O PRAZER DA MATEMÁTICA

gradiva

NATÁLIA BEBIANO DA PROVIDÊNCIA

MATEMÁTICA OU MESAS, CADEIRAS E CANECAS DE CERVEJA

O PRAZER DA MATEMÁTICA

"Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar os jogos. É aí que o seu espírito se manifesta mais livremente. Seria desejável que existisse um curso inteiro de jogos tratados matematicamente."

Leibniz, 1715

A matemática é um vasto e diversificado corpo de conhecimentos com origens no dealbar da civilização, alguns dos quais utilizamos sob diversas formas no quotidiano. Este livro é um convite à contemplação do mundo maravilhoso das matemáticas, um mundo de ideias no raio verde da intuição, imaginação, criatividade e ideal estético de perfeição. Apresenta conceitos fundamentais e métodos de criação matemática, privilegiando perspectivas históricas, filosóficas e culturais, em detrimento de aspectos técnicos e de pormenor. São potenciais leitores deste livro aqueles que estudam, ensinam, criam matemática e ainda todos aqueles que, não sendo cultores desta arte-ciência, a consideram parte absolutamente essencial da cultura da humanidade.

NATÁLIA BEBIANO DA PROVIDÊNCIA é licenciada e doutorada em Matemática pela Universidade de Coimbra, onde exerce actualmente funções de professora catedrática. O seu domínio de investigação é álgebra-teoria das matrizes. Foi presidente da Sociedade Portuguesa de Matemática. Além de matemática, tem interesses literários, tendo publicado seis livros na área da ficção juvenil e do conto distinguidos com prémios.

ISBN 972-662-713-3

9 789726 627135

NATÁLIA BEBIANO DA PROVIDÊNCIA

MATEMÁTICA

OU

MESAS, CADEIRAS
E CANECAS DE CERVEJA

gradiva

Revisão do texto: *José Soares de Almeida*
Capa: *Armando Lopes com ilustração de José Bandeira*
Fotocomposição: *Gradiva*
Impressão e acabamento: *Gráfica Manuel Barbosa & Filhos, Lda*
Reservados os direitos para Portugal por: *Gradiva – Publicações, Lda*
Rua Almeida e Sousa, 21, r/c esq. – 1399-041 Lisboa
Teles. 21 397 40 67/8 – 21 397 13 57 – 21 395 34 70
Fax 21 395 34 71 – Email: gradiva@ip.pt
URL: http://www.gradiva.pt
2.ª Edição: *Outubro de 2001*
Depósito Legal n.º 170 310/01

Índice

Poema das coisas belas

As coisas belas,
as que deixam cicatrizes na memória dos homens,
por que motivo serão belas?
E belas para quê?

Põe-se o Sol porque o seu movimento é relativo.
Derrama cores porque os meus olhos vêem.
Mas por que será belo o pôr do Sol?
E belo para quê?

Se acaso as coisas não são coisas em si mesmas,
mas só são coisas quando coisas percebidas,
por que direi das coisas que são belas?
E belas para quê?

Se acaso as coisas forem coisas em si mesmas
sem precisarem de ser coisas percebidas,
para quem serão belas essas coisas?
E belas para quê?

ANTÓNIO GEDEÃO

Matemática, o que é matemática?

> Admitamos, pois, que o estudo das matemáticas é uma loucura divina do espírito humano, um refúgio ante a urgência agrilhoante dos acontecimentos contingentes.
>
> WHITEHEAD

> [...] Nenhum matemático devia alguma vez esquecer que a matemática, mais do que qualquer outra arte ou ciência, é um jogo juvenil.
>
> HARDY

> A matemática é a ciência onde nunca se sabe de que se fala nem se o que se diz é verdadeiro.
>
> RUSSELL

1. Alguém disse que a filosofia é o uso de uma terminologia inventada precisamente com esse fim. Na mesma linha de ideias, pode dizer-se que a matemática é a ciência que explora conceitos e regras criados com esse objectivo. Segundo esta perspectiva, a tónica recai sobre a criação de conceitos conducentes, através de nexos lógicos, a teoremas (de preferência *belos*). Alguns conceitos inspiram-se directamente no mundo real, mas tal não ocorre de modo necessário com todos, em particular com muitos dos que têm aplicação em física.

A matemática pode ser entendida como uma disciplina autónoma cuja única limitação é a sujeição às regras formais do pensamento e onde a imaginação desempenha papel primacial. O termo «matemática» deriva do grego $M\alpha\theta\eta\mu\alpha$, que significa ciência e aprendizagem.

Os mais antigos registos matemáticos conhecidos remontam às civilizações da Antiguidade oriental. A colecção de *tabuinhas* da Babilónia, datadas de cerca de 2000 a. C., e os papiros egípcios coevos constituem um importante legado civilizacional revelador dos primórdios da matemática. Essencialmente, estes registos consistem em colecções de regras práticas, procedimentos casuísticos e rotinas, problemas de juros e heranças, cálculo de áreas e volumes...

No período entre o império persa e as expedições de Alexandre, os Gregos, em contacto com as *civilizações potâmicas* do Egipto e do Crescente Fértil, apreenderam os seus saberes, submetendo-os às suas tão peculiares especulações. Na moderna acepção de ciência, a matemática surgiu na Grécia nos séculos V e IV a. C., tendo como precursores Tales e Pitágoras, fundador da escola pitagórica.

A descoberta de relações complexas entre os números e entre os números e entes bem diferentes, como, por exemplo, os sons, levou a escola pitagórica a concebê-los como a essência de todas as coisas. Não só os números eram coisas — a que atribuíam virtudes misteriosas —, como todas as coisas eram números. A sua divisa era «Tudo é número!».

Na concepção pitagórica, o ponto não era desprovido de dimensão, constituindo a *mónada*, ou elemento mínimo do espaço. A linha e a superfície eram constituídas por mónadas e a medida de qualquer comprimento, tomando outro comprimento como unidade, seria expressa pela razão entre o número das mónadas de um e de outro.

A descoberta do teorema de Pitágoras veio abalar esta teoria, pois continha em si o gérmen da sua negação. O teorema de Pitágoras logo mostrou a impossibilidade de se exprimir a diagonal de um quadrado de lados de comprimento 1, tomando o lado para unidade, segundo a razão atrás mencionada.

Havia segmentos *incomensuráveis!* A escola pitagórica, rudemente abalada na sua divisa, «Tudo é número!», quis silenciar esta descoberta demolidora. Mas o discípulo Hípaso, por amor à verdade, revelou o segredo. Reza a lenda que morreu num naufrágio, castigado pelos deuses.

Os filósofos gregos tomaram consciência das grandes dificuldades inerentes a conceitos como os de *continuidade* e *infinito.* O carácter dedutivo-postulacional da matemática terá tido origens no tempo de Eudoxo (408-355 a. C.), discípulo da Academia de Platão, alcançando a devida consolidação nos *Elementos* de Euclides, compostos em Alexandria cerca de 300 a. C.

Os *Elementos* são o primeiro modelo de construção axiomática e um monumento de toda a ciência grega. Partindo de noções abstractas de origem intuitiva, de definições, axiomas e postulados, apresentam um entretecido de proposições *rigorosamente* demonstradas.

A descoberta de dificuldades no tratamento das grandezas *incomensuráveis* levou os Gregos a colocarem a tónica na geometria, secundarizando os aspectos numéricos e algébricos da matemática. Esta tradição manter-se-ia durante quase dois milénios.

A ciência, em particular a matemática, teve nos séculos XVII e XVIII um período apoteótico, após um longo interregno. A *revolução científica* que então ocorreu e à qual se associam os vultos de Galileu (1564-1642), Kepler (1571-1630), Descartes (1596-1650), Newton (1642-1727), é um dos mais admiráveis eventos da humanidade. A criação da geometria analítica por Descartes e do cálculo diferencial e integral por Newton e Leibnitz constitui um marco importante. O ideal grego de axiomatização e dedução sistemática de algum modo desvaneceu-se. A revolução industrial e a mundialização dos mercados, com as subjacentes necessidades técnico-científicas (de navegação, cartografia, construções navais e militares...), lançaram à matemática novos e prementes desafios. Os problemas de mecânica, astronomia, cartografia e as crescentes aplicações da matemática às ciências naturais, fomentadas pela recente descoberta do cálculo diferencial, foram o *leitmotiv* do desenvolvimento das matemáticas no século das luzes. Os raciocínios logicamente precisos, partindo de definições claras e não contraditórias e de axiomas evidentes, não eram o objectivo primacial dos novos mentores da moderna ciência matemática. A crença no poder da razão e no valor da intuição, entremeada de algum misticismo, revelava-se fecunda e promissora, abrindo portas a um mundo de insuspeitada riqueza.

No século XIX, a necessidade de consolidação do edifício recentemente erigido conduziu de novo à análise dos fundamentos da nova matemática, em particular do cálculo diferencial e integral e do conceito subjacente de limite. Assim, este século foi caracterizado pelo regresso ao ideal clássico da precisão e do rigor demonstrativo, oscilando o pêndulo para o lado da pureza lógica e da abstracção.

As tentativas de demonstração da independência (relativamente aos restantes) do *postulado das paralelas* de Euclides (no plano, por um ponto que não está sobre uma recta passa uma e uma só paralela) culminaram, ao cabo de dois milénios, na descoberta das geometrias não euclidianas. Bolyai e Lobacthevski desenvolveram uma geometria logicamente coerente a partir da negação daquele postulado, afirmando que, no plano, por um ponto que não está sobre uma recta passa uma infinidade de paralelas. Riemann logo formula uma terceira hipótese — não passar paralela alguma —, construindo uma nova geometria, que Einstein viria a usar para fundar a teoria da relatividade geral. Os fundamentos de toda a matemática tinham de ser revistos. O problema da consistência da geometria euclidiana, até então inquestionável, põe-se com especial acuidade.

As opiniões dividem-se e surgem várias escolas: *formalista, intuicionista, logicista.* A ideia de que a forma axiomática da geometria de Euclides era o modelo perfeito de estruturação do conhecimento científico levou à axiomatização dos vários saberes matemáticos. Cantor cria a teoria dos conjuntos, onde surgem inesperados paradoxos. Peano formaliza uma axiomática para os inteiros. Hilbert propõe uma axiomática para a geometria, onde a natureza dos entes de que se parte não importa. E no virar do século enuncia 23 problemas que ditam rumos para a matemática do século XX.

As tentativas de axiomatização das várias disciplinas matemáticas não levaram onde se esperava. Muito pelo contrário. Para provar a consistência da sua axiomática para a geometria, Hilbert apoia-se na consistência da axiomática para os inteiros. Mas será esta axiomática consistente? Qual a resposta para esta questão? A famosa descoberta de Kurt Gödel, *segundo teorema da incompletude,* segundo o qual todo o sistema axiomático suficientemente amplo para conter a aritmética sofre da limitação de jamais poder provar a sua própria consistência, surpreende o mundo matemático. Como dizia Heraclito: «Por muito longe que vás, não encontrarás os limites da alma: tão profundo é o seu *logos.*»

Ao longo dos tempos, os matemáticos consideraram os seus objectos, pontos, números, etc., entes em si mesmos. Tendo estes entes desafiado todas as tentativas de definição adequada, foi despertando lentamente nos matemáticos do século XIX a ideia de que a *questão do sentido* destes objectos não tem sentido em matemática. As afirmações relevantes a eles relativas não se referem à sua realidade substancial, antes às suas relações mútuas. O que são de facto pontos, linhas, números, não pode ser discutido dentro das ciências matemáticas. O que importa é a estrutura e relação entre estes conceitos elementares. Um dos mais importantes desenvolvimentos do sistema postulacional moderno foi o abandono do intento de compreensão *das coisas em si mesmas.* De modo semelhante, em física, os sucessos mais notáveis ficaram a dever-se à adesão ao princípio da rejeição da metafísica do seu corpo de ciência e ao abandono do intento de atingir a essência e verdade última do mundo.

A *crise dos fundamentos,* que abalou as ciências matemáticas no dealbar deste século, levou Engels a afirmar que «o estado virginal, onde tudo o que era matemático tinha um valor absoluto e era demonstrado de uma maneira irrefragável, foi para sempre perdido; então abriu-se o reino das controvérsias [...]».

O século XX é o século de ouro da ciência e da matemática, com uma assombrosa pulverização e especialização de saberes e o nascimento de muitos novos ramos.

2. Desde os alvores da civilização, dos antigos Gregos e Chineses à «idade da informação», a matemática tem vindo a ocupar um lugar importante na história da cultura da humanidade. Este protagonismo advém sobretudo da sua riqueza conceptual e das suas crescentes aplicações noutros ramos do saber. Já em 1267 o filósofo, alquimista e cientista inglês Roger Bacon (c. 1214-1292), conhecido por *Doctor mirabilis,* escrevia na sua obra *Opus Majus* que «a matemática é a chave para as ciências». E ainda:

> Todas as ciências necessitam de matemática... O conhecimento das coisas matemáticas é quase inato... Esta é a mais fácil das ciências.

Apesar da incontestável relevância da matemática, o seu *estatuto proeminente* na hierarquia das ciências tem sido questionado ao longo da história. Refira-se, a título de exemplo, que, enquanto Descartes e Leibniz defendiam que a matemática esclarece a verdade do mundo e unifica o conjunto das ciências, o filósofo enciclopedista Diderot revelava uma visão antagónica, afirmando que ela mais não faz do que «interpor um véu entre a natureza e o povo».

A matemática é a linguagem adequada à formalização, quer qualitativa, quer quantitativa, dos vários saberes. É a linguagem da ciência por excelência. É nesta linguagem que está escrito o *grande livro da natureza.* Assim, a matemática é uma *chave de compreensão do universo.* Alain Connes, medalha Fields francês, no livro *Matéria Pensante,* defende ser ela a única linguagem universal, aquela que nos permite comunicar com outra inteligência, outro planeta ou outro sistema solar...

Como diz Paul Valéry, na floresta encantada da linguagem, os poetas caminham rapidamente para se perderem, para se deixarem tomar pelo desvario, procurando as encruzilhadas da significação, os ecos imprevistos, os encontros estranhos. Tal como o poeta, o matemático é o caminhante que se compraz a percorrer os seus trilhos de rigor e lógica, os trilhos da *verdade.* Os juízos que sobre esta busca se enunciam, as observações mais sagazes, os raciocínios mais subtis, acrescentam-lhe um valor de indeterminação. O matemático cria por criar, pelo desejo de perfeição estética, por prazer. E nada há de mais incerto, de mais subjectivo, de mais incomunicável, do que o prazer.

3. Seria ligeiro tomar a matemática como mera linguagem, linguagem subsidiária das outras ciências. O carácter generativo da matemática é essencial. A possibilidade de reencontrar a tabela periódica de Mendeleiev a partir de uma equação (a equação de Schrödinger) e do princípio de exclusão de Pauli é, no mínimo, surpreendente. É fascinante que os cálculos de Kepler tenham conduzido à confirmação dos morosos resultados experimentais do astrónomo Tischo Braye e à descoberta das órbitas dos planetas, as belas elipses do grego Apolónio de Perga. É admirável que simples cálculos de gabinete levem à descoberta de corpos celestes. Em 1846, Le Verrier comunica à Academia das Ciências de Paris a posição no espaço de um planeta desconhecido que causava perturbações nas órbitas dos outros. E logo o planeta Neptuno é descoberto pelo Observatório de Berlim.

4. É difícil dizer o que é a matemática. Ela é.

Quer a matemática seja uma linguagem, aliás muito expressiva ao descrever a realidade física, quer um princípio organizador da matéria, uma base explicativa para o universo, ou algo que transcende tudo isso, a sua extraordinária adequação ao real é inquestionável.

Até onde vai a surpreendente eficácia da matemática? Qual a sua verdadeira universalidade? Como explicar, por exemplo, a omnipresença dos números de Fibonacci na natureza? Ou a existência de modelos matemáticos que tão bem se aplicam a átomos como a neurónios ou a populações humanas? A matemática liga o mundo abstracto dos conceitos do intelecto puro ao mundo real das coisas físicas, sem se confinar a nenhum deles. É a esta a *realidade da sua irrealidade.*

Para alguns, a matemática é um mito. No poema de Fernando Pessoa, o mito é o *nada que é tudo.* Aqui mito não tem esta acepção. A matemática é mítica, porque é uma criação do espírito humano, cujas inúmeras virtualidades são universalmente aceites. E mágicas. Como Connes preconiza em *Matéria Pensante,* talvez mesmo um alicerce para uma ética universal.

5. Finalmente, uma conclusão. Se dissermos que a matemática é um idioma universal, tão universal como a música, inteligível em todos os pontos do espaço e do tempo, dizemos algo de importante, mas ainda banal. Assim, não há conclusão alguma. Nem sobre os fins, nem sobre a natureza desta arte-ciência. Também os fins, a natureza, das sinfonias de Beethoven caem nos domínios do não-saber.

Julgamos ser desnecessário acrescentar que não encontrámos a definição procurada. Como diz Valéry, ninguém, que se saiba, se gabou de definir as matemáticas. Alguns aventuraram-se a definir a vida, mas o sucesso do seu esforço foi sempre em vão: a vida não o é menos.

O desenvolvimento das ciências matemáticas é uma metáfora do eterno dilema humano. A busca infinita do saber. E do belo. Nas matemáticas, esta busca é inteiramente livre, ou antes unicamente restringida pelas regras formais do pensamento. Os pináculos a que nos levam os voos da imaginação são admiráveis. Tão deslumbrantes que o mundo da razão pura se prefigura ainda mais fantástico do que o mundo da pura fantasia.

Matemática e beleza

> O binómio de Newton é tão belo como a Vénus de Milo.
> O que há é pouca gente para dar por isso.
>
> ÁLVARO DE CAMPOS/FERNANDO PESSOA

> Mas por que será belo o pôr do Sol?
> E belo para quê?
>
> ANTÓNIO GEDEÃO

> Um trabalho matemático é, para quem o sabe ler, o mesmo que um trecho musical para quem o sabe ouvir, um quadro para quem o sabe ver, uma ode para quem a sabe sentir.
>
> GOMES TEIXEIRA

Em 1917, Bertrand Russell escreveu na sua obra *Misticismo e Lógica:*

O verdadeiro espírito de deleite, de exaltação, de sentido de se ser mais do que homem, que é a pedra-de-toque da mais elevada excelência, é encontrado na matemática tão seguramente como na poesia.

A matemática, quando bem vista, possui não apenas verdade, mas beleza suprema — uma beleza fria e austera, como a de uma escultura.

O sentido estético sempre esteve presente nos cientistas mais criativos. É do matemático alemão Hermann Weyl a curiosa declaração:

> O meu trabalho sempre tentou unir o verdadeiro e o belo, mas, quando tive de escolher entre um e o outro, escolhi normalmente o belo.

Em sintonia, Hardy defendia:

> Beleza é o primeiro teste: não existe no mundo lugar permanente para matemática sem beleza.

A matemática tem no seu âmago uma vincada componente estética. É não só uma ciência, mas também uma forma de arte. A sua beleza coloca-a entre as artes, a par da poesia ou da música.

A matemática é a poesia da ciência, disse alguém. Tal como a poesia, é *um suplemento da alma.* E, parafraseando Weierstrass, «um matemático que não seja um pouco poeta não é um matemático completo...».

Como a música, a poesia e outras artes, a matemática é fonte de prazer estético. Para os que escolheram esta ciência por gostarem dela, a sua beleza parece uma boa razão para o seu cultivo. Mas, dir-se-á, a beleza ou se sente ou não; a emoção estética não é passível de ser transmitida. Como diz Malraux, «ninguém fica a gostar de música pelo facto de lhe explicarem a Nona Sinfonia».

Será possível *cultivar o gosto* de modo que o *gosto* se *revele* e a beleza surja como uma revelação insuspeitada?...

O matemático emociona-se com as suas descobertas, às vezes deixa-se maravilhar por elas. Ao afirmar-se como criador, renega aquilo a que alguém chamou a *vida elementar animal.* Confrontado com a morte, a dor e outras contingências inelutáveis, o homem, para recobrar um sentido, para aceder à verdade, encontra na pintura, na música, na poesia, na matemática, um recurso.

Quem cria busca a beleza e a beleza é um fim em si. A criação não serve, em princípio, finalidade alguma. O homem cria por uma necessidade intelectual inexorável. É esta a sua suprema vocação. A sua natureza. A sua verdade.

A obra criada cumpre um objectivo muito para além da satisfação do seu criador. Este sente que apenas se limitou a dar-lhe expressão, a torná-la tangível, de modo que seja compreendida pela alma humana. Porque a obra, o poema, a música, o teorema, já preexistiam. Talvez no grande livro de todos os enigmas, esse onde *Deus escreveu todos os teoremas...*

Mas o que é a beleza? Ou ainda: para que serve a beleza? «A beleza é verdade/A verdade é beleza», considera o poeta John Keats. A matemática é bela. A sua beleza é como a da Nona Sinfonia: não se explica. E neste ponto as nossas explicações, árduas, laboriosas, ficam suspensas. Dizer que a matemática é bela é atribuir-lhe um valor de enigma. É, na verdade, acrescentar-lhe um atributo de indeterminação. Nada mais difícil, e não menos sedutor, do que discernir porquê tal coisa é aquilo que se nomeia belo.

Einstein usava a beleza como critério de verdade das suas teorias. O famoso matemático alemão David Hilbert observa incisiva e liricamente no discurso *in memoriam* de Hermann Minkowski:

> A nossa ciência, que amámos acima de todas as coisas, juntou-nos. Ela apareceu-nos como um jardim florido. Neste jardim existiam caminhos bem conhecidos donde podia olhar-se à volta à vontade e desfrutar a paisagem sem esforço, especialmente ao lado de um companheiro de ofício. Mas também gostámos de procurar trilhos escondidos, tendo muitas vezes descoberto uma vista inesperada que era agradável aos olhos; e, quando um apontava ao outro, e a admirávamos em conjunto, o nosso prazer era completo.

Mas o que é, em matemática, a *beleza?* Esta interrogação é isto mesmo, uma interrogação. Ou seja, algo irrespondível. Quando perguntaram ao célebre pintor do século XVI Durer o que era a beleza em arte, este respondeu: «Não sei!» Paul Dirac, um dos descobridores da mecânica quântica, perante a dificuldade da questão, opinou o seguinte:

> A beleza matemática não pode ser definida mais do que a beleza na arte, mas as pessoas que estudam matemática não têm, em geral, qualquer dificuldade em apreciá-la.

Se o que é indefinível acaso o não fosse, porventura habilitar-nos-ia a desvendar todos os segredos. Este tudo ignorar profundamente, este não-saber, é um desafio criador. A reflexão sobre *a coisa* estética tem um futuro maravilhosamente vasto e luminoso. Os matemáticos não cessam de referir a beleza da estrutura dos seus raciocínios e das suas demonstrações.

Para quê a beleza? *Por que são belas as coisas belas e para quê?* Para que terá Mozart composto a Quadragésima Sinfonia ou Leonardo da Vinci pintado a Mona Lisa? Com fito nalguma espécie de progresso, material, social?... Para que terá Ricci criado o cálculo tensorial? Para Einstein o utilizar mais tarde nas descobertas de relatividade? Porquê? Para quê? Talvez por gozo, curiosidade e recreio. Não serão estas as verdadeiras motivações do matemático, como, aliás, de todo o criador?

