Aula 4

Da Equação de Schroedinger à Equação de Klein-Gordon

Renan Milnitsky
Marcelo Gameiro Munhoz
Julien Minerbo

Quando iniciamos estudos introdutórios em Física Moderna, em especial na Mecânica Quântica, somos introduzidos ao formalismo ondulatório da equação de Schroedinger e o utilizamos para prever alguns excepcionais resultados do mundo subatômico. Mas será que é possível adentrar no estudo das partículas elementares por meio dela?

Com a ascensão da Mecânica Quântica e das Teorias da Relatividade, passamos a reconhecer diferentes regimes de atuação das teorias físicas. Como ilustrado na Figura 1, descrevemos o universo da física clássica atuando nos regimes cotidianos de baixas velocidades ($v << c$) e altas dimensões ($d >> 10^{-10}$ m).

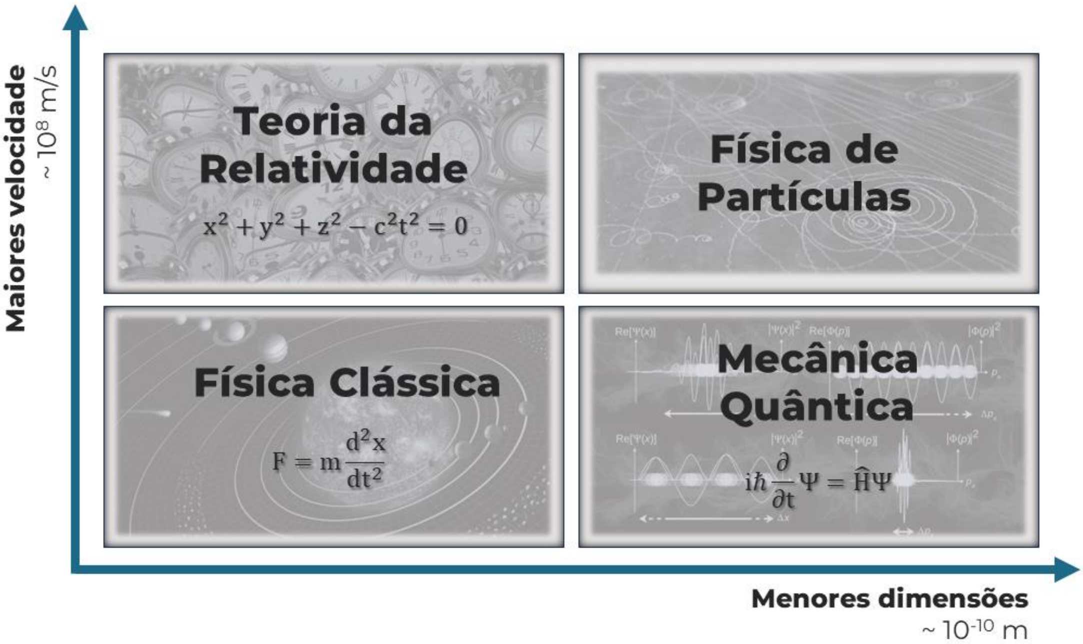

Figura 1 - Os regimes de atuação das teorias físicas.

O regime de altas energias e velocidades ($v \sim c$) é descrito a partir das teorias da relatividade, enquanto o de menores dimensões ($d \sim 10^{-10}$m) é descrito a partir da mecânica quântica. A Física de Partícula se encontra na intersecção destes dois mundos, necessitando de uma descrição conjunta da Mecânica Quântica com a Teoria da Relatividade, campo da física conhecido como Mecânica Quântica Relativística.

Como nossos estudos iniciais nos introduzem no mundo quântico a partir da Mecânica Quântica Ondulatória de Schrodinger, buscaremos fazer uma transição para o regime relativístico a partir dela, entendendo seus alcances e limitações.

1. Recapitulando a Mecânica Quântica Ondulatória

Em 1925 Schroedinger desenvolveu uma teoria para descrever o comportamento ondulatório das entidades quânticas a partir de funções de onda. Ele propõe uma equação que nos permite determinar a função de onda de uma entidade quântica a partir de dos potenciais aos quais ela está submetida, dependendo, portanto, das forças do problema em questão. É importante salientar que a equação de Schroedinger não pode ser deduzida, sua equação na realidade se alimenta de dois princípios físicos e um matemático.

