V. CINEMÁTICA DO PONTO. MOVIMENTO GERAL.

V.1. GEOMETRIA DAS CURVAS.

V.1.1. VETOR FUNÇÃO DE UM PARÂMETRO.

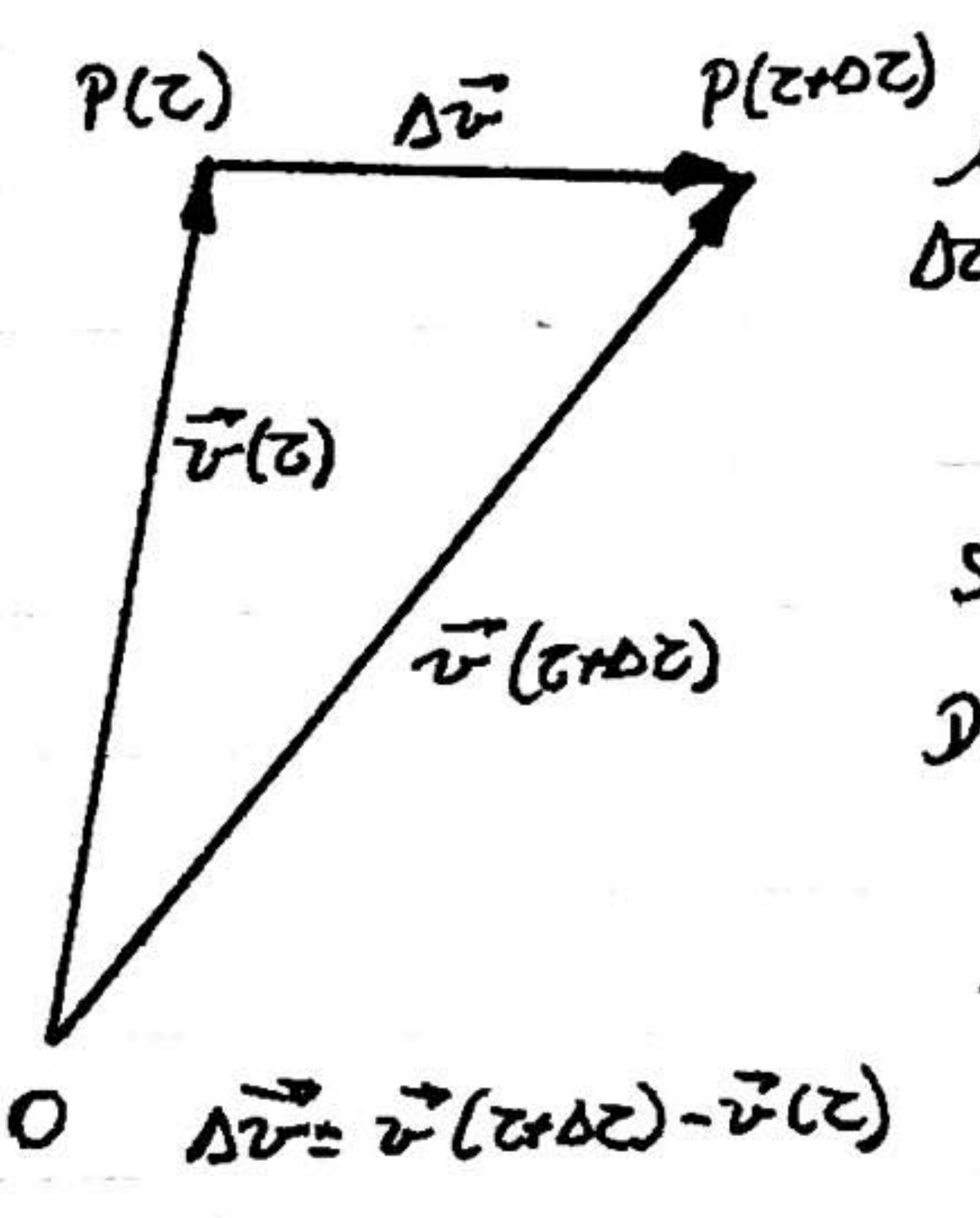
SE UM PONTO P OU UM VETOR $\vec{v} = P - O$, DEPENDE DE UM PARÂMETRO τ REAL, DIZEMOS QUE ESSE PONTO OU VETOR É FUNÇÃO DE τ:

$$P = P(\tau) \quad \text{OU} \quad \vec{v} = \vec{v}(\tau).$$

USANDO UM SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANO $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. E CHAMANDO DE (x, y, z) AS COORDENADAS DE P, OU AS COMPONENTES DE $\vec{v}$, TEMOS:

$$x = x(\tau) \ ; \ y = y(\tau) \ ; \ z = z(\tau).$$

CONSIDEREMOS UMA PEQUENA VARIAÇÃO DE τ E VAMOS REPRESENTÁ-LA POR $\Delta\tau$. O SEGUINTE LIMITE:



$$\lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\vec{v}(\tau+\Delta\tau) - \vec{v}(\tau)}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\vec{v}(\tau)}{\Delta\tau}$$