Ao criar, o criador está em sintonia com a ordem universal. A obra circulará pelas veias de todo o ser humano, criando um círculo poderosíssimo. Ao admirarmos as obras artísticas, reeditamos o momento de beleza da sua criação. A alma eleva-se às alturas pela força subtil das cores, dos sons, das formas...

A concepção utilitarista

> Um matemático é um homem cego, numa sala às escuras, à procura de um gato preto, que não se encontra lá.
>
> CHARLES DARWIN

Impõe-se uma palavra a propósito da *filosofia utilitarista.* A ideia de estudar matemática em cata das utilidades é absurda. Segundo parâmetros economicistas, «o paraíso que Cantor criou para nós» ou as geometrias não euclidianas seriam projectos ociosos, porque aparentemente sem aplicações.

As geometrias não euclidianas não nasceram por a geometria euclidiana se não adequar ao real ou de um projecto em guisa de aplicações. Essas matérias vieram à luz fruto de tentativas renhidas de provar a independência do postulado das paralelas de Euclides em relação aos outros. Assim, surgiram da pura especulação, dos *jogos do espírito.* Gauss guardou inéditos os seus resultados neste campo com receio de afrontar a envergadura de opinião do filósofo Immanuel Kant. Contudo, elas adquiririam cidadania matemática e um belo dia as aplicações surgiram...

Existe uma surpreendente e *a priori* insonhável conexão entre matemática *pura* e *aplicada* (inútil e útil). É difícil avaliar quando estamos nos jardins de uma ou de outra ou nos limiares das fronteiras entre ambas.

O grande matemático francês Henri Poincaré escreveu no seu livro *La valeur de la science (O Valor da Ciência)*, publicado em 1920, que «não é senão pela ciência e pela arte que valem as civilizações».

Afirma ainda Poincaré:

> O cientista não estuda a natureza porque tal é útil. Estuda-a porque tem prazer nisso; e tem prazer nisso porque ela é bela. Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena o conhecimento, nem a vida valeria a pena ser vivida [...] Pretendo significar a beleza íntima que provém da ordem harmoniosa das partes e que pode ser compreendida por uma inteligência pura [...] É porque a simplicidade e a vastidão são ambas belas que procuramos de preferência factos simples e factos vastos, que sentimos prazer, ora em seguir os gigantescos percursos das estrelas, ora em escrutinar com um microscópio a pequenez prodigiosa, que é também uma vastidão, ora em procurar nas eras geológicas os traços de um passado remoto, que por isso nos atrai.

«A medida em que a ciência falha em ser arte é a medida em que é incompleta como ciência», disse alguém. A arte existe, não para ser útil, mas *para honra do espírito humano.* Para nos reconciliar com os limites da nossa precariedade: a morte, o mal, a guerra... Até ao impossível.

Ao leitor

A matemática tem aspectos árduos que importa não escamotear. Há quem considere a matemática uma disciplina esotérica. E outros há que a dizem *fácil.* O célebre matemático Wiles afirmou que, no mundo inteiro, só umas 100 pessoas entenderão a sua demonstração de 140 páginas do *último teorema de Fermat.* Para desfrutar a beleza da matemática há que escalar montanhas inóspitas, dominar a sua linguagem hermética, adquirir familiaridade com o seu formalismo pesado e a sua carga notacional. Na Idade Média, a magia e a alquimia eram compreendidas e cultivadas por um grupo restrito de eleitos. A matemática é uma *magia* que se deseja ao alcance de todos. Tanto quanto possível, *mas não mais do que isso.* Não pode permitir-se que inspire repulsa ou temor reverente. Ninguém deve alarmar-se com a dificuldade de seguir os seus pormenores mais técnicos e intrincados.

A ideia de que a matemática *nada é além de um sistema de conclusões decorrentes de definições e postulados criados a bel-prazer do matemático e apenas satisfazendo o requisito de consistência* é controversa. Tal como Courant e Robins observam no seu famoso livro *O Que É a Matemática?,* se assim fosse, a matemática «não atrairia pessoa inteligente alguma. Seria um jogo com definições, regras e silogismos, sem motivação ou objectivo.» A matemática não é um universo de entes mortos, intangíveis, desinseridos de um cenário cultural e civilizacional. A matemática não é um mero entretecido de axiomas rígidos, um edifício de admirável rigor lógico, uma arquitectura barroca desprovida de luz. Não é uma paisagem desoladoramente seca, prenhe de *rigor mortis.* É, ao invés, um saber que requer ousadia e truculência intelectual.

Segundo Ian Stewart, a matemática formal é como a gramática — uma questão de aplicação correcta de regras. Já a matemática significativa é como o jornalismo — conta uma história (a qual deve ser interessante e verídica). Quanto à melhor matemática, é como a literatura — dá vida a entrechos com os quais nos envolvemos intelectual e emocionalmente.

Este livro é dedicado a todos os que se interessam por matemática. Apresenta conceitos fundamentais desta ciência, algumas das suas gemas. Procura aclarar ideias algumas vez discutidas e já esquecidas, depurando-as da verbosidade técnica e das rotinas e privilegiando os aspectos histórico-filosóficos.

Os diferentes capítulos são independentes uns dos outros. O seu conteúdo corresponde a palestras de divulgação realizadas em vários momentos e lugares. Os temas aflorados reflectem a solicitação dos organizadores dessas sessões, mais do que qualquer outro critério. O leitor pode confinar-se àqueles capítulos ou secções que mais lhe interessem.

O risco de escrever um livro deste género, género a que grandes vultos têm conferido a sua chispa, não gorou o projecto. Soltar o véu de mistério que envolve a *rainha das ciências* foi mais do que projecto ou desafio, uma inevitabilidade. O mundo da matemática é infinitamente surpreendente e fascinante. Mas não basta pensá-lo, há que dizê-lo...

Diz-se que um autor nunca termina um livro, meramente o abandona. Abandono, assim, o meu livro na modesta esperança de que, mau-grado as imperfeições, possa ter utilidade.

1
O último teorema de Fermat

> Devotei uma grande parte do meu tempo e quase toda a minha energia mental a este problema.
>
> ANDREW WILES

Por volta de 1637, Pierre de Fermat, advogado de província e porventura o mais brilhante matemático amador de todos os tempos, inspirado por um resultado de Diofanto que lia na *Arithmetica*, anotou à margem que, se n é um inteiro maior do que 2, a equação $x^n + y^n = z^n$ é impossível para x, y e z inteiros positivos. Esta proposição é conhecida como último teorema de Fermat, abreviadamente UTF.

Para $n = 2$, a equação de Fermat admite uma infinidade de soluções, tais como:

$$3^2 + 4^2 = 5^2, \quad 5^2 + 12^2 = 13^2, \quad 8^2 + 15^2 = 17^2 \ldots$$

ternos pitagóricos, como adiante circunstanciaremos.

Na *margem* da *Arithmetica*, Fermat (1601-1665) escreveu ter encontrado uma *demonstração verdadeiramente notável* para aquela proposição, a qual, no entanto, era demasiado extensa para ali caber.

Na aludida *demonstração* os casos dos expoentes 3 ou 4 estariam decerto ao alcance de Fermat. Porém, é absurdo pensar que Fermat tivesse uma demonstração do «último teorema» ou que ele próprio acreditasse no que registara *na famosa margem.* Deveras, Fermat jamais voltou a tocar *neste ponto* na correspondência (matemática) que trocou nos cerca de trinta anos que ainda viveria.

O último teorema permaneceria indemonstrado até 1995 e margem alguma poderia conter a sua demonstração. É um dos mais célebres *problemas em aberto* na matemática e a sua investigação suscitou avanços fundamentais nas ciências matemáticas.

Fermat pouco publicou em vida. Todavia, inspirou os maiores matemáticos do seu tempo, através da intensa correspondência que com eles travou. É um caso verdadeiramente notável na história da matemática, pela inspiração e pela influência perene. (Ocorre-nos, a propósito, a questão da publicação desenfreada dos nossos dias e o que dela permanecerá...)

O UTF resistiu a variados ataques de amadores e matemáticos de primeiro plano, estimulando a curiosidade e adensando o mistério em seu redor. A demonstração do UTF, em 1995, pelos matemáticos Wiles e Taylor electrizou a comunidade matemática não só porque um problema em aberto desde o século XVII cedia, finalmente, a inúmeras tentativas de resolução, mas porque essa demonstração abria perspectivas à solução de outros problemas importantes. O engenho dos autores desta proeza científica consistiu no desenvolvimento de uma espécie de *fertilização cruzada* entre campos distantes.

Apresentamos de seguida as peças mais importantes da solução do UTF, esboçando perspectivas que, para além dela, se desenham. Ou seja, tentaremos vislumbrar o que há *para além do último teorema...*

A álgebra alexandrina — Diofanto

Em 332 a. C., Alexandre-o-Grande fundou a cidade de Alexandria, no Egipto, mas, nove anos decorridos, a cidade permanecia inacabada. O império de Alexandre, aquando da sua morte, cindiu-se em três e Alexandria ficou sob o domínio da dinastia ptolemaica. Depois do período clássico grego, com centro em Atenas, a matemática floresceu em Alexandria, conhecendo um momento glorioso no século III a. C. São expoentes máximos deste período áureo Euclides, Arquimedes e Apolónio, a famosa trindade de matemáticos alexandrinos.

A este momento de apogeu seguiu-se uma época de declínio interrompida pelo vulto de Ptolemeu no século II. A *idade de prata* de Alexandria, que vai de 250 a 350 da nossa era, é balizada por Diofanto, o maior algebrista grego, e Papus, o último geómetra grego. Centro cosmopolita, sobre Alexandria abateram-se sucessivas vagas de destruição. Numa delas, no tempo do imperador romano Teodósio, em 329, foram destruídos mais de 300 000 manuscritos. No século V, quando uma mulher era directora da Biblioteca — Hipátia de Alexandria —, ocorreu nova devastação. Milhares de exemplares pereceram no fogo e Hipátia foi assassinada em 415. Em 640, os muçulmanos arrasaram Alexandria. *Se está no Corão, é supérfluo; se não está, é heresia.*

No século III, Alexandria produziu uma das suas mais notáveis obras: a *Arithmetica* de Diofanto. Tratado em treze livros, dos quais só os seis primeiros prevaleceram, a *Arithmetica* é uma colecção de cerca de 150 problemas, estudados através de exemplos concretos, sem desenvolvimento axiomático ou teorização, mas, cumpre salientá-lo, com uma notação simbólica para as incógnitas, os quadrados, os cubos, etc. A obra versa essencialmente sobre a resolução de equações algébricas com coeficientes racionais (ou inteiros, pois podemos facilmente desembaraçá-las de denominadores). Às soluções impõe-se um requisito: serem números inteiros ou quocientes de inteiros.

As *equações diofantinas* são equações algébricas (ou, de um modo mais geral, sistemas de equações algébricas) em várias variáveis com coeficientes racionais, cujas soluções são inteiros ou racionais. Herdaram a designação do matemático grego Diofanto de Alexandria, seu criador.

Sabemos muito pouco acerca de Diofanto, como acontece com outros grandes vultos da história da humanidade. Tem o epíteto de pai da álgebra como tributo às formas simbólicas que utilizou. Um extracto de uma colecção de problemas intitulada *Antologia Grega,* datando do século V ou VI, a propósito da sua biografia, reza assim:

> Deus concedeu-lhe ser menino pela sexta parte da sua vida, e, somando uma duodécima parte a isto, cobriram-se-lhe as faces de penugem; Ele acendeu-lhe a lâmpada nupcial após uma sétima parte e cinco anos após o casamento concedeu-lhe um filho. Ai!, infeliz criança tardia, depois de chegar à medida de metade da vida do pai, o destino frio levou-o. Depois de se consolar da dor durante quatro anos com a ciência dos números, terminou a sua vida.

Equações diofantinas

O estudo das equações diofantinas situa-se numa interface entre a teoria dos números e a geometria algébrica.

A resolução de equações nos inteiros é um dos mais antigos problemas matemáticos. No 2.º milénio antes de Cristo, os Babilónios resolveram neste campo dos inteiros sistemas de duas equações a duas incógnitas. Este ramo da matemática veio, posteriormente, a florescer na antiga Grécia. A *Arithmetica* de Diofanto é a principal fonte histórica nesta matéria. A obra contém soluções de equações diofantinas específicas, sendo razoável admitir que o seu autor conhecesse alguns métodos gerais. Na *Arithmetica* surgem, nomeadamente, métodos para o estudo de equações do segundo e terceiro graus, os quais viriam a ser desenvolvidos no século XIX.

Um exemplo simples de equação diofantina é

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Designam-se por *ternos pitagóricos* os ternos de números inteiros positivos x, y e z que satisfazem a equação de Pitágoras. Representam, respectivamente, os comprimentos dos catetos e da hipotenusa de um triângulo rectângulo, cujos lados têm comprimentos inteiros. É fácil verificar que os números 3, 4 e 5 constituem um terno pitagórico. Uma fórmula geral, provavelmente, conhecida dos matemáticos babilónios permite gerar uma infinidade de ternos, como 5, 12 e 13, ou 8, 15 e 17...

Na placa babilónica Plimpton 322, datada de 1900-1600 a. C., estão registados quinze *ternos pitagóricos,* incluindo, por exemplo, o seguinte: 3456, 3367 e 4825. Diofanto trata o problema geral, ilustrando o método através de casos particulares. Em notação moderna, todos os ternos pitagóricos de números primos entre si (ou seja, sem factores comuns) são dados pelas fórmulas

$$x = (u^2 - v^2), \quad y = 2uv, \quad z = (u^2 + v^2)$$

com u e v inteiros primos entre si ($u > v > 0$).

A ensejo dos ternos pitagóricos, Fermat imaginou um problema análogo com cubos, quartas potências, e assim sucessivamente. Diofanto, na *Arithmetica,* referia ter encontrado quatro números inteiros que satisfaziam a equação $x^4 + y^4 + z^4 = u^2$. De facto, a partir dos ternos pitagóricos pode deduzir-se uma infinidade de soluções para esta equação, sendo a mais simples constituída pelos números 12, 15, 20 e 481, respectivamente, para x, y, z e u. Com efeito, sendo a, b e c um terno pitagórico, pode demonstrar-se, mediante alguns cálculos, que $(ab)^4 + (ac)^4 + (bc)^4$ é um quadrado perfeito, sendo então trivial resolver a equação $x^4 + y^4 + z^4 = u^2$. A solução apresentada diz respeito ao terno 3, 4 e 5, como pode comprovar-se sem dificuldade.

Este facto, observado pelo espírito penetrante de Fermat, viria a ser o gérmen de um acontecimento verdadeiramente notável da história da matemática. Escreveu Fermat na margem do livro:

> Por que razão não procurou Diofanto duas potências quartas tais que a sua soma fosse um quadrado? Este problema é de facto impossível, como sou capaz de provar com absoluto rigor pelo meu método.

Ora, se duas potências quartas não podem somar um quadrado perfeito, também não podem somar uma quarta potência, visto que qualquer potência quarta, digamos w^4, é também um quadrado perfeito, o quadrado de w^2. Fermat, na margem da *Arithmetica* (esse exemplar encontra-se aparentemente perdido), escreveria ainda o seguinte:

> Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos-quadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere; cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Ou, em tradução informal:

> Separar um cubo em dois cubos, ou uma quarta potência em duas quartas potências, ou qualquer potência de ordem superior até ao infinito em duas potências da mesma ordem, é impossível, mas tenho uma prova maravilhosa para isso. Contudo, esta margem é muito exígua para a conter.

Foi deste modo que nasceu o *grande teorema de Fermat*. Tão grande que margem alguma poderia contê-lo...

O décimo problema de Hilbert

Em Agosto de 1900, no Congresso Internacional de Matemática, em Paris, o matemático alemão David Hilbert enunciou 23 problemas que haveriam de ditar o rumo da matemática futura e desafiaram os matemáticos no corrente século.

Hilbert tinha então 38 anos e era professor na prestigiosa Universidade de Götingen, onde Gauss, Riemann e Klein haviam pontificado. Um ano antes, com a publicação do seu livro *Grundlagen der Geometrie (Fundamentos da Geometria),* Hilbert iniciara o seu projecto de fundamentação da matemática. Segundo Hilbert, os matemáticos deveriam reduzir os conceitos matemáticos a axiomas rigorosos, listas de termos fundamentais, relações e regras, cuja consistência seria depois demonstrada, de modo a alicerçar a descoberta matemática em princípios inexpugnáveis.

Alguns dos problemas que Hilbert colocou no Congresso (como o segundo, sobre a consistência da aritmética) reflectiam esta sua perspectiva da matemática. Outros eram problemas que haviam suscitado o interesse de gerações de matemáticos, como o *décimo*, que adiante esmiuçaremos.

As equações diofantinas encerram alguns dos problemas mais tenazes da teoria dos números. A teoria geral da resolução das equações diofantinas do primeiro grau fora desenvolvida por Bachet no século XVII. Fermat, Euler, Lagrange e Gauss estudaram equações diofantinas não homogéneas do segundo grau com duas incógnitas, ou seja, equações de coeficientes inteiros da forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Para além do labor desenvolvido segundo esta via, no dealbar do nosso século, todo este campo estava por desbravar. Ora, o *décimo problema* de Hilbert versava, justamente, equações diofantinas. Consiste no seguinte:

> Dada uma equação diofantina com um número arbitrário de incógnitas e com coeficientes inteiros, divisar um processo que envolva um número finito de operações que permita decidir se a equação é solúvel nos inteiros.

O problema da determinação de um método universal para tratamento das equações diofantinas é uma questão em aberto, uma vez que todos os métodos conhecidos se aplicam a equações de classes específicas.

Diofanto investigara soluções racionais (não necessariamente inteiras) de alguns tipos especiais de equações diofantinas. A variedade de métodos usados por Diofanto é surpreendente. São passos de grande virtuosismo, múltiplas abordagens, truques engenhosos. O procedimento casuístico caracteriza, aliás, toda a história das equações diofantinas até ao presente. Crê-se que, com o teorema de Wiles e Taylor, o grande tratamento unificado está prestes a surgir.

Pináculo de ciência ou virtualmente inútil?

Recordemos o *porquê* da designação UTF. Após a morte de Fermat, o filho Samuel coligiu toda a correspondência matemática paterna, a qual foi publicada em 1670 juntamente com uma reedição da *Arithmetica* e algumas notas. Em finais do século XVIII, todas as questões que Fermat colocara haviam sido resolvidas: umas pela afirmativa, outras pela negativa. Apenas uma continuava em aberto; donde se haver reservado para essa a designação de «último teorema». O UTF é igualmente referido como conjectura de Fermat, ou ainda grande teorema de Fermat.

Fermat era um espírito matemático talentoso. Para além de ser o grande criador da teoria dos números — a matemática dos números inteiros —, antecipou ideias básicas da teoria das probabilidades e do cálculo.

É bem conhecida a sua descoberta de que todo o número primo da forma $4n + 1$ é uma soma de dois quadrados (um número primo é um inteiro que apenas é divisível por si próprio e por 1). Assim, $17 = 4^2 + 1^2$, $137 = 11^2 + 4^2$. Esta proposição foi provada por Fermat pelo *método de descida infinita,* uma variante por ele criada do método de indução (v. «O infinito», «Descida infinita»).

A prova consiste no seguinte: procedemos por *redução ao absurdo.* Suponhamos que existe um primo da forma $4n + 1$ para o qual a proposição é falsa e provamos que existe um certo primo, menor da mesma forma, para o qual a proposição também é falsa. Descendo indefinidamente, concluímos que tem de ser falsa para o menor primo daquela forma, ou seja, 5. Mas $5 = 2^2 + 1^2$; logo, chegamos a uma contradição.

O último teorema de Fermat tem um enunciado de uma simplicidade atraente. Questão virtualmente inútil, loucamente difícil de provar, o caminho para a solução revelou-se de tal modo espinhoso que muitos especialistas de primeiro plano julgaram erroneamente terem sido bem sucedidos na sua demonstração.

Nos três séculos e meio posteriores à sua formulação, o UTF atraiu a atenção de uma plétora de matemáticos profissionais e amadores, seduzidos quer pelo apelo incondicional de solucionar aquele quebra-cabeças, quer pelo desejo de fama ou até pela conquista de prémios monetários.

Em tempos foi instituído um prémio de 100 000 marcos para galardoar a primeira pessoa que solucionasse a questão. A solução deveria ser submetida ao sábio veredicto da Academia Real de Götingen. E um grande número de «alegadas» soluções vinha à luz ano após ano, atormentando o júri da competição com inusitado labor.

Como pode verificar-se sem grande dificuldade, é suficiente fazer a demonstração do UTF para $n = 4$ e para qualquer primo ímpar n. Euler, em 1753, fez a demonstração do caso $n = 3$. (Uma lacuna no argumento veio a ser colmatada por Gauss.) O caso $n = 5$ foi provado por Dirichlet em 1828, e posteriormente por Legendre, em 1830. O esboço da demonstração de Fermat para $n = 4$ era conhecido. Em 1832, Dirichlet foi bem sucedido a provar o caso $n = 14$ e, em 1837, Lamé sugeriu uma prova para $n = 7$, que continha erros. Cauchy e Gauss interessaram-se pela questão, mas sem sucesso. Sobre o assunto, Gauss escreveria nestes termos a Olbers:

> O problema tem pouco interesse para mim, pois é possível formular facilmente uma imensidão de tais proposições, que não podemos provar nem refutar.

De acordo com o matemático contemporâneo Barry Mazur, da Universidade de Harvard, o próprio matemático alemão do século XIX Ernst Eduard Kummer, cujos trabalhos até aos de Wiles foram os mais bem sucedidos no sentido de provar o UTF, considerava esta questão *mais um divertimento do que um pináculo de ciência.*

No século XIX, Kummer demonstrou o último teorema até ao expoente 167, depois de em 1847 haver alcançado avanços teóricos consideráveis para o problema. Nos cento e vinte anos subsequentes registaram-se progressos pouco expressivos sobre os resultados de Kummer. Após tantos anos de tentativas frustradas, começou a esboçar-se entre os especialistas a suspeita da *indecidibilidade* da questão. Em 1984, num resumo de aplicações da teoria dos números, expressa-se a dúvida:

> O UTF, provavelmente, jamais será provado ou refutado.

Entretanto, por volta de 1993, o último teorema foi provado computacionalmente para expoentes até 4 milhões. E um contra-exemplo, se acaso existisse, teria milhões de dígitos de comprimento... o que, obviamente, nada encorajava à sua busca.

Margem alguma poderia contê-lo

No dia 23 de Junho de 1993, os *media* anunciaram que Andrew Wiles, professor de Matemática da Universidade de Princeton, EUA, tinha, finalmente, resolvido o problema (v. *Quanta,* «No margin would contain it», de Peter G. Brown, Setembro-Outubro de 1993). Wiles, então com 40 anos, proferiu uma série de conferências no Instituto Isaac Newton, em Cambridge. Numa delas revelou que demonstrara grande parte da conjectura de Taniyama-Weil, o que implicava o UTF...

