TEORIA DOS MODELOS: CONSEQUÊNCIA LÓGICA

RICARDO BIANCONI

RESUMO. Temos usado muito diversas propriedades de consequência lógica. Explicitamos essas propriedades em exercícios.

1. INTRODUÇÃO

A formalização da argumentação da matemática reflete-se (ou é modelada) na Teoria dos Modelos pela noção de consequência lógica. Essa é uma maneira "algébrica" de visualizarmos as regras de dedução matemática.

2. CONSEQUÊNCIA LÓGICA

Definição 1 (Consequência Lógica)**.** Seja Γ um conjunto de L-fórmulas. Dizemos que $\boldsymbol{\psi}$ **é consequência lógica de** $\mathbf{\Gamma}$, se para toda L-estrutura $\overline{M} = (M, \dots)$, e todo $\bar{a} \in M^I$, se $\overline{M} \models \Gamma(\bar{a})$, então $\overline{M} \models \psi(\bar{a})$, ou em termos de funções, $[[\phi]]_{\overline{M}}(\bar{a}) \geq \min\{[[\gamma]]_{\overline{M}}(\bar{a}) : \gamma \in \Gamma\}$, para todas as estruturas $\overline{M} = (M, \dots)$, e toda sequência $\bar{a} \in M^I$.

Notação: A expressão $\mathbf{\Gamma} \models \boldsymbol{\psi}$ significa que ψ é consequência lógica de Γ. Se $\Gamma = \varnothing$, então denotamos apenas $\models \boldsymbol{\psi}$, e chamamos tal ψ de **validade universal**. Se Γ_1 e Γ_2 forem conjuntos de L-fórmulas, denotamos $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \models \psi$ por $\mathbf{\Gamma_1, \Gamma_2} \models \boldsymbol{\psi}$ e, em particular, se $\Gamma_2 = \{\phi_1, \dots, \phi_k\}$, escrevemos $\mathbf{\Gamma_1}, \boldsymbol{\phi_1, \dots, \phi_k} \models \boldsymbol{\psi}$.

Observação 1. Apesar do uso ambíguo do símbolo "$\models$" para a relação de satisfação e para a noção de consequência lógica, seu uso não causa confusão, uma vez que fica claro o contexto em que são usados.

Exemplo 1 (*Modus Ponens* e o Teorema da Dedução)**.** Mostremos que $\Gamma, \phi \models \psi$ se, e somente se, $\Gamma \models (\phi \to \psi)$. (A implicação "$\Rightarrow$" é o Teorema da Dedução, e "$\Leftarrow$", a regra lógica de *Modus Ponens*, também conhecida como *Destacamento*.)

Assumimos primeiramente que $\Gamma, \phi \models \psi$, ou seja, para todos os modelos $\overline{M} \models \Gamma(\bar{a}), \psi(\bar{a})$, também vale que $\overline{M} \models \phi(\bar{a})$. Para mostrarmos

Date: 2023.

que $\Gamma \models (\phi \to \psi)$, suponhamos que $\overline{M} \models \Gamma(\bar{a})$. Se também $\overline{M} \models \psi(\bar{a})$, então, por hipótese, $\overline{M} \models \psi(\bar{a})$ e, portanto, $\overline{M} \models (\phi \to \psi)(\bar{a})$. Caso contrário, se $\overline{M} \not\models \phi(\bar{a})$, ou seja, $\overline{M} \models (\neg\phi)(\bar{a})$, o que implica que $\overline{M} \models (\phi \to \psi)(\bar{a})$.

Reciprocamente, assumimos que $\overline{M} \models (\phi \to \psi)(\bar{a})$.

Observação 2. Em geral (mas nem sempre), para mostrar que $\Gamma \models (\phi \to \psi)$, é mais conveniente mostrar que $\Gamma, \phi \models \psi$ e depois apelar para o Teorema da Dedução.

Exemplo 2 (Uso do Teorema da Dedução)**.** Para mostrar que $\models [\phi \to (\pi \to \theta)] \to [(\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)]$ (uma validade universal), basta mostrar que $[\phi \to (\psi \to \theta)], (\phi \to \psi), \phi \models \theta$ e apelar para o Teorema da Dedução (por três vezes), para justificar que $\models [\phi \to (\pi \to \theta)] \to [(\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta)]$. Assim, tomamos uma estrutura arbitrária que satisfaça as três fórmulas antes do símbolo "$\models$" e mostrar que ele também satisfaz a fórmula θ.

