Uma pessoa balança em um balanço. Quando essa pessoa está sentada, o balanço oscila em sua frequência natural. Se ao invés de uma, duas pessoas estiverem sentadas no balanço, a nova frequência natural do balanço será:

1 – Aumenta.
2 – Mantêm-se igual.
3 – Diminui.

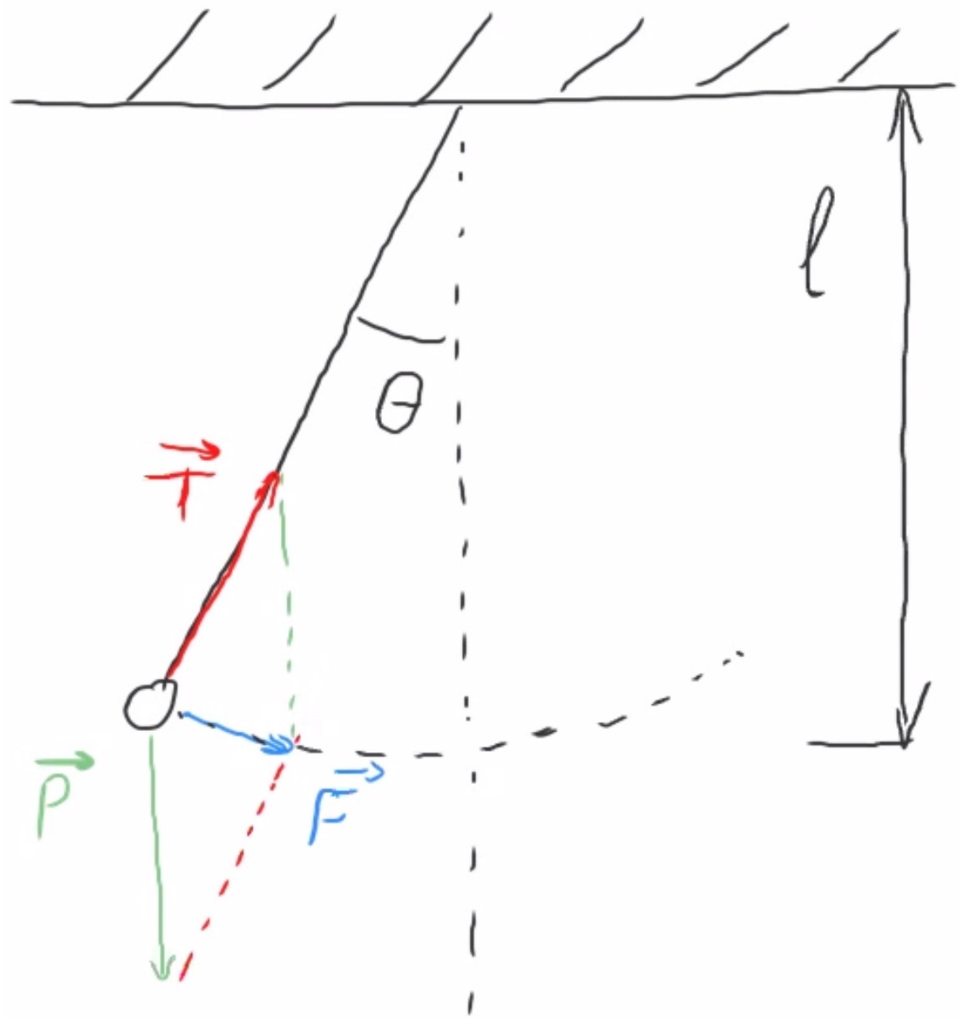
Pêndulo simples

Aceleração radial

$$m\,a_r = -m\ell\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T = 0$$

Aceleração tangencial

$$m\,a_\theta = m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg sen\theta$$