Faltava ainda analisar a demonstração de Wiles de cerca de 200 páginas para se ter a certeza de que não havia lapsos ou lacunas. Ora tal empreendimento custaria meses de aturado labor aos especialistas. Afinal, o próprio Fermat, honras ao seu génio, decerto cometera algum erro, pois margem alguma poderia conter a tal prova que mencionara...

Wiles entusiasmara-se com o problema aos 10 anos e tentara com afinco resolvê-lo. Passada a adolescência, compreendeu a real dificuldade de que a questão se revestia. O entusiasmo juvenil cedeu lugar à reflexividade fria. Wiles afirmou não desejar *desperdiçar toda a vida como matemático a tentar encontrar uma prova efémera e bizarra.*

Os especialistas não tardaram a descobrir um hiato na *prova* de Wiles! Wiles enviou uma mensagem à comunidade matemática por correio electrónico reconhecendo dificuldades na *prova,* mas manifestando confiança na sua superação.

Em 26 de Outubro de 1994, Karl Rubin fez circular nova mensagem:

> Como a maior parte de vós sabe, o argumento de Wiles [...] tem uma falha séria, nomeadamente na construção de um sistema de Euler. Depois

de tentar sem sucesso reparar essa construção, Wiles retomou uma abordagem diferente, que já antes tentara e abandonara em favor da ideia do sistema de Euler. Conseguiu então completar a prova.

Wiles e o seu antigo pupilo Richard Taylor, professor de Matemática na Universidade de Cambridge, num rasgo de génio, supriram a lacuna na prova inicial e estabeleceram a veracidade da *conjectura da modularidade para curvas elípticas semiestáveis.* A demonstração, de cerca de 130 páginas, foi publicada em Maio de 1995 na prestigiosa revista *Annals of Mathematics.*

Como corolário saía o UTF.

Onde fica a barreira da decidibilidade?

O teorema-chave demonstrado por Wiles e Taylor não foi o último teorema de Fermat, antes um teorema radicalmente diferente, do qual o UTF é um mero corolário. O teorema de Wiles e Taylor pode, eventualmente, conduzir a uma teoria unificada das *funções zeta,* utilizadas em vários ramos da matemática e da física. Poderá ainda originar um progresso notável na história da análise diofantina: uma teoria geral das equações diofantinas de três variáveis.

Hilbert procurara suprir a falta de uma teoria unificadora das equações diofantinas. Ao longo da história, o ataque aos problemas diofantinos havia sido travado caso a caso. Durante séculos e séculos, os matemáticos tinham engendrado uma variedade de artifícios, ardis e processos *ad hoc* para atacarem estas equações. Mas faltava uma teoria!

Assim, a solução de Wiles e Taylor, longe de ser um mero truque de magia que pôs fim a um problema anacrónico resistente durante séculos a várias abordagens, revela-se um instrumento fecundo para diversas áreas da matemática. O que não deixa de ser interessante, notável e surpreendente.

Voltemos ao décimo problema de Hilbert. Nos anos 50 surgiram os primeiros estudos que apontavam no sentido da não existência de um *algoritmo de decisão* para as equações diofantinas (ou seja, que permitiam averiguar se qualquer equação diofantina tem ou não solução). Subsiste um problema interessante: a identificação de classes de equações diofantinas para as quais tal algoritmo existe...

Em 1970, o matemático russo Yuri Matiyasevich, do Instituto Matemático de Steklov, em Leninegrado (agora Sampetersburgo), mostrou que há algumas equações diofantinas *indecidíveis*. Por outras palavras, há algumas equações para as quais nunca se encontrarão soluções e para as quais nunca se provará que não existem soluções.

E o décimo problema de Hilbert, qual a solução?

Em 1974, Matiyasevich e Julia Robinson mostraram que, para além do limbo da decidibilidade, existiam certas equações diofantinas com treze ou mais variáveis. James P. Jones, da Universidade de Calgary, em 1982, mostrou que nenhum algoritmo pode determinar se equações diofantinas com nove incógnitas possuem soluções inteiras. Para estas equações, as descobertas de 1931 no âmbito da lógica matemática, devidas ao lógico austríaco Kurt Gödel, estabelecem uma barreira impenetrável à solução.

E quanto a equações com menos variáveis? Nada se sabe. A linha mágica entre solubilidade e insolubilidade tanto pode começar em quatro variáveis como em oito. Actualmente, os matemáticos apenas podem garantir que a prova de Wiles e Taylor indica que as equações diofantinas com três variáveis são solúveis.

Wiles e Taylor e a conjectura STW

Wiles e Taylor demonstraram uma conjectura geralmente atribuída a três matemáticos: Goro Shimura, de Princeton, Yutaka Taniyama e Andrew Weil, do Instituto de Estudos Avançados. A conjectura, conhecida como conjectura STW, de acordo com os apelidos dos três autores, data de 1955, ano em que foi publicada em japonês por Taniyama como problema de investigação. O enunciado é difícil de expor e altamente técnico. Propõe uma *espécie* de equivalência entre entes matemáticos conhecidos por *curvas elípticas* e a matemática dos *movimentos rígidos* no espaço.

Observe-se que, ao contrário do que a nomenclatura possa sugerir, as curvas elípticas não são elipses e o nome não tem a ver com a forma. O adjectivo *elíptica* deriva da conexão destas curvas com as *funções elípticas* e do facto de as curvas elípticas serem de utilidade para o cálculo de comprimentos de arcos de elipses — como, por exemplo, a trajectória que um planeta descreve na sua órbita em torno do Sol.

A equação de uma curva elíptica é uma equação diofantina da forma

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

onde o maior expoente de x é 3 e o de y é 2. As soluções destas equações foram investigadas durante mais de um século e as suas propriedades são bem conhecidas no caso de os coeficientes a e b serem complexos. Restringindo os coeficientes ao campo dos números racionais, o estudo destas curvas complica-se muito mais.

Para compreensão da *equivalência* proposta pela conjectura STW, examinaremos a relação entre dois modos diferentes de *perspectivar* uma circunferência.

Em geometria define-se circunferência como o lugar geométrico dos pontos equidistantes de um ponto fixo. Tomando o usual sistema de coordenadas ortogonais OXY, com origem O no centro da circunferência e o raio igual a 1, a definição traduz-se no conjunto de pontos que satisfazem a equação $x^2 + y^2 = 1$. Em termos algébricos, podemos então pensar a circunferência como o conjunto de soluções desta equação.

Mas podemos conceber a circunferência de outro modo. Consideremos um relógio circular de modelo antigo de vinte e quatro horas com um só ponteiro, que dá a volta ao mostrador uma vez por dia, apontando primeiro para a «meia-noite», depois para a 1 da madrugada, e assim sucessivamente. O relógio não tem qualquer ideia do dia em questão; para ele as 2.05 da tarde de hoje são indistinguíveis das 2.05 da tarde de amanhã, ou da semana seguinte, ou de qualquer data imaginável.

Em termos matemáticos, cada ponto do mostrador circular estabelece *uma classe de equivalência* que compreende todos os momentos do passado, presente e futuro, em que o ponteiro indica precisamente esse ponto. Esquematicamente, o mostrador do relógio mostra uma linha do tempo marcada com inteiros igualmente espaçados (os pontos da meia-noite), torcida em hélice, colapsando depois a hélice numa circunferência.

A circunferência pode fazer ao espaço infinito unidimensional da linha dos números reais aquilo que faz ao fluir da linha do tempo. Nesse caso, a circunferência torna-se o conjunto de classes de equivalência de meros números. Formalmente, para qualquer número x, a classe de equivalência define-se como o conjunto de todos os números da forma

$$x + nc$$

onde c é o perímetro da circunferência e n qualquer inteiro positivo ou negativo.

Dificilmente poderiam ser mais diferentes, à primeira vista, as duas *descrições* de uma circunferência — uma em termos algébricos, outra em termos de classes de equivalência. Mas são de facto equivalentes, como pode provar-se recorrendo ao teorema de Pitágoras e a alguns factos de geometria elementar. (O parágrafo seguinte, onde se reflecte sobre este ponto, pode ser omitido sem prejuízo para a leitura.)

Considere-se a função $f(x)$ que aplica o número x noutro número, digamos $f(x)$. Para ser bem definida nas classes de equivalência que geram a circunferência, $f(x)$ tem de ser periódica. Isto é, $f(x + nc)$ tem de ter o mesmo valor que $f(x)$ para algum número c e para qualquer inteiro n. No caso da circunferência de raio 1, as funções periódicas pretendidas são precisamente as funções seno e co-seno. É uma consequência imediata do teorema de Pitagóras que

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Substituindo $\cos x$ por X e $\sin x$ por Y, obtém-se a equação

$$X^2 + Y^2 = 1$$

e estamos de novo na descrição inicial da circunferência. Em gíria matemática, ao fazer-se a substituição, diz-se que se *parametrizou* a equação da circunferência através de funções periódicas.

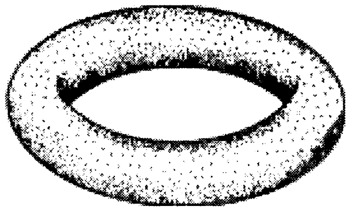
A equivalência que Shimura, Taniyama e Weil propuseram na sua conjectura baseia-se numa estratégia semelhante — não para circunferências, mas para curvas elípticas. A equação de uma curva elíptica, $y^2 = x^3 + ax + b$, é um pouco mais complicada do que a equação de uma circunferência. Ora, tal como a equação da circunferência, pode ser parametrizada. O matemático alemão do século XIX Karl Theodor Wilhelm Weierstrass foi quem primeiro mostrou como fazê-lo, desenvolvendo o procedimento num teorema clássico.

A parametrização de Weierstrass

Weierstrass generalizou ao plano bidimensional a ideia de classes de equivalência da linha dos números. Imaginemos o plano como uma folha infinita de plástico transparente e extremamente fino munida do sistema de coordenadas usual, um eixo horizontal X e um eixo vertical Y. Seguidamente, imaginemos o plano coberto por uma grelha, obtida traçando linhas paralelas igualmente espaçadas à distância de A e B unidades numa e noutra direcção dos eixos. As linhas não têm necessariamente de ser paralelas aos eixos, ou sequer perpendiculares entre si, mas, para maior simplicidade, suporemos que o são. O resultado é uma *tecelagem,* ou *pavimentação,* do plano com um número infinito de rectângulos idênticos.

Imaginemos agora que pegamos num alfinete e o espetamos ao acaso no plano. Seja onde for que o alfinete caia, ficará ou dentro ou sobre a fronteira de um dos rectângulos. Como todos os ladrilhos da pavimentação são idênticos, qualquer outro rectângulo do plano deve incluir exactamente um ponto numa posição correspondente à do alfinete. (Pontos fronteiros em dois lados adjacentes de cada rectângulo podem considerar-se pertencentes a esse rectângulo; pontos fronteiros dos outros dois lados considerar-se-ão pertencentes aos rectângulos vizinhos.) Assim, qualquer ponto do plano pode ser aplicado num ponto em qualquer dos rectângulos do plano. E todo o plano pode colapsar num único rectângulo. Os rectângulos *dividem* o plano em classes de equivalência, do mesmo modo que os inteiros a linha dos números.

Quando todo o plano é encapsulado num único rectângulo, esse rectângulo toma algumas características não usuais. Por um lado, os lados paralelos do rectângulo — superior e inferior, esquerdo e direito — tornam-se *equivalentes.* Se nos aproximarmos suficientemente do topo, voltamos a aparecer em baixo. Movendo-nos para a direita, reapareceremos à esquerda, num efeito análogo ao dos ecrãs de alguns jogos de vídeo. Em consequência, enquanto a circunferência tem um único período, a pavimentação do plano tem dois: um horizontal e outro vertical. Existe um processo de representar esta dupla periodicidade. Primeiro, aproximamos os bordos superior e inferior do rectângulo e unimo-los de modo a formarem um cilindro. Depois, aproximamos as bases do cilindro e colamo-las também. O resultado é uma figura geométrica com a forma de um *doughnut* e que se designa por *toro.*



Os dois períodos num toro são facilmente reconhecíveis. São representados por duas circunferências, uma que contorna o buraco do *doughnut* e outra que circunda o aro. Tal como as funções periódicas podem ser definidas sobre uma circunferência, também as funções duplamente periódicas podem ser definidas sobre um toro. Weierstrass mostrou que essas funções duplamente periódicas podem ser usadas para parametrizar curvas elípticas. Escolhendo comprimentos convenientes para A e B na pavimentação original, é possível reformular qualquer equação elíptica em termos de classes de equivalência no plano.

A proposta de Shimura, Tanyiama e Weil

O método de Weierstrass não é o único para parametrizar uma curva elíptica. Na sua conjectura, Shimura, Taniyama e Weil propuseram outro método para curvas elípticas, $y^2 = x^3 + ax + b$, cujos coeficientes a e b são inteiros. *A conjectura STW afirma que, além do toro, existe outra superfície capaz de fornecer a necessária equivalência.*

A superfície é diferente para cada curva elíptica, mas todas sugerem uma bola esburacada, ou um toro com pegas suplementares enxertadas. Para gerar tal superfície, embora o processo não seja fácil de visualizar, o que há a fazer é tomar um polígono de formato adequado, estabelecer correspondências entre pares de lados, dobrar e colar os lados correspondentes.

O polígono encerra a chave da conjectura STW. Assim como o *rectângulo dá origem ao toro,* o *polígono* está na origem de um método de definir pontos equivalentes. Porém, desta vez, as classes de equivalência não resultam de uma pavimentação, mas de movimentos rígidos no plano.

Informalmente, *um movimento rígido é uma transformação que faz mover o plano sem esticar nem encolher parte alguma dele.* Por exemplo, imaginemos que cada ponto do plano se desloca uma unidade para a direita. Ou que cada ponto do plano roda de um ângulo recto em torno de determinado eixo imaginário. Estes são exemplos de movimentos rígidos.

Se assinalarmos um ponto do plano e esse ponto for transformado através de uma sequência de tais deslocamentos e rotações, corresponder-lhe-á exactamente um ponto em cada nova posição do plano. Consequentemente, a sequência de movimentos rígidos origina um conjunto de classes de equivalência, uma para cada ponto do plano.

As funções periódicas relativamente a movimentos rígidos são denominadas *funções modulares*. A teoria das funções modulares é um ramo importante da matemática com grande diversidade de aplicações, incluindo a teoria das cordas, um ramo da física teórica muito importante para a cosmologia.

Shimura, Taniyama e Weil conjecturaram que, escolhendo a sequência correcta de funções modulares, é possível gerar uma superfície formada por pontos que constituem soluções de qualquer curva elíptica com a e b inteiros. Tal como a escolha correcta de funções trigonométricas (o seno e o co-seno), permite gerar uma curva, nomeadamente a circunferência, cujos pontos constituem a solução da equação $x^2 + y^2 = 1$.

A conjectura STW cede

A fertilização cruzada entre campos conduziu à prova do último teorema de Fermat. Em meados de 1980, Gerhard Frey, da Universidade de Saarland, Saarbrüken, Alemanha, sugeriu que, se o UTF fosse falso, existiriam curvas elípticas que violariam a conjectura de Taniyama. Jean Pierre Serre, do Colégio de França, em Paris, foi mais longe, alertando para as implicações da veracidade de uma determinada conjectura de *mínimo* e sugerindo a exploração das propriedades das curvas elípticas para investigar o UTF. E, a seguir, Kenneth A. Ribet, da Universidade de Berkeley, Califórnia, mostrou que, se a conjectura STW fosse verdadeira, o UTF resultaria como consequência automática.

Para Wiles, demonstrar o UTF tornou-se então um grande objectivo, pois acreditava que, ao contrário do que sucedera na sua juventude, quando nada de significativo acontecera depois dos trabalhos de Kummer, seria agora capaz de o fazer.

A demonstração da conjectura STW foi um acontecimento verdadeiramente notável. Até então a matemática das funções elípticas e a matemática dos movimentos rígidos tinham seguido percursos independentes e notoriamente distintos. O estudo das curvas elípticas era um ramo da teoria dos números, estreito e especializado — de certo modo como o estudo das equações diofantinas. Em contrapartida, o estudo dos movimentos rígidos era um domínio efervescente e sofisticado da topologia, geometria e análise, com inúmeras aplicações em engenharia e física. Os matemáticos tinham vindo a estudar intensamente durante os últimos cem anos os movimentos rígidos, acumulando uma poderosa maquinaria matemática. Ao sugerirem a virtual relação entre os dois campos, Shimura, Taniyama e Weil transportaram essa maquinaria até às estâncias das curvas elípticas; ao provarem a existência da relação, Wiles e Taylor confirmaram expectativas que porventura conduzirão a soluções de vulto noutros campos.

Como Wiles observou, o que Frey, Ribet e Serre conseguiram foi *combinar algo de indiscutivelmente importante com algo que tinha um tremendo apelo histórico,* cabendo ao UTF um lugar secundário. Por mais encantador que o UTF tenha sido (e três séculos de esforços devotados ao seu ataque são prova suficiente do fascínio que exerceu), há questões de muito maior envergadura na ribalta.

Para além do último teorema

Tradicionalmente, a principal barreira à análise diofantina tem sido, como já se disse, o facto de os matemáticos resolverem cada problema através de uma abordagem casuística. Desconhece-se uma teoria unificadora susceptível de ligar diferentes problemas. Parece agora que tal teoria está prestes a surgir. A chave é a denominada *conjectura ABC,* formulada em meados de 1980 pelo matemático francês Joseph Oesterlé, da Universidade de Paris VI, e pelo matemático inglês David W. Masser, do Instituto Matemático da Universidade de Basileia, na Suíça. Se se provar a veracidade da conjectura ABC, haverá a possibilidade de *traduzir* um número infinito de equações diofantinas num só enunciado matemático, abrangendo as equações da maioria dos problemas clássicos em três variáveis, incluindo o último teorema de Fermat.

A *conjectura ABC* é simples de enunciar, como muitos problemas em teoria dos números, e pode ser compreendida mesmo por não matemáticos. Recorre apenas a um novo conceito, o de *número livre de quadrados.*

Um inteiro diz-se livre de quadrados quando não é divisível pelo quadrado de qualquer número. Os números 15 e 17 são livres de quadrados, mas 16 e 18 não o são, pois são divisíveis, respectivamente, pelo quadrado de 2 e de 3.

Mais uma definição: *a parte livre de quadrados de um inteiro n* — notação sqp(n) — é o maior número livre de quadrados que pode formar-se por multiplicação de factores de n. Assim, sqp(15) é 15; sqp(16) é 2; sqp(17) é 17; sqp(18) é 6. Em geral, quando n é livre de quadrados, sqp(n) é precisamente n. De outro modo, sqp(n) é aquilo que fica de n após terem sido eliminadas as potências dos factores que criam quadrados. Ou ainda, sqp(n) é o produto dos números primos distintos que dividem n. Mais dois exemplos:

$$\mathrm{sqp}(9) = \mathrm{sqp}(3^2) = 3$$
$$\mathrm{sqp}(1400) = \mathrm{sqp}(2^3 \times 5^2 \times 7) = 2 \times 5 \times 7 = 70$$

A conjectura *ABC* diz respeito a pares de inteiros sem factores comuns (inteiros primos entre si). Sejam A e B esses inteiros e C a respectiva soma. Por exemplo, se $A = 3$ e $B = 7$, então $C = 10$ e sqp(ABC) é $3 \times 7 \times 10$, ou seja 210. Ensaiando números ao acaso, verifica-se que, frequentemente, sqp(ABC) é maior do que C — por outras palavras, sqp(ABC)/C é maior do que 1. Porém, não é este o caso geral. Por exemplo:

Se A é 1 e B é 8, então $C = 1 + 8 = 9$ e $\mathrm{sqp}(ABC)/C = \mathrm{sqp}(1 \times 2^3 \times 3^2)/9 = (1 \times 2 \times 3)/9 = 6/9 = 2/3$.

Se A é 3 e B é 125, então $C = 3 + 125 = 128$ e $\mathrm{sqp}(ABC)/C = \mathrm{sqp}(3 \times 5^3 \times 2^7)/128 = (3 \times 5 \times 2)/2^7 = 15/64$.

Se A é 1 e B é 512, então $C = 1 + 512 = 513$ e $\mathrm{sqp}(ABC)/C = \mathrm{sqp}(1 \times 2^9 \times 3^3 \times 19)/513 = (1 \times 2 \times 3 \times 19)/(3^3 \times 19) = 2/9$.

Masser demonstrou que a razão sqp(ABC)/C pode tornar-se arbitrariamente pequena. Isto é, escolhendo um número maior do que zero, por menor que seja, então entre a infinidade de inteiros positivos há números A e B para os quais sqp(ABC)/C é menor do que o referido número. Surpreendentemente, parece que, mudando a expressão ligeiramente, o enunciado de Masser deixa de ser válido.

A conjectura ABC *afirma que* $[\mathrm{sqp}(ABC)]^h/C$ *atinge (de facto) um valor mínimo quando* h *é qualquer número maior do que 1* (mesmo um número como 1,000 000 0001, que é apenas ligeirissimamente maior do que 1).

O que a conjectura ABC tem de notável é permitir reformular uma infinidade de problemas diofantinos e, se for verdadeira, resolvê-los. Por exemplo, pode mostrar-se por redução ao absurdo que o último teorema de Fermat resulta dela como se segue (esta demonstração pode ser omitida sem prejuízo da compreensão do texto).

Suponhamos que o último teorema de Fermat é falso, isto é, existem inteiros x, y, z e k (com k maior do que 2) tais que $x^k + y^k = z^k$.

Nada nos impede de supormos que x^k e y^k não têm factores comuns. (Se tivessem, poderíamos dividir cada termo da equação por esses factores e obter uma equação equivalente sem factores comuns.)

Simplifiquemos agora a equação fazendo x^k igual a A, y^k igual a B e z^k igual a C, de modo que a equação de Fermat se transforma em $A + B = C$.

De acordo com a conjectura ABC, para qualquer valor de n maior do que 1, $[\text{sqp}(ABC)]^n/C$ deve ser superior a determinado valor mínimo. Suponhamos que n é 2 e que o mínimo referido é 1 (valores que o computador declara realistas para A e B dentro da casa dos milhares). Isto é, $[\text{sqp}(ABC)]^2/C$ é sempre maior do que 1.

Ora, $[\text{sqp}(ABC)]$ é outro modo de escrever $\text{sqp}(x^k y^k z^k)$, que, pela definição da função parte livre de quadrado, deve ser menor ou igual a xyz. E, porque x e y são menores ou iguais a z, xyz é menor do que z^3. Assim, $\text{sqp}(ABC)$ é menor do que z^3, de modo que $[\text{sqp}(ABC)]^2/C$ é menor do que $(z^3)^2/C$. Este, por sua vez, é o mesmo que z^6/z^k, ou $z^{(6-k)}$.

Sendo a conjectura ABC verdadeira, podemos supor que $[\text{sqp}(ABC)]^2/C$ é maior do que 1, sendo, assim, $z^{(6-k)}$ também maior do que 1. Mas isso é uma contradição para qualquer inteiro k maior do que 5. O único modo de ultrapassar a contradição é abandonar a hipótese de o UTF ser falso. E, assim (admitindo novamente a veracidade da conjectura ABC), o UTF é necessariamente verdadeiro.