SE EXISTIR, SERÁ CHAMADO DE <u>DERIVADA</u> DE $\vec{v}(\tau)$ EM RELAÇÃO AO PARÂMETRO τ:

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{v}}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta\tau}$$

SEJAM OS VETORES $\vec{v}(t)$, $\vec{u}(t)$ E A FUNÇÃO ESCALAR $f(t)$. SUPONDO QUE SEJAM DERIVÁVEIS TEMOS:

a) $\dfrac{d}{dt}(f.\vec{v}) = f'.\vec{v} + f.\vec{v}\,'$

b) $\dfrac{d}{dt}(\vec{u}.\vec{v}) = \vec{u}\,'.\vec{v} + \vec{u}.\vec{v}\,'$

c) $\dfrac{d}{dt}(\vec{u} \wedge \vec{v}) = \vec{u}\,' \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v}\,'$

EXPRESSEMOS $\vec{v}(t)$ EM TERMOS DE SUAS COMPONENTES:

$$\vec{v}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

ASSIM:

$$\frac{d}{dt}\vec{v}(t) = x'\vec{i} + x\vec{i}\,' + y'\vec{j} + y\vec{j}\,' + z'\vec{k} + z\vec{k}\,'$$

SE OS VERSORES $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ NÃO DEPENDEM DE t, SUA DERIVADA É NULA, E:

$$\frac{d\vec{v}(t)}{dt} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

VETORES DE MÓDULO CONSTANTE

DERIVANDO O QUADRADO DO MÓDULO DO VETOR $\vec{u}$, OBTEMOS:

$$\frac{d\,|\vec{u}|^2}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\vec{u}\cdot\vec{u}) = 2\vec{u}\cdot\vec{u}'$$

SE O MÓDULO DE $\vec{u}$ INDEPENDE DE τ, ENTÃO:

$$\frac{d\,|\vec{u}|^2}{d\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{u}' = 0$$ E, PORTANTO:

$$\vec{u}' = 0 \quad \text{OU} \quad \vec{u}' \perp \vec{u}$$

ASSIM PODEMOS AFIRMAR QUE, SE O MÓDULO DE UM VETOR $\vec{u}$ É CONSTANTE, A DERIVADA DESSE VETOR OU É UM VETOR NULO, OU É UM VETOR ORTOGONAL A $\vec{u}$.

V.1.2. CURVA EM FUNÇÃO DE UM PARÂMETRO.

SEJA $P(\tau)$ UM PONTO FUNÇÃO DE UM PARÂMETRO. SUAS COORDENADAS $x(\tau)$, $y(\tau)$ E $z(\tau)$ SÃO AS EQUAÇÕES PARAMÉTRICAS DA CURVA DESCRITA POR P NO ESPAÇO. ASSIM, ESSA CURVA PODE SER REPRESENTADA POR:

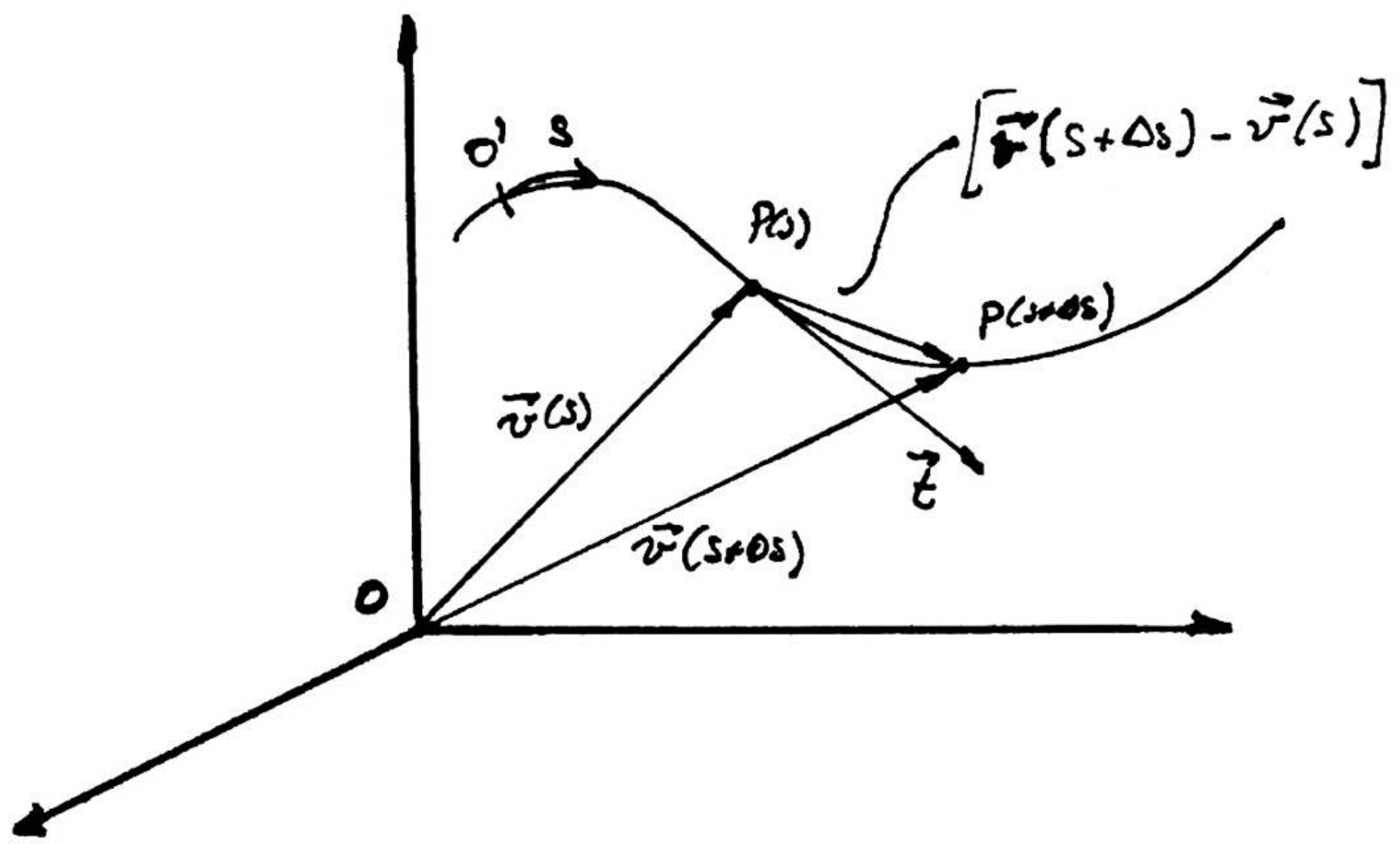
$$P(\tau) = O + \vec{v}(\tau), \text{ com } \vec{v}(\tau) = \vec{v}(x(\tau), y(\tau), z(\tau))$$

SEJA S O ARCO, SOBRE A CURVA, MEDIDO A PARTIR DE UMA CERTA ORIGEM E COM UMA ORIENTAÇÃO DEFINIDA.

PODEMOS SEMPRE ESCREVER:

$$P = P(s) = O + \vec{v}(s).$$

ONDE S É UMA FUNÇÃO ESCALAR DO PARÂMETRO σ.



A DERIVADA:

$$\vec{t}=\frac{dP(s)}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{P(s+\Delta s)-P(s)}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\vec{r}(s+\Delta s)-\vec{r}(s)}{\Delta s}$$

É UM <u>VETOR TANGENTE À CURVA</u> E DE MESMO SENTIDO QUE O DE S (COMPRIMENTO DE ARCO) CRESCENTE.

$\vec{t}$ POSSUI MÓDULO UNITÁRIO E CHAMA-SE <u>VERSOR TANGENTE</u>.

COMO $|\vec{t}|=1$ (CONSTANTE), TEMOS QUE:

$\vec{t}\cdot\frac{d\vec{t}}{ds}=0$ E, PORTANTO, $\frac{d\vec{t}}{ds}$ É ORTOGONAL A $\vec{t}$.

SENDO:

$$\frac{d^2P}{ds^2}=\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{1}{\rho}\vec{n}=c\vec{n}\qquad(c\geq 0)$$

O ESCALAR $\rho = \rho(s)$ CHAMA-SE RAIO DE CURVATURA EM S E $C = C(s)$ É A CURVATURA EM S. O VERSOR $\vec{n}$ É O <u>VERSOR NORMAL</u>. (PRINCIPAL).

OS VERSORES $\vec{t}$ E $\vec{n}$ DEFINEM O <u>PLANO OSCULADOR</u> DA CURVA NO PONTO, E ρ É O RAIO DO CÍRCULO OSCULADOR CONTIDO NESSE PLANO.

FINALMENTE, VAMOS DEFINIR O VERSOR $\vec{b}$ COMO:

$$\vec{b} = \vec{t} \wedge \vec{n}$$

O VERSOR $\vec{b}$ É CHAMADO <u>VERSOR BINORMAL</u>

OS VERSORES $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ CONSTITUEM O CHAMADO <u>TRIEDRO DE FRENET</u>.