$$sen\theta \simeq \theta \qquad \theta \ll 1$$

$$\omega^2 = \frac{g}{\ell}$$

Pêndulo simples

Energia Cinética

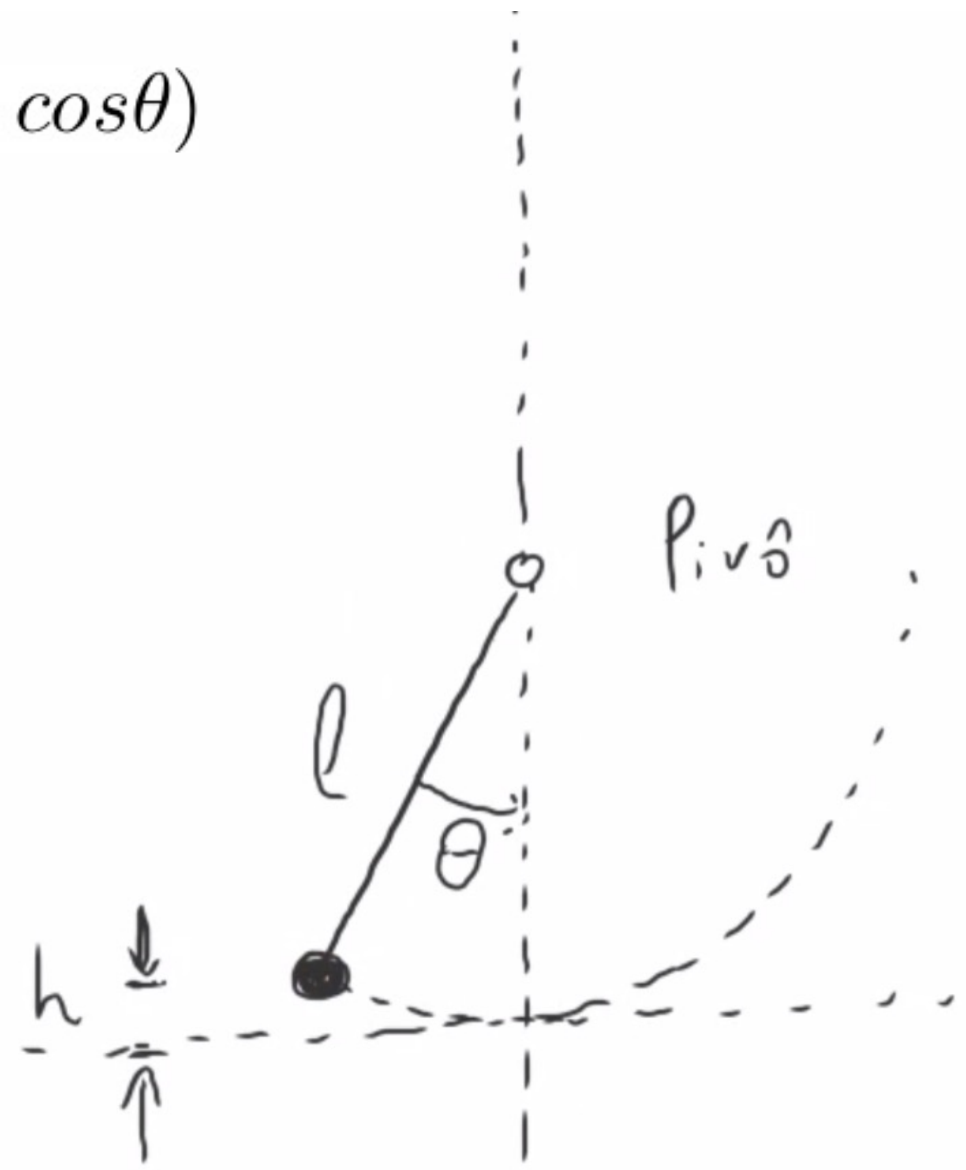
$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\ell^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

