

INTRODUÇÃO A TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM

TÓPICOS

1. Breve história da Teoria da Resposta ao Item – TRI
2. Características da Teoria da Resposta ao Item – TRI
3. Referencias iniciais
4. Modelos de resposta ao item dicotômico
5. Outros modelos da TRI ítems politômicos
6. Modelos para itens com formatos de respostas poliatômica
7. Outros modelos da TRI
8. Referencias TRI
9. Livros

1. Breve história da Teoria da Resposta ao Item – TRI

- Em 1952, Lord, foi o primeiro a desenvolver modelo de resposta ao item. Primeiramente ele desenvolveu um modelo unidimensional de dois parâmetros, se baseando na distribuição normal acumulada. Tempos depois Lord percebeu que inclusão de mais um parâmetro referente ao acerto casual era necessário, e assim fez com que surgisse o modelo de três parâmetros. O modelo desenvolvido era na forma da normal acumulada como já foi dito, porém anos mais tarde Birnbaum (1968), substituiu o modelo que vinha sendo usado pela função logística, uma vez que ela era matematicamente mais conveniente. E essa função vem sendo utilizada até hoje.

- Desde então outros pesquisadores vem propondo modelos a fim de melhorar o estudo da TRI. Por exemplo, Samejima (1969), Bock (1972), Andrich (1978), Masters (1982), e Muraki (1992), propuseram modelos para mais de duas categorias de resposta, assumindo diferentes estruturas entre essas categorias, a fim de obter mais informação das respostas dos indivíduos do que simplesmente se eles deram respostas corretas ou incorretas aos itens.

- A referência mais completa de modelos TRI, porem não a mais atualizada é

van der Linden, W. J. (Ed.) (2016). Handbook of Item Response Theory, Three-Volume Set. New York, NY: Chapman and Hall/CRC.

- Na TRI a estimação dos parâmetros também sofreu avanços ao longo do tempo, o que facilitou os recursos computacionais.
 - Antes, o método de máxima verossimilhança conjunta era utilizado para se estimar os parâmetros.
 - Depois, começou-se a utilizar o método de máxima verossimilhança marginal.
 - Depois de um tempo, foi introduzido o algoritmo EM de Dempster, Laird & Rubin (1977), melhorando os recursos computacionais.
 - Atualmente vem sendo explorados e propostos a estimação dos parâmetros via métodos bayesianos.
 - Não em tanto diversos algoritmos tem sido propostos na literatura de tri nos anos mais recentes.

- No Brasil a TRI começou a ser utilizada em 1995, através da pesquisa AVEJU, da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo, e continuaram no Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) e no Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) do INEP/MEC.
- Desde então o estudo da TRI (que tem como principal objetivo a avaliação) vem crescendo no Brasil, principalmente na área educacional (onde surgiu), embora tenha se expandido rapidamente para as mais diversas áreas (grau de satisfação, gestão organizacional, qualidade de vida, intenção comportamental, orientação profissional, saúde, usabilidade de sites, avaliação psicológica, entre outras).

- Um grande exemplo na área de avaliação educacional é o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), que aderiu a análise pela TRI, fato que deixou essa metodologia famosa no país, despertando a curiosidade de muitos e fazendo com que a TRI crescesse cada vez mais no Brasil.
- A TRI é uma família de modelos psicométricos para determinar uma determinada probabilidade para uma resposta a um item como função das características das pessoas e dos itens os quais são considerados latentes, tomando em conta as respostas observadas em cada pergunta.
- Ela é complementar e melhora o chamado análise clássico dos itens que inclui a validade (correlação item-teste), dificuldade, discriminação e índice de não resposta.

2. Características da Teoria da Resposta ao Item – TRI

- Muda o foco de análise da prova (questionário) como um todo para a análise de cada item (questão).
- Conjunto de modelos matemáticos que relacionam um ou mais traços latentes (não observados) de um indivíduo com a probabilidade de este dar uma certa resposta a um item
- Traço latente: habilidade/proficiência em Matemática, português, grau de depressão etc.