VI. 1.3. FÓRMULAS DE FRENET

DERIVANDO A RELAÇÃO $\vec{b}.\vec{t} = 0$, EM RELAÇÃO A S, OBTÉM-SE:

$$\frac{d}{ds}(\vec{b}.\vec{t}) = \frac{d\vec{b}}{ds}.\vec{t} + \vec{b}.\frac{d\vec{t}}{ds} = \frac{d\vec{b}}{ds}.\vec{t} + \cancel{(\vec{t} \wedge \vec{n}).C\vec{n}}^{\,0} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds}.\vec{t} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{t} \; ; \text{ COMO } \frac{d\vec{b}}{ds} \perp \vec{b} \; (|\vec{b}| = cte)$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} \parallel \vec{n} \quad \text{OU:} \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = \gamma \vec{n}$$

ONDE $\gamma = \frac{d\vec{b}}{ds}.\vec{n}$ É CHAMADA TORÇÃO DA CURVA EM

P(S), E SEU INVERSO $(1/\gamma)$ CHAMA-SE RAIO DE TORÇÃO.

DERIVANDO A RELAÇÃO $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{t}$ EM RELAÇÃO A S, OBTÉM-SE:

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{b} \wedge \vec{t}) = \frac{d\vec{b}}{ds} \wedge \vec{t} + \vec{b} \wedge \frac{d\vec{t}}{ds} =$$
$$= \gamma \vec{n} \wedge \vec{t} + \vec{b} \wedge c\vec{n} = -\gamma \vec{b} - c\vec{t}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{n}}{ds} = -\gamma \vec{b} - c\vec{t}$$

AS TRÊS RELAÇÕES:
$$\frac{d\vec{t}}{ds} = c\vec{n}$$
$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \gamma \vec{n}$$
$$\frac{d\vec{n}}{ds} = -\gamma \vec{b} - c\vec{t}$$

SÃO AS CHAMADAS FÓRMULAS DE FRENET.

V.2. CINEMÁTICA DO PONTO

V.2.1. TRAJETÓRIA, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO

A POSIÇÃO DE UM PONTO P, EM RELAÇÃO A UM REFERENCIAL SUPOSTO FIXO NO ESPAÇO, DESCRITO EM TERMOS DE UM SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANO $(0, x, y, z)$, TAMBÉM FIXO, FICA UNIVOCAMENTE DETERMINADA ATRAVÉS DE SUAS TRÊS COORDENADAS (x, y, z). SE ESSA POSIÇÃO VARIA COM O TEMPO, ENTÃO AS EQUAÇÕES:

$$x = x(t)$$
$$y = y(t)$$
$$z = z(t)$$

DEFINEM A TRAJETÓRIA DO PONTO E SÃO CHAMADAS DE <u>EQUAÇÕES PARAMÉTRICOS</u>, EM t, DESSA TRAJETÓRIA. EVENTUALMENTE, PODE-SE OBTER AS EQUAÇÕES DESSA TRAJETÓRIA, SIMPLESMENTE ELIMINANDO-SE ESSA VARIÁVEL t.

PROSSEGUINDO, VAMOS CHAMAR O <u>VETOR POSIÇÃO</u> $(P-O)$ DE $\vec{r} = \vec{r}(t)$. A TRAJETÓRIA É DEFINIDA POR:

$$P = O + \vec{r}(t) = O + x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

VAMOS INDICAR AS DERIVADAS EM RELAÇÃO AO TEMPO POR UM PONTO, ISTO É:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}} \; ; \; \frac{dx}{dt} = \dot{x} \; ; \; \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}} \; ; \; \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} ; \; etc.$$

A VELOCIDADE DE P É DEFINIDA POR:

