Introdução à Física de Partículas Elementares (Física Moderna IIA)

Aula 06

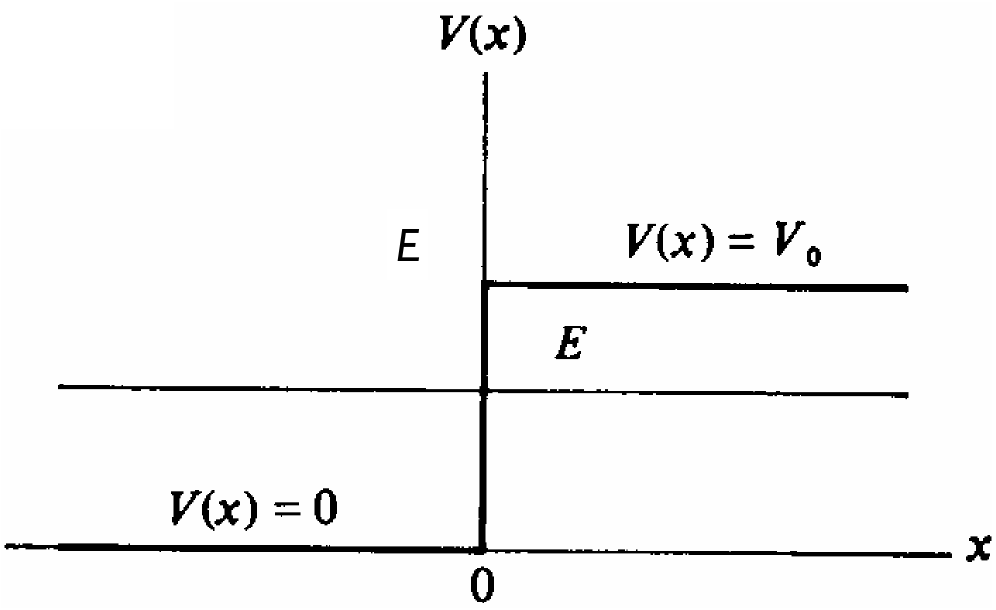
Paradoxo de Klein, Antimatéria e Equivalência Massa-Energia

Soluções da Equação de Schroedinger Independente do tempo

- O que acontece com a função de onda e a energia de sistemas não ligados, ou seja, para aqueles em que não há uma limitação da posição onde a partícula pode ser encontrada?

Potencial Degrau

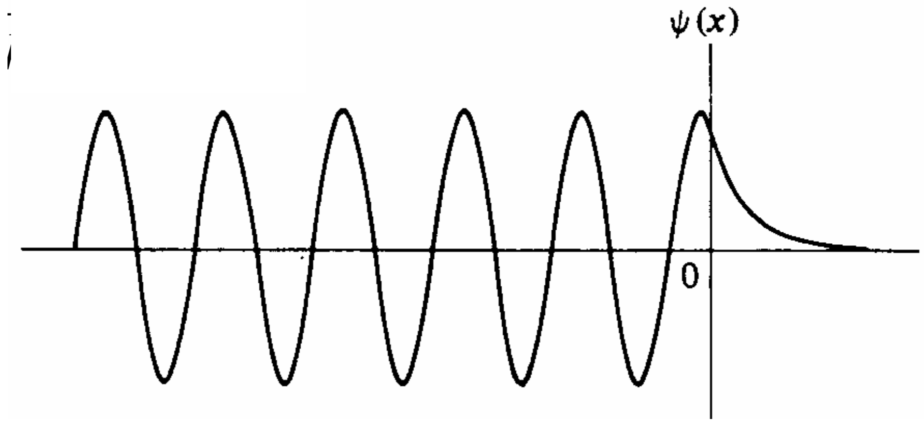
- O potencial degrau é uma das configurações mais simples de se resolver a equação de Schroedinger
- Apesar de idealizado, este potencial apresenta algumas aplicações práticas
- Inicialmente, vamos estudar o caso em que $E < V_0$



Potencial Degrau

- Como esperado, tem-se a função de onda da partícula livre para $x<0$
- Para $x>0$, como no caso do poço de potencial finito, existe uma probabilidade da partícula ser encontrada na região classicamente proibida