- A partir de respostas dadas por indivíduos a um conjunto de itens (prova, questionário) deseja-se:
 - estimar os parâmetros dos itens (calibração)
 - estimar a “proficiência” do respondente
 - estimar a proficiência média de um grupo de respondentes
- A probabilidade de uma certa resposta a um item é modelada como função da proficiência do aluno e de parâmetros que expressam certas propriedades dos itens.
- Quanto maior a proficiência do respondente, maior a probabilidade de ele “acertar” o item (modelo acumulativo). *Obs: existem modelos não acumulativos (modelos de desdobramento) - propostos para medir atitude.*

- Propriedade importante: os parâmetros dos itens e as proficiências dos indivíduos são invariantes, exceto pela escolha de origem e escala.
- Modelos dependem do tipo de item. Por exemplo Itens corrigidos como certo/errado: múltipla escolha ou abertos levam aos modelos de teoria da resposta ao item para itens dicotômicos.

3. Referencias iniciais

1. Andrade, D.F.; Tavares, H.R.; Valle, R.C. (2010). Teoria de resposta ao item: conceitos e aplicações. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística.
https://docs.ufpr.br/~aanjos/CE095/LivroTRI_DALTON.pdf
Pag 7 a 26.
2. Bazan, J., Valdivieso, L., Calderon, A. (2010). Enfoque bayesiano en modelos de Teoria de Resposta ao Item. Reporte de Investigacion. Serie B. Nro 25. Departamento de Ciencias. PUCP.
<https://repositorio.pucp.edu.pe/index/bitstream/handle/123456789/110936/Reporte-27.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
Pag 5 a 15.

4. Modelos de resposta ao item dicotômico

4.1 Modelo de 2 parâmetros

$$Y_{ij} \sim \text{Bern}(p_{ij})$$

$$p_{ij} = F(m_{ij})$$

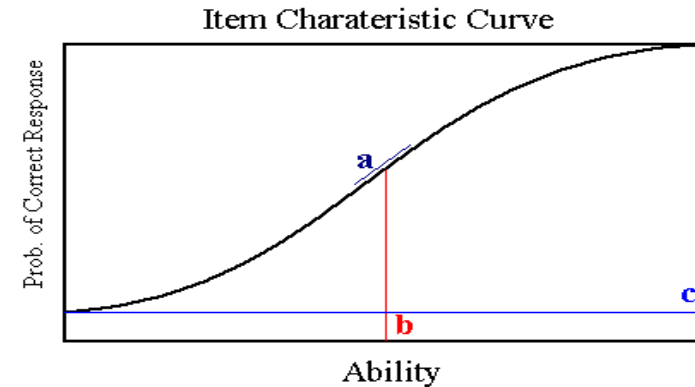
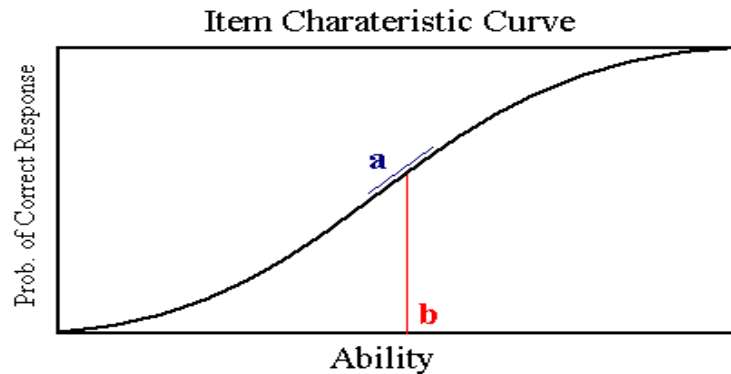
$$m_{ij} = a_j(\theta_i - b_j)$$

$$p(\mathbf{Y} \mid \mathbf{a}, \mathbf{b}) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^k (F(m_{ij}))^{y_{ij}} (1 - F(m_{ij}))^{1-y_{ij}}$$