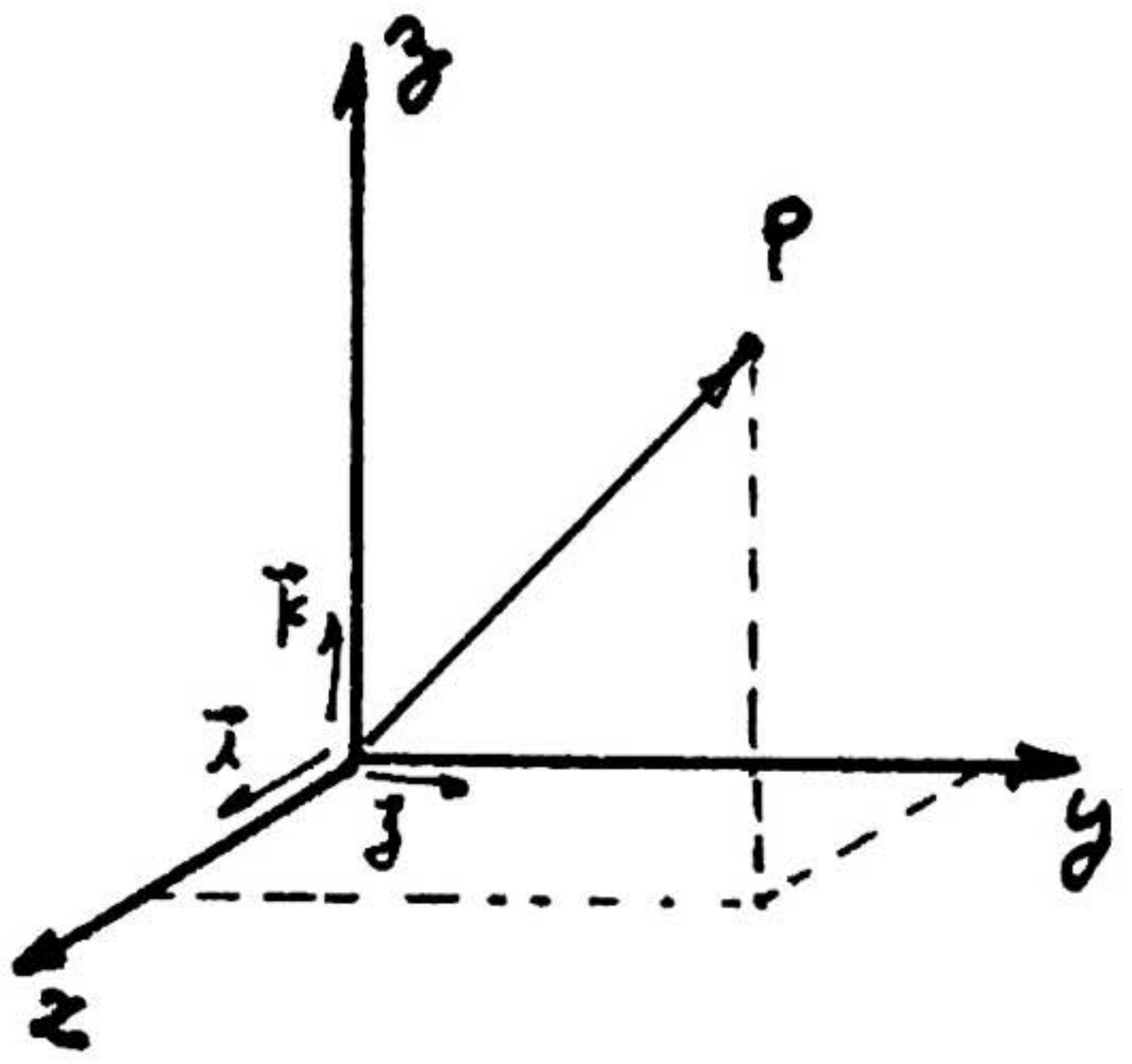
$$\vec{v} = \frac{dP}{dt} = \dot{\vec{r}}(t)$$

E A ACELERAÇÃO POR:

$$\vec{a} = \frac{d^2P}{dt^2} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

