TEORIA DOS MODELOS: ESTRUTURAS E LINGUAGENS

RICARDO BIANCONI

Sumário

1. Introdução

A Teoria dos Modelos trata de estruturas matemáticas e sua relação com a lógica subjacente. É uma matematização do raciocínio matemático.

Descrevemos a lógica e sua interpretação em estruturas.

2. Linguagens e Estruturas Polissortidas

Podemos reunir em uma só estrutura vários tipos de estruturas, como por exemplo, espaço vetorial e o corpo de escalares, ou coisas mais complexas, como pontos retas e planos em geometria espacial. Para isso, introduzimos a ideia de assinaturas e estruturas polissortidas, em que cada tipo de objeto é tratado separadamente.

2.1. **Assinaturas e Estruturas.**

Definição 2.1 (Assinatura Polissortida)**.** Seja S um conjunto não vazio, o conjunto das sortes. Uma assinatura sobre S é uma tripla ordenada $L_S = (\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$, onde $\mathcal{C} = \bigcup_{s\in S} \mathcal{C}_s$ (o conjunto $\mathcal{C}_s$ contém os símbolos de constantes de sorte s), $\mathcal{F} = \bigcup_{n\geq 1} \bigcup_{s\in S^{n+1}} \mathcal{F}_{n,s}$ (onde $\mathcal{F}_{n,s}$ contém os símbolos de funções que levam uma n-upla de elementos de

Date: 2023.

sortes $s_1, \ldots, s_n$ em um elemento de sorte s_{n+1}), e $\mathcal{R} = \bigcup_{n\geq 1}\bigcup_{s\in S^n}\mathcal{R}_{n,s}$ (onde $\mathcal{R}n, s$ contém os símbolos relacionais n-ários, que relacionam objetos de sortes $s_1, \ldots, s_n$).

Definição 2.2 (L_S-Estruturas)**.** Dada uma assinatura L_S sobre um conjunto de sortes S, uma L_S-estrutura é uma quádrupla $\overline{M} = (M, C^{\overline{M}}, F^{\overline{M}}, R^{\overline{M}})$, onde $M = \bigcup_{s\in S} M_s$ (aqui não exigimos que a união seja disjunta), $\mathcal{C} = \bigcup_{s\in S} C_s^{\overline{M}}$, $\mathcal{F} = \bigcup_{n\geq 1}\bigcup_{s\in S^{n+1}} F_{n,s}^{\overline{M}}$, $\mathcal{R} = \bigcup_{n\geq 1}\bigcup_{s\in S^n} R_s^{\overline{M}}$, tal que

(i) para cada $c \in \mathcal{C}_s$, um elemento $c^{\overline{M}} \in C_s^{\overline{M}} \subseteq M_s$;
(ii) para cada $f \in \mathcal{F}_{n,s}$, uma função $f^{\overline{M}} \in F_{n,s}^{\overline{M}}$,
$$f^{\overline{M}} : M_{s_1} \times \ldots M_{s_n} \to M_{s_{n+1}};$$
(iii) para cada $P \in \mathcal{R}_{n,s}$, um conjunto $P^{\overline{M}} \in \mathcal{R}_{n,s}^{\overline{M}}$,
$$P^{\overline{M}} \subseteq M_{s_1} \times \ldots M_{s_n}.$$

Exemplo 2.1. A Geometria Plana pode ser descrita com uma assinatura bissortida, com uma sorte $\mathcal{P}$ para pontos e outra, $\mathcal{R}$, para retas; um símbolo de relação binária de sortes $\mathcal{P} \times \mathcal{R}$ (para incidência), uma relação ternária de pontos (para a relação "estar entre"), uma relação quaternária de pontos (para congruência de segmentos) e uma relação 6-ária entre pontos (para congruência de ângulos). Não há símbolos de constantes e nem de funções.