Repetindo o argumento para um menor valor de n, chega-se a uma contradição para qualquer inteiro k maior do que 2. E deste modo se prova o último teorema de Fermat.

A conjectura ABC é o problema mais importante da análise diofantina por resolver. E, mais do que utilitário, é um problema belo. Como diz o matemático Goldfeld:

> Ver tantos problemas diofantinos inesperadamente encerrados numa única equação dá-nos a sensação de que todas as subdisciplinas da matemática são aspectos de uma unidade singular subjacente e de que no seu cerne está pura linguagem. Não admira que os matemáticos estejam tão

profundamente empenhados em prová-la — como alpinistas no sopé de um rochedo íngreme que exploram linha a linha minúsculas frestas na esperança de que uma delas lhes ofereça a possibilidade de seguirem o percurso até ao topo. Neste caso, as frestas sobre o rochedo são enunciados matemáticos equivalentes à conjectura *ABC*, cada um dos quais poderia conduzir à prova pretendida.

A curva de Frey

No domínio das curvas elípticas, uma avenida promissora de investigação centra-se numa certa curva elíptica, chamada *curva de Frey* (devida a Gerhard Frey). A curva de Frey é definida pela equação

$$y^2 = x(x - A)(x + B)$$

onde A e B são inteiros sem factores comuns.

No estudo da curva, uma das primeiras coisas a fazer é calcular um número chamado *discriminante*, o qual dá informação importante acerca da forma da curva, o número de possíveis soluções da equação e, onde, no reino dos números reais e complexos, devem encontrar-se as soluções.

Como é bem conhecido, $b^2 - 4ac$ é o discriminante da expressão quadrática geral $ax^2 + bx + c$. Para a curva de Frey, o discriminante assume uma forma particularmente simples:

$$(ABC)^2$$

onde C é igual a A mais B — uma expressão semelhante à que aparece na conjectura *ABC*. O discriminante da curva de Frey pode ser a chave da conjectura *ABC*.

Para entendermos porquê recordemos como Shimura, Taniyama e Weil trouxeram a maquinaria dos movimentos rígidos para a teoria das curvas elípticas, propondo a relação de cada curva elíptica com coeficientes inteiros com um conjunto de movimentos rígidos no espaço. Nas fórmulas que descrevem os movimentos rígidos, cada movimento rígido é governado por um número crucial N chamado *condutor*. A definição exacta de condutor é técnica e não interessa aqui, antes importando algo que Frey encontrou acerca dele. Mostrou que o condutor da curva de Frey é, essencialmente, a parte livre de quadrados do discriminante:

$$N = \mathrm{sqp}[(ABC)^2]$$

E, obviamente, a parte livre de quadrados de $(ABC)^2$ é a mesma que a de ABC.

Atentemos de novo na conjectura ABC. O que afirma (no hipotético) é que, se o número n é maior do que 1, $\mathrm{sqp}[(ABC)^n]/C$ tem um limite inferior maior do que zero. Graças à descoberta de Frey, desenha-se agora a possibilidade de demonstração desta conjectura a partir de condutores, discriminantes e tudo aquilo de que atrás se falou.

Voltemos à conjectura STW, provada para curvas elípticas semiestáveis. O teorema de Wiles-Taylor diz que, sendo M e N inteiros não nulos, primos entre si, tais que $MN(M-N)$ seja divisível por 16 (esta condição garante a semiestabilidade), então a curva elíptica $y^2 = x(x - M)(x + N)$ pode ser parametrizada por funções modulares.

Consideremos a curva de Frey definida pela equação

$$y^2 = x(x - A^n)(x + B^n)$$

onde A^n e B^n são inteiros que satisfazem a equação de Fermat $A^n + B^n = C^n$. É claro que, se o UTF for falso, esta curva de Frey existirá. Suponhamos então que o UTF é falso. Apliquemos o teorema de Wiles-Taylor a esta curva elíptica, tomando $M = -A^n$, $N = B^n$. Mostremos que as condições do teorema de Wiles-Taylor são satisfeitas. Com efeito, temos

$$M - N = A^n + B^n = C^n \quad MN(M - N) = -A^nB^nC^n$$

Provemos que este número é um múltiplo de 16. Ora, pelo menos um dos inteiros A, B e C deve ser par, pois, sendo A e B ímpares, C^n, como soma de dois ímpares, é par, o que implica que C é par. Podemos supor $n \geq 5$, já que o UTF foi provado para valores inferiores. Mas, como a quinta potência, ou potências de ordem superior a esta, de um número par são divisíveis por $2^5 = 32$, o número $-A^nB^nC^n$ é um múltiplo de 32, logo seguramente de 16. Temos, pois, que a curva de Frey satisfaz as hipóteses do teorema de Wiles-Taylor, sendo parametrizável por funções modulares.

Mas isto contradiz os resultados de Ribet que estabelecem a impossibilidade de tal parametrização. Portanto, absurdo! Devemos então abandonar a hipótese de o UTF ser falso.

Códigos secretos

Se a conjectura *ABC* for provada, os matemáticos encontrar-se-ão perante uma cornucópia de soluções de problemas muito antigos. O interesse de alguns desses problemas é mais do que teórico. Ora muitos métodos usados para garantir a segurança do correio electrónico e de outras transacções computorizadas apoiam-se fortemente na teoria dos números. Os programadores procuram desenvolver cifras baseadas em problemas de aritmética de solução demorada. Por exemplo, uma técnica muito popular apoia-se na dificuldade de determinar todos os factores primos de um número muito grande.

Em princípio, deveria ser também fácil criar uma cifra baseada na dificuldade de resolução de problemas na análise diofantina. Um dos principais obstáculos é a barreira da solubilidade: o número de variáveis acima do qual uma equação diofantina se torna imune ao ataque. Qualquer cifra baseada numa equação com esse número de variáveis seria absolutamente segura. Mas onde está o patamar? Como anteriormente observámos, apenas sabemos que, provavelmente, estará entre três e nove variáveis. Com as velocidades de processamento actuais e as previsíveis no futuro, uma cifra de nove variáveis é impraticavelmente lenta, mesmo para os mais velozes computadores. No entanto, uma cifra de quatro variáveis seria simultaneamente prática e de extrema utilidade.

Nota. — Este capítulo inspira-se, em alguns pontos, no artigo de Dorian Goldfeld intitulado «Beyond the last theorem», publicado na revista *The Sciences*, no volume de Março-Abril de 1996.

2
Os primórdios da matemática

> Leuconoé, não perguntes, desgraça seria sabê-lo, que sorte te reservam os números babilónicos...
>
> HORÁCIO

Antiguidade oriental

As origens da matemática são mais remotas do que as mais antigas civilizações da história. As preocupações de ordem geométrica denotadas pelo homem pré-histórico, quer na construção de templos e monumentos funerários, quer na decoração da sua cerâmica, apontam no sentido da existência de uma *matemática* precoce. As primeiras concepções de número e forma remontam ao Paleolítico superior, como provam as pinturas parietais dos homens das cavernas.

Identificar uma origem rigorosa da matemática no tempo e no espaço é entrar nos domínios do conjectural. Não é possível resolver esta questão numa base científica rigorosa.

Os primeiros documentos escritos datam do 4.º milénio antes de Cristo. Coevos da escrita, a invenção da roda e o uso dos metais são duas outras conquistas culturais da humanidade igualmente notáveis.

As civilizações caracterizadas pelo uso dos metais floresceram nos vales dos grandes rios no Egipto, Mesopotâmia, Índia e China. São por isso chamadas *civilizações potâmicas* (o elemento *potámos* refere-se a rios, Potâmides são as deusas dos rios). Um pouco antes do 4.º milénio antes de Cristo já era utilizada uma forma primitiva de escrita nos vales da Mesopotâmia e do Nilo. Destas civilizações prevaleceram os mais antigos escritos matemáticos conhecidos.

As cosmologias da Antiguidade oriental, designação que compreende as civilizações do Egipto e da Mesopotâmia, dão grande importância à água.

A cosmologia da Mesopotâmia *(terra entre dois rios)* deriva das cosmologias de Eridu e de Nippur.

Na cosmologia de Eridu, a água é a origem de tudo o que existe. O mundo provém do mar e é por este rodeado, e o deus Sol apascenta o seu rebanho para além dos oceanos.

Na cosmologia de Nippur, o mundo é uma montanha e os céus uma abóbada com fundações no oceano. Acima estão as águas superiores, mais além moram os deuses. Ali fica a *casa iluminada pelo Sol;* o Sol sai todas as manhãs por uma porta, regressando à tarde e entrando através de outra porta.

A cosmologia egípcia é grandemente inspirada pelo Nilo, a fonte de vida e de riqueza do reino. A Terra é uma caixa, orientada, tal como o rio, de norte para sul. O céu é o tecto, sustentado por quatro montes nos pontos cardeais. Dele estão suspensas as estrelas ou então são carregadas por divindades.

Que saberes, no domínio da matemática, revelam os escritos destas civilizações?

Os hieróglifos do Egipto

O historiador grego Heródoto situava no Egipto as origens da geometria, fruto da necessidade prática de redimensionar a Terra após cada inundação anual do Nilo.

Aristóteles tinha uma concepção alternativa à concepção utilitarista de Heródoto. Defendia que a geometria nascera do ócio da classe sacerdotal egípcia para entretenimento e lazer. Tanto uma teoria como a outra contam com argumentos de suporte e têm seguidores e opositores.

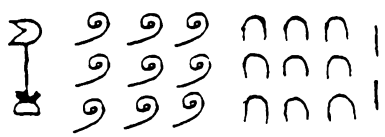
O papiro de Ahmes (ou de Rhind), datado de cerca de 1650 a. C., com 85 problemas, e o papiro de Golonishev (ou de Moscovo), com 25 problemas e talvez dois séculos mais antigo, são as principais fontes da matemática egípcia. Os documentos indicam que, durante a história do antigo Egipto, a matemática se manteve em estado de estagnação durante alguns milénios, sem conhecer progressos significativos ou mudanças assinaláveis. O preceituário de Ahmes (nome do escriba que escreveu o papiro e lhe deu o nome) é o dos seus antepassados e o dos seus sucessores. É provável que parte daquele saber provenha de Imhotep, o lendário médico do faraó Zoser que superintendeu à construção da sua pirâmide por volta de 3000 anos antes de Cristo.

O papiro de Ahmes mede cerca de 30 cm de largura por 5 m de comprimento. No começo, o escriba escreve que nele fornecerá *um estudo completo e minucioso de todas as coisas visíveis... e o conhecimento de todos os segredos.* Encontra-se depositado no British Museum, em Londres, sendo também denominado *papiro de Rhind* em tributo ao arqueólogo que o descobriu. Contém uma lista de problemas práticos (sobre pães, cerveja, áreas, juros) e o tema central são técnicas de cálculo, por vezes extremamente complexas.

O sistema de numeração egípcio, decimal, era primitivo, com símbolos diferentes para as sucessivas potências de 10. Por exemplo, o número 100 era representado por *uma corda enrolada* e o 1000 por uma flor de lótus, espécie muito abundante nas margens do Nilo. Uma divindade em posição votiva para as estrelas representa 1 milhão, um número astronomicamente grande.

1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000
						
barra	cesto?	corda	flor de lótus	dedo	girino	divindade

A operação fundamental dos Egípcios é a adição, que se confunde com o acto de escrita. O escriba egípcio escreveria 1992 da forma seguinte:



A multiplicação e a divisão são efectuadas por *duplicações* sucessivas. O papiro de Rhind mostra como calcular 12 × 12 [multiplica 12 por 2, 24, multiplica de novo por 2, 48 (4 × 12), duplica novamente, 96 (8 × 12); visto que 4 + 8 = 12, o resultado é 48 + 96 = 144] (v. justificação do algoritmo no capítulo «Passatempos destes e de outros tempos» e compare com a multiplicação russa).

As técnicas da divisão derivam das da multiplicação. Dividir um inteiro m por um inteiro n (não nulo) é o mesmo que multiplicar m pelo inverso de n. Como a multiplicação se efectua por duplicações sucessivas, o que há a saber é como duplicar uma fracção do tipo $\frac{1}{n}$.

Para dividir 45 por 9, Ahmes dá a seguinte instrução: *calcular com 9 até atingir 45.* Significa isto efectuar 1 × 9 = 9, 2 × 9 = 18, 4 × 9 = 36 e, assim, 1 × 9 + 4 × 9 = (1 + 4) × 9 = 9 + 36 = 45. O número procurado é 1 + 4 = 5. Quando os números não têm divisão exacta, o problema é mais complicado (O problema 24 do papiro de Rhind versa esta questão).

Além dos inteiros, os Egípcios tinham um universo de fracções, o qual consistia essencialmente em fracções unitárias (isto é, com numerador 1). Dispunham de símbolos especiais para as fracções $\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$ e representavam as fracções na forma de uma *boca* (sinal ovalado) sobre o número do denominador (porventura numa alusão à divisão de alimentos). O escriba escreveria $\frac{2}{7}$ na forma

o que corresponderia a

$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

e ao uso da identidade

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{\frac{n+1}{2}}+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Os Egípcios usavam métodos engenhosos e muito complicados para efectuarem os cálculos. No papiro de Rhind existe uma tabela de duplicação de fracções unitárias com denominadores ímpares até 101.

O modo egípcio de operar com fracções foi usado durante milhares de anos e praticado na Idade Média. As decomposições finitas de fracções teriam reforçado o gosto deste povo pela exactidão e pelo rigor.

A escrita hieroglífica dos números dos primeiros documentos permanece sem mudança durante os três milénios que a civilização compreende. (Observe-se que havia três tipos de escrita, cursiva, hierática e demótica.) De um modo geral, os saberes matemáticos não apresentam evolução.

Que factores explicarão a estagnação da matemática no Egipto? O carácter fechado da classe detentora do saber e o facto de esta civilização se entregar desmedidamente ao culto do além e da morte costumam ser apontados como propiciadores desta realidade.

A história começa na Suméria

Poderemos afirmar que a história da escrita dos números começa na Suméria, entre o Tigre e o Eufrates?

Uma longa cadeia de eventos, ainda não totalmente compreendida, levou os escribas proto-sumérios do quarto milénio antes de Cristo à adopção de um sistema híbrido de numeração baseado numa variedade de unidades de medida e nos números 2, 3, 6 ou 10. Na Mesopotâmia era utilizado o sistema de numeração sexagesimal (base 60). Crê-se que a preferência por este sistema se prende com vantagens para os cálculos astronómicos, muito importantes para esta civilização. (A hora e o grau angular são 60 minutos; 60 admite uma grande gama de divisores...) Numa reminiscência, mantemos ainda agora o uso da base 60 na medida do tempo e dos ângulos.

A escrita desta civilização era cuneiforme. Os escribas gravavam com cunhas tabuinhas de argila, depois secas ao sol. Nas bibliotecas das Universidades da Columbia, Pensilvânia e Yale encontram-se depositadas três grandes colecções de tabuinhas de argila cunhadas com estiletes.

Até 59 a numeração mesopotâmica segue as mesmas linhas do princípio hieroglífico egípcio de repetição de símbolos das unidades e dezenas. Acima deste número, os sistemas das duas civilizações divergem de modo assinalável.

O desenvolvimento gradual da escrita conduziu à escrita cuneiforme, usando apenas o estilete vertical e oblíquo para representar os dígitos. Os dois símbolos de que dispunham para unidades e dezenas bastavam para representar qualquer inteiro: os valores variavam consoante as posições relativas que ocupavam no número. O estilete vertical representava todas as potências de 60, positivas ou negativas, e o estilete oblíquo valores conforme o esquema que se segue.

1	10	60	600	3600	36 000
					
pequeno estilete vertical	pequeno estilete oblíquo	grande estilete vertical	grande estilete oblíquo	estilete vertical muito grande	estilete oblíquo muito grande

O número 1992 escrever-se-ia:

$$3 \times 60 \times 10 + 3 \times 60 + 1 \times 10 + 2 \times 1$$

Esta expressão seria equivalente a

$$30 \times 60^3 + 3 \times 60^2 + 10 \times 60 + 2 \times 1$$

ou, não tendo ainda um símbolo *zero,*

$$30 \times 60^4 + 3 \times 60^3 + 10 \times 60 + 2 \times 60^{-1}$$

ou, em geral,

$$30 \times 60^p + 3 \times 60^q + 10 \times 60^r + 2 \times 60^s$$

onde p, q, r e s são inteiros, positivos ou negativos, por ordem decrescente. (Subentendia-se como zero um espaço «mais» vazio entre os caracteres, o que tornava a leitura do número algo subjectiva.)

Os Babilónios usavam o sistema de *numeração posicional,* o que representa um grande avanço sobre o sistema de repetição egípcio. Até onde podiam ir? A resposta a esta pergunta confere aos Babilónios a autoria de uma das maiores invenções da matemática, o sistema posicional de numeração.

O que é um sistema de numeração posicional? No nosso sistema decimal (sistema *hindu-arábico*), os dez dígitos 0, 1, ..., 9 designam os dez primeiros inteiros positivos. No número 333, o valor do dígito 3 depende da *posição* que este ocupa no lugar das unidades, das dezenas e das centenas. Neste sistema, um pequeno número de símbolos permite representar todos os números, grandes ou pequenos. A invenção da notação posicional é tributada aos Sumérios ou aos Babilónios.

O sistema decimal foi desenvolvido pelos Hindus e introduzido na Europa medieval pelos mercadores de Itália, que com ele tomaram contacto através dos Árabes. Nos sistemas antigos de repetição, como o romano, os cálculos revelavam-se complicados e só ao alcance de especialistas.

A álgebra egípcia não ia além da resolução de equações lineares. (Dispunha de um hieróglifo para a incógnita, o *aha*, pelo que a álgebra é conhecida por *cálculo do aha.*) As realizações dos povos da Mesopotâmia no domínio da álgebra são admiráveis. Estes antigos sabiam resolver equações quadráticas, conheciam o teorema de Pitágoras e determinavam ternos pitagóricos [ternos de inteiros (x, y, z) que verificavam a equação $x^2 + y^2 = z^2$]. Eram hábeis na descoberta de processos algorítmicos. Conheciam, por exemplo, um algoritmo para extracção da raiz quadrada tão simples quanto eficiente. Mas a introdução do zero no seu sistema de numeração é uma conquista relativamente tardia, datada por altura das conquistas de Alexandre Magno da Macedónia (cerca de 332 a. C.). A famosa tabuinha Plimpton 322 revela factos relevantes sobre os saberes matemáticos desta civilização.

Por vezes, a aproximação a π é tomada como índice de avanço civilizacional. Este parâmetro, só por si, não é fidedigno. O valor de π dos Babilónios era 3, aproximação muito grosseira em relação à dos Egípcios, cuja civilização era matematicamente menos avançada do que a daqueles.

O problema 48 do papiro de Rhind dá uma ideia de como era calculada a área do círculo. A partir de um quadrado de 9 unidades de lado dividido em três partes iguais, o escriba constrói um octógono, suprimindo os quatro triângulos isósceles dos cantos, cada um medindo $4\frac{1}{2}$ unidades. A área do octógono não difere grandemente da área do círculo inscrito no quadrado, que é de 63 unidades. Por outro lado, não está longe da área do quadrado de 8 unidades de lado.

A matemática na Antiguidade oriental era essencialmente um conjunto de saberes práticos com o objectivo de facilitar a administração das colheitas, a cobrança de impostos, os problemas de heranças, a feitura do calendário. Era sobretudo de natureza prática, sem procedimentos teóricos, dedução ou tratamentos genéricos. As fontes mostram colecções de problemas, análises casuísticas de questões directamente inspiradas na vida quotidiana, sem o carácter abstracto que caracteriza a matemática.

Os lendários matemáticos da Jónia

As civilizações potâmicas dos vales do Nilo, do Tigre e do Eufrates vão declinando à medida que o bronze vai sendo substituído pelo ferro. Entretanto, outras civilizações florescem nas costas do Mediterrâneo e ao declínio de umas sucede o apogeu de outras. Para evidenciar esta mudança de centro geográfico das civilizações com maior supremacia dos vales dos rios para a bacia do Mediterrâneo é costume designar o período compreendido entre 800 a. C. e 800 da nossa era por época talássica (o termo deriva do grego *talassos*, que significa mar).

O tempo e a história fluem, os eventos sucedem-se. A civilização helénica, cujos alvores se situam cerca do 2.° milénio antes de Cristo, bebe das fontes egípcias e mesopotâmicas.

A realização dos primeiros Jogos Olímpicos em 776 a. C. marca o advento da cultura helénica. Vêm à luz tesouros imperecíveis da literatura, nomeadamente os poemas homéricos (a *Odisseia* e a *Ilíada*), *Os Trabalhos e os Dias* e a *Teogonia*, obras atribuídas, respectivamente, a Homero e a Hesíodo. Para alguns estudiosos, a historicidade destas figuras é questionável, mas essa polémica cai fora do âmbito deste livro.

No século VI a. C. surgem na matemática dois vultos com certas analogias a Homero e Hesíodo: Tales e Pitágoras. São figuras nebulosas com uma aura de lenda em redor delas e de quem nenhuma obra sobreviveu, se acaso chegou a ser composta. Os primeiros relatos da história da matemática grega, entretanto perdidos, atribuíam-lhes grande número de descobertas, contribuindo para firmar uma tradição consistente neste sentido. Quanto a Homero e Hesíodo, segundo alguns defendem, teriam dado forma escrita a textos transmitidos oralmente há gerações e gerações, não lhes cabendo propriamente o papel de criadores.

A matemática floresceu na atmosfera de racionalidade da Jónia, na costa da Anatólia, quando as perguntas *como?* e *porquê?* se tornaram irrecusáveis. Tales, oriundo de Mileto, na Jónia, é, segundo Aristóteles, o primeiro filósofo grego, fundador da filosofia grega e da filosofia ocidental. Tradicionalmente, atribui-se-lhe a cosmologia natural segundo a qual tudo provém da água. Pitágoras, natural de Samos, uma ilha do Dodecaneso pouco distante de Mileto, é um filósofo, matemático e místico lendário.

Tales de Mileto

> [...] [Tales] descobriu muitas proposições e instruiu os seus sucessores nos princípios subjacentes a muitas outras, o seu modo de ataque em muitos casos era mais geral, noutros mais empírico.
>
> Proclo, in *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides*

Tales (624 a. C.-548 a. C.) é um dos *sete sages da Antiguidade* que a tradição venera. O que é um sage? Para Diógenes Laércio, um sage não é só um sábio, pois o que o caracteriza não é só o que sabe, mas *como* sabe e sobretudo *como* vive.

O historiador Heródoto refere Tales como tendo previsto o eclipse solar de 585 a. C., presságio terrível, pois, se *o Sol desaparece do céu ao meio-dia, já nada resta neste mundo que não possa acontecer.* Tales, como mercador, teria, presumivelmente, viajado até ao Egipto e à Babilónia, onde apreendeu as técnicas astronómicas destas civilizações.

Tales inspirou várias histórias. Uma retrata-o como distraído contemplador das estrelas que, por descuidar o que lhe ia sob os pés, caiu inadvertidamente num poço. Outra refere que Tales, tendo previsto um ano farto de azeitona, comprou todos os lagares de azeite da região. Subitamente enriquecido, ter-se-ia despojado da fortuna, por ser seu único objectivo mostrar como podiam controlar-se os preços de mercado.