CONSIDERANDO OS DIVERSOS SISTEMAS DE COORDENADAS, VEJAMOS AS SEGUINTES COMPONENTES.

1) COORDENADAS CARTESIANAS



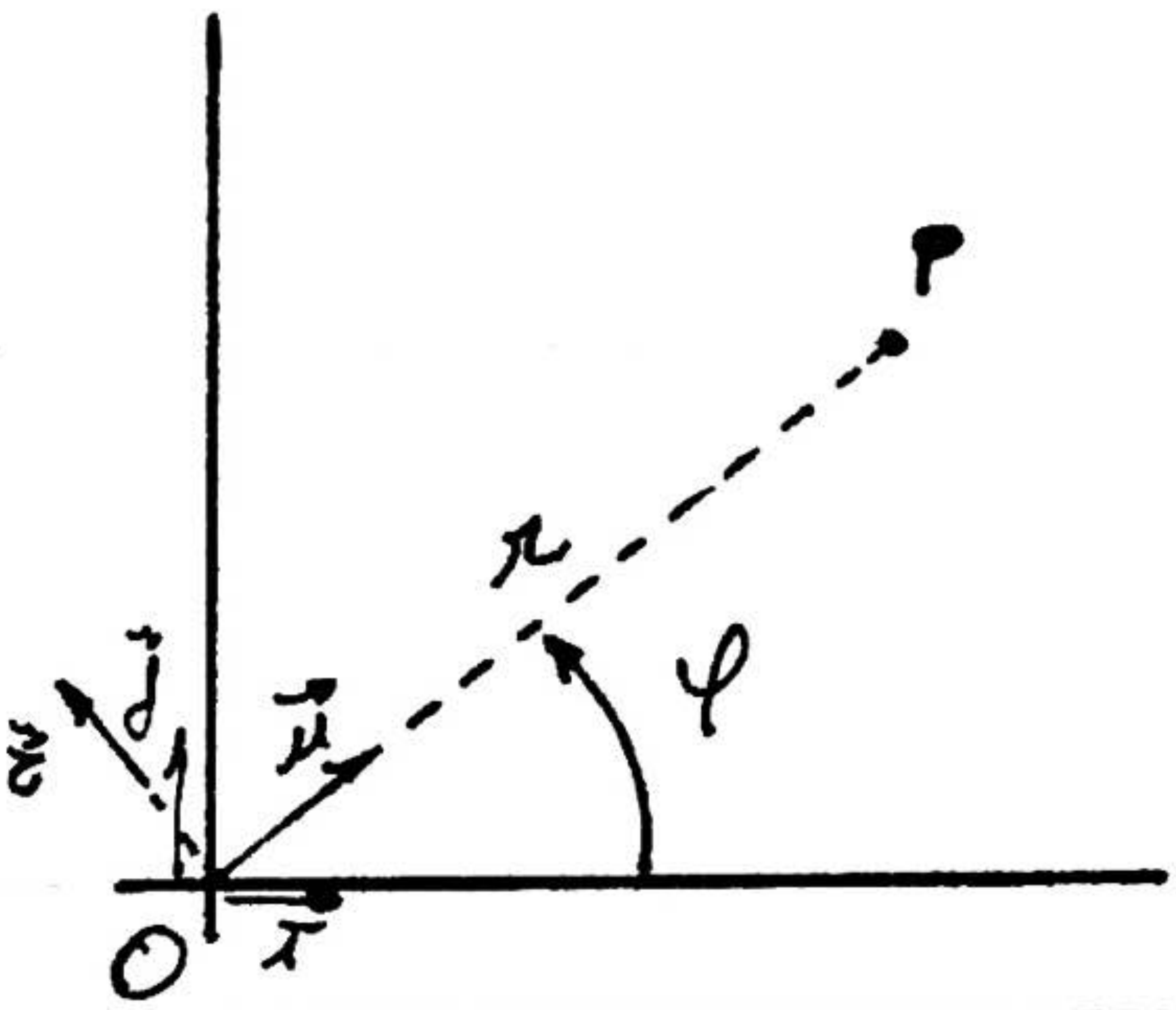
$$P-O = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