Exemplo 2.2. Consideremos o anel de inteiros $\mathbb{Z}$ e seus quocientes $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $m \geq 1$. A assinatura tem uma sorte $\mathcal{Z}_n$, para cada $n \geq 0$. Os símbolos funcionais correspondem às operações de anéis em cada sorte, para cada $n \geq 1$ um símbolo funcional para a projeção canônica $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$, e para cada par (m, n), com $m, n > 0$, e n divide m, um símbolo funcional para o homomorfismo canônico $\mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$.

2.2. **Linguagem de Primeira Ordem.** Agora introduzimos a parte "lógica" da Teoria dos Modelos.

Definição 2.3 (Linguagem de Primeira Ordem Polissortida)**.** Dada um conjunto de sortes S, a linguagem contém os símbolos

(i) símbolos de conectivos proposicionais: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$;
(ii) símbolos de quantificação: $\exists$, $\forall$;
(iii) símbolos de separação: vírgula e parênteses;
(iv) para cada sorte $s \in S$, um conjunto infinito de variáveis $\mathrm{Var}_s = \{x_{s,i} : i \in I_s\}$.

Definição 2.4 (L_S-Termos)**.** Dado um conjunto de sortes S e uma assinatura L_S, sobre S, definimos recursivamente os L_S-termos t e a função $\mathrm{var}(t)$, por:

(i) dados $s \in S$ e $c \in \mathcal{C}_s$, c é um L_S-termo de sorte s, e $\mathrm{var}(c) = \varnothing$;
(ii) dados $s \in S$ e $x_{x,i} \in \mathrm{Var}_s$, $x_{s,i}$ é um L_S-termo de sorte s, e $\mathrm{var}(x_{s,i}) = \{x_{s,i}\}$;
(iii) dados $t_{s_1}, \ldots, t_{s_k}$ termos de sortes $s_1, \ldots, s_k$, respectivamente, e $f \in \mathcal{F}_{k,(s_1,\ldots,s_k,s_{k+1})}$, $f(t_{s_1}, \ldots, t_{s_k})$ é um termo de sorte s_{k+1}, e $\mathrm{var}(f(t_{s_1}, \ldots, t_{s_k})) = \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{var}(t_{s_j})$.

Definição 2.5 (L_S-fórmulas)**.** Dado um conjunto de sortes S e uma assinatura L_S, sobre S, definimos recursivamente as L_S-fórmulas (ou simplesmente, fórmulas, quando S estiver subentendido) ϕ e a função $\mathrm{VL}(\phi)$, por:

(1) <u>Fórmulas Atômicas</u>:
   (a) dados $s \in S$ e t_1, t_2 dois termos de sorte s, $(t_1 = t_2)$ é uma fórmula e $\mathrm{VL}((t_1 = t_2)) = \mathrm{var}(t_1) \cup \mathrm{var}(t_2)$;
   (b) dados $t_1, \ldots, t_n$, termos de sortes $s_1, \ldots, s_n$, respectivamente, e $P \in \mathcal{F}_{n,(s_1,\ldots,s_n)}$, $P(t_1, \ldots, t_n)$ é uma fórmula e $\mathrm{VL}(P(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{var}(t_j)$;
(2) <u>Símbolos Proposicionais</u>: dadas as fórmulas ϕ e ψ, $\neg\phi$, $\phi \wedge \psi$, $\phi \vee \psi$, $\phi \to \psi$, e $\phi \leftrightarrow \psi$ são fórmulas, e $\mathrm{VL}(\neg\phi) = \mathrm{VL}(\phi)$, e $\mathrm{VL}(\phi * \psi) = \mathrm{VL}(\phi) \cup \mathrm{VL}(\psi)$, para cada $* \in \{\wedge, \vee, \to, \leftrightarrow\}$;
(3) <u>Quantificação</u>: dadas $x \in \mathrm{Var}_s$ e fórmula ϕ, $(Qx\,\phi)$ é fórmula e $\mathrm{VL}((Qx\,\phi)) = \mathrm{VL}(\phi) \setminus \{x\}$, para $Q \in \{\exists, \forall\}$. A fórmula ϕ é o *escopo* do quantificador "Q".