De fato, suponha que $\overline{M} \models \Gamma(\bar{a})$, onde $\Gamma = \{(\phi \to (\psi \to \theta)), (\phi \to \psi), \phi\}$, e mostremos que $\overline{M} \models \theta(\bar{a})$.

Como, por hipótese, $\overline{M} \models \phi(\bar{a})$ e $\overline{M} \models (\phi \to (\psi \to \theta))\bar{a})$, temos que $\overline{M} \models (\psi \to \theta)(\bar{a})$ e, como $\overline{M} \models (\phi \to \psi)(\bar{a})$, temos que $\overline{M} \models \psi(\bar{a})$. Isso implica que $\overline{M} \models \theta(\bar{a})$, como esperado.

Exercício 1 (Propriedades Básicas)**.** Mostre que:

(a) se $\Gamma \models \psi$, então $\Gamma, \phi \models \psi$;
(b) $\Gamma, \phi \models \psi \to \phi$;
(c) $\Gamma \models \phi$ e $\Gamma \models \psi$ se, e somente s, $\Gamma \models (\phi \wedge \psi)$;
(d) $\Gamma, \phi, \psi \models \theta$ se, e somente se, $\Gamma, (\phi \wedge \psi) \models \theta$;
(e) se $\Gamma, \phi \models \theta$ e $\Gamma, \psi \models \theta$, então $\Gamma, (\phi \vee \psi) \models \theta$;
(f) se $\Gamma, \phi \models \psi$ e $\Gamma, (\neg\phi) \models \psi$, então $\Gamma \models \psi$;
(g) $\Gamma, \phi \models \psi$ se, e somente se, $\Gamma, (\neg\psi) \models (\neg\phi)$;
(h) $\Gamma \models (\phi \leftrightarrow \psi)$ se, e somente se $\Gamma \models (\phi \to \psi)$ e $\Gamma \models (\psi \to \phi)$;
(i) se $\Gamma \models \phi$, então $\Gamma \models (\phi \vee \psi)$, e $\Gamma \models (\psi \vee \phi)$ (para qualquer fórmula ψ);
(j) se $\Gamma \models (\neg\phi)$, então $\Gamma \models (\phi \to \psi)$.

Exercício 2 (Validades Universais)**.** Mostre que as seguintes fórmulas abaixo são validades universais. O uso do Teorema da Dedução pode ajudar aqui.

(a) $(\phi \to \psi) \leftrightarrow ((\neg\phi) \vee \psi)$ (veja a solução abaixo);
(b) $(\phi \to \psi) \to [(\psi \to \theta) \to (\phi \to \theta)]$;
(c) $(\phi \to \psi) \leftrightarrow [(\neg\psi) \to (\neg\phi)]$

(d) $(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow [(\phi \wedge \psi) \vee ((\neg\phi) \wedge (\neg\psi))]$;
(e) $[\neg(\phi \leftrightarrow \psi)] \leftrightarrow [\phi \leftrightarrow (\neg\psi)]$;
(f) $(\neg\neg\phi) \rightarrow \phi$
(g) $[\neg(\phi \wedge \psi)] \leftrightarrow [(\neg\phi) \vee (\neg\psi)]$;
(h) $[\neg(\phi \vee \psi)] \leftrightarrow [(\neg\phi) \wedge (\neg\psi)]$;
(i) $(\exists x\phi) \leftrightarrow [\neg(\forall x(\neg\phi))]$;
(j) $[\forall x(\phi \rightarrow \psi)] \rightarrow [(\forall x\phi) \rightarrow (\forall x\psi)]$;
(k) $[\forall x(\phi \rightarrow \psi)] \rightarrow [\phi \rightarrow (\forall x\psi)]$, se $x \notin \mathrm{VL}(\phi)$;

Exemplo 3. Temos que mostrar que $\models (\phi \rightarrow \psi) \leftrightarrow ((\neg\phi) \vee \psi)$, ou, se usarmos o Teorema da Dedução e o item (h) do exercício anterior, basta mostrarmos que $(\phi \rightarrow \psi) \models ((\neg\phi) \vee \psi)$, e que $((\neg\phi) \vee \psi) \models (\phi \rightarrow \psi)$.