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{D}{2}\left(1 + i\frac{k'}{k}\right)e^{ikx} + \frac{D}{2}\left(1 - i\frac{k'}{k}\right)e^{-ikx} \\ De^{-ik'x} \end{cases}$$



Potencial Degrau

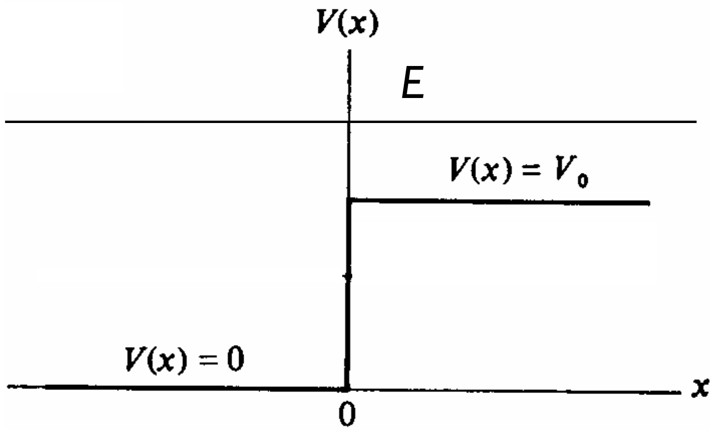
- **Apesar disso, calculando-se o chamado coeficiente de reflexão da onda incidente (*R*), que é dado pela razão entre o quadrado da amplitude da onda que viaja na direção de *x* negativo (*B*) e o quadrado da amplitude da onda que viaja na direção de *x* positivo (*A*)**

$$R = \frac{B^* B}{A^* A} = \frac{(1 - ik'/k)^*(1 - ik'/k)}{(1 + ik'/k)^*(1 + ik'/k)} = \frac{(1 + ik'/k)(1 - ik'/k)}{(1 - ik'/k)(1 + ik'/k)} = 1$$

tem-se que $R = 1$

Potencial Degrau

- Neste caso, $E > V_0$
- Este tipo de problema reproduz, por exemplo, o efeito fotoelétrico quando o elétron tem energia ligeiramente superior à energia de ligação do átomo
- Classicamente, espera-se que a partícula apenas diminua sua velocidade ao passar por $x=0$



$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + A\left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)e^{-ikx} \\ A\left(\frac{2k}{k+k'}\right)e^{ik'x} \end{cases}$$

Potencial Degrau

- O resultado surpreendente neste caso é que $R > 0$, pois:

$$R = \frac{B^*B}{A^*A} = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^* \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right) = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2$$

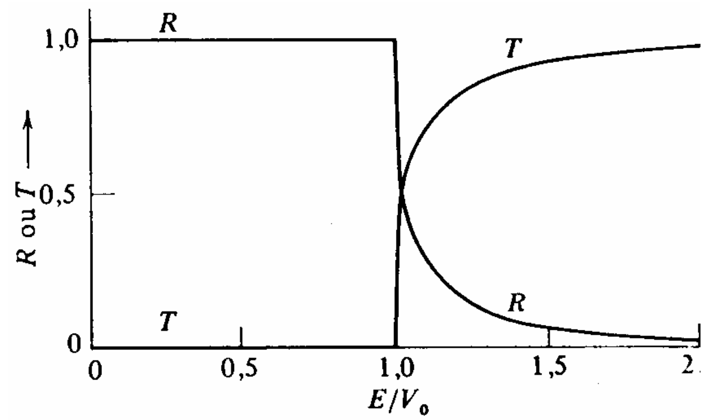
enquanto classicamente não se espera nenhuma reflexão.