Exemplo 2.3. Suponhamos que a assinatura tenha um símbolo de constante c e um símbolo de função binária f. Daí, temos

(a) $\mathrm{var}(f(x_0, f(c, x_2)) = \mathrm{var}(x_0) \cup \mathrm{var}(f(c, x_2)) = \mathrm{var}(x_0) \cup \mathrm{var}(c) \cup \mathrm{var}(x_2) = \{x_0\} \cup \varnothing \cup \{x_2\} = \{x_0, x_2\}$.
(b) $\mathrm{VL}((f(x_0, f(c, x_2)) = c)) = \mathrm{var}(f(x_0, f(c, x_2))) \cup \mathrm{var}(c) = \{x_0, x_2\}$
(c) $\mathrm{VL}(\exists x_2(f(x_0, f(c, x_2)) = c)) = \mathrm{VL}((f(x_0, f(c, x_2)) = c)) \setminus \{x_2\} = \{x_0\}$
(d) $\mathrm{VL}(\forall x_1(f(x_0, f(c, x_2)) = c)) = \mathrm{VL}((f(x_0, f(c, x_2)) = c)) \setminus \{x_1\} = \{x_0, x_2\}$
(e) $\mathrm{VL}((x_2 = c) \wedge \exists x_2((f(x_0, f(c, x_2)) = c))) = \mathrm{VL}((x_2 = c)) \cup \mathrm{VL}(\exists x_2(f(x_0, f(c, x_2)) = c)) = \{x_2\} \cup \{x_0\} = \{x_0, x_2\}$.

Definição 2.6 (Interpretação de Termos)**.** Dados o conjunto S, e uma L_S-estrutura $\overline{M}$, interpretamos os L_S-termos como funções, cujos domínios serão $M^* = \prod_{s\in S} M_s^{I_s}$, cujos elementos denotamos $\bar{a} = (a_{s,i})_{s\in S; i\in I_s}$

(i) se $c \in C_s$, sua interpretação é a função constante $\hat{c} : M^* \to M_s$, $\hat{c}(\bar{a}) = c^{\overline{M}}$;
(ii) se $x_{s,i} \in \mathrm{Var}_s$, sua interpretação é a projeção $\hat{x}_{s,i} : M^* \to M_s$, $\hat{x}_{s,i}(\bar{a}) = a_{s,i}$;
(iii) se $f \in \mathcal{F}_{n,(s_1,\ldots,s_{n+1})}$, e $t_1, \ldots, t_n$ forem termos de sortes $s_1, \ldots, s_n$, respectivamente, então a interpretação do termo $f(t_1,\ldots,t_n)$ é a composição $f(t_1,\ldots,t_n)\hat{}: M^* :\to M_{s_{n+1}}$, $f^{\overline{M}}(\hat{t}_1,\ldots,\hat{t}_n)$;

Proposição 2.1. Dada a assinatura L_S sobre o conjunto de sortes S, seja t um L_S-termo e $\bar{a}, \bar{b} \in M^* = \prod_{s\in S} M_s^{I_s}$, tais que $\hat{x}(\bar{a}) = \hat{x}(\bar{b})$, para toda variável $x \in \mathrm{var}(t)$. Então $\hat{t}(\bar{a}) = \hat{t}(\bar{b})$.

Demonstração. Segue por indução na complexidade de t (na quantidade de símbolos em t).