A tradição aponta a Tales os seguintes feitos:

— Ensino dos pilotos a guiarem-se pela Ursa Menor, em lugar da Ursa Maior, como faziam os Fenícios;
— Cálculos para desviar um rio e, assim, dar passagem a um exército;
— Determinação da altura das grandes pirâmides, procurando a hora em que o comprimento da sombra coincide com a altura (Plínio, Plutarco e Diógenes Laércio fazem alusão a este facto);

— «Demonstração» de que um diâmetro divide ao meio um círculo;
— Estabelecimento da propriedade de os ângulos da base de um triângulo isósceles serem geometricamente iguais.

Eudemo de Rodes, discípulo de Aristóteles (viveu cerca de 320 a. C.), escreveu uma história da matemática grega que se perdeu e da qual existia um sumário também desaparecido. Desse sumário foi extraída informação depois incorporada pelo filósofo neoplatónico Proclo (410--485) no começo da sua obra *Comentário ao Primeiro Livro dos Elementos de Euclides.* Aqui Proclo atribui a Tales as seguintes proposições:

— Os ângulos verticalmente opostos são iguais;
— Dois triângulos com um lado e os dois ângulos a ele adjacentes respectivamente iguais são iguais. (Neste facto basearia Tales a sua técnica de medição da distância de um barco à terra.)

Diógenes Laércio refere que Tales sabia inscrever no círculo um triângulo rectângulo, enquantro outros defendem ser esta uma das muitas descobertas de Pitágoras.

Tales é, de facto, o primeiro vulto na história da humanidade a quem são atribuídas descobertas específicas. Por isso merece o epíteto de *primeiro matemático.* A seguir a Tales, Proclo refere Marumera, de quem nada se sabe em concreto, mas que, a dar crédito a esta fonte, terá sido um importante geómetra. Os filósofos Anaximandro e Anaxímenes são considerados discípulos de Tales, bem como o próprio Pitágoras.

Pitágoras de Samos

Pitágoras é uma figura envolta em lenda. Profeta, místico, mágico, taumaturgo, herói de complexas aventuras, senhor de fantástica sabedoria, nele parece impossível separar a realidade do mito. Filósofo e sábio grego (séculos VI e V a. C.), foi contemporâneo de Lao-tse e de Confúcio. Fundou uma escola em Crotona (no Sul de Itália) em 530 a. C., conhecida por escola pitagórica. Em rigor, pouco se sabe do fundador da escola. De Pitágoras perderam-se pelo menos duas biografias, uma da autoria da mulher, sua discípula, outra de Aristóteles. Natural da ilha de Samos, não muito distante de Mileto, dali terá fugido à ditadura de Polícrates. Terá feito fabulosas viagens, do Egipto à Caldeia, da China à Índia. Terá talvez morrido em Tarento.

É difícil dilucidar as suas contribuições pessoais para a ciência de acréscimos posteriores que outros lhe fizeram. Acresce que, na sua escola, toda a descoberta era tributada ao mestre. Uma tradição atribui a Pitágoras a criação do termo *filosofia* (que significa amor à sabedoria) e outra a do termo *matemática* (ou seja, aquilo que pode ser aprendido). São-lhe creditadas várias descobertas matemáticas, entre elas relações numéricas para os intervalos musicais e a demonstração do teorema com o seu nome. Num texto de Plutarco (século I a. C.) há referências a uma famosa *figura* feita por Pitágoras. Talvez esse texto tenha induzido à atribuição a Pitágoras do *teorema* consagrado durante séculos com o seu nome, mas o qual já era conhecido na Babilónia 1200 anos antes do nascimento do próprio Pitágoras. A lenda do sacrifício de um boi (ou de 100 bois, noutra versão) como preito de gratidão aos deuses aquando da descoberta desse resultado é inverosímil, dado o vegetarianismo dos pitagóricos.

Os pitagóricos

> Todas as coisas conhecidas têm número, pois não é possível que sem número qualquer coisa possa ser concebida ou conhecida.
>
> FILOLAUS

> A geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; ao segundo podemos chamar jóia preciosa.
>
> KEPLER

A escola pitagórica era uma comunidade religiosa em que tanto a propriedade como o conhecimento eram comuns. Conservadora, envolta em inviolável secretismo, nela toda a descoberta era tributada ao mestre. O pitagorismo, mais do que uma filosofia, era um modo de vida, com normas rígidas e um código de conduta. Dava ênfase ao ascetismo moral e à purificação. Defendia a metempsicose, ou transmigração das almas, e o parentesco de todas as coisas vivas. Impunha várias restrições e regras de abstinência, das quais a mais famosa é a interdição de comer lentilhas.

A escola sofreu perseguições, fixando-se mais tarde em Metaponto. Apesar disso, o seu ideário teve largas repercussões, pela influência exercida sobre Platão e, através deste, sobre a filosofia posterior. O neopitagorismo ressurgiu com Cícero e prevaleceu, pelo menos, até ao século III da nossa era.

É difícil avaliar o real contributo dos pitagóricos para a matemática, já que nenhuma fonte escrita de então prevaleceu. Todo o conhecimento que temos provém da tradição e de comentadores muito posteriores. Assim, à lacuna de documentos relativos ao período de 600 a 450 a. C. sobrepõe-se uma tradição que atribui aos pitagóricos uma estranha amálgama de descobertas, conhecimentos sólidos e frutos da mais fantasiosa especulação. No entanto, sendo fantasias, viriam a contribuir para o desenvolvimento da ciência. É costume atribuir aos pitagóricos os dois primeiros livros dos *Elementos (Stoicheia)* de Euclides. Não existem, porém, bases históricas incontroversas que fundamentem esta tradição.

Entre os objectivos essenciais do pitagorismo estava a procura de elementos de ordem matemática e filosófica para explicar o mundo, bem como ditar um sistema moral e normas de conduta que visavam o alcance de um estado de harmonia. Um artigo de fé fundamental do pitagorismo afirmava que na essência de tudo estava o número, isto é, os inteiros *(arithmoi).* Tudo na vida humana poderia ser explicado em termos de *arithmos,* das propriedades intrínsecas dos números e suas razões.

A crise dos incomensuráveis

> A descoberta de razões incomensuráveis é atribuída a Hípaso de Metaponto. Julga-se que os pitagóricos estariam no mar na altura e que atiraram Hípaso à água por ter produzido um elemento do universo que negava a doutrina pitagórica de que todos os fenómenos no universo podem ser reduzidos a números inteiros ou suas razões.
>
> MORRIS KLINE

Os pitagóricos terão sido os primeiros a reconhecer a irracionalidade da raiz quadrada de 2, isto é, a impossibilidade de exprimir a raiz de 2 como um quociente de dois números inteiros. Reza a lenda que um dos membros da escola, Hípaso de Metaponto, foi assassinado por ter violado este segredo, o segredo da *incomensurabilidade.*

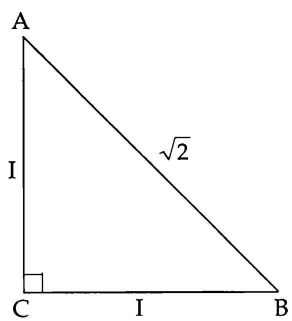
No Egipto, o mundo do número consistia em: naturais (1, 2, 3, ...), fracções unitárias (recíprocos de inteiros) e algumas fracções *especiais,* como $\frac{2}{3}$; na Babilónia, além dos naturais, todas as fracções. Na Grécia, uma fracção não era uma entidade em si, antes uma relação entre inteiros. Os números reconhecidos como tal eram os inteiros.

O conceito fundamental do pitagorismo — o número é a essência de todas as coisas — sofreu um abalo demolidor aquando da descoberta de que os números inteiros e as suas razões *(números racionais)* eram insuficientes para exprimir propriedades geométricas simples, como, por exemplo, exprimir a medida da diagonal de um quadrado, de um cubo ou de um pentágono, em termos da medida do respectivo lado. Existiam *segmentos incomensuráveis.* Existiam *números irracionais.* (Supondo que a cada segmento corresponde um número que exprime o seu comprimento em termos de outro comprimento tomado para unidade, o número correspondente a um incomensurável é um irracional.)

As circunstâncias em que a *terrível* descoberta ocorreu são incertas.

Vitrúvio, arquitecto romano contemporâneo de Augusto, atribui a Platão *o teorema da duplicação do quadrado* — ou seja, partindo de um quadrado cujo comprimento do lado é 1, encontrar um quadrado com o dobro da área.

Vitrúvio refere que esta descoberta teria provocado uma *crise* no mundo matemático grego. Porque o lado do quadrado procurado por Platão é um *número irracional,* justamente $\sqrt{2}$.



Ordinariamente, crê-se que *a crise dos incomensuráveis* foi originada pela aplicação do teorema de Pitágoras a triângulos rectângulos isósceles. Aristóteles refere uma prova da *incomensurabilidade da diagonal de um quadrado relativamente ao lado,* usando a distinção *entre par e ímpar.*

Seja, pois, um triângulo rectângulo isósceles de hipotenusa h e cateto c. Suponhamos que $\frac{h}{c}$ é o racional $\frac{p}{q}$, com p e q tomados já sem factores comuns. Tomemos o cateto do triângulo para unidade de comprimento. Como

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{h^2}{c^2} = \frac{2c^2}{c^2} \qquad (1)$$

segue-se que $p^2 = 2q^2$, donde p^2 é par e p também é par, digamos, $p = 2r$.

Então q deverá ser ímpar, pois de outro modo contrariar-se-ia a hipótese de p e q não terem factores comuns. De (1) resulta com facilidade $4r^2 = 2q^2$, ou ainda $q^2 = 2r^2$, pelo que q será par.

Atrás concluímos que q era ímpar. Como q não pode ser simultaneamente par e ímpar, chegámos a uma contradição. Deste modo prova-se a irracionalidade de $\sqrt{2}$.

A teoria dos incomensuráveis de Eudoxo, apresentada em forma geométrica nos *Elementos* de Euclides, é uma obra de arte da matemática grega. Foi muito apreciada no século XIX, após a *construção rigorosa* dos números irracionais por Dedekind, Cantor e Weierstrass.

O misticismo do número

Há divindade nos números ímpares.

SHAKESPEARE

É difícil ficar indiferente aos números, não ceder ao fascínio dos seus mistérios e segredos. O misticismo do número não é criação dos pitagóricos. Não foram estes os únicos a atribuírem propriedades masculinas aos ímpares e femininas aos pares. Muitas civilizações antigas partilharam certos aspectos da *sua* numerologia, mas os pitagóricos iam mais longe, pois baseavam nos números a sua filosofia e modo de viver. Adoravam os números e conferiam-lhes atributos.

Segundo os pitagóricos, o número 1 é o número da razão e o gerador dos números, 2 é o primeiro par, ou feminino, o número da opinião, 3 é o primeiro número verdadeiramente masculino, o da harmonia, composto de unidade e diversidade, 4 é o número da justiça ou retribuição, indicando o ajuste de contas, 5 é o número do casamento, união dos dois primeiros números verdadeiramente masculino (3) e feminino (2), 6 é o número da criação. O 10, ou *tetractys*, era o mais sagrado dos números, objecto de veneração. O pitagórico Filolau, que morreu, aproximadamente, em 390 a. C., escreveu que o 10 «era grande, todo-poderoso e gerador de tudo, o começo e o guia da vida divina e terrestre».

Essa visão do número 10 como perfeito, símbolo da saúde e da harmonia, parece ter inspirado o primeiro sistema astronómico não geocêntrico. Vejamos como.

A cosmologia pitagórica

A escola jónica não fez avanços significativos sobre a cosmologia egípcia ou babilónica. A cosmologia pitagórica apresenta originalidades. O universo pitagórico é um todo organizado harmoniosamente. Os pitagóricos defendiam que, nos seus movimentos, os corpos celestes emitiam sons harmoniosos. Mas a *música das esferas* era inaudível por a ela estarmos habituados.

A teoria da esfericidade da Terra é uma teoria pitagórica, não se sabendo, porém, se teria por base a imaginação (um apriorismo do tipo «a Terra é esférica porque a esfera é o sólido mais perfeito que existe»), ou a observação (Pitágoras, nas suas múltiplas viagens, teria naturalmente observado novas constelações, eclipses e outros indícios concludentes da esfericidade terrestre).

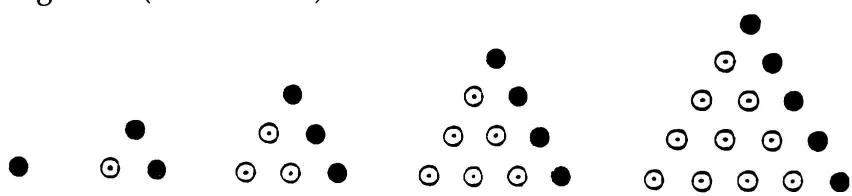
Os pitagóricos desenvolveram uma teoria segundo a qual existiam dez corpos celestes (o 10 era o número de perfeição por excelência). Filolau, membro da escola, engendrou uma teoria, conhecida por *teoria do fogo central*, segundo a qual no centro do universo havia um fogo central em torno do qual revolviam uniformemente a Terra, o Sol e a Lua e os cinco planetas conhecidos (Vénus, Mercúrio, Marte, Júpiter, Saturno). Aquele número de corpos celestes só perfazia nove, pelo que Filolau postulou a existência de um décimo corpo, a «Contraterra» (ou Antiterra), a qual era colinear com a Terra na sua revolução diária em torno do fogo central e invisível na Terra porque sempre escondida por esta. O Sol dava uma volta por ano em torno do fogo central e as estrelas eram fixas na esfera de estrelas fixas. Para Platão, a Terra é redonda e ocupa o centro do universo, com os outros corpos celestes orbitando em seu redor num conjunto de esferas que rodam em torno dos respectivos eixos (v. capítulo «A harmonia das esferas»).

Cerca de 2000 anos volvidos sobre a concepção do esquema cósmico de Filolau, Copérnico, ao tentar provar que a sua teoria não era tão revolucionária como poderia parecer, invocou em sua defesa a concepção cosmológica pitagórica.

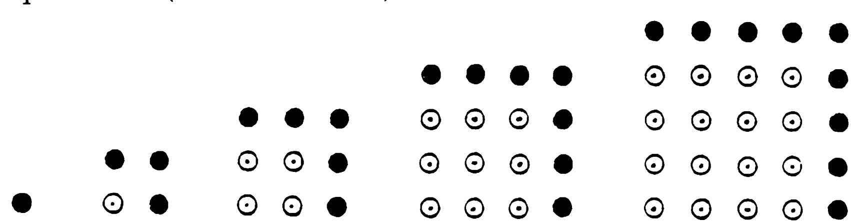
Os números figurados

De acordo com a concepção pitagórica, o número não tinha um carácter abstracto, era antes uma extensão geométrica. Era uma unidade indivisível, uma «mónada», uma espécie de átomo. O número, na sua pluralidade, era a unidade constitutiva de toda a realidade.

O *atomismo numérico* dos pitagóricos encontra-se magnificamente ilustrado na doutrina dos *números figurados.* Os números *figurados* recebiam a designação consoante os respectivos padrões figurativos: os triangulares (1 + 2 + 3 + ...)



os quadrados (1 + 3 + 5 + 7 + ...)

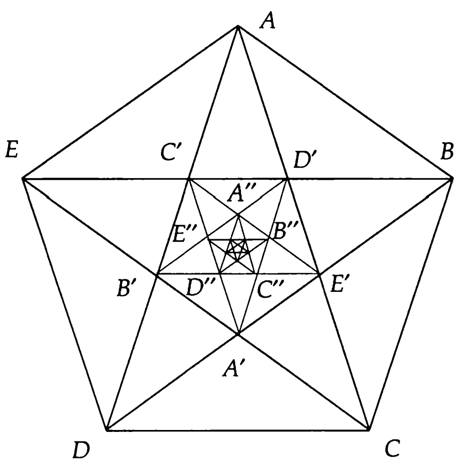


os oblongos (2 + 4 + 6 + ...) (cada um deles duplo de um triangular), os pentagonais (1 + 4 + 7 + ...), os hexagonais (1 + 5 + 9 + ...).

Os pitagóricos dispunham de uma vasta lista classificativa dos números: números perfeitos, números amicais, números deficientes... Um número diz-se *perfeito, abundante* ou *deficiente,* consoante a soma dos divisores próprios (isto é, os divisores do número diferentes do próprio número) seja igual, maior ou menor do que o número. Os dois primeiros números perfeitos são o 6 ($6 = 1 + 2 + 3$) e o 28 ($28 = 1 + 4 + 7 + 2 + 14$). Dois números a e b dizem-se *amicais* se a soma dos divisores de b for a. O primeiro par de números amicais é 220, 284.

O pentagrama pitagórico

Uma das mais fascinantes questões da geometria pitagórica está relacionada com o pentagrama. O pentagrama, ou estrela pentagonal, era o símbolo da escola pitagórica. Se considerarmos um pentágono regular *ABCDE* (v. figura) e traçarmos as suas cinco diagonais (segmentos definidos por vértices não adjacentes), essas diagonais cortam-se em pontos $A'B'C'D'E'$, que definem novo pentágono regular (prove!). Continuando este processo, o pentágono regular e a estrela pentagonal ressurgem... rumo ao *infinitamente pequeno.*



É simples verificar que os pontos $A'B'C'D'E'$ dividem as diagonais de um modo notável. De facto, cada um deles divide uma diagonal em dois segmentos desiguais, de tal modo que a razão do comprimento da diagonal para o comprimento do segmento maior é igual à razão entre o comprimento deste e o comprimento do segmento menor. Doravante denotaremos o comprimento do segmento de extremos X e Y por XY.

Como verificar que as diagonais do pentágono se dividem deste modo notável? Por exemplo, notando que o triângulo isósceles AED é semelhante ao triângulo isósceles AEC′ (dois dos seus ângulos medem $\frac{\pi}{5}$ e o terceiro $\frac{2\pi}{5}$), pelo que

$$AD : AE = AE : AC'$$

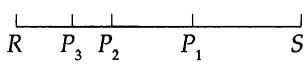
Como o triângulo EDC' é isósceles, temos $ED = C'D$. Por outro lado, como $AE = ED$, segue-se

$$AD : C'D = C'D : AC'$$

Esta divisão denomina-se *divisão, secção* ou *proporção áurea* de um segmento. Os Gregos usavam a designação *divisão de um segmento em média e extrema razão,* em geral abreviada para *secção.* Kepler chamar-lhe-ia *divina proporção.*

Existe uma corrente que defende que a crise dos incomensuráveis foi originada pela descoberta da incomensurabilidade da diagonal do pentágono relativamente ao lado (verifique esta incomensurabilidade!). Nesta eventualidade, teria sido $\sqrt{5}$ (e não $\sqrt{2}$) o número responsável pela crise.

Uma das mais importantes propriedades da secção é a autopropagação, isto é, se um ponto P_1 secciona o segmento $[R, S]$ de extremos R e S



e no maior dos segmentos marcarmos P_2, de modo que sejam iguais os comprimentos de $[R, P_2]$ e $[P_1, S]$, então P_2 *seccionará* $[R, P_1]$. Novamente, se marcarmos em $[R, P_2]$ o ponto P_3 tal que $RP_3 = P_2P_1$, o segmento $[R, P_2]$ ficará subdividido em média e extrema razão por P_3. Este procedimento pode ser indefinidamente repetido, conduzindo a segmentos de comprimento cada vez menor.

Como dividir um segmento em média e extrema razão, ou seja, como achar a secção? A construção requerida é equivalente à resolução de uma equação quadrática.

Com efeito, tomando $RS = 1$, $P_1S = x$, segue-se $RP_1 = 1 - x$. Então

$$1 : x = x : (1 - x)$$

Na proporção, o produto dos médios é igual ao produto dos extremos, pelo que se obtém a equação

$$x^2 + x - 1 = 0$$

De facto, quando pretendemos achar a secção, é $\frac{1}{x}$ que buscamos. Designemos por τ este valor. É fácil verificar a partir da anterior equação quadrática que

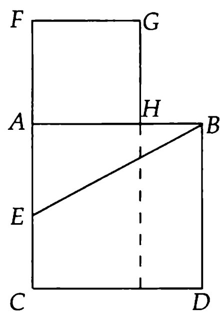
$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau}$$

A solução positiva é

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803...$$

valor com aproximação até cinco casas decimais. Este número chama-se *número de ouro.* Dedicar-lhe-emos mais alguma atenção no capítulo «A divina proporção».

Vejamos como determinar geometricamente a secção. Em alternativa ao procedimento algébrico do tipo babilónico, os pitagóricos poderão ter adoptado um procedimento geométrico semelhante ao usado por Euclides nos *Elementos*, II, 11, e VI, 30 (*Elementos*, II, 11, significa que nos referimos à proposição 11 do livro II dos *Elementos*). Para dividir [*A*, *B*] em média e extrema razão, Euclides constrói sobre o segmento de extremos *A*, *B* — [*A*, *B*] — o quadrado *ABCD*, de seguida bissecta [*A*, *C*], obtendo *E*. Agora, com centro em *E* e raio *EB*, descreve o arco *BF*, de modo que os comprimentos dos segmentos [*E*, *B*] e [*E*, *F*] sejam iguais.



Constrói depois o quadrado *AFGH.* O ponto *H* é o ponto procurado, pois

$$AB : AH = AH : HB$$

A escola eleática

O atomismo numérico dos pitagóricos, ilustrado na figuração dos números, foi atacado por Parménides (450 a. C.), fundador da escola eleática, em Eleia, colónia grega do Sul da Itália.

Parménides tem concepções opostas às de Heraclito, «o obscuro». A Heraclito atribui-se o princípio de que *não é possível banharmo-nos duas vezes na água do mesmo rio,* já que no instante seguinte muda o rio e mudamos nós. Assim sendo, se tudo se encontra em permanente devir, o que é o real? Poderemos alguma vez alcançá-lo se tudo flui?

Para Parménides, o absurdo é o devir, o movimento não existe, tem de ser ilusório. Para o movimento existir tem de existir o vazio. Ora o vazio é o nada. Dizer que o nada existe é absurdo, o nada é o não-ser e o não-ser é inconcebível. Para Parménides só existe o ser, isto é, aquilo que é. E o ser é imóvel, infinito, eterno, uno e indivisível.

Os princípios de Parménides de unidade e permanência do ser contrastavam com as ideias pitagóricas de mudança e multiplicidade. Os princípios do filósofo do ser e do não-ser, representante por excelência do espírito dicotómico grego, foram defendidos numa dialéctica arrojada por Zenão, discípulo de Parménides, que viveu entre 490 e 430 a. C.