$$i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, k$$

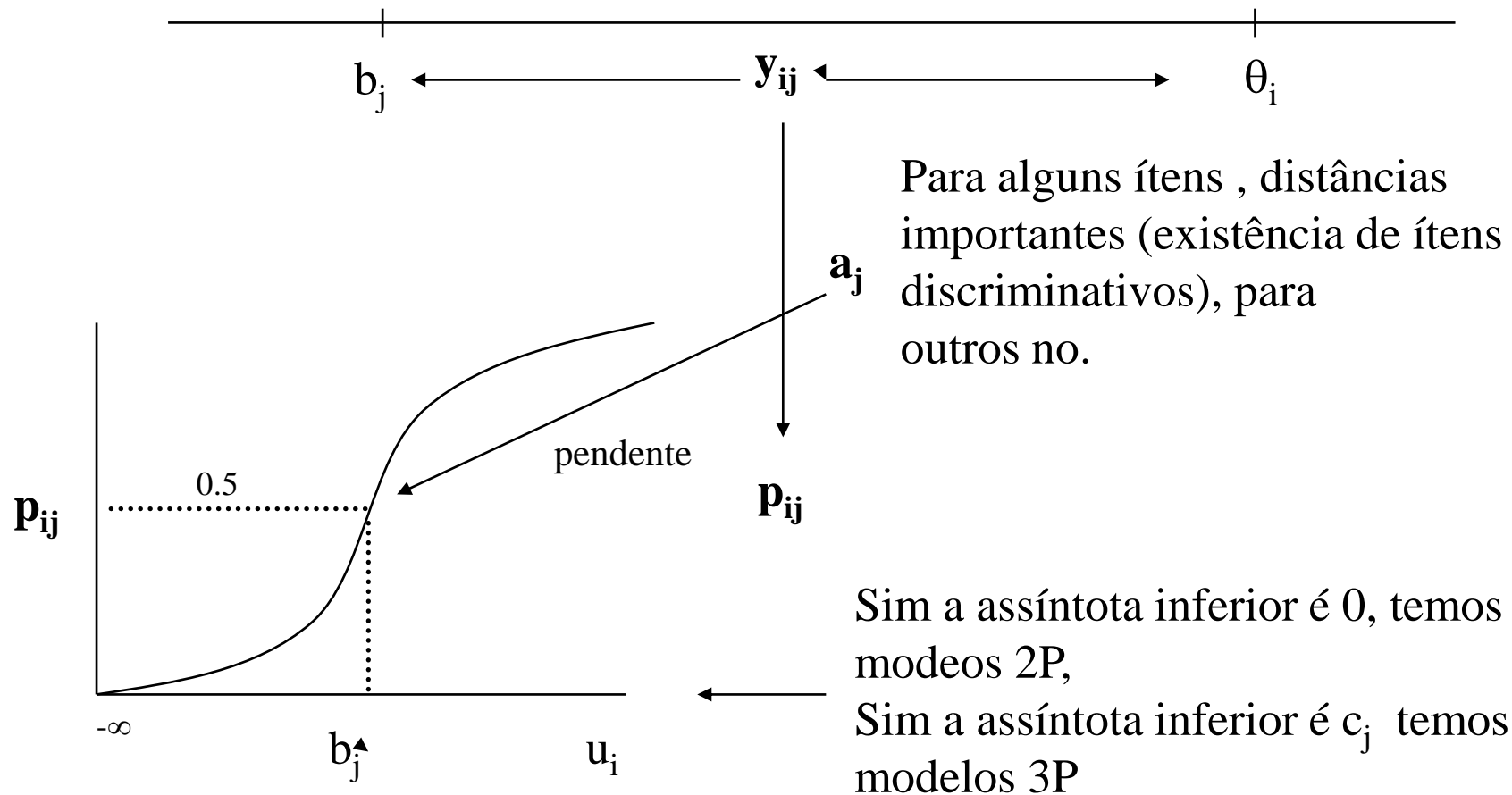
Curva característica dos itens

- Uma maneira útil de compreender o significado dos parâmetros é considerar a Curva característica do Item CCI.



- Esta curva é uma descrição da relação entre o nível de habilidade do examinado e a probabilidade de resposta correta para o item.

Interpretação dos parâmetros



Parâmetro b (dificuldade)

- É chamado parâmetro de intercepto ou dificuldade do item pois controla o nível de dificuldade geral do item.
- Se fixamos os valores dos parâmetros a e incrementamos os valores de b a CCI mantêm sua forma básica pero é traslada á direita.
- Um item do teste com valor alto e negativo de b corresponde a um item fácil em que os sujeitos com menores médias na variável latente têm uma alta probabilidade de acerto. Em contraste, um item com valor grande de b é um item difícil pois os sujeitos com maior nível da variável latente têm relativamente baixa probabilidade de acerto.