Passo Inicial: se t for o símbolo de constante $c \in C_s$, então

$$\hat{c}(\bar{a}) = c^{\overline{M}} = \hat{c}(\bar{b}).$$

Se t for o símbolo de variável $x_{s,i} \in \mathrm{Var}_s$, então, por hipótese, $a_{s,i} = b_{s,i}$ e, daí,

$$\hat{x}_{s,i}(\bar{a}) = a_{s,i} = b_{s,i} = \hat{x}_{s,i}(\bar{b}).$$

Passo de Indução: se t for o termo $f(t_1,\ldots,t_n)$, então o conjunto $\mathrm{var}(t) = \bigcup_{j=1}^n \mathrm{var}(t_j)$ e, daí, a hipótese de que $\hat{x}(\bar{a}) = \hat{x}(\bar{b})$, para toda variável $x \in \mathrm{var}(t)$, implica o mesmo para cada t_j, $j = 1,\ldots,n$.

Daí, a Hipótese de Indução será que $\hat{t}_j(\bar{a}) = \hat{t}_j(\bar{b})$, $j = 1,\ldots,n$.

Como a interpretação do símbolo f é uma função, temos que

$$\hat{t}(\bar{a}) = f^{\overline{M}}(\hat{t}_1(\bar{a}),\ldots,\hat{t}_n(\bar{a})) = f^{\overline{M}}(\hat{t}_1(\bar{b}),\ldots,\hat{t}_n(\bar{b})) = \hat{t}(\bar{b}),$$

o que finaliza esta demonstração. □

Definição 2.7 (Interpretação de fórmulas)**.** Dadas a L_S-fórmula ϕ e a L_S-estrutura $\bar{M}$, definimos a função $[\phi] : M^* \to \{0,1\}$ recursivamente:

(i) Fórmulas Atômicas:
  (a) se t_1 e t_1 forem termos de mesma sorte, $[(t_1 = t_2)](\bar{a}) = 1$ se, e somente se, $\hat{t}_1(\bar{a}) = \hat{t}_2(\bar{a})$;

(b) se $t_1, \ldots, t_n$ forem termos de sortes $s_1, \ldots, s_n$, respectivamente, e $P \in \mathcal{R}_{n,(s_1,\ldots,s_n)}$, então $[P(t_1,\ldots,t_n)](\bar{a}) = 1$ se, e somente se, $(\hat{t}_1(\bar{a}),\ldots,\hat{t}_n(\bar{a})) \in P^{\overline{M}}$;

(ii) Funções Proposicionais: suponhamos que já tenham sido definidas as funções $[\phi]$ e $[\psi]$; daí, definimos $[\neg\phi] = 1 - [\phi]$, $[\phi \wedge \psi] = \min\{[\phi],[\psi]\}$, $[\phi \vee \psi] = \max\{[\phi],[\psi]\}$, $[\phi \to \psi] = [(\neg\phi) \vee \psi]$, e $[\phi \leftrightarrow \psi] = [(\psi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)]$;

(iii) Quantificadores: suponhamos que já se definiu a função $[\phi]$, e que $x_{s,i} \in \mathrm{Var}_s$; definimos as funções $[\exists x_{s,i}\phi](\bar{a}) = \max\{[\phi](\bar{b}) : \bar{b} \in M^*$, *e para toda variável* x *distinta de* $x_{s,i}$, $\hat{x}(\bar{b}) = \hat{x}(\bar{a})\}$, e $[\forall x_{s,i}\phi](\bar{a}) = \min\{[\phi](\bar{b}) : \bar{b} \in M^*$, *e para toda variável* x *distinta de* $x_{s,i}$, $\hat{x}(\bar{b}) = \hat{x}(\bar{a})\}$.

Proposição 2.2. Dada a L_S-fórmula ϕ, se $\bar{a},\bar{b} \in M^* = \prod_{s\in S} M_s^{I_s}$ forem tais que para toda $x_{s,i} \in \mathrm{VL}(\phi)$, $\hat{x}_{s,i}(\bar{a}) = \hat{x}_{s,i}(\bar{b})$, então $[\phi](\bar{a}) = [\phi](\bar{b})$.

Demonstração. Fazemos uma indução na complexidade de ϕ.