Energia Potencial $U = mg\ell(1 - cos\theta)$

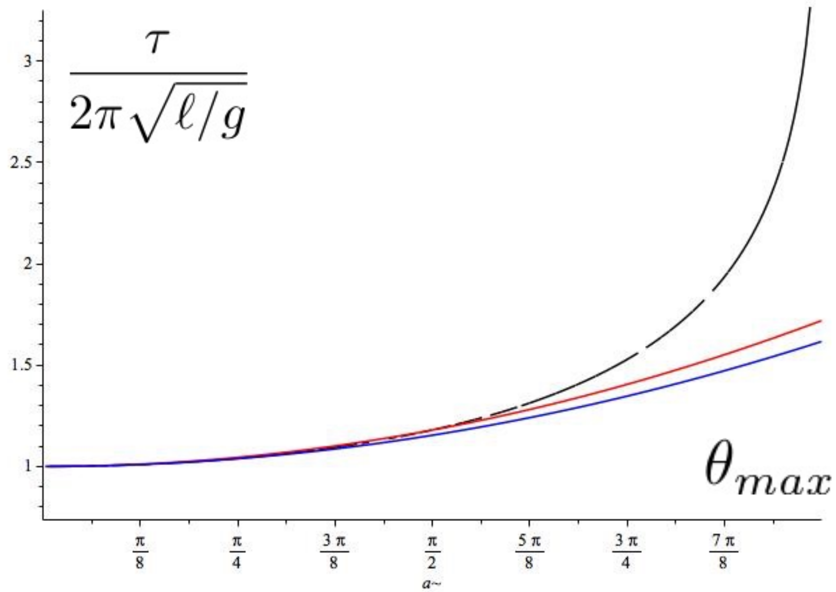
$\theta \ll 1$ $\qquad U = \frac{mg\ell}{2}\theta^2$

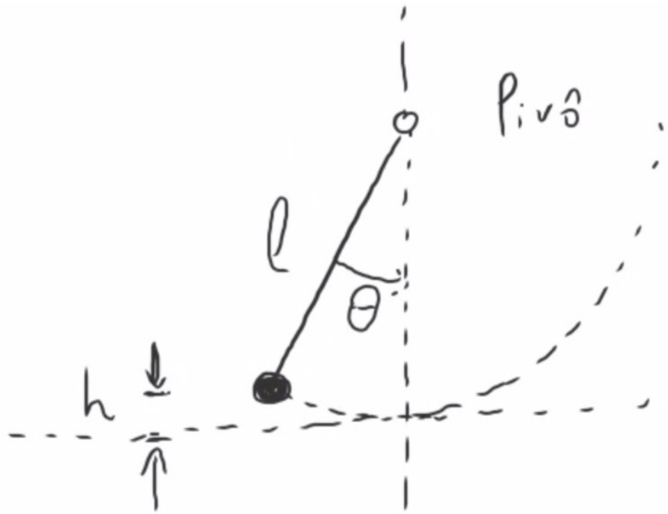
$$E = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$$

$$E = \frac{m\ell^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{m\ell^2}{2}\left(\frac{g}{\ell}\right)\theta^2$$

