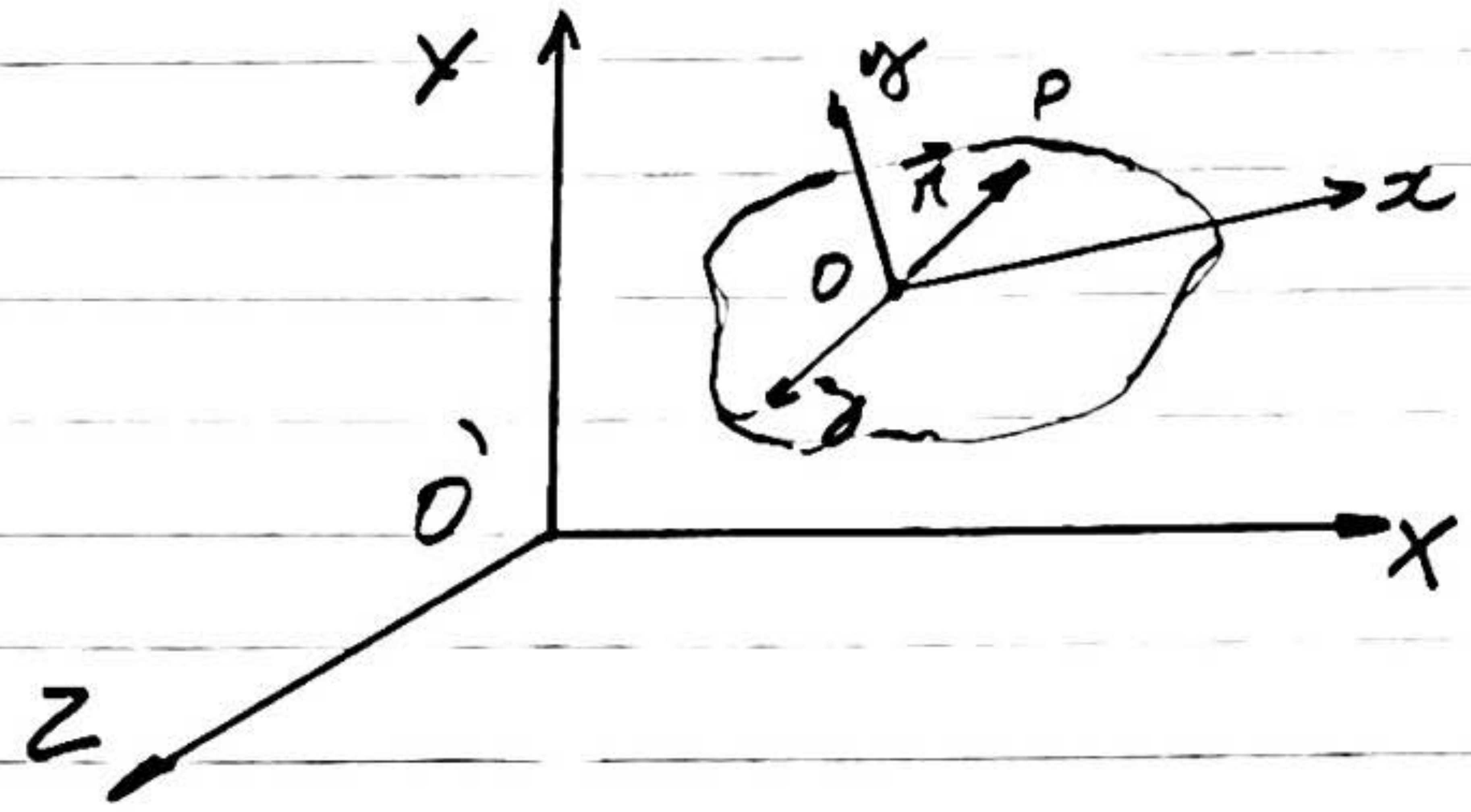
O TERMO $(\omega^2 r)$ É A CHAMADA ACELERAÇÃO NORMAL E $(\dot{\omega} r)$ É A ACELERAÇÃO TANGENCIAL.