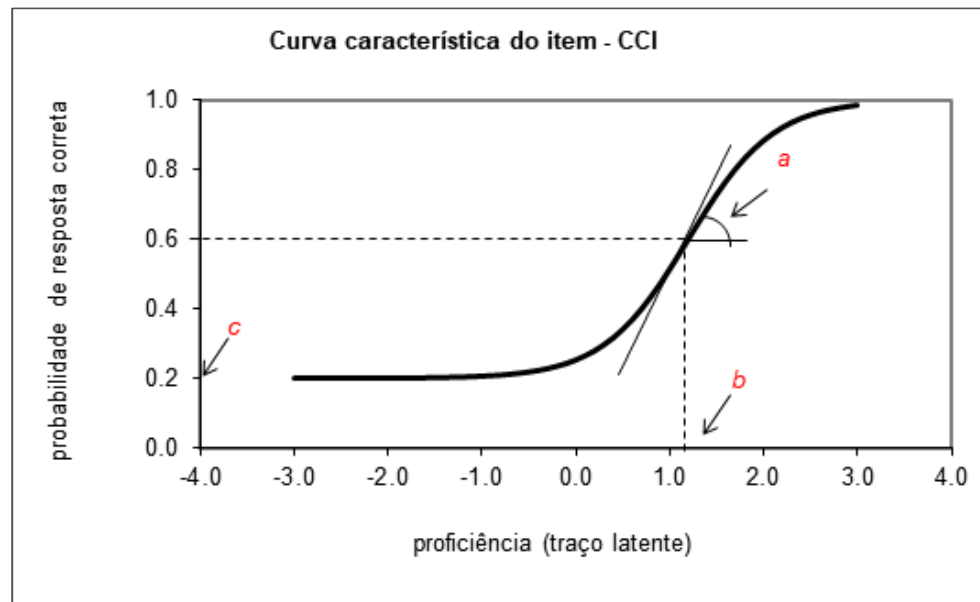
Parâmetro a (discriminação)

- É chamado parâmetro de pendente ou de discriminação pois controla a pendente da CCI.
- Sim consideramos uma CCI com valores de b fixos, a curva é, mas empinada para valores crescentes de a e corresponde a um item que é altamente discriminativo entre sujeitos de menor e maior habilidade. (a probabilidade de acerto muda rapidamente quando maior é o valor da habilidade).
- Um item com pequeno valor de a tem uma forma aplanada. Isto significa que a probabilidade de acerto só muda em uma pequena quantidade quando se vai de um sujeito com menor habilidade a um sujeito com maior habilidade. Um item com um pequeno valor de a é pouco discriminativo.

4.2 Modelo de 3 parâmetros

Modelo Logístico (unidimensional) com 3 parâmetros

$$P(Y_{ij} = 1 | \theta_j) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}}$$



$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 | \theta_i, b_j) = \frac{e^{\theta_i - b_j}}{1 + e^{\theta_i - b_j}}$$

a: discriminação ou inclinação do item

b: dificuldade (medido na mesma métrica do traço latente)

c: probabilidade de acerto para indiv. com baixa proficiência

Parâmetro c (adivinação)

- Um parâmetro “ c ” alto sugere que candidatos com pouca habilidade podem chutar a resposta correta.
- Este é raramente um parâmetro válido fora de testes de múltipla escolha e o valor não deveria variar do recíproco do número de escolhas do item.
- Em geral este parâmetro é complicado de se estimar e ainda existe alguma controvérsia ao respeito de sua utilidade.

4.3 Modelo de 1 parâmetro (Modelo de Rasch)

Supostos do Modelo

1. Relação funcional

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 \mid \theta_i, b_j) = \frac{e^{\theta_i - b_j}}{1 + e^{\theta_i - b_j}}$$

b_j : Dificuldade do item j

$$i = 1, \dots, n$$

θ_i : Habilidade da pessoa i

p_{ij} : probabilidade de que a pessoa i responda corretamente o item j

$$j = 1, \dots, k$$

2. Independencia condicional

$Y_{ij} \mid \theta_i, b_j$ são bernoulli independentes para todo i e todo j

Derivação da relação funcional

- Se a pessoa i é k vezes mais habilidoso que a pessoa i' $\eta_i = k\eta_{i'}$
- Se o item j é k vezes mais difícil que o item j' $\delta_j = k\delta_{j'}$

Então $\varepsilon_{ij} = \frac{\eta_i}{\delta_j} = \frac{\eta_{i'}}{\delta_{j'}}$

- Se uma pessoa tem mais habilidade sua probabilidade de acerto é maior
 $\uparrow \eta_i \Rightarrow \uparrow p_{ij}$
- Se um item é mais difícil, a probabilidade de acerto é menor
 $\downarrow \delta_j \Rightarrow \uparrow p_{ij}$