Enquanto princípios físicos, ela deve ser consistente com as hipóteses de quantização da radiação de Einstein (Eq. 1) e também do momento associado à radiação eletromagnética de De Broglie (Eq. 2).

$$\mathrm{E} = \mathrm{h}\nu \qquad \text{(Eq. 1)} \qquad\qquad p = \frac{h}{\lambda} \qquad \text{(Eq. 2)}$$

Já enquanto princípios matemáticos, para contemplar a natureza ondulatória das entidades quânticas, a equação deve ser linear, de modo que as soluções da equação obedeçam ao princípio de superposição. Isto significa que se Ψ_1 (x,t) e Ψ_2 (x,t) são soluções da equação de Schrodinger, Ψ (x,t) = Ψ_1 (x,t) + Ψ_2 (x,t) também deve ser solução.

Partindo destes pressupostos, Schrodinger chegou em uma equação que, de forma unidimensional, pode ser escrita como:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t) + V(x)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t) \qquad \text{(Eq. 3)}$$

Para uma partícula livre, isto é, uma partícula que se move sob a ação de um potencial constante V_0, a equação pode ser escrita como

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t) + V_0\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t) \qquad \text{(Eq. 4)}$$

E que tem como solução:

$$\Psi(x,t) = A[\cos(kx-\omega t) + i\cdot sen(kx-\omega t)] = Ae^{i(kx-\omega t)} \qquad \text{(Eq. 5)}$$

Como a função de onda Ψ (x,t) é uma função complexa, ela não contém informações diretamente mensuráveis. Para criar uma aproximação com os observáveis, recorremos a interpretação apresentada por Max Born de que o módulo quadrado da função de onda

$$|\Psi(x,t)|^2 = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$$

nos fornece a probabilidade de encontrá-la no instante t em uma coordenada entre x e x + dx, ou seja,

$$P(x,t)dx = \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx$$

Sabendo que a entidade quântica precisa ser encontrada em algum lugar do espaço em um processo de medição, a probabilidade deve obedecer a condição de normalização

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(x,t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\Psi(x,t)dx = 1$$

Devido a natureza ondulatória e probabilística da descrição quântica, o valor esperado para determinados observáveis como a posição **x**, o momento **p** ou a energia **E** são na realidade expressos pelos valores médios $\bar{\boldsymbol{x}}$, $\bar{\boldsymbol{p}}$ e $\bar{\boldsymbol{E}}$ que podem ser calculados de forma geral por

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\bar{f}(x)\Psi(x,t)dx$$

Para a posição, por exemplo, o valor esperado seria então determinado por:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\ \bar{x}\ \Psi(x,t)dx$$

Este estudo dos valores médios das grandezas físicas observáveis nos permitem expressar as grandezas e termos de operadores quânticos. Os operadores que representam a posição $\hat{\boldsymbol{x}}$, o momento $\hat{\boldsymbol{p}}$ e a energia $\hat{\boldsymbol{E}}$ são

$$\hat{x} \leftrightarrow x \quad \text{(Eq. 6)}$$

$$\hat{p} \leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \quad \text{(Eq. 7)}$$

$$\hat{E} \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \text{(Eq. 8)}$$

A consistência dos operadores com o arcabouço teórico que sustenta a equação de Schroedinger pode ser analisada reconstruindo a equação de Schroedinger a partir da energia total clássica e não relativística

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}} + \mathrm{V(x)} \quad \rightarrow \quad \hat{E}\Psi(x,t) = \frac{\hat{\mathrm{p}}^2}{2\mathrm{m}}\Psi(x,t) + \mathrm{V(x)}\Psi(x,t)$$

Aplicando os respectivos operadores à função de onda que descreve o objeto quântico temos que:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t) = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\Psi(x,t) + \mathrm{V(x)}\Psi(x,t)$$

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}(x,t) = -\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}(x,t) + \mathrm{V(x)}\Psi(x,t)$$

Que é exatamente o mesmo resultado apresentado na Eq. 3.

2. Corrente e Conservação da Probabilidade

A natureza ondulatória da mecânica quântica de Schrodinger faz com que grande parte dos resultados interpretativos que podemos extrair dela sejam profundamente dependentes densidade de probabilidade P(x,t), sejam eles valores esperados, como posição, momento ou energia, ou até mesmo o significado físico que podemos extrair da função de onda Ψ (x,t).

É neste sentido que, para além de interpretar as entidades quânticas como objetos de naturezas ondulatórias se deslocando no espaço e no tempo, o que nos ajudou a construir pacotes de onda localizados que somados nos auxiliam na definição da função de onda, podemos também pensar que a equação de Schroedinger descreve um fluxo de probabilidade que define uma corrente de probabilidade de modo bastante análogo a como um fluxo de cargas elétricas que definem uma corrente elétrica.