UM RESULTADO EQUIVALENTE PODE SER OBTIDO EM FORMA VETORIAL:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} \Rightarrow \vec{a} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{r}} =$$

$$= \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} = \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$$

VI.3.2. MOVIMENTO QUALQUER



TOMEMOS UM PONTO O QUALQUER DO SÓLIDO COMO REFERÊNCIA, E SEJA P UM PONTO GENÉRICO DESSE SÓLIDO.

O VETOR $P-O=\vec{r}$ TEM MÓDULO CONSTANTE E, ASSIM:

$$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}=0$$

SUPONHAMOS QUE $\dot{\vec{r}}\neq\vec{0}$ (MOVIMENTO NÃO TRANSLATÓRIO). ENTÃO, EXISTEM VETORES $\vec{\omega}$ TAIS QUE:

$$\dot{\vec{r}}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}$$

VAMOS MOSTRAR QUE EXISTE UM VETOR $\vec{\omega}$ QUE NÃO DEPENDE DO PONTO P (OU VETOR $\vec{r}$) CONSIDERADO, MAS APENAS DO MOVIMENTO DO SÓLIDO.

CONSIDEREMOS O SISTEMA DE COORDENADAS (O,x,y,z) FIXO AO SÓLIDO. PODEMOS ESCREVER:

$$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\Rightarrow\dot{\vec{r}}=x\dot{\vec{i}}+y\dot{\vec{j}}+z\dot{\vec{k}}$$

COMO $\dot{\vec{r}}=\vec{\omega}\wedge\vec{r}$, TEMOS:

$$x\dot{\vec{i}}+y\dot{\vec{j}}+z\dot{\vec{k}}=x\,\vec{\omega}\wedge\vec{i}+y\,\vec{\omega}\wedge\vec{j}+z\,\vec{\omega}\wedge\vec{k}$$

ASSIM: $\dot{\vec{i}}=\vec{\omega}\wedge\vec{i}$; $\dot{\vec{j}}=\vec{\omega}\wedge\vec{j}$; $\dot{\vec{k}}=\omega\wedge\vec{k}$

ESCREVENDO $\vec{\omega}$ EM TERMOS DE SUAS COMPONENTES:

$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$, CHEGAMOS A:

$$\omega_x = \dot{\vec{j}} \cdot \vec{k} \ ; \ \omega_y = \dot{\vec{k}} \cdot \vec{i} \ ; \ \omega_z = \dot{\vec{i}} \cdot \vec{j}$$

ONDE, PORTANTO, OS MEMBROS À DIREITA DEPENDEM APENAS DO MOVIMENTO DO SÓLIDO, E NÃO DE UM PONTO PARTICULAR.
ALÉM DISSO, ESSE $\vec{\omega}$ É ÚNICO, POIS SE TIVÉSSEMOS OUTRO VETOR $\vec{\omega}'$ PODERÍAMOS FAZER:

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r} = \vec{\omega}' \wedge \vec{r} \Rightarrow (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \wedge \vec{r} = 0$$

COMO $\vec{r}$ É ARBITRÁRIO: $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$

FINALMENTE, SENDO $\vec{r} = P - O$, TEMOS:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{P} - \dot{O} = \vec{v} - \vec{v}_0 = \vec{\omega} \wedge (P-O) \rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \wedge (P-O)}$$

QUE É A <u>FÓRMULA DE POISSON</u>.