Filósofo e matemático, Zenão era natural de Eleia, onde terá vivido a maior parte da sua vida. Opositor à doutrina pitagorista das mónadas, apresentou os célebres paradoxos com o seu nome, nomeadamente *Aquiles e a tartaruga,* a *seta voadora,* o *estádio* e a *dicotomia.*

Os paradoxos de Zenão

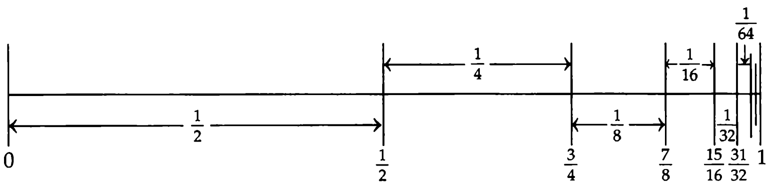
Os argumentos de Zenão visavam provar a inconsistência da infinita divisibilidade do tempo e do espaço. Para os pitagóricos, o espaço e o tempo eram constituídos por pontos e instantes. Segundo Aristóteles, *o ponto pitagórico é uma unidade tendo posição ou uma unidade considerada no* *espaço.* Ora, o espaço e o tempo têm uma propriedade mais facilmente intuível do que definível: a continuidade. Os elementos últimos da pluralidade deveriam possuir as propriedades da unidade geométrica — o ponto —, bem como as da unidade aritmética — o número.

Dificuldades relacionadas com a realidade da mudança desafiaram Zenão. Com o seu criticismo atacou concepções antigas e intuitivas. Desde sempre se acreditara que a soma de um número infinitamente grande de quantidades podia tornar-se tão grande quanto se quisesse, mesmo sendo as referidas quantidades infinitamente pequenas.

Os paradoxos de Zenão pretendiam salientar contradições existentes nos conceitos de tempo e espaço e objectar à possibilidade do movimento e da divisão espacial, combatendo uns a ideia de que o espaço e o tempo são discretos e os outros a ideia de que são contínuos.

Analisemos, em primeiro lugar, os argumentos da impossibilidade do movimento a partir da suposição de uma subdivisão infinita do espaço (e do tempo).

O *paradoxo da dicotomia* ataca a divisibilidade infinita do espaço. Antes de um objecto em movimento percorrer uma distância tem primeiro de percorrer metade dela, seguidamente um quarto (metade da metade que falta), e assim sucessivamente, num número infinito de subdivisões. O atleta que deseje realizar a corrida deve efectuar um número infinito de contactos com a pista num tempo finito, o que é impossível, pois tal significa exaurir uma quantidade infinita.



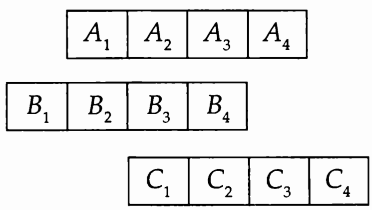
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots$$

Aquiles e a tartaruga segue uma linha idêntica. Aquiles, o mais veloz dos Gregos, disputa uma corrida com uma tartaruga, concedendo-lhe um avanço. Quem vencerá a prova? Por mais veloz que Aquiles seja na corrida e por mais vagarosa que a tartaruga seja, nunca a ultrapassará, porque, quando chegar ao ponto onde ela estava inicialmente, já ela terá avançado uma certa distância e, quando tiver percorrido esta distância, já ela terá avançado um pouco mais, e assim sucessivamente: Aquiles jamais alcançará a tartaruga!

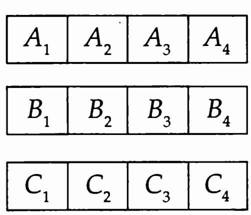
Os paradoxos da flecha e do estádio, que agora resumiremos, apontam para a impossibilidade do movimento, se admitirmos que a subdivisibilidade do tempo (e do espaço) termina em indivisíveis.

Suponhamos que o «instante» é o intervalo de tempo mínimo (ou indivisível). Uma flecha em voo está numa posição fixa num dado instante, pois ocupa um espaço determinado (igual a si própria). Mas nessa altura não se distingue de uma flecha em repouso na mesma posição. Então como sabemos que está em movimento? Uma flecha a voar está em repouso em todos os instantes; logo, o seu movimento é ilusório. O que parece absurdo aos nossos olhos pode não ser tão absurdo quanto parece, pois é mais absurdo pela razão o movimento do que pela experiência a sua realidade.

O «estádio» é mais difícil de descrever. Sejam A_1, A_2, A_3 e A_4 corpos de igual tamanho, estacionários, e B_1, B_2, B_3 e B_4 corpos do mesmo tamanho dos anteriores, mas movendo-se para a direita, de modo que cada *B* passa por um *A* num instante — o menor intervalo de tempo possível. Sejam C_1, C_2, C_3 e C_4 corpos também do mesmo tamanho que os anteriores, mas movendo-se uniformemente para a esquerda em relação aos *As,* de modo que cada *C* passa por um *A* num instante. Suponhamos que, num dado instante, os corpos ocupam as seguintes posições relativas:



Então, um instante volvido, as posições serão:



É então óbvio que C_1 terá passado por dois *Bs.* Daqui decorre a impossibilidade de o instante ser o intervalo de tempo mínimo, pois podemos tomar para nova unidade o menor intervalo de tempo que C_1 leva para passar por um B_1.

Os argumentos de Zenão mostravam que um segmento finito pode ser dividido num número infinito de pequenos segmentos, cada um deles com um comprimento finito.

Também mostravam como era difícil explicar a afirmação de que uma linha é «composta» por pontos. Provavelmente, Zenão desejaria atacar o princípio pitagórico do espaço como soma de pontos.

Os argumentos de Zenão terão influenciado decisivamente a matemática grega e foram porventura tão devastadores para o espírito grego como a descoberta dos incomensuráveis. Originalmente, nos círculos pitagóricos, os números eram representados por pedrinhas ou *cálculos,* donde deriva a palavra *calcular.* Com Euclides surge uma mudança completa. As grandezas não são associadas a números, ou pedras, mas a segmentos de recta. Nos *Elementos,* os próprios inteiros são representados por segmentos. E os Gregos passaram de uma matemática que dá ênfase ao número para uma matemática que coloca a ênfase na geometria.

Zenão não só influenciou o pensamento grego, como o pensamento de várias gerações que procuraram clarificar o conceito de infinito. A luta pela compreensão do infinito teve o ponto culminante no século XIX (v. «O infinito»).

3
Os *Elementos* de Euclides

> [...] se Deus existe, e se realmente criou o mundo, então fê-lo de acordo com Euclides [...]
>
> DOSTOIEVSKY, *Os Irmãos Karamazov*

Os Elementos

Os *Elementos* foram compostos em Alexandria em 300 a. C. por Euclides e sintetizam todo o saber matemático conhecido na época. A obra compreende 13 livros num total de 465 proposições. Os seis primeiros livros dos *Elementos* são sobre geometria plana elementar, os três seguintes sobre a teoria dos números, o livro X sobre incomensuráveis, e os três últimos sobre geometria no espaço.

Durante muito tempo circulou uma versão dos *Elementos* com quinze livros, mas sabe-se hoje que os dois últimos são apócrifos. Nenhuma versão original do texto grego chegou até nós e o que conhecemos resulta da acção de copistas, comentadores, tradutores...

Muitos dos manuscritos gregos existentes resultaram de edições comentadas de Téon de Alexandria, que viveu no século IV da nossa era.

Os *Elementos* são a obra mais influente de todos os tempos da história da matemática não só pela relevância do seu conteúdo, mas ainda porque esta obra é o exemplar mais precoce e extenso do uso do método axiomático-dedutivo na matemática.

De Euclides pouco se sabe ao certo, tão-pouco onde e quando nasceu ou se realmente existiu. Foi, provavelmente, discípulo da Academia de Platão, terá vivido em Alexandria no reinado de Ptolemeu I e lá terá fundado uma escola. O autor dos *Elementos* foi longamente confundido com Euclides de Mégara, filósofo socrático contemporâneo de Platão, que viveu cerca de 400 a. C.

Proclo, filósofo neoplatónico do século V da nossa era, escreveu os *Comentários sobre o Primeiro Livro dos Elementos de Euclides.* Esta importante obra de Proclo (410-485) contém informações preciosas sobre os *Elementos* e sobre Euclides. Segundo Proclo, Euclides, ao coligir os *Elementos,* coordenou as proposições de outros matemáticos e fez demonstrações irrefutáveis daquilo que os seus antecessores tinham demonstrado de forma descuidada.

A organização dos *Elementos* enquadra-se na concepção aristotélica, segundo a qual uma ciência demonstrativa deve assentar num elenco de primeiros princípios da teoria: *definições, noções comuns ou axiomas e postulados.* Daqui derivam todas as outras proposições por via dedutiva, observando as leis do silogismo. Os princípios são tratados como auto-evidentes, não se lhes devendo qualquer explicação, reservando-se as justificações para os teoremas, conclusões deduzidas dos princípios e cuja validade se submete a prova.

Nos *Elementos* há muitos princípios que não são explicitamente expressos, embora implicitamente admitidos (estão neste caso a continuidade da recta ou a sua infinitude). No entando, a exposição de Euclides, sobretudo se perspectivada à luz da época em que foi composta, pode considerar-se magistral.

As objecções à obra de Euclides não foram significativas até ao desenvolvimento das geometrias não euclidianas. Com a descoberta destas geometrias surgiram novos sistemas axiomáticos para a geometria euclidiana, mais longos e elaborados do que o de Euclides e tentando colmatar as suas «deficiências».

O que é um axioma?

> Nem tudo pode ser provado, já que, de outra maneira, a cadeia das provas seria interminável. Como temos de começar nalgum sítio, começamos com coisas que admitimos, mas que são indemonstráveis.
>
> ARISTÓTELES

Originariamente, o termo *axioma* significa *dignidade.* Por derivação, chamou-se depois *axioma àquilo que é digno de ser estimado, acreditado ou valorado.* Assim, na acepção mais clássica, o axioma é um princípio que, pela sua dignidade, deve considerar-se verdadeiro. Uma vez enunciado e entendido, detém em si um imperativo que obriga ao seu assentimento.

As *definições* descrevem os termos técnicos usados na exposição e, em geral, não se pressupõe que impliquem a existência dos entes descritos. Os *axiomas (ou noções comuns)* são comuns a todas as ciências e são afirmações caracterizadas pela sua indemonstrabilidade e evidência. Os *postulados* são específicos de cada ciência, a sua veracidade é admitida, mas não são necessariamente evidentes. Na Grécia antiga, alguns matemáticos designavam indistintamente axiomas e postulados, por entenderem a distinção entre uns e outros pouco clara. Donde, nos *Elementos,* o mesmo princípio aparecer como axioma ou postulado, consoante as edições da obra.

Esta terminologia tradicional sofreu, entretanto, alterações. A concepção de axioma como proposição evidente ou universalmente aceite está eivada de *intuicionismo,* não sendo unanimemente aceite. A possibilidade de escolha de diferentes postulados, originando sistemas dedutivos diferentes (como veremos a propósito do nascimento das geometrias não euclidianas), aliada à rejeição de os axiomas serem noções comuns, levou, no nosso tempo, à abolição da diferença entre axiomas e postulados. Enquanto a corrente *intuicionista* destaca a intuitividade e auto-evidência dos axiomas, a corrente *formalista* destaca a sua formalidade. A corrente formalista recusa-se a adscrever a qualquer axioma o predicado *verdadeiro,* porque um sistema lógico-dedutivo pode ser comparado a um jogo onde os axiomas são as regras do jogo.

Sistemas axiomáticos

> Devemos ser capazes de dizer em qualquer altura — em vez de pontos, linhas rectas e planos — mesas, cadeiras e canecas de cerveja.
>
> HILBERT

O estudo da matemática, em especial o da geometria, requer o entendimento da natureza dedutiva do raciocínio. Para tornarmos clara a extraordinária influência dos *Elementos* de Euclides na história da geometria e na própria concepção moderna dos sistemas dedutivos recordemos a terminologia essencial de uma axiomática.

De modo muito informal, diremos que um sistema axiomático (ou dedutivo) requer:

1. Termos não definidos (ou primitivos);
2. Termos definidos;
3. Axiomas (ou postulados);
4. Um sistema lógico;
5. Teoremas.

A inclusão de termos não definidos resulta da impossibilidade de definir todos os termos sem cair em circularidade ou em regressão infinita. Exemplos frequentes (mas não obrigatórios) de termos primitivos são «ponto», «linha», «plano»...

Os termos definidos podem ser prescindíveis, mas quase todas as axiomáticas os utilizam. Revela-se, por vezes, cómodo substituir certas frases que envolvem termos não definidos, que se repetem com frequência, por termos definidos. É, por exemplo, o caso da substituição na geometria euclidiana de «linhas que se não intersectam» por «linhas paralelas».

É claro que as definições não podem ser dadas de modo arbitrário. Para além de sujeitas às regras lógicas do sistema lógico fixado, seria, por exemplo, inaceitável definir um ângulo recto como um ângulo de 90° e depois um ângulo de 90° como recto.

Tal como para os termos, é manifestamente impossível provar todas as proposições a partir dos termos definidos e não definidos sem cair em circularidade. Assim, surgem proposições aceites sem demonstração ou justificação e que se denominam axiomas (ou postulados). É possível deduzir novas proposições, os teoremas, usando as regras de inferência de um sistema lógico (usualmente aristotélico).

Apenas as verdades expressas nos axiomas e as suas consequências logicamente deduzidas podem ser usadas nas demonstrações. Em princípio, a interpretação particular dos axiomas em termos do mundo real é irrelevante. É este o sentido da famosa citação de Hilbert transcrita no começo desta secção e que, segundo reza, foi proferida na estação do caminho de ferro de Berlim.

Consistência, completude, independência

Os axiomas de um sistema não podem ser estabelecidos arbitrariamente, mas sim de forma que o sistema seja *consistente.* Um sistema axiomático diz-se *consistente* se não existirem nele quaisquer axiomas, qualquer axioma e teorema, ou quaisquer teoremas que se contradigam mutuamente.

É essencial que um sistema axiomático seja consistente, pois, de outro modo, um sistema em que tanto um teorema como a sua negação possam ser deduzidos não tem interesse.

É difícil investigar a consistência de um sistema axiomático directamente a partir desta definição, já que teriam de ser considerados todos os possíveis teoremas. Esta dificuldade é contornada pelo recurso a modelos.

Informalmente, diremos que construir um *modelo* de uma axiomática consiste em interpretar os termos não definidos de modo que os axiomas se verifiquem em tais interpretações.

Se, no modelo, tais interpretações provierem do mundo real, o modelo diz-se *absolutamente consistente.* Neste caso, afirmações correspondentes a teoremas contraditórios conduzem a contradições no mundo real e contradições no mundo real são impossíveis.

Se, por outro lado, as interpretações provêm de outro sistema axiomático, o que se averigua com tal modelo é a *consistência relativa* de um modelo em relação a outro modelo axiomático, sendo um consistente se, e só se, o outro o for.

Entre as propriedades importantes de um sistema axiomático está a independência. Um axioma de um sistema axiomático diz-se *inde-*

pendente se não puder ser provado a partir dos outros axiomas do sistema. Se cada um dos axiomas do sistema for independente, o sistema diz-se *independente.*

É claro que um sistema independente é mais depurado e elegante, pois não há nele redundâncias.

A verificação da independência de uma axiomática é analisada por meio de modelos. A independência do axioma A num sistema S prova-se encontrando dois modelos, *um,* no qual o axioma se verifique, *outro,* no qual seja válida a sua negação. Se o sistema tiver n axiomas, há que analisar n modelos — um por axioma.

Outra propriedade que um sistema axiomático deve possuir é a *completude.* Um sistema axiomático diz-se *completo* se nele for possível provar a validade, ou não validade, de qualquer proposição que contenha termos definidos e não definidos. Ou, por outras palavras, se não for possível juntar um novo axioma independente ao sistema.

É, em geral, impossível demonstrar directamente que um sistema é completo. Contudo, se um sistema for completo, não poderão existir dois modelos essencialmente diferentes. De modo mais preciso, todos os modelos deverão ser *isomorfos* dois a dois. Dois modelos α e β de um sistema axiomático dizem-se *isomorfos* se existir uma correspondência Φ um-a-um do conjunto dos termos não definidos de α sobre os de β que preserve todas as relações.

Exemplifiquemos:

Se os termos não definidos forem «ponto», «linha» e «incidência», de acordo com esta definição, deveremos ter:

1) Para cada ponto P e cada linha l em α, $\Phi(P)$ e $\Phi(l)$ são, respectivamente, um ponto e uma linha em β;
2) Se P é *incidente* com l, então $\Phi(P)$ é *incidente* com $\Phi(l)$.

É claro que, se todos os modelos de um sistema forem isomorfos dois a dois, todos devem ter o mesmo número de pontos e linhas. Mais: se acaso fosse possível acrescentar um novo axioma independente, passaria a haver dois modelos distintos do sistema — um modelo α, onde o novo axioma é válido, e um modelo β, onde este não é válido. Os modelos α e β não podem então ser isomorfos. Logo, se todos os modelos de um sistema forem isomorfos, o sistema será necessariamente completo.

O postulado das paralelas

Os *Elementos* não têm qualquer preâmbulo, começando o primeiro livro com uma lista de vinte e três definições, das quais reproduzimos as seis primeiras e a última:

1. O ponto é o que não tem partes;
2. Uma linha é um comprimento sem largura;
3. As extremidades de uma linha são pontos;
4. Uma linha recta é uma linha que assenta igualmente com os pontos sobre ela;
5. Uma superfície é uma extensão que tem apenas comprimento e largura;
6. As extremidades de uma superfície são linhas;

...

23. Linhas paralelas são linhas que, estando no mesmo plano e sendo produzidas indefinidamente em ambas as direcções, não se encontram em qualquer das direcções.

A estas definições apontam-se algumas *deficiências,* a saber: algumas delas são demasiado vagas (pouco esclarecedoras) e nada definem (por exemplo, as definições 1, 2 e 5); objecções de circularidade a algumas definições, como 3 ou 6. No caso da definição 8 de ângulo plano:

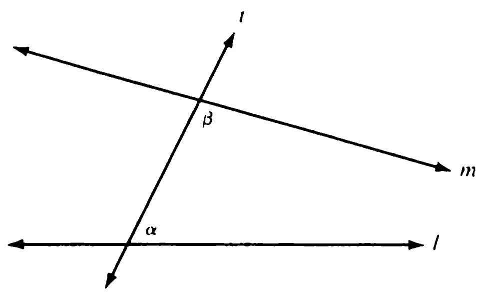
> [...] a inclinação uma em relação à outra de duas rectas de um plano que se encontram e não jazem sobre uma mesma recta.

A «inclinação» não foi previamente definida nem é mais bem conhecida do que «ângulo». As deficiências das definições — simples convenções linguísticas — devem-se sobretudo ao facto de não haver um certo número de termos primitivos (não definidos) a partir dos quais as definições sejam dadas.

A seguir às definições, Euclides fornece uma lista de cinco postulados, expressando os três primeiros a possibilidade teórica de efectuação de certas construções com «régua e compasso». Seguem-se cinco noções comuns. Aristóteles fazia distinção entre axiomas e postulados, devendo os primeiros, segundo ele, ser convincentes por eles mesmos, enquanto os segundos, menos óbvios, deviam ser objecto de assentimento (em grego, *postulare* significa pedir). Se Euclides partilhava, ou não, esta opinião, não é claro, mas modernamente (como já referimos) não se faz qualquer distinção entre axiomas e postulados.

Postulados. Seja postulado o seguinte:

1. Traçar uma linha recta de qualquer ponto a qualquer ponto;
2. Prolongar uma linha recta continuamente em linha recta;
3. Traçar uma circunferência com qualquer centro e diâmetro;
4. Todos os ângulos rectos são iguais;
5. Se uma linha recta que caia sobre duas linhas rectas faz ângulos internos de um mesmo lado menores do que dois ângulos rectos, então as duas rectas, se prolongadas indefinidamente, encontram-se num ponto daquele lado em que os ângulos são menores do que dois ângulos rectos. (Na figura, *m* e *l* intersectar-se-ão do lado direito de *t*.)



Noções comuns:

1. Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais entre si;
2. Se iguais forem somados a iguais, os totais serão iguais;
3. Se iguais forem subtraídos a iguais, os restos serão iguais;
4. Coisas que coincidem uma com a outra são iguais uma à outra;
5. O todo é maior do que a parte.

Considera-se que a quarta noção comum contém implicitamente a ideia de *movimento rígido*, a qual permitia a Euclides levar mentalmente uma figura a coincidir com outra por sobreposição.

Sabemos que nem sempre é lícito aplicar a quinta noção comum, como acontece no caso dos conjuntos infinitos (v. capítulo «O infinito»).

No contexto dos *Elementos*, Euclides tinha em mente a sua aplicação a medidas (finitas) de comprimentos de segmentos de recta, de amplitudes de ângulos, de áreas e volumes.

Críticas a Euclides

> A obra de Euclides tem sido grandemente exagerada como obra-prima da lógica.
>
> BERTRAND RUSSELL

Nos postulados 1 e 2 Euclides não garante a unicidade da recta que passa por dois pontos distintos nem a sua infinitude. Os postulados afirmam que existe, pelo menos, uma recta que passa por dois pontos e que ela não tem extremos. Nas demonstrações, Euclides usa livremente a infinitude e a unicidade. Ao estabelecer o postulado 1, Euclides assumiu tacitamente a unicidade da recta que une dois pontos. No postulado 2 não especifica até onde permite a extensão da recta. Na demonstração da proposição 16 do livro I pressupôs, implicitamente, a infinitude da linha recta. Quando postula que a linha recta pode ser continuamente prolongada, tal não implica necessariamente que essa linha tenha comprimento infinito.

Riemann, em 1854, chamou a atenção para a distinção entre linha não limitada e linha de comprimento infinito. Por exemplo, numa geometria onde se interpretem as *linhas rectas* como *círculos máximos de uma esfera* as linhas rectas podem ser continuamente prolongadas, mas têm comprimento finito (v. «Do espaço euclidiano ao espaço curvo, modelos»).

Note-se que o postulado 3 é interpretado no seu sentido literal muito limitado. O compasso euclidiano não é fixável, apenas mantém a abertura constante enquanto a ponta está sobre o papel. Assim, este postulado não permite o transporte de comprimentos. As três primeiras proposições dos *Elementos* provam a possibilidade de transporte de comprimentos com um compasso desta natureza.

Com os três primeiros postulados, Euclides assegura a existência de linhas rectas e de circunferências. Quanto à existência de pontos, assume-a tacitamente. Euclides formula tacitamente certas propriedades das figuras geométricas, não estabelecidas como postulado ou noção comum, e que não é possível deduzir a partir destes. Por isso, o seu sistema axiomático não é completo.

Uma análise das definições, postulados e noções comuns sugere as seguintes observações:

1. Embora Euclides tenha intuído a importância da inclusão de uma lista de axiomas, o mesmo não poderá dizer-se a respeito dos termos não definidos. Com efeito, parece não se ter apercebido da sua imprescindibilidade no desenvolvimento da obra;
2. Na sua lista de axiomas, Euclides distingue entre aqueles a que chama *postulados* e as *noções comuns.* Os primeiros são de natureza geométrica e os últimos comuns a toda a matemática;
3. O postulado 5 é mais extenso e *menos simples* do que os outros (e parece apelar à experiência física directa).

O postulado 5 é conhecido por *postulado das paralelas*, embora não contenha a palavra *paralela.* A razão prende-se com o facto de ser *equivalente* a várias proposições que envolvem paralelismo, como veremos na próxima secção. (Equivalente significa que o postulado 5, em conjunto com os outros postulados, implica qualquer das proposições, e vice-versa.) Cedo ocorreu a suspeita de que o postulado 5 não seria independente dos outros, mas, pelo contrário, demonstrável a partir deles e das noções comuns. O facto de não intervir em nenhuma das primeiras vinte e oito proposições dos *Elementos* terá, por sua vez, ajudado a alimentar a ideia da sua redundância no corpo dos postulados. Sendo passível de demonstração, não o provar ofendia os cânones matemáticos.