COM Ox, Oy e Oz FIXOS:

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \quad \text{E,}$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

2) COORDENADAS POLARES NO PLANO.



$$P-O = r\vec{u}$$

$$\vec{v} = \frac{d\,(P-O)}{dt} = \frac{dP}{dt} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\vec{u}}$$

Para $\dot{u}$ e $\dot{\tau}$:

$$\vec{u} = \cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}$$
$$\vec{\tau} = -\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}$$

ASSIM COM $O\vec{i}$ e $O\vec{j}$ FIXOS:

$$\dot{\vec{u}} = -\dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{j} = \dot{\varphi}(-\operatorname{sen}\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}) = \dot{\varphi}\vec{\tau}$$

$$\dot{\vec{\tau}} = -\dot{\varphi}\cos\varphi\,\vec{i} - \dot{\varphi}\operatorname{sen}\varphi\,\vec{j} = -\dot{\varphi}(\cos\varphi\,\vec{i} + \operatorname{sen}\varphi\,\vec{j}) = -\dot{\varphi}\vec{u}$$

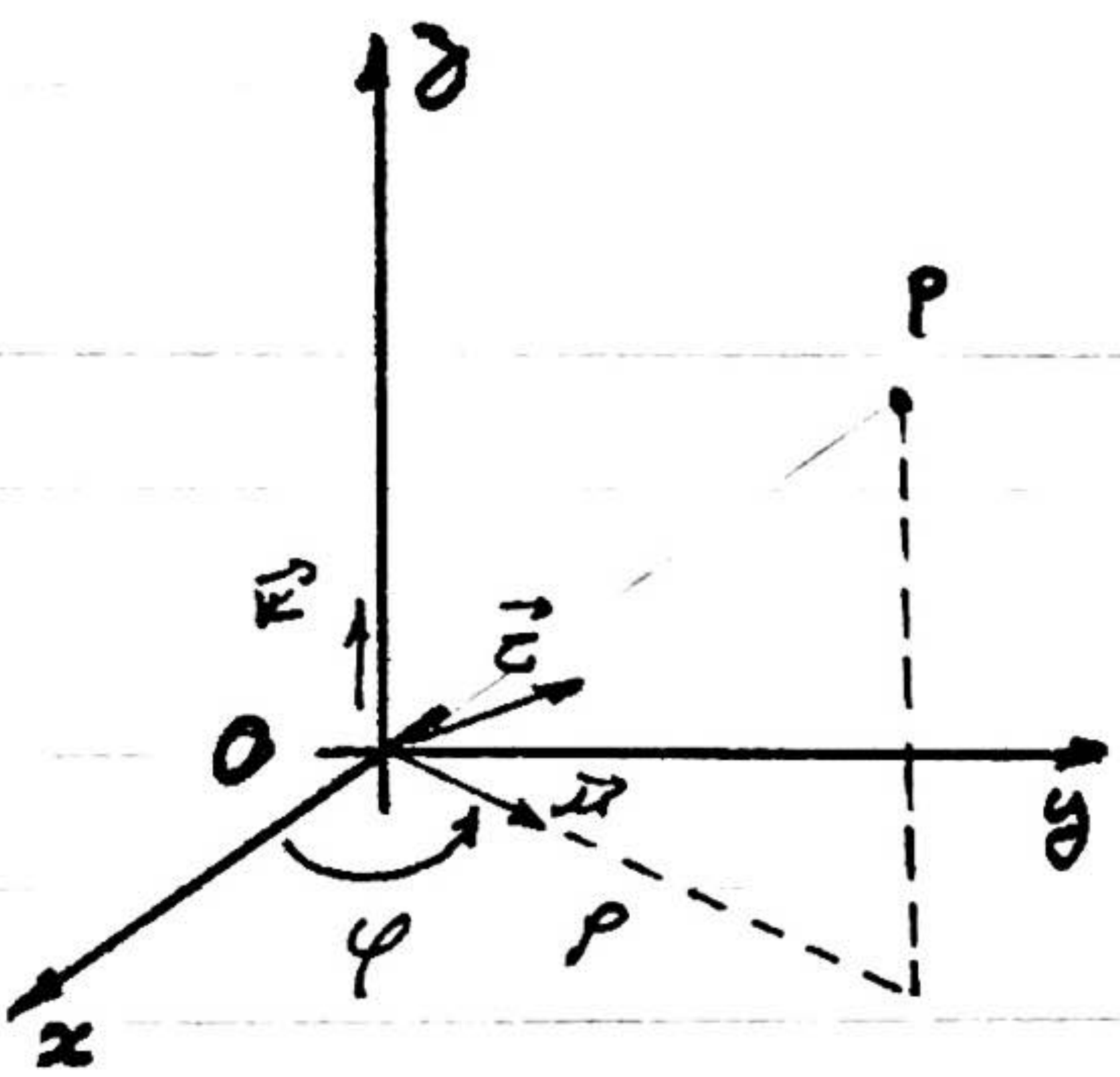
PORTANTO: $\vec{v} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\vec{u}} = \dot{r}\vec{u} + r\dot{\varphi}\vec{\tau}$

PARA A ACELERAÇÃO: $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{r}\vec{u} + \dot{r}\dot{\vec{u}} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{\tau} + r\ddot{\varphi}\vec{\tau} + r\dot{\varphi}\dot{\vec{\tau}}$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{u} + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{\tau} + \dot{r}\dot{\varphi}\,\vec{\tau} + r\ddot{\varphi}\,\vec{\tau} - r\dot{\varphi}^2\,\vec{u}$$

$$\vec{a} = \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\vec{u}}_{\text{(RADIAL)}} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\,\vec{\tau}}_{\text{(TRANSVERSAL)}}$$

3) COORDENADAS CILÍNDRICAS.