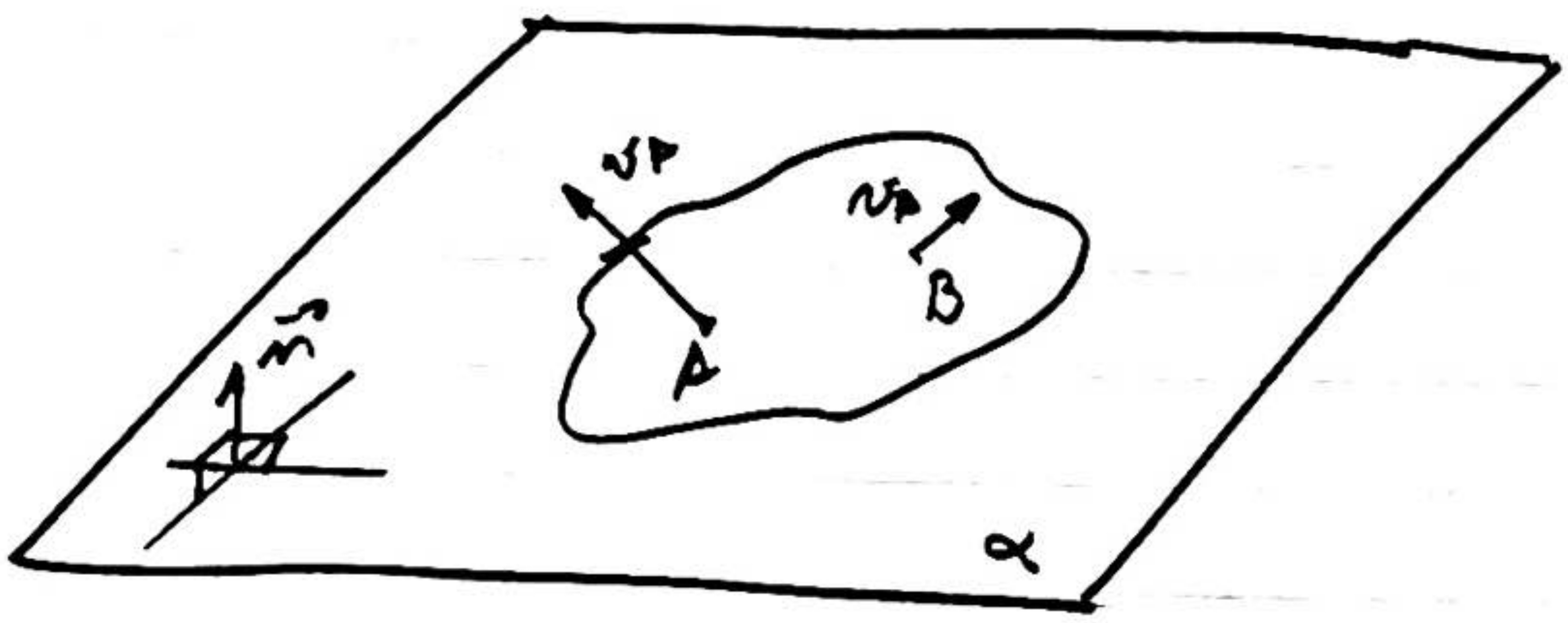
O VETOR $\vec{\omega}$ É CHAMADO VETOR DE ROTAÇÃO (INSTANTÂNEO) DO SÓLIDO E, EM GERAL, $\vec{\omega}$ VARIA EM MÓDULO, DIREÇÃO E SENTIDO, DE INSTANTE PARA INSTANTE. NOTE-SE QUE O MOVIMENTO GERAL PODE SER CONSIDERADO COMO UMA ROTAÇÃO MAIS UMA TRANSLAÇÃO INSTANTÂNEAS (MOV. HELICOIDAL INSTANTÂNEO).
A ACELERAÇÃO É OBTIDA ATRAVÉS DA DERIVAÇÃO DIRETA DA FÓRMULA ACIMA:

$$\boxed{\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{a}_0 + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O) + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (P-O)\right]}$$

VI-4. MOVIMENTO PLANO E MOVIMENTO DE UMA FIGURA PLANA NO SEU PLANO

VI-4.1. MOVIMENTO PLANO.

O MOVIMENTO PLANO É DEFINIDO COMO AQUELA SITUAÇÃO EM QUE TODAS AS PARTÍCULAS DE UM CORPO DESLOQUEM-SE EM PLANOS PARALELOS A UM DETERMINADO PLANO α.