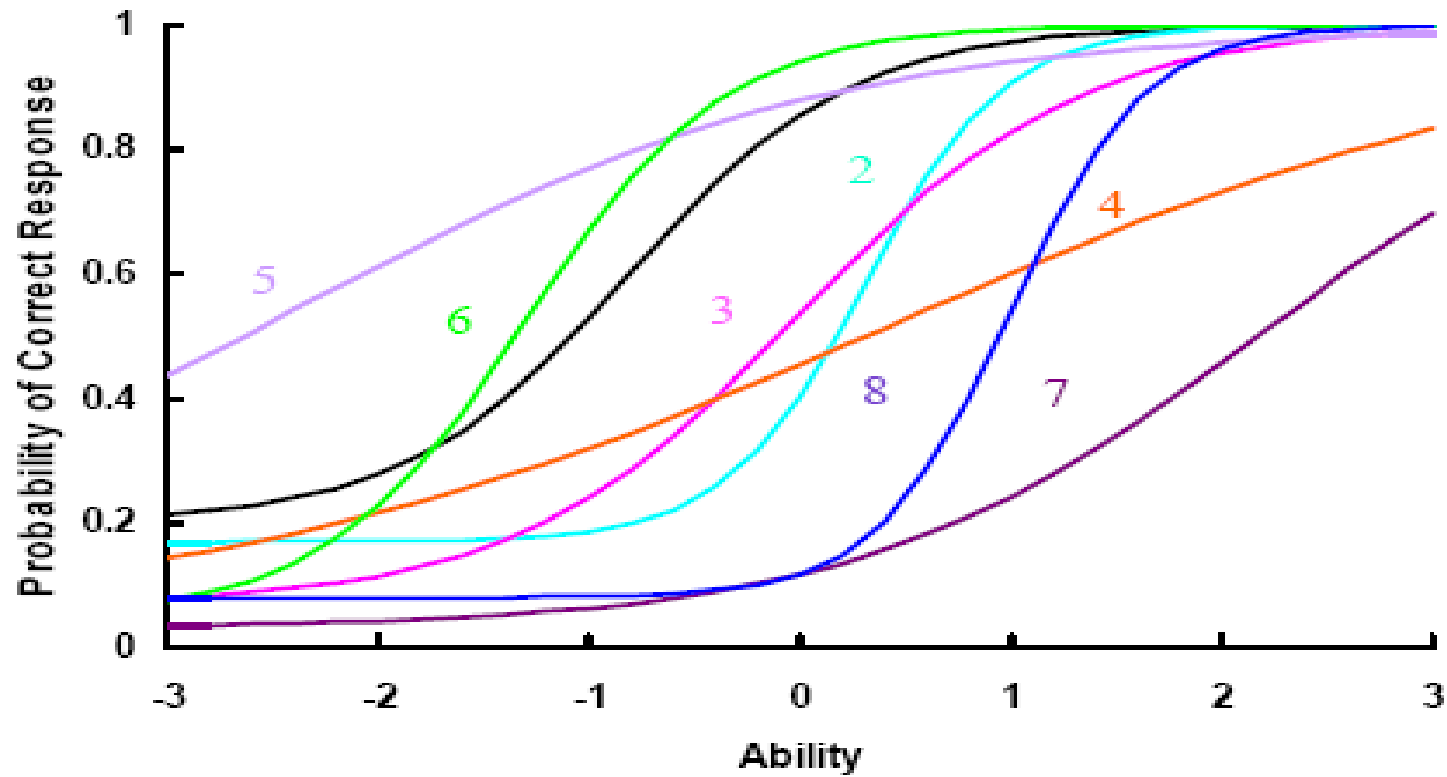
$$p_{ij} = \frac{\eta_i}{\eta_i + \delta_j}$$

$$p_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{1 + \varepsilon_{ij}} \implies \varepsilon_{ij} = \frac{p_{ij}}{1 + p_{ij}} \implies \log(\varepsilon_{ij}) = \log\left(\frac{p_{ij}}{1 + p_{ij}}\right)$$

$$\log(\varepsilon_{ij}) = \log(\eta_i) - \log(\delta_j) = \log\left(\frac{p_{ij}}{1 + p_{ij}}\right) \implies \theta_i - b_j = \log\left(\frac{p_{ij}}{1 + p_{ij}}\right)$$

$$p_{ij} = P(Y_{ij} = 1 \mid \theta_i, b_j) = \frac{e^{\theta_i - b_j}}{1 + e^{\theta_i - b_j}}$$

3. Curvas características de ítems



4. Propriedades

Este modelo apresenta várias propriedades o que torna ao modelo um modelo especial da TRI

- Unidimensionalidade
- Medição conjunta
- Objetividade específica
- Medição de intervalo

Bond, T., & Fox, C., (2007). *Applying the Rasch model: Fundamental measurement in the human sciences* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates <http://homesjcu.edu.au/~edtgb/book/>].