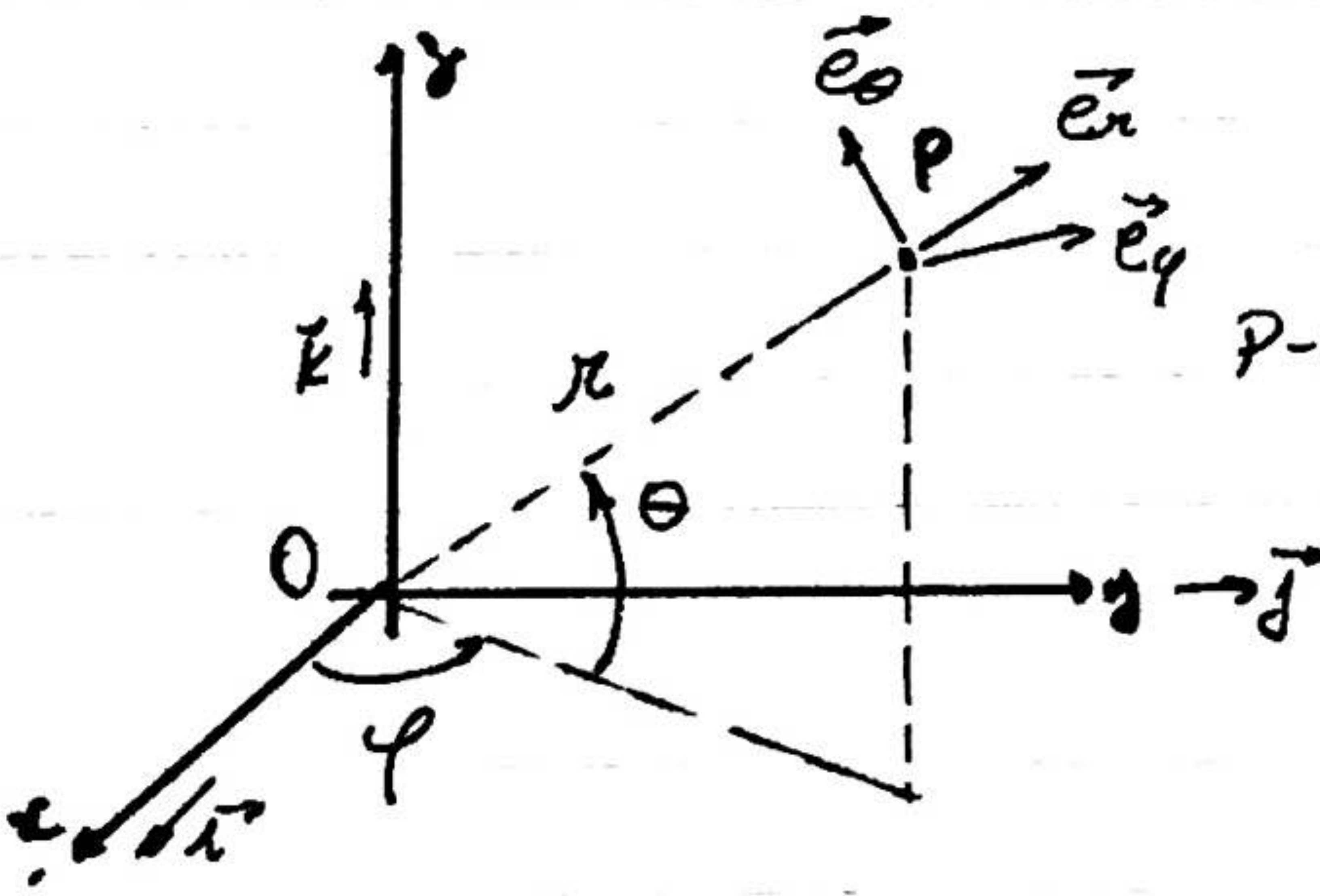
$$(P-O) = \rho\,\vec{u} + z\,\vec{k}$$

com Ox, Oy, Oz FIXOS

$$\vec{v} = \dot{\rho}\,\vec{u} + \rho\dot{\varphi}\,\vec{\tau} + \dot{z}\,\vec{k} \quad \text{E,}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{u} + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\,\vec{\tau} + \ddot{z}\,\vec{k}$$

4) COORDENADAS ESFÉRICAS.



$$P-O = r\,\vec{e}_r$$

com Ox, Oy, Oz FIXOS:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned}\vec{a} = {} & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\cos^2\theta)\,\vec{e}_r + \\ & + (2\dot{r}\dot{\varphi}\cos\theta - 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\,\mathrm{sen}\,\theta + r\ddot{\varphi}\cos\theta)\,\vec{e}_\varphi + \\ & + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\varphi}^2\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta)\,\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

V.2.2. COMPONENTES INTRÍNSECAS.

SE EXPRESSARMOS OS VETORES VELOCIDADE E ACELERAÇÃO EM TERMOS DO TRIEDRO DE FRENET, SUAS COMPONENTES SERÃO CHAMADOS INTRÍNSECAS, POIS DEPENDERÃO APENAS DA TRAJETÓRIA E NÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS ADOTADO. ISTO É ESPECIALMENTE ÚTIL QUANDO SE ESTUDA O MOVIMENTO DE UM PONTO MATERIAL SOBRE UMA CURVA DADA POIS, NESSE CASO, O TRIEDRO DE FRENET É UM DADO DO PROBLEMA.

SEJA $P(t)$ UM PONTO MÓVEL NO ESPAÇO, $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ O TRIEDRO DE FRENET DEFINIDO A CADA INSTANTE PARA A CURVA TRAJETÓRIA EM $P(t)$ E s O ARCO DE TRAJETÓRIA MEDIDO A PARTIR DE UMA ORIGEM QUALQUER.

ASSIM $P = P(s)$, COM $s = s(t)$

TEMOS: $\vec{v} = \dot{P} = \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{dP}{ds} \cdot \dot{s} = \dot{s}\vec{t} = v\vec{t}$

O ESCALAR $\dot{s} = v$ CHAMA-SE VELOCIDADE ESCALAR, E $\vec{v}$ É EVIDENTEMENTE TANGENTE À TRAJETÓRIA.

QUANTO À ACELERAÇÃO:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\dot{\vec{t}} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\left(\frac{d\vec{t}}{ds} \cdot \dot{s}\right) =$$

$$= \dot{v}\vec{t} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

COM: $\dot{v}$ = ACELERAÇÃO TANGENCIAL

$\dfrac{v^2}{\rho}$ = ACELERAÇÃO NORMAL.

NÃO CONFUNDIR ESSAS GRANDEZAS COM AS COMPONENTES TRANSVERSAL E RADIAL DA ACELERAÇÃO EXPRESSA EM COORDENADAS POLARES.