SEJA $\vec{n}$ O VERSOR NORMAL A α

DA FÓRMULA DE POISSON PODEMOS ESCREVER:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge (B-A).$$

NO MOVIMENTO PLANO, A TRAJETÓRIA DE UM PONTO, BEM COMO SEUS VETORES VELOCIDADE E ACELERAÇÃO SÃO PARALELOS AO PLANO α.

ASSIM: $\vec{v}_A \parallel \alpha$ OU $\vec{v}_A \perp \vec{n}$

E $\vec{v}_B \parallel \alpha$ OU $\vec{v}_B \perp \vec{n}$

PORTANTO, NECESSARIAMENTE:

$$\vec{\omega} \wedge (B-A) \parallel \alpha \quad \text{OU} \quad \perp \vec{n}$$

DE ONDE CONCLUI-SE QUE (LEMBRANDO QUE A E B SÃO QUAISQUER):

$$\vec{\omega} = \omega \vec{m}$$

ASSIM, PARA UM MOVIMENTO PLANO:

$$\boxed{\vec{v}_B = \vec{v}_A + \omega \vec{m} \wedge (B-A)}$$

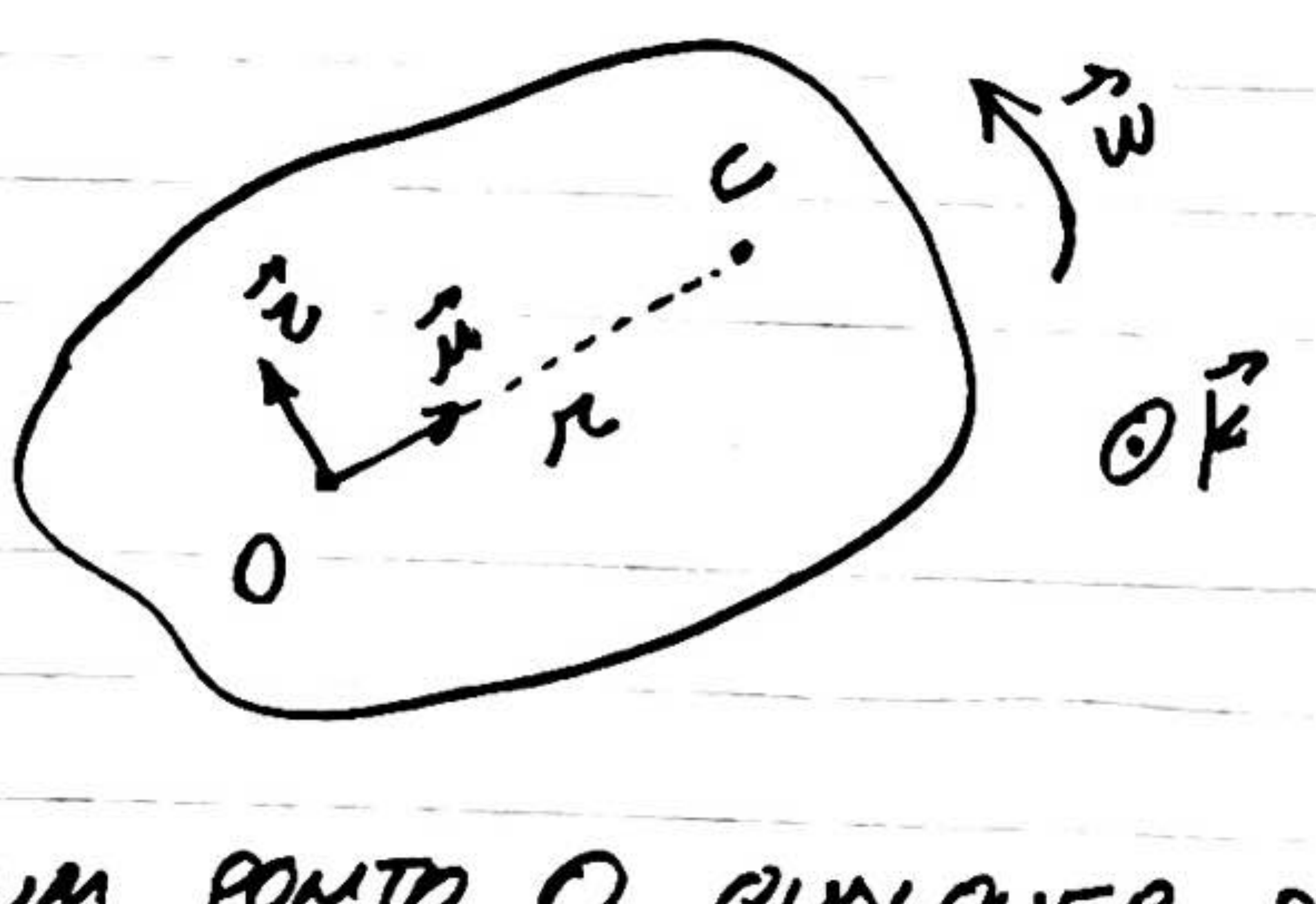
PARA A ACELERAÇÃO:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge (B-A) + \vec{\omega} \wedge \left[\vec{\omega} \wedge (B-A)\right]$$