No eletromagnetismo, quando passamos do estudo da eletrostática, com cargas elétricas em repouso, para a eletrodinâmica, com cargas elétricas em movimento, conseguimos pensar que o movimento de cargas e, portanto, a variação da posição das cargas no tempo estão intimamente a corrente elétrica que ela gera. A Figura 2 ilustra cargas elétricas **q** se movem com uma velocidade **v** e que passam a provocar um fluxo que gera uma corrente elétrica **i.**

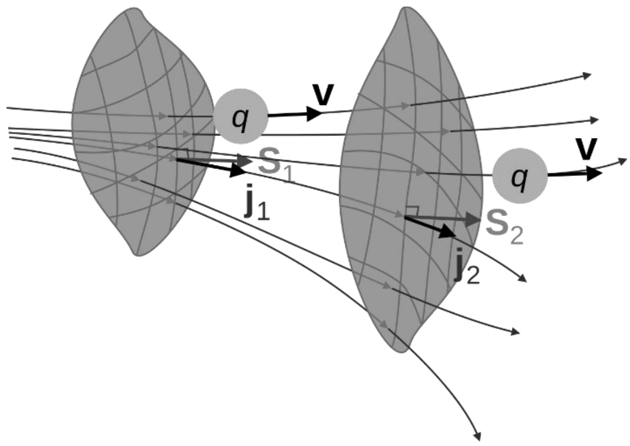

Figura 2 - A relação entre o movimento de cargas elétricas e a geração de uma corrente elétrica.

Intuitivamente, podemos pensar que essa descrição nos leva a uma espécie de conservação, identificando que há uma densidade de carga elétrica se deslocando de um ponto do espaço ao outro, ao mesmo tempo que se diminui a densidade de carga elétrica no ponto inicial, ela aumenta no ponto final, de modo que a densidade de carga elétrica se mantenha conservada, não de modo estático, fixada em um único local do espaço, mas sim dinâmico, a partir da corrente elétrica que ela produz com essa variação. Essa descrição da conservação da densidade de carga elétrica a partir da produção de uma corrente elétrica é expressa no eletromagnetismo a partir da equação de continuidade que, unidimensionalmente, expressa a relação entre a variação espacial da densidade carga ρ com a variação espacial da densidade de corrente elétrica

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} \quad \text{(Eq. 9)}$$

Se imaginarmos que a equação de Schroedinger descreve entidades cuja probabilidade se deslocam no espaço e no tempo junto com elas, seria possível definir uma espécie de equação da continuidade que nos permitisse prever uma conservação e uma corrente de probabilidade? Pensando de modo análogo ao eletromagnetismo, poderíamos propor uma equação da forma

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{t}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \frac{\partial \mathrm{j}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = 0 \qquad \text{(Eq. 10)}$$

Com P (x,t) ocupando o lugar da densidade de carga como densidade de probabilidade e j (x,t) ocupando o lugar da corrente elétrica como corrente de probabilidade.

Cabe analisar essa estrutura e verificar se é possível avaliar sua veracidade, comecemos com descrevendo o primeiro termo da probabilidade, lembrando que P(x,t) = Ψ*(x,t)Ψ(x,t)

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial(\Psi^*\Psi)}{\partial t} = \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\Psi + \Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial t} \qquad \text{(Eq. 11)}$$

Estas derivadas temporais podem ser extraídas da própria Equação de Schroedinger, lembrando que 1/i = – i, podemos reescrever a Eq. III e a respectiva equação conjugada como:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = +\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x,t) - \frac{iV}{\hbar}(x)\Psi(x,t)$$

$$\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}(x,t) + \frac{iV^*}{\hbar}(x)\Psi^*(x,t)$$

Levando em consideração que o potencial deve ser real, ou seja, que V(x) = V*(x), e substituindo estas expressões na equação XI temos

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial \Psi^*}{\partial t}\Psi + \Psi^*\frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = \left(-\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} + \frac{iV^*}{\hbar}\Psi^*\right)\Psi + \Psi^*\left(+\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{iV}{\hbar}\Psi\right)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = -\frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}\Psi \cancel{+\frac{iV^*}{\hbar}\Psi^*\Psi} + \frac{i\hbar}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\Psi^* \cancel{-\frac{iV}{\hbar}\Psi\Psi^*}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t}(x,t) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\Psi^* - \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}\Psi\right) \qquad \text{(Eq. 12)}$$