Tentativas de demonstração do postulado das paralelas

O postulado 5 desencadeou uma polémica que desafiou os maiores matemáticos durante mais de 2000 anos. Ptolemeu, Possidónio, Proclo, Agani, Alhazen e vários matemáticos árabes, Legendre, Gauss, foram alguns dos que se ocuparam da questão das paralelas. Das insistentes tentativas desenvolvidas para provar o postulado das paralelas, todas elas goradas, resultou um considerável desenvolvimento para a geometria e a matemática em geral.

Os ataques ao *postulado das paralelas* desencadearam-se segundo as seguintes linhas:

— Tentativa de prova do postulado 5 a partir dos quatro primeiros postulados e das vinte e oito primeiras proposições dos *Elementos*, as quais são independentes dele;
— Apresentação de uma nova definição de paralelas;
— Demonstração do postulado 5 a partir dos quatro primeiros postulados e de *outro postulado* mais evidente do que aquele.

Todas as tentativas desenvolvidas segundo estas linhas de ataque foram frustradas, ou porque usavam factos implícitos equivalentes ao que se pretendia provar, ou porque utilizavam proposições equivalentes ao *postulado problemático.* Incorrendo em circularidade, nada provavam. Sabemos hoje que todas as tentativas foram vãs porque é impossível provar aquilo que se propunham provar. Como haveria de mostrar-se no século XIX, não existe demonstração para o postulado das paralelas, porque ele é independente dos outros.

As seguintes proposições, *equivalentes ao postulado 5 de Euclides*, foram usadas em algumas das *tentativas de demonstração deste postulado:*

1. Por um ponto que não está sobre uma recta passa exactamente uma recta paralela à referida recta (esta proposição, devida a Playfair, é vulgarmente referida como *axioma de Playfair* e é a forma pela qual o postulado 5 é usualmente conhecido);
2. Linhas rectas paralelas à mesma linha recta são paralelas entre si;
3. A soma da medida dos ângulos de qualquer triângulo é igual à medida de dois ângulos rectos;
4. Existe um par de rectas equidistantes entre si (recorda-se que *a distância de um ponto* P *a uma recta* m é o comprimento do segmento de perpendicular de *P* a *m;* se a distância de cada ponto de uma recta *l* a uma recta *m* for constante, então *l* diz-se *equidistante* de *m*);
5. Dados três pontos não colineares, existe uma circunferência que os contém;
6. Se três ângulos de um quadrilátero forem rectos, então o quarto ângulo será também recto.

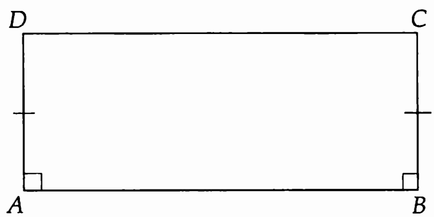
As demonstrações da equivalência do postulado 5 às formulações 2-6 encontram-se, por exemplo, no livro de Harold E. Wolfe *Introduction to Non-Euclidean Geometry* (1945). A demonstração da equivalência à formulação 1 pode encontrar-se no livro de Marvin Greenberg *Euclidean and Non-Euclidean Geometry. — Development and History.*

O insucesso do labor desenvolvido em torno do *postulado das paralelas* levou o matemático francês d'Alembert ao desabafo:

> A definição e as propriedades das linhas rectas, bem como das linhas paralelas, são o escolho e, por assim dizer, o escândalo da geometria.

Saccheri e Lambert

O jesuíta italiano Girolamo Saccheri (1667-1733) devotou a sua vida a *purificar a geometria desta mancha* (alusão ao postulado 5). Antes da morte publicou o livro *Euclides ab omni naevo vindicatus (Euclides liberto de toda a mácula),* Milão, 1733, que só viria a ser descoberto século e meio mais tarde por Beltrami. Saccheri tentou uma demonstração do *postulado* por *redução ao absurdo.* A partir da negação deste postulado e das vinte e oito primeiras proposições de Euclides tentou extrair uma contradição. Para tal, considerou um quadrilátero, hoje conhecido por *quadrilátero de Saccheri,* com os dois ângulos da base rectos e os lados laterais iguais.



Há três hipóteses possíveis para os ângulos do topo:

a) Os ângulos são *rectos;*
b) Os ângulos são *obtusos* (maiores do que um ângulo recto);
c) Os ângulos são *agudos* (menores do que um ângulo recto).

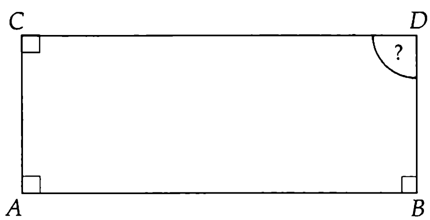
Saccheri provou que *a*) é equivalente ao postulado das paralelas. Tentou então demonstrar que tanto *b*) como *c*) conduzem a um absurdo, pelo que são falsos. É bem sucedido no que toca à hipótese do ângulo obtuso; a refutação é, nas suas próprias palavras, *tão clara como a luz do meio-dia.* Porém, sob a *hipótese inimiga do ângulo agudo,* como lhe chamou, não logra contradição alguma! Então, com base nesta *preocupante* proposição, enuncia a seguinte:

> A hipótese do ângulo agudo é falsa porque é repugnante à natureza da linha recta.

Tenta vários argumentos e, insatisfeito, expõe três demonstrações diferentes, assim chegando à proposição:

> A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa porque se destrói a si própria.

A obra de Saccheri foi criteriosamente analisada pelo alemão Klügel que, em 1763, apresentou uma dissertação onde analisa vinte e oito tentativas de demonstração do *postulado das paralelas.* Klügel expressa dúvidas sobre a demonstrabilidade daquele postulado. Johann Heinrich Lambert (1728-1777), conhecedor destes escritos, dedicou-se à intrincada questão. Trabalhou sobre um quadrilátero com três ângulos rectos (já considerado pelo matemático árabe Ibn-al-Haythan) e que pode ser obtido de um quadrilátero de Saccheri traçando a mediana.



As três hipóteses de Lambert — correspondentes às de Saccheri — são:

a) O quarto ângulo pode ser recto;
b) O quarto ângulo pode ser agudo;
c) O quarto ângulo pode ser obtuso.

A partir das hipóteses *b*) e *c*), Lambert deduz várias proposições novas. Nomeadamente, encontra o teorema:

> Nas hipóteses *b*) e *c*), a área de um triângulo plano é proporcional à diferença entre a soma dos três ângulos e π. Assim, respectivamente:
>
> $$k(\pi - A - B - C); \quad k(A + B + C - \pi)$$

Dada a semelhança com a fórmula da área de um triângulo esférico, $r^2(A + B + C - \pi)$, onde r é o raio da esfera, Lambert inclina-se a concluir que a hipótese *b*) se verifica sobre uma *superfície esférica imaginária.* Este matemático parece ter-se apercebido da possibilidade de criação de uma nova estrutura logicamente válida, mas que pouco tinha a ver com a realidade do mundo físico. Lambert não publicou em vida os seus escritos *Theorie der Parallellinien (Teoria das Linhas Paralelas),* os quais só foram editados em 1786, nove anos após a sua morte.

A história aproxima-se do epílogo. Retomá-la-emos no capítulo intitulado «Do espaço euclidiano ao espaço curvo». O leitor pode prosseguir directamente para esse capítulo.

4
O infinito

(Ser poeta...) É ter fome, é ter sede de infinito!

FLORBELA ESPANCA

Infinito, o cântaro milagroso da matemática.

PHILIP DAVIES e REUBEN HERSCH

O infinito é algo indefinido, por carecer de fim, de limite ou termo. O infinito não é nem definido nem indefinido, porque em relação a ele carece de sentido toda a referência a um fim, limite ou termo. O infinito é algo meramente potencial: está a ser, mas não é.

Transcrição de um dicionário de filosofia

Desde sempre o infinito exerceu forte atracção sobre a mente humana. O que é o infinito? O infinito é o que não é finito, o que não tem fim, o que se recria a si próprio, o que é eterno e imortal. O infinito é um conceito fundamental em matemática, um conceito omnipresente nas bibliotecas matemáticas em disciplinas tão diversas como o cálculo infinitesimal, a teoria dos conjuntos, a geometria projectiva, etc. A matemática é, para alguns, a *ciência do infinito.* Há quem creia que pelo simples facto de se acrescentar o infinito ao discurso matemático daí resulta *matemática relevante.*

Segundo Philip Davies e Reuben Hersch, o *infinito é o cântaro milagroso da matemática.* Milagroso, porque o seu conteúdo é inesgotável. Extraia-se de um conjunto infinito um objecto. Quantos objectos restam? Menos um do que inicialmente?

A matemática *pede-nos* que aceitemos o infinito. Numa apresentação formal, esse pedido é feito pela axiomatização. Devemos acreditar no infinito matemático? Que significa afirmar a existência de um conjunto infinito? A matemática usa uma linguagem com um número finito de símbolos concatenados em sequências finitas. Algumas dessas sequências exprimem factos acerca do infinito. Mas será que representam algo de verdadeiramente infinito, ou não passará tudo de um truque de linguagem, o finito *disfarçado* de infinito? Será o infinito matemático um ardil, uma mera ficção inteligente e conveniente?

A luta pela compreensão do infinito matemático começou com os paradoxos de Zenão na segunda metade do século V a. C. Infinitos argumentos foram esgrimidos para provar ou negar a sua existência, poucos foram rebatidos, antes submersos por uma avalancha de outros. (Como sugestão de leitura indicamos a obra de Bertrand Russell *Misticismo e Lógica.*) Até finais do século XIX o tratamento informal da noção de infinito conduziu a muitas imprecisões e incorrecções. Na verdade, se as quantidades finitas se comportavam de modo mais ou menos conforme com a intuição, o mesmo não sucedia com o infinito.

Imaginemos um colar com quinze contas. Se retirarmos cinco, ficamos com dez, ou seja, efectivamente menos do que à partida. Sucederá o mesmo se acaso imaginarmos um colar com um número infinito de contas? Etiquetemos as contas com um número: 1, 2, 3, 4, etc. Se retirarmos todas as contas de número par, restam-nos as de número ímpar. Ora estas são infinitas. Poderemos afirmar que ficámos com menos contas do que no início? Na verdade, se, inicialmente, tínhamos um número infinito de contas, no fim, ficámos igualmente com um número ainda infinito de contas.

O bem conhecido princípio de que *o todo é maior do que a parte* será válido a respeito do infinito? Estas considerações estão na base da distinção entre conjuntos finitos e infinitos. E serão os infinitos todos iguais ou haverá uns infinitos maiores do que outros? Por exemplo, quais serão mais abundantes: os números naturais ou as fracções? Os inteiros ou os números reais? Os pontos na letra I ou os pontos existentes num quadrado com a área desta folha de papel? Tente responder (intuitivamente) a estas questões e confronte as respostas com as conclusões dos próximos parágrafos.

O conceito de infinito é um conceito poderoso. Mas onde existe poder existe perigo. Discorrer sobre o infinito requer precauções especiais. Para lidarmos com o infinito jamais devemos deixar-nos seduzir pelo apelo a raciocínios do finito. Ao serem pensados segundo normas finitas, os conjuntos infinitos geram paradoxos. Perspectivados de modo adequado, perdem a aparência abstrusa e comportam-se de modo fascinante...

O infinito matemático numa perspectiva histórica

Como terá entrado a noção de infinito na matemática? Pela contemplação da vastidão dos desertos ou da imensidão das estrelas? É um tema aliciante que suscita as mais diversas especulações filosóficas. Limitar-nos-emos ao esboço de uma perspectiva sumária da visão do infinito ao longo dos tempos.

Como entendiam os antigos o infinito? Observe-se que a própria manipulação de números grandes pode apresentar sérias dificuldades (sobretudo se não se usar calculadora) e que muitos povos primitivos não dispõem de designativo para esses números grandes, cingindo-se, por vezes, a «1, 2, 3, muitos».

A noção de infinito, num sentido muito amplo que inclui o ilimitado e o indefinido, aparece na Grécia já nos pré-socráticos. Os átomos de Demócrito são uma infinidade e é também infinito o vácuo em que se encontram.

O infinito como problema atinente com a infinita divisibilidade do contínuo surge em Zenão de Eleia no século V (a. C.). Os seus paradoxos, apontando para a impossibilidade de decisão entre as visões atomista finitista e continuísta não finitista, foram cruciais nas especulações posteriores acerca da natureza do infinito.

Platão considera que há em todos os seres o limitado e o ilimitado e que, enquanto este é imperfeito, o limitado é perfeito.

Deve-se a Aristóteles uma das mais influentes análises desta ideia. Aristóteles é um *finitista,* filósofo do universo fechado e limitado. Crítico dos paradoxos de Zenão, estabeleceu a distinção entre *infinito potencial* e *infinito actual.* Só o infinito potencial é admitido por Aristóteles tanto na sucessão dos números, onde temos a *potencialidade* de escrever qualquer número natural, mas é impossível escrevê-los todos, como na dos pontos de uma linha (a linha é potencialmente infinitamente divisível).

Os estóicos, opositores ao finitismo aristotélico, conceberam o cosmos como realidade existente num vácuo estendido até ao infinito. Defensores da doutrina do eterno retorno, entendiam que havia, sucessivamente, uma infinidade de mundos.

Euclides, nos *Elementos,* usa o infinito em vários momentos. Em Euclides, o potencial do infinito não está meramente na linguagem, torna-se «operacional» (envolvendo, por exemplo, a justificação das exaustões no «método de exaustão» de figuras, onde estas são *exauridas* à custa de quantidades *infinitesimais*). Incapaz de abarcar a ideia de um conjunto infinito actual, Euclides estabelecia os seus argumentos em forma de infinito potencial. Nos *Elementos,* IX, 20 (livro X, proposição 20), a infinitude dos primos tem uma formulação do seguinte teor (sem menção explícita a infinito):

> Os números primos são mais do que qualquer quantidade de números primos.

Para o pensamento cristão, o problema do infinito está ligado ao problema da eternidade, da criação a partir do nada, capacidade única de Deus, verdadeiramente eterno e infinito.

Como vencer preconceitos filosófico-religiosos e lidar com o infinito actual?

O princípio aristotélico do infinito potencial conheceu várias objecções. Às de ordem estritamente matemática vieram juntar-se as de natureza religiosa. Assim, nas *Oeuvres philosophiques* de Descartes, p. 108, lê-se:

> [...] e, porque não sabemos como imaginar quantas mais estrelas Deus pode criar, supomos que o seu número é indefinido. E nomeamos essas coisas indefinidas mais do que infinitas, de modo que a palavra *infinito* seja reservada só para Deus.

Descartes concebeu uma prova da existência de Deus mediante o seguinte argumento:

> Um ser finito jamais poderia conceber a ideia de *infinito, eterno, imutável, omnisciente, independente, omnipotente,* a menos que o ser infinito houvesse depositado tal ideia no ser finito. Logo, Deus existe!

Após a descoberta do cálculo infinitesimal por Newton e Leibniz em finais de Seiscentos, no século XVIII a problemática do infinito conheceu novo impulso. Leibniz tentou explicar a Sofia Carlota da Prússia o cálculo infinitesimal, matéria pela qual esta manifestou total desinteresse, invocando que a conduta dos seus cortesãos já a familiarizara de mais com o infinitamente pequeno.

O infinitésimo tinha propriedades assombrosas. Não era zero, era menor do que qualquer quantidade, e não lhe era atribuído qualquer tamanho ou natureza. Todavia, *grandes* quantidades destes *infinitésimos* originavam grandezas definidas. Newton interessou-se pela questão e recorreu a argumentos teológicos para esgrimir as suas opiniões na matéria.

Os filósofos racionalistas do século XVIII sustentaram a infinitude do universo e usaram a noção de infinito nas suas especulações cosmológicas. Hoje são aduzidos argumentos de ordem astronómica contra a infinitude do universo. É uma questão que continua a atrair filósofos, cosmólogos, astrónomos... e muitos curiosos.

No século XIX, Weierstrass, incapaz de desvendar a essência dos infinitésimos, *enterrou-os* com o flogisto e outros enigmas insolúveis. Weierstrass, tal como Cauchy, considerava que o infinitamente grande ou o infinitamente pequeno eram apenas potencialidade, como Aristóteles ideara. A definição de limite de Weierstrass [a definição usual $\varepsilon - \delta$: o limite de uma função $f(x)$ definida numa vizinhança de a quando x tende para a é igual a A finito se para qualquer número $\varepsilon > 0$ for possível encontrar um número $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $|f(x) - A| < \varepsilon$ sempre que x satisfaça a condição $|x - a| < \delta$] veio libertar o cálculo de especulações metafísicas, assim nascendo a moderna análise.

Deixemos, neste ponto, em suspenso esta digressão. Retomá-la-emos nos vários pontos a desenvolver.

Infinito actual e infinito potencial

O *infinito actual* e o *infinito potencial* são idealizações matemáticas. Em que consistem e em que diferem essencialmente?

A abstracção do infinito actual aplicada a processos construtivos de duração infinita (como a geração da sucessão dos inteiros positivos a partir do zero) ignora o facto de tais processos não acabarem e considera os resultados de tais processos na assunção de que terminaram, considerando, por exemplo, que os conjuntos foram *de facto* gerados. Os conjuntos criados são mentalmente entendidos como objectos «acabados». A abstracção do infinito actual permite considerar a sequência dos naturais como um objecto matemático.

O infinito actual desempenha papel importante na teoria dos conjuntos de Cantor. O uso desta abstracção na geração de objectos matemáticos cuja «tangibilidade» é indirecta, o carácter não construtivo da definição de certos conjuntos, depararam com fortes objecções de matemáticos como Hilbert, Kronecker, Gauss, H. Weyl, entre outros.

A abstracção do infinito potencial aplicada a processos construtivos que podem ser indefinidamente estendidos ignora quaisquer obstáculos espaciais, temporais ou materiais à realização de cada passo do processo e considera cada passo do processo potencialmente realizável.

Na sequência dos naturais, é sempre possível acrescentar um novo número e é impossível esgotá-la subtraindo elementos. A aceitação desta abstracção com a recusa do infinito actual está na base da fundação construtiva da matemática.

As objecções a raciocínios não construtivos referem-se essencialmente às *demonstrações indirectas.* A prova indirecta da veracidade de uma proposição A consiste em partir da suposição da veracidade do contrário de A, A', e por um entrecho lógico chegar a uma contradição de A', demonstrando assim o absurdo de A'. Com base no princípio lógico do «terceiro excluído», o absurdo de A' estabelece a veracidade de A.

Existe, com efeito, uma diferença assinalável entre provar a existência de um certo objecto matemático por construção de um exemplo tangível e mostrar que, se nenhum existir, serão encontradas consequências contraditórias. Mas daí a banir da matemática todas as provas não construtivas (como certas correntes defendem) parece demasiadamente drástico...

Descida infinita ou subida infinita

A abstracção do infinito potencial está na base do método de indução finita. Pascal apresentou no seu *Traité du triangle arithmétique* aquele que viria a ser conhecido como o *princípio de indução matemática.* (Em França, Poincaré, em 1902, designou-o por *raciocínio por recorrência.*)

O princípio de indução de Pascal (já utilizado por Maurolico no seu livro de aritmética de 1557) é bem conhecido. Pode enunciar-se nos seguintes termos: suponhamos que pretendemos provar a veracidade de uma proposição $P(n)$ para todos os naturais n. Se provarmos a sua veracidade para um valor particular de n, por exemplo, para $n = 1$, e de seguida provarmos que a sua validade para n implica a sua validade para $n + 1$, então estabelecemos a sua validade universal.

Mas será suficiente «acreditar» na validade deste argumento?

Peano, em finais do século passado, deu-nos a resposta na sua obra *Arithmetices Principia:* estabeleceu o princípio de Pascal como um axioma.

Em vez de uma subida infinita, poderemos tentar uma descida infinita? Analisemos sumariamente o *método de descida infinita* atribuído a Fermat. Suponhamos que pretendemos provar a veracidade de uma proposição $P(n)$ para todos os naturais n. Fermat propôs a seguinte estratégia de *reductio ad absurdum:* suponhamos que existe um natural n_0 para o qual a proposição não é verdadeira e efectuemos uma *descida* começando por provar que existe um natural n_1 estritamente menor do que n_0 para o qual $P(n_1)$ não é verdadeira. Obteremos, deste modo, uma sequência infinita estritamente decrescente de números naturais n_p para os quais $P(n_p)$ não é verdadeira, o que é contraditório!

Ou seja, Fermat identificou a propriedade fundamental do conjunto dos números naturais:

> Não existe uma sequência infinita estritamente decrescente de números naturais.

Antes de Fermat, outros matemáticos tiveram esta mesma ideia. Por exemplo, no século XIII, Campanus de Novare (um dos primeiros a traduzir Euclides para latim), usou argumentos análogos aos da *descida* de Fermat para provar a irracionalidade do número de ouro.

O *método de descida infinita* apenas exige um número finito de passos. De facto, apenas dois passos, se recorrermos ao *princípio da boa ordenação,* ponto central da teoria cantoriana dos conjuntos:

> O conjunto dos números naturais está bem ordenado, porque qualquer subconjunto não vazio tem um elemento menor do que todos os outros (primeiro elemento).

No *método de descida infinita,* a *contradição* surge da afirmação de que o conjunto E dos naturais para o qual a proposição $P(n)$ não é válida é não vazio e, assim, existe em E um inteiro n_0 menor do que todos os outros. Porém, o *método de descida infinita* permite determinar um n_1 estritamente menor do que n_0 para o qual $P(n_1)$ não é válida, o que é uma contradição.

Fermat trocou correspondência com Pascal, e tiveram controvérsias matemáticas, entre elas uma relativa à abordagem da teoria das probabilidades e do tratamento do infinito.

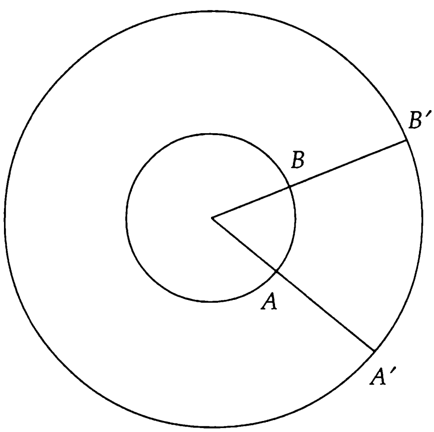
Entre o desafio de descida infinita e o desafio de subida infinita, qual dos dois escolher? Subir passo a passo ou descer passo a passo? Bem, depende... O certo é que os princípios de Fermat e de Pascal são logicamente equivalentes.

Galileu e o infinito

No século V Proclo, no seu famoso *Comentário sobre os Elementos de Euclides,* observa que o diâmetro da circunferência a divide em duas metades, pelo que deve haver duas vezes mais metades do que diâmetros. E haverá?