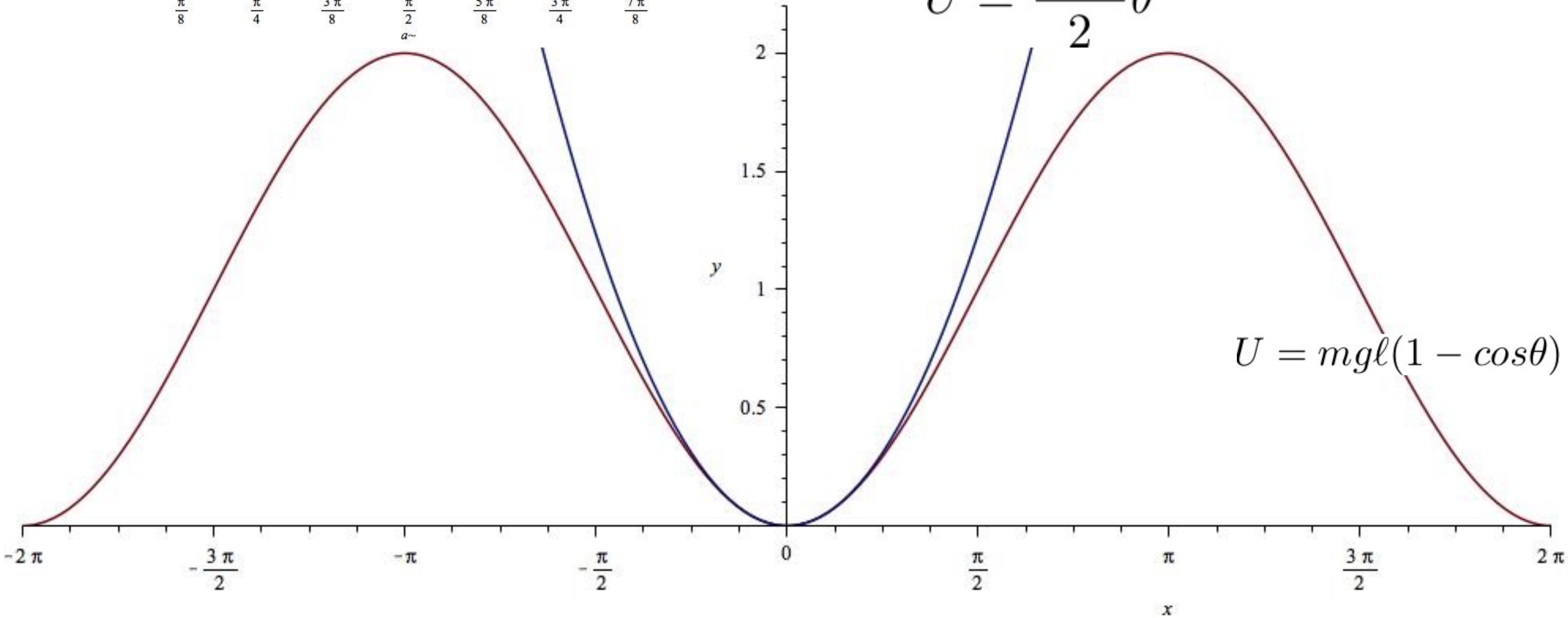


Pêndulo simples





$$U = \frac{mg\ell}{2}\theta^2$$



$$U = mg\ell(1 - cos\theta)$$

Uma pessoa balança em um balanço. Quando essa pessoa está sentada, o balanço oscila em sua frequência natural. Se ao invés disso a pessoa fica de pé no balanço, a nova frequência de oscilação natural será:

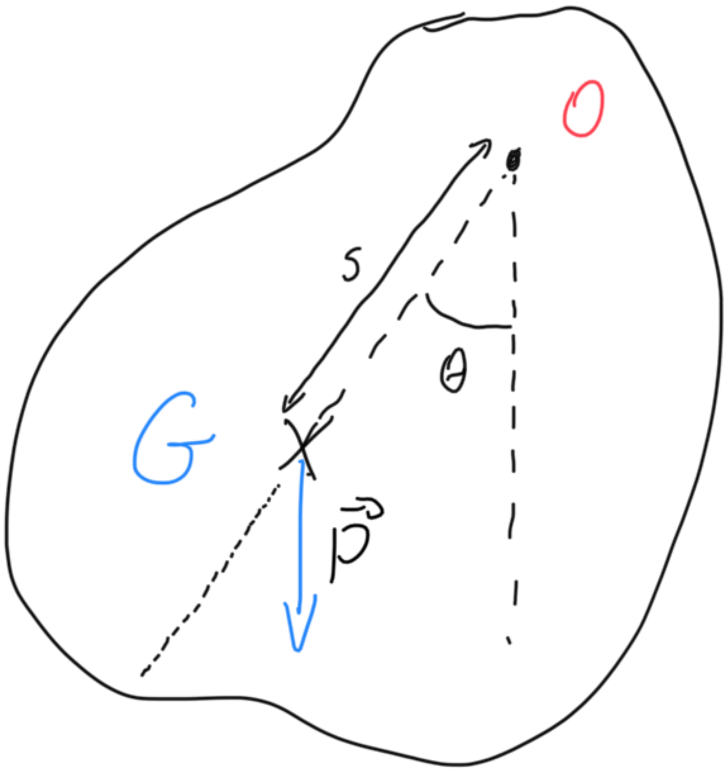
1 – Maior.
2 – Mantêm-se igual.
3 – Menor.

Pêndulo Físico:

um passo além do pêndulo simples

→ Corpo rígido, girando em torno de um pivô

G → centro de massa



O → pivô (por onde passa o eixo de giro

Torque: $\tau = -Mg\,s\,\text{sen}\,\theta$

Torque: $\tau = -Mgs \,\text{sen}\,\theta$

$$\tau = I \frac{d^2}{dt^2}\theta(t) \Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}\theta = -\left(\frac{Mgs}{I}\right)\text{sen}\,\theta$$

$$|\theta| << 1 \Longrightarrow \text{sen}\,\theta \simeq \theta$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta = -\omega^2\theta \quad ; \quad \omega = \sqrt{\frac{Mgs}{I}}$$

→ Pêndulo simples equivalente:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow \ell = \frac{I}{M \cdot s}$$