Passo Inicial – Fórmulas Atômicas. Já mostramos que, dado o termo t, se $\hat{x}(\bar{a}) = \hat{x}(\bar{b})$, para toda $x \in \mathrm{var}(t)$, então $\hat{t}(\bar{a}) = \hat{t}(\bar{b})$. Isso implica que, sob a hipótese da proposição, $[t_1 = t_2](\bar{a}) = [t_1 = t_2](\bar{b})$ e que $[P(t_1,\ldots,t_n)](\bar{a}) = [P(t_1,\ldots,t_n)](\bar{b})$.

Passo de Indução para Símbolos Proposicionais. A hipótese de indução é $[\phi](\bar{a}) = [\phi](\bar{b})$ e $[\psi](\bar{a}) = [\psi](\bar{b})$. Daí, segue de imediato que $[\neg\phi](\bar{a}) = 1 - [\phi](\bar{a}) = 1 - [\phi](\bar{b}) = [\neg\phi](\bar{b})$; $[\phi \wedge \psi](\bar{a}) = \min\{[\phi](\bar{a}),[\phi](\bar{a}) = \min\{[\phi](\bar{b}),[\phi](\bar{b}) = [\phi \wedge \psi](\bar{b})$; $[\phi \vee \psi](\bar{a}) = \max\{[\phi](\bar{a}),[\phi](\bar{a})\} = \max\{[\phi](\bar{b}),[\phi](\bar{b})\} = [\phi\vee\psi](\bar{b})$; a demonstração para $[\phi \to \psi]$ e $[\phi \leftrightarrow \psi]$ seguem das anteriores.

Passo de Indução para Quantificadores. A hipótese de indução, junto com a hipótese sobre as variáveis livres, enuncia-se assim: para todos $\bar{a},\bar{b} \in M^*$, se $\hat{x}(\bar{a}) = \hat{x}(\bar{b})$ para cada $x \in \mathrm{VL}(\phi)$, então $[\phi](\bar{a}) = [\phi](\bar{b})$. Isso implica a igualdade dos conjuntos $\{[\phi](\bar{a}') : \bar{a}' \in M^*$, *e para toda variável* x *distinta de* $x_{s,i}$, $\hat{x}(\bar{a}') = \hat{x}(\bar{a})\} = \{[\phi](\bar{b}') : \bar{b}' \in M^*$, *e para toda variável* x *distinta de* $x_{s,i}$, $\hat{x}(\bar{b}') = \hat{x}(\bar{b})\}$. Disso decorre que seu máximo e seu mínimo se igualam, ou seja, $[Qx_{s,i}\phi](\bar{a}) = [Qx_{s,i}\phi](\bar{b})$, para $Q \in \{\exists,\forall\}$. $\square$

Exemplo 2.4. Consideremos a estrutura de um sorte $\mathbb{R}$ como um anel ordenado. Seja ϕ a fórmula $(x_0 \cdot x_1 = 1)$. Então $\mathrm{VL}(\phi) = \{x_0, x_1\}$, e $[\phi]_{\mathbb{R}}(\bar{a}) = 1$ se, e somente se $a_0, a_1 \neq 0$ e $a_0 a_1 = 1$, onde $\bar{a} = (a_n)_{n\geq 0}$. Os valores a_n, para $n \geq 2$ não interferem no valor de $[\phi]_{\mathbb{R}}$.

O valor de $[\exists x_0(x_0 \cdot x_1 = 1)]_{\mathbb{R}}$ só depende do elemento a_1 da sequência $\bar{a}$, pois $\mathrm{VL}(\exists x_0(x_0 \cdot x_1 = 1)) = \{x_1\}$.

2.3. **A Relação de Satisfação.** Podemos reescrever o fato de uma fórmula ser verdadeira ou falsa em uma estrutura da seguinte forma.