5. Outros modelos da TRI ítems politômicos

Item: As matemáticas não são úteis para mi futuro

- a) Em completo desacordo
- b) Em desacordo
- c) Indiferente
- d) Em acordo
- e) Em completo acordo

Item: Escreva três refrões e explique seu significado

- a) Não consegue escrever nenhum
- b) Consegue escrever um
- c) Consegue escrever dois
- d) Consegue escrever três

Item: Qualificativo na redação de uma carta

a) Insuficiente

b) Regular

c) Bom

d) Ótimo

$$\sqrt{9,0/0,3 - 5} = ?$$

Item:

Categorias de resposta

a) No faz nada

b) Calcula corretamente

$$9,0/0,3 = 30$$

c) Faz b) e obtém

$$30 - 5 = 25$$

d) Faz c) e calcula

$$\sqrt{25} = 5$$

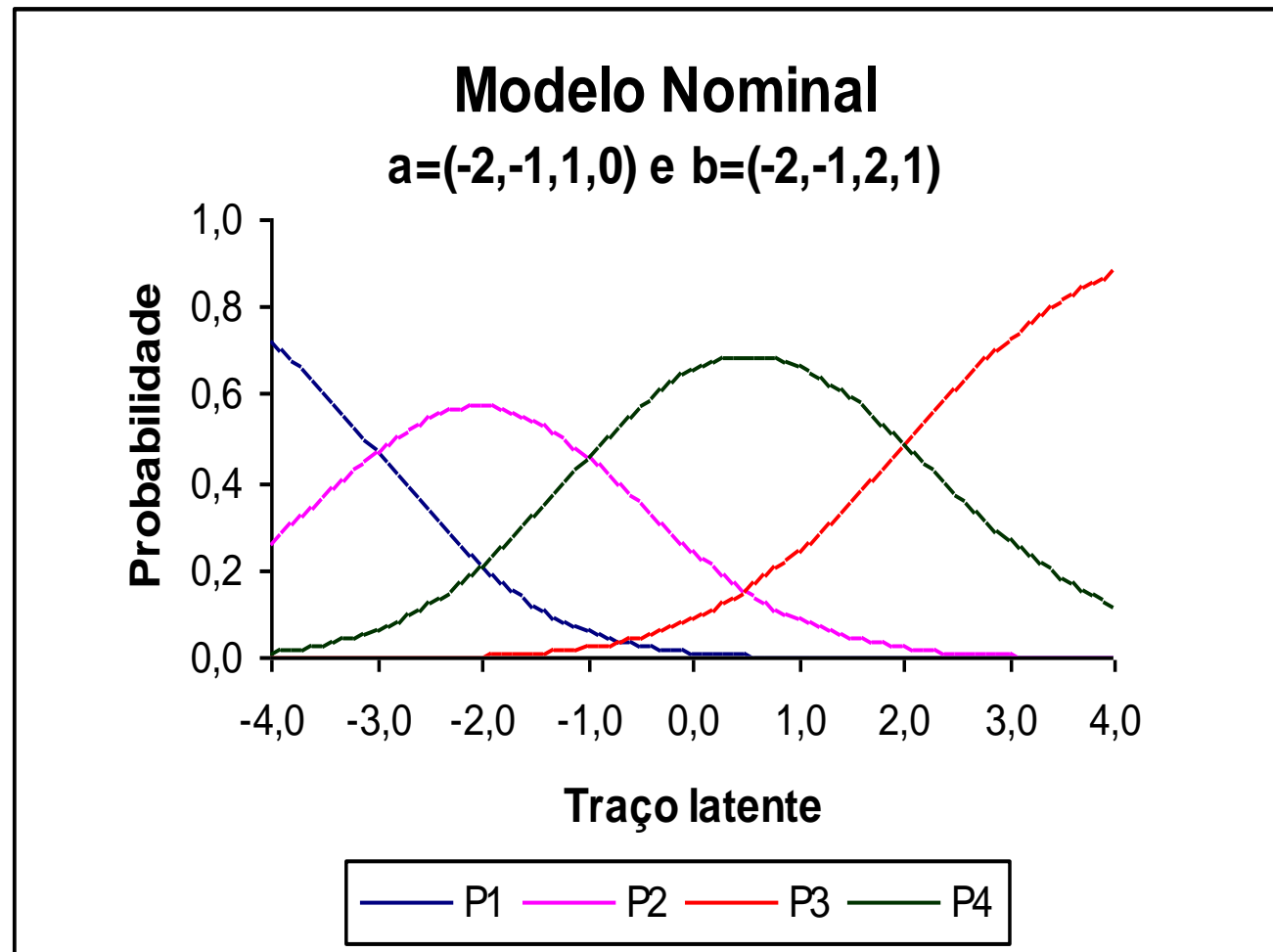
6. Modelos para itens com formatos de respostas poliatômica