Lembrando: momento de inércia de uma partícula

$$I = M \cdot d^2 \Rightarrow I = M\ell^2 \Rightarrow \ell = s \text{ (por definição)}$$

(Caso particular)

Uma forma precisa de medir g

→ Pêndulo simples equivalente:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \Rightarrow \ell = \frac{I}{M \cdot s}$$

Lembrando: momento de inércia de uma partícula

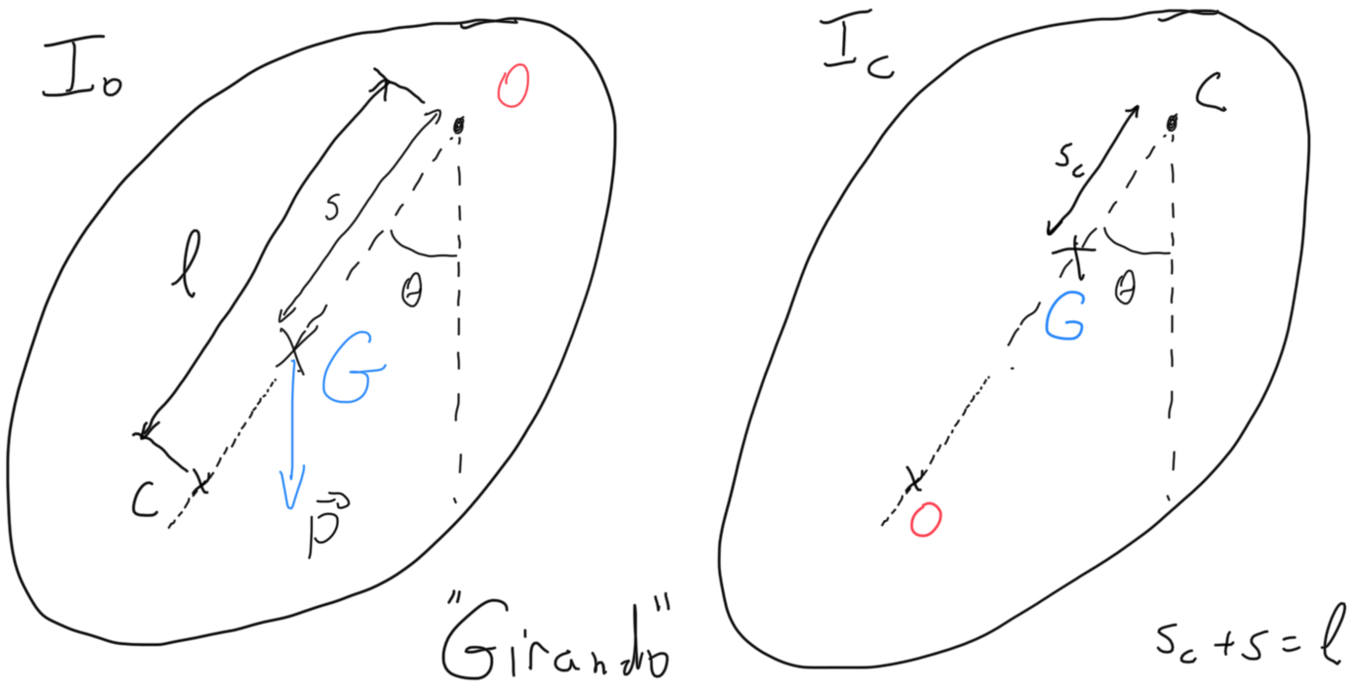
$$I = M \cdot d^2 \Rightarrow I = M\ell^2 \Rightarrow \ell = s$$ (por definição)

Raio de giração: distância k da massa M ao pivô, tal que tenhamos o mesmo momento de inércia