Definição 2.8 (A Relação de Satisfação)**.** Dadas a L_S-fórmula ϕ e a L_S-estrutura $\overline{M}$, e $\bar{a} \in M^*$, dizemos que $\overline{M}$ satisfaz ϕ em $\bar{a}$, denotado por $\overline{M} \models \phi(\bar{a})$, se $[\phi](\bar{a}) = 1$. Se $\mathrm{VL}(\phi) = \varnothing$, então a função $[\phi]$ é constante, igual a 0 ou 1, e, neste caso denotamos $\overline{M} \models \phi$, se $[\phi]$ for constante igual a 1.

Podemos reescrever a proposição anterior assim:

Proposição 2.3. A relação de satisfação tem as seguintes propriedades:

I. Fórmulas Atômicas.
   (a) $\overline{M} \models (t_1 = t_2)(\bar{a})$ se, e somente se, $\hat{t}_1(\bar{a}) = \hat{t}_2(\bar{a})$;
   (b) $\overline{M} \models P(t_1, \ldots, t_n)(\bar{a})$ se, se somente se, $(\hat{t}_1(\bar{a}), \ldots, \hat{t}_N(\bar{a})) \in P^{\overline{M}}$;

II. Símbolos Proposicionais.
   (a) $\overline{M} \models (\neg\phi)(\bar{a})$ se, e somente se, $\overline{M} \not\models \phi(\bar{a})$;
   (b) $\overline{M} \models (\phi \wedge \psi)(\bar{a})$ se, e somente se, $\overline{M} \models \phi(\bar{a})$ e $\overline{M} \models \psi(\bar{a})$;
   (c) $\overline{M} \models (\phi \vee \psi)(\bar{a})$ se, e somente se, $\overline{M} \models \phi(\bar{a})$, ou $\overline{M} \models \psi(\bar{a})$;
   (d) $\overline{M} \models (\phi \rightarrow \psi)(\bar{a})$ se, e somente se, $\overline{M} \not\models \phi(\bar{a})$, ou $\overline{M} \models \psi(\bar{a})$;
   (e) $\overline{M} \models (\phi \leftrightarrow \psi)(\bar{a})$ se, e somente se, $\overline{M} \models (\phi \rightarrow \psi)(\bar{a})$ e $\overline{M} \models (\psi \rightarrow \phi)(\bar{a})$;

III. Quantificadores.
   (a) $\overline{M} \models (\exists x_{s,i}\phi)(\bar{a})$ se, e somente se, existir $b_{s,i} \in M_s$, tal que $\overline{M} \models \phi(\bar{a}')$, onde $\bar{a}' = (a'_{s',i'})_{s',i'}$, com $a'_{s,i} = b_{s,i}$, e para todo para todo par $(s', i') \neq (s, i)$, $a'_{s',i'} = a_{s',i'}$;
   (b) $\overline{M} \models (\forall x_{s,i}\phi)(\bar{a})$ se, e somente se, para todo $b_{s,i} \in M_s$, vale que $\overline{M} \models \phi(\bar{a}')$, onde $\bar{a}' = (a'_{s',i'})_{s',i'}$, com $a'_{s,i} = b_{s,i}$, e para todo para todo par $(s', i') \neq (s, i)$, $a'_{s',i'} = a_{s',i'}$.

Exemplo 2.5. Consideremos novamente a estrutura de um sorte $\mathbb{R}$ como um anel ordenado, e ϕ a fórmula $(x_0 \cdot x_1 = 1)$. Então $\mathrm{VL}(\phi) = \{x_0, x_1\}$, e $[\phi]_{\mathbb{R}}(\bar{a}) = 1$ se, e somente se $a_0, a_1 \neq 0$ e $a_0 a_1 = 1$, onde $\bar{a} = (a_n)_{n \geq 0}$, ou seja $\mathbb{R} \models (x_0 \cdot x_1)(\bar{a})$ nesses casos, e $\mathbb{R} \not\models (x_0 \cdot x_1)(\bar{a})$, se $a_2 = 0$.