$$\boxed{\vec{a}_B = \vec{a}_A + \dot{\omega} \vec{m} \wedge (B-A) + \omega^2 \vec{m} \wedge \left[\vec{m} \wedge (B-A)\right]}$$

VI.4.2. MOVIMENTO DE UMA FIGURA PLANA NO SEU PLANO.

A CARACTERÍSTICA DO MOVIMENTO DE UMA FIGURA PLANA NO SEU PLANO, É QUE AS TRAJETÓRIAS DE TODOS OS PONTOS DESSA FIGURA ESTÃO NO MESMO PLANO.



TOMEMOS UM PONTO O QUALQUER DA FIGURA, E VERIFIQUEMOS SE EXISTE E QUAL É UM PONTO C QUE TENHA, INSTANTANEAMENTE, VELOCIDADE NULA. USANDO POISSON, E

CHAMANDO DE r A DISTÂNCIA DE C A O VEM:

$$\vec{v}_C = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (C-O) = \vec{O} \Rightarrow (C-O) \wedge \vec{\omega} = \vec{v}_O \Rightarrow$$

$$(C-O) = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|^2} + \lambda \vec{\omega}$$

COMO O MOVIMENTO É PLANO, $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ E, SENDO C PONTO DO PLANO, $\lambda = 0$; ASSIM:

$$(C-O) = \frac{\vec{\omega} \wedge \vec{v}_O}{|\vec{\omega}|^2} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{v}_O}{\omega} = r \vec{u} \quad (\perp \vec{v}_O)$$

O PONTO O É UM PONTO QUALQUER DO SÓLIDO. ASSIM, SE NUM CERTO INSTANTE A VELOCIDADE DE UM PONTO C É NULA, PODEMOS DIZER QUE O VETOR VELOCIDADE DE QUALQUER PONTO O DO CORPO, NESSE INSTANTE, É ORTOGONAL À RETA QUE UNE ESSE PONTO AO PONTO C, E TEM MÓDULO ωr, SENDO r A DISTÂNCIA AO PONTO C.

PORTANTO, NESSE INSTANTE, TUDO SE PASSA COMO SE O CORPO EXECUTASSE UM MOVIMENTO DE ROTAÇÃO PURA EM TORNO DO PONTO C. POR ESSA RAZÃO, ESSE PONTO É CHAMADO DE "CENTRO INSTANTÂNEO DE ROTAÇÃO" DA FIGURA.

EM MUITOS CASOS, A POSIÇÃO DESSE PONTO PODE SER DETERMINADA GRAFICAMENTE.