$$I = M k^2$$

Mas $I = M \cdot s \cdot \ell \Rightarrow k = \sqrt{\ell \cdot s}$

Uma forma precisa de medir g: Determinar ω, l, s

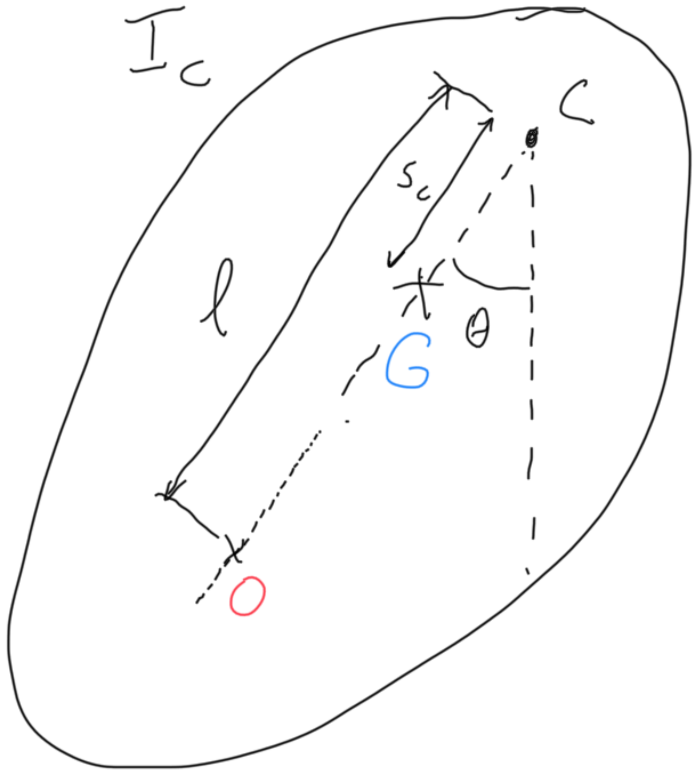


Novo momento de inércia : Teorema de Steiner
Eixos Paralelos

Momento de Inércia do eixo passando por $G \Rightarrow I_G$

$$I_O = I_G + Ms^2 = Mk^2 \Rightarrow I_G = M(k^2 - s^2)$$

Por outro lado :

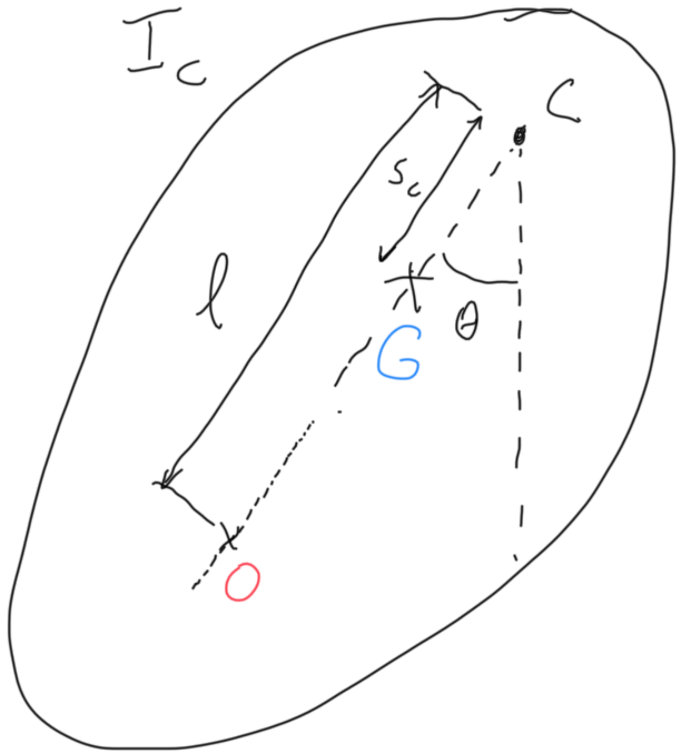


$$I_C = I_G + Ms_c^2 = Mk_c^2$$

$$I_G = M(k_c^2 - s_c^2)$$

$$\Rightarrow k_c^2 - s_c^2 = k^2 - s^2$$

Por outro lado:



$$I_C = I_G + M s_c^2 = M k_c^2$$

$$I_G = M(k_c^2 - s_c^2)$$

$$\Rightarrow k_c^2 - s_c^2 = k^2 - s^2$$

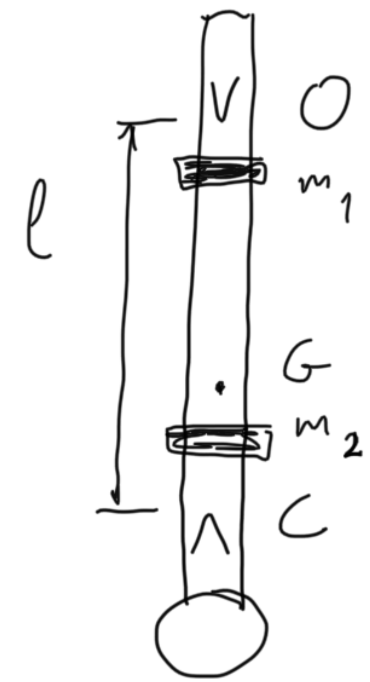
mas $s_c = \ell - s \Rightarrow k_c^2 = k^2 - s^2 + (\ell - s)^2 =$