- Modelos de Categorias Nominais
- Modelos de Resposta para itens de múltipla escolha
- Modelos de Escala de Rating (hierarquias)
- Modelos de Resposta Graduada
- Modelos de Crédito parcial
- Modelo Sequencial para respostas ordenadas

Modelo Nominal: considera todas as categorias de resposta

$$P(Y_{ijs} = 1 | \theta_j) = \frac{\exp[a_{is} (\theta_j - b_{is})]}{\sum_{h=1}^{m_i} \exp[a_{ih} (\theta_j - b_{ih})]}$$

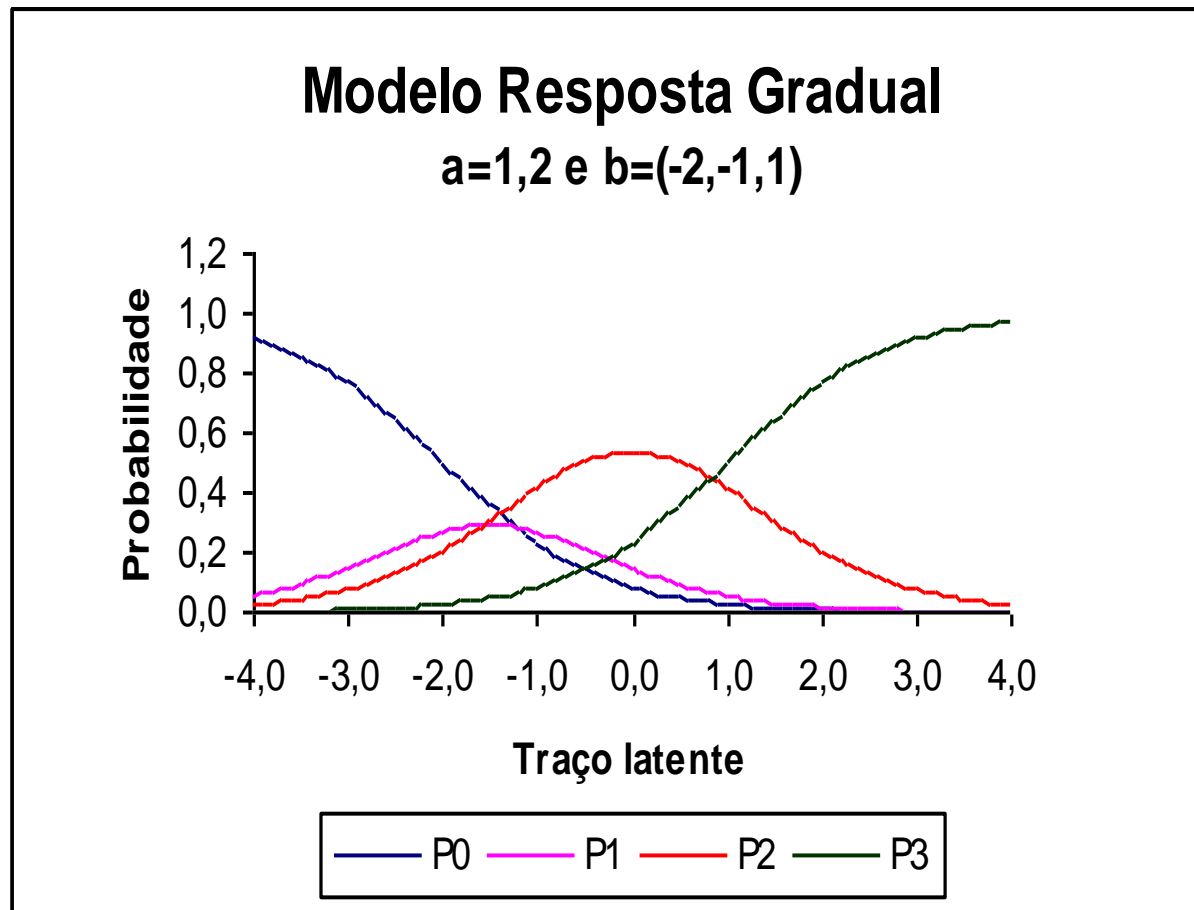
com a_{is} e b_{is} comono modelo Logístico