- Podemos calcular também o coeficiente de transmissão pela barreira (T), sabendo que:

$$R + T = 1 \Rightarrow T = \frac{4kk'}{(k+k')^2}$$

Potencial Degrau

- Portanto, quando a energia da partícula é ligeiramente maior que a amplitude da barreira, existe uma probabilidade da partícula ser refletida, contrariando a expectativa da física clássica



$$R = 1 - T = \left(\frac{1-\sqrt{1-V_0/E}}{1+\sqrt{1-V_0/E}}\right)^2$$

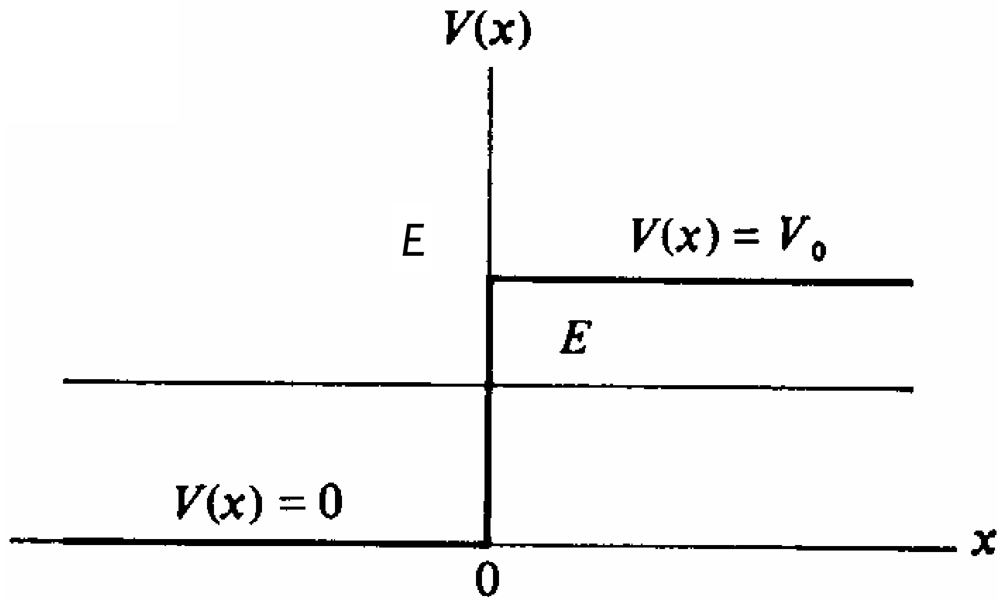
para $E/V_0 > 1$

$$R = 1 - T = 1$$

para $E/V_0 < 1$

Potencial Degrau com a Eq. de Dirac

- O que acontece quando este mesmo problema é aplicado na Equação de Dirac?



Potencial Degrau com a Eq. de Dirac

$$\Psi_I(z,t) = A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{pc}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ipz/\hbar} + C\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{pc}{E+mc^2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-ipz/\hbar}\text{, **onde** } pc = \sqrt{E^2 - m^2c^4}$$

$$\Psi_{II}(z,t) = B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{p'c}{V_0-(E+mc^2)} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ip'z/\hbar}\text{ , **onde** } p'c = \sqrt{(E-V_0)^2 - m^2c^4}$$

Potencial Degrau com a Eq. de Dirac

- As correntes de probabilidade serão:

$$\overrightarrow{j_I} = A^*A\left(\frac{2pc^2}{E+mc^2}\right)\hat{e}_z$$

$$\overrightarrow{j_I^{refl}} = -\,C^*C\left(\frac{2pc^2}{E+mc^2}\right)\hat{e}_z$$

$$\overrightarrow{j_{II}} = -\,B^*B\left[\frac{2p'c^2}{V_0-(E+mc^2)}\right]\hat{e}_z$$

Potencial Degrau com a Eq. de Dirac

- Portanto, teremos:

$$R = \frac{|\overrightarrow{j_I^{refl}}|}{|\overrightarrow{j_I}|} = \frac{-C^*C}{A^*A} = \frac{(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2} \text{ e}$$

$$T = \frac{|\overrightarrow{j_{II}}|}{|\overrightarrow{j_I}|} = \frac{B^*B}{A^*A}\frac{2p'c^2}{V_0 - E - mc^2}\frac{E+mc^2}{2pc^2} = \frac{4\gamma}{(1-\gamma)^2}$$

onde $\gamma = \sqrt{\dfrac{(V_0 - E + mc^2)(E + mc^2)}{(V_0 - E - mc^2)(E - mc^2)}}$

Potencial Degrau com a Eq. de Dirac

- Esse resultado indica que, se $V_0 > E + mc^2$, teremos

$$\gamma = \sqrt{\frac{(V_0 - E + mc^2)(E + mc^2)}{(V_0 - E - mc^2)(E - mc^2)}} > 1$$

ou seja: $|\overrightarrow{j_I^{refl}}| > |\overrightarrow{j_I}|$

- Mas de onde vem esse aumento da probabilidade?
  - Do mar de Dirac!