$$= \ell s - \cancel{s^2} + \ell^2 - 2\ell s + \cancel{s^2} = \ell \underbrace{(\ell - s)}_{s_c}$$

$k_c^2 = \ell \cdot s_c \Rightarrow$ O centro de oscilação, para C, fica em O!

Consequência: se obtemos l, calculamos g

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$



Pêndulo assimétrico

Ajustamos a posição de m_1 e m_2 até que o período de oscilação, tomando os dois apoios, se iguale

$$\delta g < 0{,}5\%$$

Por quê assimétrico?

Massas acopladas:

Deformação $\Delta x = (x_2 - x_1) - l$

$$F_1 = k\Delta x = -F_2$$

$$= -k(x_1 - l) + k(x_2 - l) - l$$

Equações de movimento

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k\Delta x \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k\Delta x \end{cases}$$

3 variáveis !

Equações de movimento

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k \Delta x \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k \Delta x \end{cases}$$

3 variáveis !

Recurso $\rightarrow$ Mudança de Variáveis

Vamos ao Centro de massa

$$X = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M} \qquad M = m_1 + m_2$$

Vemos que $\ddot{X} = 0 \rightarrow \dot{X} = V = \text{constante}$

Evidente?

Centro de Massa:

Força sobre cada partícula: $m_i \dfrac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_{e_i} + \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji}$

Conservação de momento: $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$

Adição dos momentos $\vec{P} = \sum m_i \dfrac{d}{dt} \vec{r}_i$

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \sum \vec{F}_{e_i} + \underbrace{\sum_{i,j}^{i \neq j} \vec{F}_{ji}}_{= 0;\ \text{pois } \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij}} = \sum_i \vec{F}_{e_i}}$$

$$\therefore \vec{F}_e = \sum_i \vec{F}_{ei} = M \cdot \frac{d^2}{dt^2} \vec{R}_{cm}$$

$$\text{onde } \vec{R}_{cm} = \frac{\sum m_i \cdot \vec{r}_i}{M} \; ; \; M = \sum_i m_i$$

Consequência: mudança de referencial $\rightarrow \vec{r}_i\,' = \vec{r}_i - \vec{R}_{cm}$

$$\sum m_i \vec{r}_i\,' = \sum m_i \vec{r}_i - \vec{R}_{cm} \sum m_i = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i\,' = \sum m_i \frac{d}{dt} \vec{r}_i\,' = \sum_i \vec{p}_i\,' = 0$$

$$\frac{d}{dt} \sum m_i \vec{r}_i = \sum \vec{p}_i = \vec{P} = M \frac{d}{dt} \vec{R}_{cm}$$

Próximo passo:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 = k\,\Delta x & (\times m_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 = -k\,\Delta x & (\times m_1) \end{cases}$$

$$m_1 m_2 \ddot{x}_1 = k\, m_2 \Delta x$$

$$-\quad m_1 m_2 \ddot{x}_2 = -k\, m_1 \Delta x$$

$$m_1 m_2 (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -k(m_1+m_2)\Delta x$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\ddot{x} = -\frac{k}{\mu}\Delta x \quad ; \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$$