Comecemos com $(\phi \rightarrow \psi) \models ((\neg\phi) \vee \psi)$. Acrescentemos as hipóteses ϕ e depois $(\neg\phi)$, e aplicamos o item (h) referido acima:

1. $(\phi \rightarrow \psi), \phi \models \psi$ (por *Modus Ponens*);
2. $(\phi \rightarrow \psi), \phi \models ((\neg\phi) \vee \psi)$ (pelo intem (i) do exercício anterior);
3. $(\phi \rightarrow \psi), (\neg\phi) \models (\neg\phi)$;
4. $(\phi \rightarrow \psi), (\neg\phi) \models ((\neg\phi) \vee \psi)$; (novamente pelo item (i));
5. $(\phi \rightarrow \psi) \models ((\neg\phi) \vee \psi)$ (pelo item (f) do exercício anterior).

Agora tratamos da recíproca, $((\neg\phi) \vee \psi) \models (\phi \rightarrow \psi)$. Para isso usamos os itens (j), (b) e (e) do exercício anterior:

1. $(\neg\phi) \models (\phi \rightarrow \psi)$ (por (j));
2. $\psi \models (\phi \rightarrow \psi)$ (por (b));
3. $((\neg\phi) \vee \psi) \models (\phi \rightarrow \psi)$ (por (e)).

Observação 3. A solução desse exemplo serve para ilustrar o que seria uma dedução formal. Podemos argumentar usando a definição de "$\models$". Por exemplo, para mostrarmos que $(\phi \rightarrow \psi) \models ((\neg\phi) \vee \psi)$, tomamos uma L-estrutura arbitrária $\overline{M} = (M, \dots)$ e sequência $\bar{a} \in M^I$, e supomos que $[[(\phi \rightarrow \psi]]_{\overline{M}}(\bar{a}) = 1$ e usamos a definição dessa função para concluir diretamente que $[[((\neg\phi) \vee \psi)]]_{\overline{M}}(\bar{a}) = 1$.

Exemplo 4 (<u>Substituição Livre</u>)**.** Sejam ϕ uma L-fórmula e t um L-termo, tal que $\mathrm{var}(t)$ não contenha nenhuma variável que seja quantificada em ϕ. Então $\models (\forall x\phi) \rightarrow \phi|_{x=t}$, ou $\forall x\phi \models \phi|_{x=t}$, onde $\phi|_{x=t}$ indica a sustituição de cada ocorrência livre da variável x pelo termo t, uma definição recursiva, primeiro para termos e depois para fórmulas:

Dado um termo t, definimos a substituição da variável x pelo termo t nos termos τ, $\tau|_{x=t}$ recursivamente.

a. se τ for um símbolo de constante ou variável disstinta de x, definimos $\tau|_{x=t} = \tau$;

b. se τ for a variável x, definimos $\tau|_{x=t} = t$;
c. suponhamos que já tenham sido definidos $\tau_1|_{x=t}, \ldots, \tau_n|_{x=t}$, e que $f \in \mathcal{F}_n$, então $(f(\tau_1, \ldots, \tau_n))|_{x=t} = f(\tau_1|_{x=t}, \ldots, \tau_n|_{x=t})$.

Agora definimos a substituição da variável x pelo termo t em fórmulas ϕ, denotada por $\phi|_{x=t}$.

i. para as fórmulas atômicas, $(\tau_1 = \tau_2)|_{x=t} = (\tau_1|_{x=t} = \tau_2|_{x=t})$, e $P(\tau_1, \ldots, \tau_n)|_{x=t} = P(\tau_1|_{x=t}, \ldots, \tau_n|_{x=t})$;
ii. para os conectivos proposicionais, $(\neg\phi)|_{x=t} = \neg(\phi|_{x=t})$, e $(\phi * \psi)|_{x=t} = \phi|_{x=t} * \psi|_{x=t})$, para os demais símbolos $* \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$;
iii. para os quantificadores, $(Qz\phi)|_{x=t} = Qz(\phi|_{x=t})$, se $z \neq x$ e $z \notin \text{var}(t)$, e $(Qz\phi)|_{x=t} = Qz\phi$, caso contrário, para $Q \in \{\exists, \forall\}$.