Paradoxo de Klein

- Este resultado

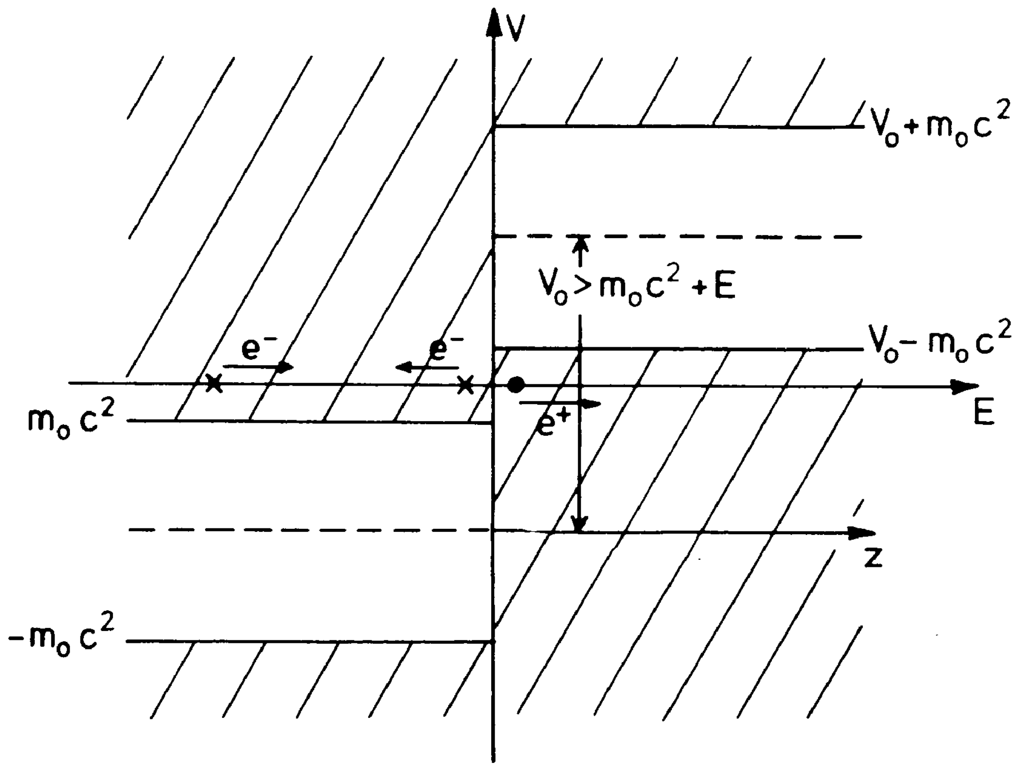
$$|\overrightarrow{j_I^{refl}}| > |\overrightarrow{j_I}|$$

e o fato de $\overrightarrow{j_{II}}$ apontar para o sentido negativo do eixo z é conhecido como Paradoxo de Klein

- Ele pode ser compreendido a partir da ideia de antimatéria, proposta na Equação de Dirac

Paradoxo de Klein

- Os elétrons a mais na região I e, como não deve haver elétrons na região II, isso é interpretado como a criação de pares elétrons-pósitrons, sendo que os elétrons viajam para a região I na direção negativa do eixo-z e os pósitrons (antimatéria) no direção positiva do eixo-z



Antimatéria

- Portanto, a Equação de Dirac tem como resultado a existência da antimatéria e uma explicação mais fundamental do spin
- O spin já era conhecido, porém uma anti-partícula nunca havia sido observada. Como ela foi descoberta?