Massa reduzida

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Jogo da energia

$$K = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_1 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

onde $v_1' + V = V_1$

$\quad v_{\text{rel.}}$ relativa no ref. CM

$$v_1' = v_1 - V = \dot{x}_1 - \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_1 - m_1 \dot{x}_1 + m_2 \dot{x}_2}{M}$$

$$v_1' = \frac{m_2}{M} (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = -\frac{m_2}{M} \Delta \dot{x}$$

$$v_2' = -\frac{m_1}{M} \Delta \dot{x}$$

Ref. CM $T' = \frac{1}{2}\left(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1 m_2^2 + m_1^2 m_2}{M^2}\right)\Delta\dot{x}^2$

$$T' = \frac{1}{2}\mu\dot{x}^2$$

Energia Potencial $U = -\frac{k}{2}\Delta x^2$

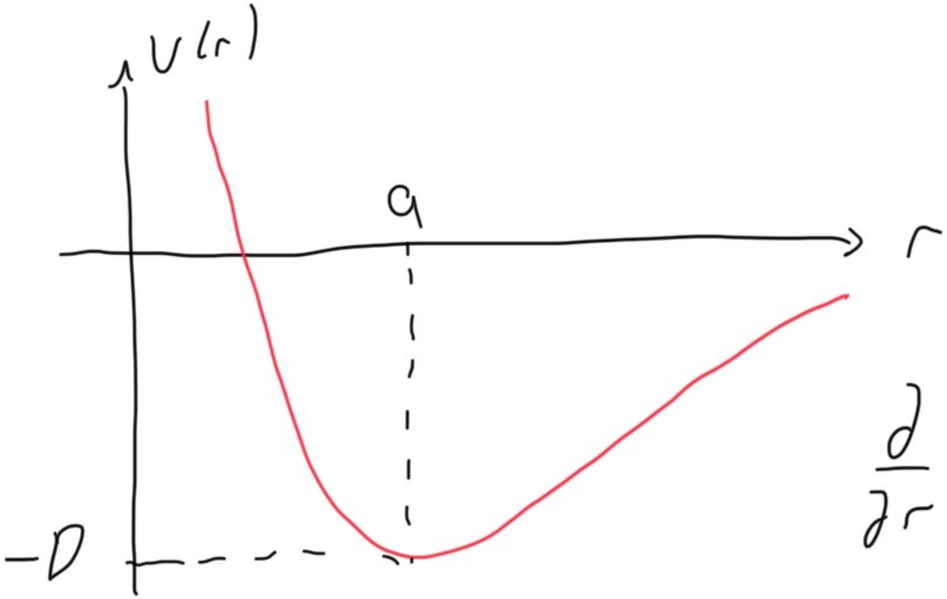
Energia Interna: $E_i = T' + U = \frac{1}{2}\mu\Delta\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2$

Energia Total: $E = E_i + \frac{1}{2}MV^2$

Independentes!

Consequência: Molécula Diatômica

Potencial Lennard-Jones: $U(r) = D\left[\left(\frac{a}{r}\right)^{12} - 2\left(\frac{a}{r}\right)^{6}\right]$



Aproximação

$$x = r - a$$

$$\frac{\partial}{\partial r}U = -\frac{D}{a}\left[12\left(\frac{a}{r}\right)^{13} - 12\left(\frac{a}{r}\right)^{7}\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}U = \frac{D}{a^2}\left[13\cdot 12\left(\frac{a}{r}\right)^{14} - 7\cdot 12\left(\frac{a}{r}\right)^{8}\right]$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial r}U\right|_{a} = 0 \qquad \left.\frac{\partial^2}{\partial r^2}U\right|_{a} = \frac{D}{a^2}\,12\cdot 6 = 72\frac{D}{a^2}$$

$$U \simeq -D + \left(72\frac{D}{a}\right)\frac{x^2}{2} = -D + \frac{k x^2}{2}$$

$$T' = \frac{1}{2}\mu \dot{x}^2 \qquad \omega = \sqrt{k/\mu}$$

Ex: $m_{C^{12}} = 12$ u.m.a $\sim 2 \cdot 10^{-26}$ kg

$m_{O^{16}} = 16$ u.m.a $\sim 2{,}7 \cdot 10^{-26}$ kg

$$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \mu \sim 1{,}16 \cdot 10^{-26}\,\text{kg}$$

$D \sim 10\,\text{eV} = 1{,}6 \cdot 10^{-18}\,\text{J}$, $a \sim 1{,}1 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$

$$\Rightarrow k \sim 9{,}5 \cdot 10^{3}\,\text{N/m}$$

$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{\mu}} \sim 1{,}4 \cdot 10^{14}\,\text{Hz}$, $\lambda = \frac{c}{\nu} \sim 2\,\mu\text{m}$

Verdadeiro: $\lambda_0 = 4{,}7\,\mu\text{m}$ $\rightarrow$ Diferença? M.Q.!