Agora, para analisar o segundo termo, recorreremos a forma como Schroedinger define a corrente de probabilidade j (x,t)

$$j(x,t) \equiv \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi(x,t)\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x,t)\Psi^*(x,t)\right) \qquad \text{(Eq. 13)}$$

Como o segundo termo da equação de continuidade envolve derivadas espaciais, temos que

$$\frac{\partial \mathrm{j}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{i\hbar}{2m}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}\Psi\right) - \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\Psi^* + \frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)\right]$$

$$\frac{\partial \mathrm{j}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\cancel{\frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}} + \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}\Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\Psi^* - \cancel{\frac{\partial \Psi^*}{\partial x}\frac{\partial \Psi}{\partial x}}\right)$$

$$\frac{\partial \mathrm{j}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}\Psi - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}\Psi^*\right) \qquad \text{(Eq. 14)}$$

Se compararmos as equações 12 e 14, verificaremos que uma é exatamente o oposto matemático da outra, ou seja, que

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{t}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = -\frac{\partial \mathrm{j}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{t})$$

e que, portanto,

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{t}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \frac{\partial \mathrm{j}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = 0$$

que reconstrói e nos permite verificar a validade da equação 10.

Este é um resultado extraordinário, pois revela que a equação de Schrodinger descreve não somente a dinâmica ondulatória dos objetos quânticos, mas também que as probabilidades que eles carregam viajam com eles, nos permitindo analisar os problemas em termos de uma corrente de probabilidade.

3. Limitações da Equação de Schrodinger

Retomada as bases que nos levaram a construir a Mecânica Quântica Ondulatória de Schroedinger, é preciso construir o movimento de superação que nos levará em direção a Mecânica Quântica Relativística.

A necessidade de construir uma teoria quântica e relativística está para além da curiosidade teórica, ela se mostrou necessária uma vez que uma série de problemas começaram a ser revelados quando a teoria de Schrodinger começou a ampliar seus horizontes. Um primeiro ponto a ser ressaltado é que a Equação de Schroedinger, ainda que tenha sido utilizada como uma primeira aproximação para descrever diferentes estados no átomo de hidrogênio, ela não consegue descrevê-los com precisão. O problema da estrutura fina da raia espectral do átomo do hidrogênio, ilustrado ao lado na Figura 3, revela que existem pequenas diferenças entre o valor calculado pela equação de Schroedinger e medido experimentalmente.

Ainda que sejam diferenças pequenas, da ordem de 10^{-4} eV para o primeiro nível e ficando cada vez menor para os demais, ela é suficiente para mostrar que toda a complexidade da estrutura elementar não pôde ser revelada com detalhe com a teoria de Schroedinger. O mistério da estrutura fina teve avanços com as evidências da existência do spin com os experimentos de Stern-Gerlach.