Modelo de Resposta Gradual: categorias ordinais

$$P(Y_{ijs} = 1 | \theta_j) = \frac{1}{1 + \exp[-a_i(\theta_j - b_{is})]} - \frac{1}{1 + \exp[-a_i(\theta_j - b_{i(s+1)})]}$$

$$b_{i1} \leq b_{i2} \leq \dots \leq b_{im_i}$$



Modelo de Crédito Parcial

Modelo de Resposta Gradual com todos os itens com o mesmo parâmetro de discriminação a

Modelo de Escala Gradual

Modelo de Resposta Gradual com $b_{is} = b_i - d_s$

Modelo de Grupos Múltiplos (várias populações)

7. Outros modelos da TRI

Modelos para tempo de resposta o ensaios múltiplas

- Modelo Logístico para provas com limite de tempo
- Modelos para provas de Rapidez y de Tempo Limite
- Modelos de Ensaio Múltiplas

Modelos para habilidades múltiplas o componentes cognitivos

- Modelo de Rasch: Muled
- Modelo de resposta com variáveis explicativas manifestas
- Modelo Multidimensional de Ojiva Normal
- Modelo Multidimensional Logístico lineal
- Modelo de Resposta ao Item multidimensional loglineal
- Modelo de Resposta Multicomponente
- Modelo para a mudança Multidimensional Logístico Lineal

Modelos no paramétricos

- Modelo no paramétrico para resposta dicotômica (Mokken)
- Modelo no paramétrico para resposta politômica

Modelo de Ítems no Monótonos

- Modelo IRT de Coseno Hyperbólico
- Modelo IRT para análise de paralelogramo

Modelos com supostos especiais acerca do processo de resposta

- Grupo IRT múltipla
- Modelos mistos logísticos
- Modelos para resposta local dependente
- Modelos desproporcionados para formato de resposta que permitem informação parcial ao serem mostrados.
- Testlets

8. Referencias TRI

1. Hambleton, R.K., Swaminathan, H., & Rogers, H.J. (1991). *Fundamentals of item response theory*. Newbury Park: Sage.
2. Baker, F. and Kim, S. (2004). *Item Response Theory: Parameter Estimation Techniques*. Marcel Dekker Inc. New York.
3. Van der Linden, W. y Hambleton, R. K (Editores) (1996). *Handbook of Modern Item Response Theory*. New York: Springer

9. Livros

http://www.amazon.com/Handbook-Polytomous-Response-Theory-Models/dp/0805859926/ref=pd_sim_sbs_b_10

http://www.amazon.com/Theory-Practice-Response-Methodology-Sciences/dp/1593858698/ref=pd_sim_b_3

http://www.amazon.com/dp/3848452634/ref=sr_1_1?s=books&ie=UTF8&qid=1372270714&sr=1-1&keywords=teoria+de+respuesta+al+item

http://www.amazon.com/Introduccion-respuesta-PSICOLOGIA-Psicologia-Psychology/dp/8436811372/ref=sr_1_sc_1?s=books&ie=UTF8&qid=1372270714&sr=1-1-spell&keywords=teoria+de+respuesta+al+item

http://www.amazon.com/Applications-Response-Theory-explore-quality/dp/3838355202/ref=sr_1_20?s=books&ie=UTF8&qid=1372270606&sr=1-20&keywords=item+response+theory+statistics

http://www.amazon.com/Psychometrics-Introduction-R-Michael-Furr/dp/1452256802/ref=sr_1_81?s=books&ie=UTF8&qid=1372270049&sr=1-81&keywords=item+response+theory