Exemplo 5. A restrição sobre as variáveis em t é importante: considere a fórmula $\forall x\exists y(x \neq y)$, onde x e y seja duas variáveis distintas. Se substituíssemos x pelo termo y em $\forall x\exists y(x \neq y) \models \exists y(x \neq y)|_{x=t}$, teríamos uma falsidade universal, $\exists y(y \neq y)$, na conclusão, mas uma fórmula satisfatível na premissa, $\forall x\exists y(x \neq y)$.

Exemplo 6 (Eliminação de Quantificação)**.** Para quaisquer fórmulas ϕ, termos t e variáveis x, vale que $\models (\forall x\phi) \rightarrow \phi|_{x=t}$, ou seja, $\forall x\phi \models \phi|_{x=t}$.

Sejam $\overline{M} = (M, \ldots)$ uma L-estrutura e $\bar{a} \in M^I$ uma sequência. Então $[[\forall x\phi]]_{\overline{M}}(\bar{a}) = \min\{[[\phi]]_{\overline{M}}(\bar{a}') :$ *com* $\hat{y}(\bar{a}) = \hat{y}(\bar{a}')$*, se* $y \in \text{Var}$, $y \neq x$*, e* $\hat{x}(\bar{a}') \in M\}$ (lembramos que $\hat{y}(\bar{a})$ é a projeção de $\bar{a}$ sobre a coordenada correspondente à variável y). Como o valor $[[\phi|_{x=t}]]_{\overline{M}}(\bar{a})$ é um dos elementos desse conjunto, temos que $[[\forall x\phi]]_{\overline{M}}(\bar{a}) \leq [[\phi|_{x=t}]]_{\overline{M}}(\bar{a})$, ou seja, $\forall x\phi \models \phi|_{x=t}$.

Exercício 3 (Regra da Generalização)**.** Mostre que se x não for variável livre em nenhuma fórmula de Γ e $\Gamma \models \phi$, então $\Gamma \models \forall x\phi$. Mostre também que se x também não for livre em ψ, então $\Gamma, \phi \models \psi$ implica que $\Gamma, \exists x\phi \models \psi$.

Como a variável x não ocorre livre em nenhuma das fórmulas de Γ, para toda estrutura $\overline{M} = (M, \ldots)$ e toda sequência $\bar{a}' \in M^I$, tal que $\hat{y}(\bar{a}') = \hat{y}(\bar{a})$ para cada $y \in \text{Var} \setminus \{x\}$, vale que $\min\{[[\gamma]]_{\overline{M}}(\bar{a}') : \gamma \in \Gamma\} = \{[[\gamma]]_{\overline{M}}(\bar{a}) : \gamma \in \Gamma\} \leq [[\phi]](\bar{a}')$, ou seja, $\Gamma \models \forall x\phi$.

Exemplo 7 (Generalização de Constantes)**.** Mostremos que se x não for variável livre em nenhuma fórmula de Γ e não ocorrer quantificada em ϕ, e 'c' um novo símbolo de constante (que não ocorra nem em Γ e nem em ϕ), e $\Gamma \models \phi|_{x=c}$, então $\Gamma \models \forall x\phi$.

A argumentação aqui é parecida com a da Regra da Generalização. O que muda é que podemos interpretar arbitrariamente o símbolo de constante c em cada estrutura, o que não muda o valor $\min\{[[\gamma]](\bar{a}') :$ etc$\}$.

Mostremos também que se x não for livre em Γ e em ψ, então $\Gamma, \phi|_{x=c} \models \psi$ implica que $\Gamma, \exists x\phi \models \psi$.

Pelo item (g) do Exercício 1, $\Gamma, \phi|_{x=c} \models \psi$ se, e somente se, $\Gamma, (\neg\psi) \models (\neg\phi)|x = c$. Usamos a Generalização de Constantes para concluir que $\Gamma, (\neg\psi) \models \forall x(\neg\phi)$. Novamente, pelo item (g) citado, $\Gamma, (\neg(\forall x(\neg\phi)) \models \psi$, ou seja, $\Gamma, (\exists x\phi) \models \psi$ (usando o item (i) do Exercício 2).