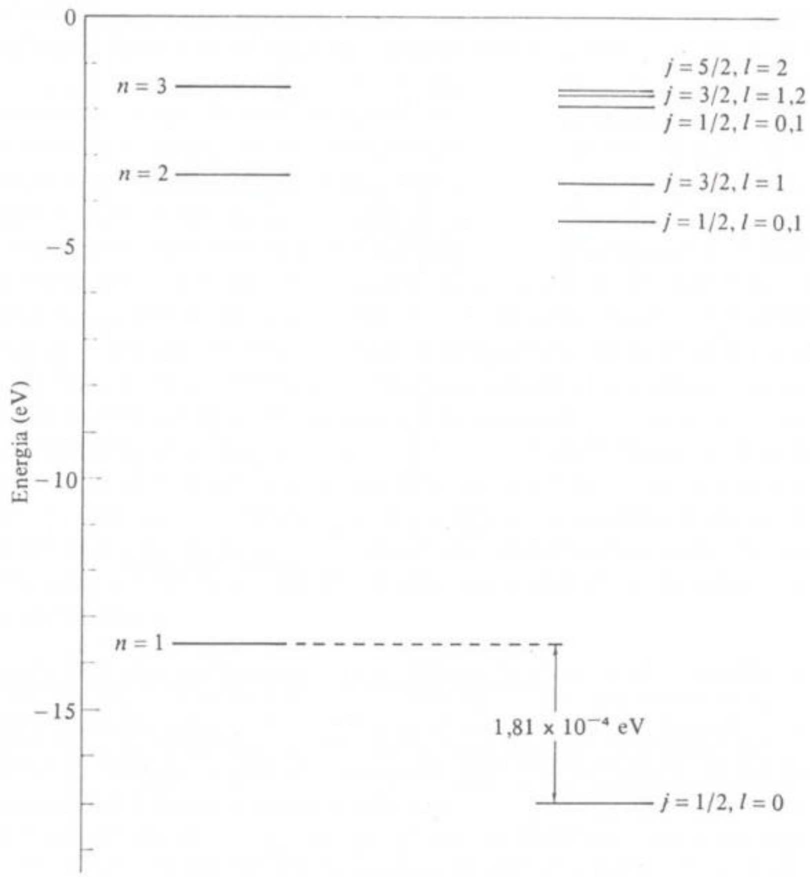

Figura 3 - O problema da estrutura fina do hidrogênio. Ele só pôde ser explicado completamente somente a partir da introdução do spin, que acontece de forma ad-hoc na mecânica quântica ondulatória.

Uma primeira tentativa de correção é proposta por Pauli, ao tentar reformular a energia total adicionando à mão termos associados à energia de interação do momento magnético $\vec{\mu}$ produzido pelo spin com o campo magnético do átomo $\vec{B}$, além de descrever o momento na energia cinética não em termos isoladamente de $\vec{p}$, mas sim de uma interação dele com vetor o potencial magnético $\vec{A}$. Apenas a título de curiosidade, a proposta de Pauli está apresentada na Equação 15.

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left(\frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - \vec{\mu}\cdot\vec{B} + qV\right)\Psi \qquad \text{(Eq. 15)}$$

Ela representa uma proposta desesperada de incorporar o spin na mecânica quântica ondulatória e falha em vários aspectos, uma vez que tenta introduzir correções relativísticas em um regime de descrições puramente não relativísticos.

Outro problema estrutural da equação de Schroedinger é o de que, da forma como apresentada na Equação 3, ela não é invariante sob transformações de Lorentz. Isto significa que, se tentarmos utilizá-la para descrever fenômenos no regime relativístico, é muito possível que sua forma descritiva mude de acordo com a referência, o que é inconsistente não somente com um dos postulados da relatividade restrita, mas também com o que esperamos das próprias leis da Física: faz sentido construirmos uma teoria na qual seus resultados dependam do referencial adotado?

Todavia, a incompatibilidade da Equação de Schroedinger com a relatividade não deve ser entendida como uma falha estrutural de sua formulação, mas apenas uma consequência dos princípios utilizados para sua criação. Como revelado na investigação dos operadores momento e energia, a Equação de Schroedinger deriva, como uma primeira aproximação de descrição quântica, da energia clássica das partículas, escrita em termos de um regime não-relativístico onde

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}} + \mathrm{V}(\mathrm{x})$$

que é obviamente invariante sob as transformações de Galileu que a originam, mas não sob as transformações de Lorentz, pensadas à luz da invariância na velocidade da luz.

4. Formulando a Equação de Klein-Gordon

Da mesma forma que a Equação de Schroedinger não pôde ser deduzida, mas sim derivada de uma série de princípios que a sustentam, como as relações de momento e energia de Einstein e De Broglie e a proposição de energia não relativística apresentada pelo hamiltoniano clássico, a primeira proposta de uma descrição quântica e relativística, formulada pelos físicos Oscar Klein e Walter Gordon em 1927, também não será deduzida, mas derivada a partir de novos princípios, a saber, a relação entre energia, momento e massa que emerge na teoria da relatividade,

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \qquad (\text{Eq. } 16)$$

Esta equação ainda não incorpora a ação de um potencial, mas expressa a energia da partícula em termos de sua energia cinética e, associado a novidade da teoria da relatividade, a energia associada a massa da partícula a partir do termo mc^2. Uma forma de perceber essa estrutura que descreve associando um termo à energia cinética e outro à massa é reescrevê-la como

$$E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$$

$$E = \sqrt{m^2c^4\left(\frac{p^2}{m^2c^2} + 1\right)}$$

$$E = mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}$$

Fazendo uma expansão de Taylor destacando apenas as primeiras ordens de aproximação, a energia pode ser escrita como

$$E \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m} + \cdots$$

Que expressa um termo associado a massa de repouso e outro que é exatamente o termo de energia cinética.

A primeira abordagem utilizar para construir uma teoria quântica consistente com a relatividade proposta por Klein e Gordon (1927) foi a de proceder de forma análoga à equação de Schroedinger, ou seja, utilizar os operadores de momento e energia,

$$\hat{p} \leftrightarrow -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\hat{E} \leftrightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

substituindo-os na Equação 16 que expressa a energia relativística,

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\hat{E}^2\Psi = \hat{p}^2c^2\Psi + m^2c^4\Psi$$

$$\hat{E}\left(\hat{E}\Psi\right) = c^2\hat{p}(\hat{p}\Psi) + m^2c^4\Psi$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left(i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right) = -i\hbar c^2\frac{\partial}{\partial x}\left(-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) + m^2c^4\Psi$$

$$i^2\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = -i^2\hbar^2c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + m^2c^4\Psi$$

$$-\hbar^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \hbar^2c^2\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + m^2c^4\Psi$$

O que finalmente nos conduz à versão unidimensional da famosa equação de Klein-Gordon para a partícula livre, apresentada na Equação 17

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Psi \qquad \text{(Eq. 17)}$$

Isto significa que agora temos uma equação relativística da mecânica quântica? Infelizmente não, uma vez que essa equação apresenta alguns problemas estruturais no que concerne inclusive às interpretações físicas que podemos extrair dela.

Como vimos na equação de Schroedinger, umas informações mais importantes que precisamos extrair do mundo quântico para prever e descrever valores esperados de sistemas é a densidade de probabilidade P (x,t). Revelamos, inclusive, que a probabilidade na teoria quântica se propaga no espaço junto com as entidades quânticas que elas representam por meio da equação de continuidade apresentada na equação 10 e retomada abaixo,

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{t}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) + \frac{\partial \mathrm{j}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = 0$$

O primeiro problema estrutural da equação de Klein-Gordon aparece quando tentamos extrair uma forma de P(x,t) consistente com esta descrição. Ao invés de obtermos uma função *alá* Max Born como P(x,t) = $|\Psi(x,t)|^2$ = $\Psi^*(x,t)\Psi(x,t)$, obtemos uma função com as características apresentada pela (Eq. 18)

$$P(\mathrm{x,t}) = \Psi^*(x,t)\frac{\partial\Psi}{\partial \mathrm{t}}(\mathrm{x,t}) - \frac{\partial\Psi^*}{\partial \mathrm{t}}(\mathrm{x,t})\Psi(x,t) \qquad \text{(Eq. 18)}$$

Essa forma de representar a densidade de probabilidade acarreta várias inconsistências e a primeira perceptível é o fato de que ela pode ser negativa (note que há um sinal negativo na expressão): como interpretar uma densidade de probabilidade negativa?

Um segundo aspecto é o de que a densidade de probabilidade parece depender não somente da função de onda, mas também de sua taxa de variação temporal, expressa pela derivada parcial de primeira ordem. Isto significa que a função de onda por si só não carrega todas as informações necessárias para analisar o objeto quântico, aparentando necessitar de mais condições para definir o estado da partícula. Este aspecto também aparece quando analisamos a própria estrutura da Equação de Klein-Gordon apresentada na equação 17. Diferente da equação de Schroedinger, a Equação de Klein-Gordon é uma equação diferencial de segunda ordem, em função de suas derivadas segunda no espaço e no tempo, o que implica também numa não linearidade da equação, ferindo o princípio da superposição que descreve a natureza ondulatória das entidades quânticas.

As discussões realizadas no entorno da equação de Klein-Gordon trazem que a função Ψ(x,t) utilizada em sua descrição, diferente da equação de Schroedinger, não podem estar associadas a uma densidade de probabilidade. Ela na realidade serve para descrever bem o comportamento de campos escalares de partículas que contém spin 0. Neste sentido, para a descrição do elétron ela se torna um tanto quanto infrutífera, uma vez que não traz novidades essenciais com relação à equação de Schroedinger. Todavia, ela terá uma grande utilidade nas primeiras versões da teoria de Yukawa para as interações e, principalmente, para a descrição do campo escalar que rege o mecanismo de Higgs.

Ela costuma atualmente ser reescrita não expressando o comportamento da função de onda Ψ(x,t), mas sim de um campo escalar $\phi\ (x,t)$, de modo que a equação seja escrita da forma,

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\phi \qquad \text{(Eq. 19)}$$

E a descrição quântica e relativística do elétron? Analisando todos os problemas levantados pela equação de Klein-Gordon, Dirac propõe, em 1928, uma proposta de equação linear de primeira ordem que consiga restaurar os aspectos interpretativos da teoria, ela será discutida na aula 5.