Os filósofos medievais concluíram que duas circunferências concêntricas podiam fazer-se corresponder do modo que a figura mostra. Ou seja, os pontos A e A' (colineares com o centro) correspondem-se, como B e B'. Logo, uma circunferência pequena tem tantos pontos como uma grande.

Em *Discursos matemáticos e demonstrações,* Galileu identifica a propriedade fundamental de, num conjunto infinito, a parte *equivaler* ao todo (isto é, a cada elemento da parte corresponde um único elemento



do todo, e vice-versa). Dessa obra transcrevemos um excerto de um interessante diálogo entre as personagens Salviati e Simplício.

Salviati levanta a questão:

> Se te perguntar quantos são os quadrados perfeitos, podes responder--me, sem mentir, que são tantos quantas as respectivas raízes quadradas; visto que todo o quadrado tem a sua raiz e toda a raiz o seu quadrado, não há nenhum quadrado que tenha mais de uma raiz nem uma raiz que tenha mais de um quadrado.

Perante isto, Simplício interroga:

> O que há a decidir nesta situação?

E Salviati responde:

> Não vejo outra solução que ela possa admitir que não seja a de que todos os números são infinitos, que os quadrados são infinitos e que a imensidão dos quadrados não é menor do que a de todos os números, nem maior, e, em conclusão, que os atributos de igualdade, maior do que e menor do que não têm lugar no infinito, mas só nas quantidades finitas.

Afirma Salviati:

> Infinitos e indivisíveis transcendem o nosso entendimento finito, os primeiros por causa da sua grandeza, os outros por causa da sua pequenez; imaginem o que são quando combinados.

Como pode haver tantos quadrados como números se nem todo o número é um quadrado perfeito? Comportando-se o infinito de modo tão insólito, não valeria a pena evitá-lo? Seria o infinito uma espécie de inferno ao qual era preferível não descer?...

Galileu teria em mente escrever uma obra matemática sobre o infinito, projecto este jamais executado. A humanidade haveria ainda de esperar mais de um século pelo génio de Cantor.

O paraíso de Cantor

Cantor era filho de cristãos de ascendência judia. Desde sempre se interessou pelos argumentos medievais dos teólogos sobre o infinito e a continuidade. Georg Cantor foi um génio, um génio que saboreou o sabor amargo da incompreensão de muitos dos seus pares. Professor na pequena Universidade de Halle, sempre ansiou por um posto na Universidade de Berlim. Frustrado, atribuía este insucesso a Leopold Kronecker (1823-1891). Cantor era um dos matemáticos mais notáveis da sua época. Kronecker, personagem influente e professor em Berlim, teve com Cantor um conflito memorável.

Kronecker, regressando ao ideal pitagórico, insistia em que a análise e a aritmética deveriam basear-se nos números inteiros. Afirmava: «Deus fez os inteiros, sendo o resto obra dos homens.» Preconizava uma revolução aritmética que banisse os irracionais por «inexistência» e era um finitista exacerbado. Desferia ataques contra o hipersensível Cantor e as suas incríveis criações matemáticas. Cantor teve, em 1834, o primeiro esgotamento nervoso de uma longa série. Viria a morrer num sanatório de doentes mentais em 1918, ao cabo de uma existência trágica, marcada por acessos de génio, depressões, dúvidas sobre a própria obra, etc. O reconhecimento do seu génio chegaria já perto do fim da vida. Hilbert consideraria a sua *aritmética transfinita o produto mais extraordinário do pensamento matemático, uma das mais belas realizações da actividade humana no domínio do puramente inteligível.*

A obra de Cantor é uma peça extraordinária no sentido de clarificar o infinito. Hilbert, considerando-a bela e maravilhosamente criativa, proclamaria:

> Não nos expulsem do paraíso que Cantor criou para nós!

Georg Cantor observou que, se Aquiles pode alcançar a tartaruga, devemos admitir um «paradoxo» que jamais Zenão ousaria conceber:

> O todo não é maior do que muitas das suas partes!

Qual será maior: o todo ou a parte?

Para comparar dois conjuntos infinitos quanto ao «tamanho», o conceito básico é o de *correspondência um-a-um.* Sentando à roda de uma mesa dez pessoas em dez cadeiras, uma pessoa por cadeira, a cada cadeira corresponde uma única pessoa, e vice-versa. Dizemos, por isso que os dois conjuntos *cadeiras* e *pessoas* estão em *correspondên-*

cia biunívoca ou *um-a-um*. A extensão deste conceito para conjuntos infinitos processa-se de modo natural.

Em 1874, Cantor publicou um dos seus mais revolucionários artigos. Dedekind definira um conjunto como sendo infinito se fosse possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre ele e uma sua parte. Cantor adoptou esta definição. No caso finito, dois conjuntos têm o mesmo número de elementos, ou *cardinal*, se puderem ser postos em correspondência biunívoca.

Dois conjuntos dizem-se *equivalentes* (ou *equipotentes*) se entre eles for possível estabelecer uma correspondência um-a-um. Se os conjuntos A e B (finitos ou infinitos) forem equivalentes, diz-se que têm *o mesmo número cardinal*. Se A for equivalente a um certo subconjunto de B, mas B não for equivalente a A, ou a qualquer dos seus subconjuntos, diz-se que B tem *maior cardinal* do que A.

Um conjunto diz-se *numerável* se for equivalente a $\mathbb{N}$, conjunto dos números naturais.

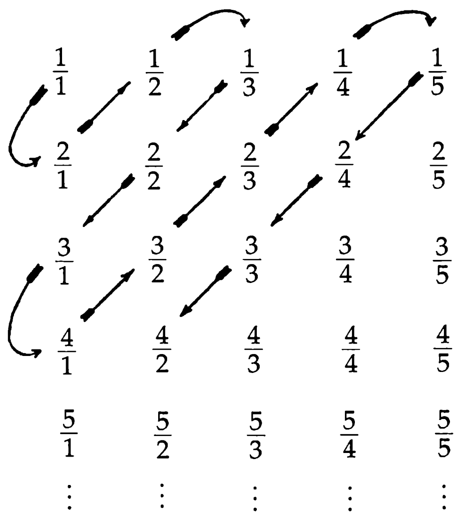
Por exemplo, o conjunto dos inteiros positivos é equivalente ao conjunto dos números pares. O conjunto dos pares é *tão grande* como o de todos os naturais. Ou seja, o conjunto dos naturais não é maior do que esta sua parte. Para o provar basta estabelecer entre ambos a seguinte correspondência:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\ \ldots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14\ \ldots \end{array}$$

Os conjuntos dos números ímpares e — surpreendentemente — das fracções racionais são equivalentes. Vejamos que, de facto, as fracções e os inteiros positivos podem ser postos em correspondência um-a--um, apesar de estes estarem espaçados por grandes buracos e os racionais densamente distribuídos.

Todo o racional pode ser escrito na forma de fracção $\frac{m}{n}$, sendo o numerador e o denominador números inteiros. Identifiquemos esta fracção com o par (m, n). Todos estes pares podem ser colocados num quadro, como o quadro da figura, ocupando (m, n) a posição no cruzamento da linha m com a coluna n. Neste arranjo, comecemos em 1, sigamos verticalmente para a esquerda até 2, depois diagonalmente para cima e para a direita até $\frac{1}{2}$ e de seguida horizontalmente até $\frac{1}{3}$, depois para baixo até à terceira linha em 3. Sigamos as flechas na figura. Eliminemos as fracções redutíveis pelo caminho, de modo que cada racional apareça uma só vez na sequência

$$1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 5 \ldots$$



1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
(1,1)	(2,1)	(1,2)	(1,3)	(2,2)	(3,1)	(4,1)	(3,2)	(2,3)

Havendo, surpreendentemente, tantos racionais como naturais, ocorre perguntar: serão os infinitos todos iguais, ou, pelo contrário, haverá infinitos maiores do que outros? Serão os reais *tão grandes* como os naturais? A resposta é *não.* Os reais não são numeráveis (ou seja, demasiado grandes para poderem ser contados com os naturais).

Cantor estabeleceu uma hierarquia dos conjuntos infinitos, como veremos no ponto seguinte.

A hipótese do contínuo

Como já dissemos, um conjunto B e um conjunto A têm a mesma *cardinalidade* se forem equivalentes (ou equipotentes). O *número cardinal de A* (ou *número transfinito,* ou *potência no sentido de Cantor*)

— denotado por $\#A$ [ou card(A), $|A|$] — designa a propriedade intrínseca que o conjunto A tem em comum com todos os que lhe são equivalentes. Cantor definiu o *número cardinal* de um conjunto como sendo a propriedade que fica após abstrairmos a natureza qualitativa dos seus elementos e a sua ordenação.

As seguintes convenções são usuais:

$$\aleph_0 = \#\mathbb{N}$$
$$C = \#\mathbb{R}$$

O conjunto $\{0, 1, 2, 3 \ldots\}$ é o infinito mais pequeno. O seu cardinal — *álefe-zero* — satisfaz propriedades muito curiosas, tais como:

$$\aleph_0 + 1 = \aleph_0 \qquad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0 \qquad \aleph_0^2 = \aleph_0$$

exibindo os cardinais uma aritmética consistente.

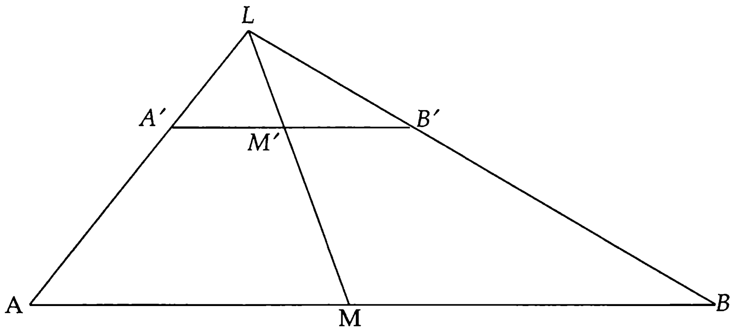
Ora é possível provar que não existem cardinais infinitos abaixo de álefe-zero. Cantor demonstrou que, para além dos numeráveis, existiam outros transfinitos. Existiam classes que não eram numeráveis, isto é, que não podiam ser postas em correspondência um-a-um com os inteiros e que, portanto, possuíam uma cardinalidade maior do que álefe-zero.

A classe dos números reais é uma delas. A sua cardinalidade é C, ou c, e Cantor refere-a como *cardinalidade do contínuo,* reconhecendo que tanto se aplica à classe dos reais como à dos pontos de um segmento. A demonstração, muitíssimo original, consiste em supor que os reais são numeráveis e chegar a uma contradição (demonstração por absurdo). Comecemos por escrever os reais na forma decimal e enumeremo-los num quadro onde todos figurem:

$$\begin{array}{lcl}
1 & \leftrightarrow & 0.\cancel{a_1}\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5\ \ldots \\
2 & \leftrightarrow & 0.\,b_1\ \cancel{b_2}\ b_3\ b_4\ b_5\ \ldots \\
3 & \leftrightarrow & 0.\,c_1\ c_2\ \cancel{c_3}\ c_4\ c_5\ \ldots \\
4 & \leftrightarrow & 0.\,d_1\ d_2\ d_3\ \cancel{d_4}\ d_5\ \ldots \\
5 & \leftrightarrow & 0.\,e_1\ e_2\ e_3\ e_4\ \cancel{e_5}\ \ldots \\
\cdot & & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot
\end{array}$$

Construamos um novo número cuja primeira casa decimal seja diferente da primeira casa decimal do primeiro desse quadro, a segunda diferente da segunda casa decimal do segundo, etc., a n-ésima diferente da n-ésima casa decimal do n-ésimo da listagem. Como se comprova sem dificuldade, o número assim construído não pode estar em lugar algum da listagem (é diferente do primeiro da lista porque difere dele na primeira casa decimal, diferente do segundo porque diferem na segunda casa decimal, etc.), o que é absurdo, em virtude de se ter suposto que esta era completa. Este é o famoso *argumento diagonal* de Cantor.

Qualquer segmento de recta tem cardinalidade C, o mesmo acontecendo com qualquer recta do plano, qualquer cubo do espaço. Na figura ilustra-se a correspondência biunívoca de pontos de segmentos de diferentes comprimentos.



O conjunto de todos os subconjuntos de um dado conjunto A chama-se conjunto das partes de A e denota-se por 2^A. Cantor provou que, quer A seja finito, quer infinito, 2^A nunca é equivalente a A ou a qualquer dos seus subconjuntos. Em particular, não há dois conjuntos equivalentes em

$$A, \quad 2^A, \quad 2^{2^A}, \quad 2^{2^{2^A}} \ldots$$

Se A for o conjunto dos números naturais, então 2^A será equivalente ao contínuo. Podem obter-se novos números cardinais tomando a união destes conjuntos e construindo a sequência análoga para esta união. Deste modo, é possível gerar uma cadeia interminável de conjuntos infinitos cada vez maiores. Para os números cardinais pode definir-se uma aritmética com operações de soma, produto, potenciação...

Cantor descobriu que a classe dos números algébricos, números que são solução de equações algébricas com coeficientes inteiros da forma

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_0 = 0$$

é numerável. Os números transcendentes são os que não são algébricos. No tempo de Cantor a classe dos transcendentes era um verdadeiro enigma. Conheciam-se dois importantes números transcendentes: *e*, a base dos logaritmos naturais, e π, a razão do perímetro da circunferência com o diâmetro.

Ora pode deduzir-se a existência dos números transcendentes com uma facilidade inacreditável partindo-se do conhecimento de que os reais são não numeráveis, os algébricos e os racionais são numeráveis, a soma (de qualquer número numerável) de classes numeráveis é numerável. A classe que faz com que os reais — racionais e irracionais (irracionais algébricos e transcendentes) — sejam não numeráveis é a classe dos números transcendentes!

Cantor provou que o cardinal dos reais é maior do que o cardinal dos inteiros. Mas que existe entre eles? Existirá uma potência intermédia entre a do conjunto numerável e a do contínuo? O problema, conhecido por *hipótese do contínuo,* afirma (hipoteticamente) que o cardinal do conjunto dos números reais é o menor cardinal infinito maior do que o dos inteiros. Este problema figurava em primeiro lugar na lista de problemas proposta por David Hilbert em 1900.

Uma discussão rigorosa da hipótese do contínuo requer a especificação de um sistema de axiomas para a teoria dos conjuntos.

O axioma da escolha

O uso livre da noção de conjunto, à Cantor, *o conjunto como qualquer colecção de objectos bem definidos e distintos, da nossa intuição e pensamento,* conduz a contradições. Para ser base segura da matemática tem de utilizar uma teoria mais sofisticada. Zermelo, em 1908, fundou a teoria axiomática dos conjuntos (v. capítulo «Os *Elementos* de Euclides, sistemas axiomáticos, consistência, completude, independência»). Nesta teoria, os conjuntos são entes indefinidos que obedecem a um certo número de axiomas. Zermelo incluiu o axioma da escolha no seu sistema de axiomas para a teoria dos conjuntos:

> Se α é qualquer colecção de conjuntos $\{A, B, ...\}$ e nenhum dos conjuntos de α é vazio, então existe um conjunto Z que contém precisamente um elemento de cada conjunto de α.

Conhecem-se mais de cem equivalentes ao axioma da escolha, entre eles:

> Todo o conjunto pode ser bem ordenado.
> Todo o espaço vectorial tem, pelo menos, uma base.

Muitos matemáticos consideravam que o uso do axioma da escolha devia ser evitado, não por não ser intuitivamente plausível, mas pela grande latitude de α: *qualquer colecção de conjuntos.* A teoria dos conjuntos baseada na axiomática de Zermelo-Frankel, mas na qual o axioma da escolha não é assumido, é designada por *teoria dos conjuntos restrita.* Esta teoria seria aquela que a maioria dos matemáticos aceitariam. A teoria dos conjuntos baseada nos axiomas da teoria restrita mais o axioma da escolha é designada por *teoria standardizada dos conjuntos.*

Gödel, em 1938, provou que, se a teoria dos conjuntos restrita for consistente, então também o será a teoria de conjuntos standardizada. Ou seja, o axioma da escolha não deve merecer-nos maiores reservas do que os outros, ao contrário do que certos matemáticos proeminentes julgavam. Gödel provou ainda que podemos incluir na teoria dos conjuntos a hipótese do contínuo como axioma adicional: se a teoria dos conjuntos restrita e a hipótese do contínuo implicarem uma contradição, então ela já existirá na teoria dos conjuntos restrita. O axioma é independente dos outros e com eles compatível.

Em 1964, Paul Cohen provou que a veracidade da hipótese do contínuo depende da escolha feita para os axiomas da teoria dos conjuntos. A situação é análoga à da geometria. A verdade ou falsidade do postulado das paralelas depende do tipo de geometria. Na geometria euclidiana, este axioma é válido, mas há geometrias (não euclidianas) onde é falso (v. capítulo «Do espaço euclidiano ao espaço curvo, modelos»). A teoria dos conjuntos não cantoriana parte dos axiomas da teoria dos conjuntos restrita mais uma forma ou outra da negação do axioma da escolha. Em particular, podemos admitir como axioma a negação da hipótese do contínuo. Cohen provou que tal negação é consistente com a teoria dos conjuntos restrita, da mesma forma que Kurt Gödel provou que a afirmação da hipótese do contínuo o era. Se a teoria dos conjuntos restrita for consistente, continuará a sê-lo se lhe juntarmos a afirmação «a hipótese do contínuo é falsa» ou a afirmação «o axioma da escolha é falso».

A veracidade da hipótese do contínuo não foi ainda *decidida.* E o mesmo acontece com a questão da existência de um conjunto de cardinalidade intermédia entre a de um conjunto e a do conjunto das suas partes (ou seja, dos seus subconjuntos).

A actualização do infinito

Bolzano, matemático de Praga ordenado padre em 1804, que partilhava os seus interesses pela filosofia, pela metodologia da ciência e, em especial, pela matemática e pela lógica, sentia grande atracção pelas *questões do infinito.* Foi este justamente o tema de um dos seus mais importantes escritos, publicado postumamente e intitulado *Paradoxien der Unendlichen (Paradoxos do Infinito).*

Bolzano foi quem primeiro «actualizou» o infinito, ao propor a seguinte definição, na qual as colecções são consideradas um todo:

> Chamo conjunto a uma colecção na qual a ordem das respectivas partes é irrelevante e na qual nada de essencial muda se apenas a ordem for mudada.

Cerca de 1872, Dedekind publicou a sua construção dos reais a partir dos racionais. Na sua segunda publicação sobre a natureza e o significado dos números, intitulada *Was sind und was sollen die Zahlen?,* afirma:

> Os números são livres criações do espírito humano, servem como um meio de apreensão mais fácil e mais preciso da diferença das coisas.

Mas Kronecker adoptou uma perspectiva diferente:

> Deus fez os inteiros, sendo o resto obra dos homens.

Nestas diferentes visões, uma considerando os números uma criação do espírito humano e outra uma dádiva de Deus, reside a essência das duas posições matemáticas sobre o infinito potencial e actual. Dedekind deu pela primeira vez uma definição para conjunto infinito: aquele para o qual existe uma bijecção (correspondência um-a-um) entre si e uma parte de si próprio.

Em 1908, Zermelo, na sua obra sobre fundamentação da teoria dos conjuntos, *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre,* propôs um sistema de sete axiomas para a teoria dos conjuntos. Um deles assegura a existência do infinito. Como se segue:

O domínio dos objectos considerados conjuntos (satisfazendo os axiomas de Zermelo) contém o conjunto Z, que integra o conjunto vazio, e também o conjunto $\{a\}$ (sucessor de a) sempre que contenha o elemento a.

O chamado *axioma do infinito de Dedekind* — existe um conjunto que pode ser aplicado um-a-um num dos seus subconjuntos próprios — é equivalente ao enunciado axioma, mas tal equivalência não pode ser provada na teoria dos conjuntos usual sem recurso ao axioma da escolha.

Na teoria dos conjuntos são utilizados os chamados *axiomas do infinito superior*, que postulam a existência de conjuntos de cardinalidade superior, como o axioma da existência de um cardinal inacessível, o axioma da existência de um cardinal mensurável, etc.

O hotel de Hilbert

Hilbert imaginou um hotel com um número infinito de quartos, numerados pela sucessão dos naturais: 1, 2, 3, ... Alta noite, chega um hóspede ao hotel, a lotação está esgotada, mas o gerente encontra maneira de o alojar. Como? Passa o hóspede do quarto 1 para o 2, o do 2 para o 3, e assim sucessivamente. Deste modo, fica vago o quarto 1 para o novo hóspede.

Como é possível que, encontrando-se o hotel cheio, um novo hóspede encontre nele lugar? A resposta é simples: o hotel tem um número infinito de quartos. De cada vez que um novo hóspede chega, o gerente dá-lhe o primeiro quarto e desloca cada um dos outros hóspedes para o quarto contíguo ao seu.

Noutro dia, encontrando-se esgotada a lotação do hotel, chega ao hotel um autocarro com um número infinito de novos hóspedes. O gerente cuida de os instalar. Desta vez muda o ocupante do quarto 1 para o 2, o do 2 para o 4, o do 3 para o 6, ..., o do n para o $2n$. Esta operação deixa livres todos os quartos ímpares. Então o passageiro 1 do autocarro com infinitos passageiros ocupa o quarto 1, o 2 o quarto 3, o 3 o 5, etc., indo o passageiro n para o quarto $2n - 1$. O gerente arranja alojamento para todos!

Deste modo, o hotel de Hilbert alojará os hóspedes de um número infinito de autocarros que transportem cada um um número infinito de pessoas.

Podemos encarar o problema do hotel de Hilbert adoptando um ponto de vista ordinal. Os números ordinais denotam a relação de um elemento de um conjunto relativamente aos outros com referência a um sistema de ordenação. (Por exemplo, o *primeiro* rei de Portugal, o *terceiro* número natural, etc.) Suponhamos que o gerente atribui a cada um dos hóspedes *um número de ordem* e que já esgotou todos os números naturais. Quando chega um novo hóspede, o gerente cria um novo número — ω — que vem após todos os naturais. Este é o primeiro número *transfinito.*

Esta indexação pode continuar. Sabendo-se que há tantos inteiros como inteiros pares (ou inteiros ímpares), associemos a ordem p ao inteiro par $2p$. Quando tivermos esgotado todos os inteiros para indexarmos os pares, que ordem devemos atribuir ao inteiro 1? O transfinito ω. E que ordem devemos atribuir aos números ímpares? Ordenemos os ímpares, associando ao ímpar $2p + 1$ o transfinito $\omega + p$. Depois podemos dar ao número $\omega + \omega$ a *ordem* 2ω. Cantor prosseguiu, passo a passo, e assim definiu um infinito numerável de números transfinitos:

$$\begin{array}{ll}
\omega,\ \omega + 1,\ \omega + 2 \ldots & \omega + p, \ldots \\
2\omega,\ 2\omega + 1,\ 2\omega + 2 \ldots & 2\omega + p, \ldots \\
n\omega,\ n\omega + 1,\ n\omega + 2 \ldots & n\omega + p, \ldots \\
\omega^2,\ \omega^2 + 1,\ \omega^2 + 2 \ldots & \omega^2 + p, \ldots \\
\omega^n,\ \omega^n + 1,\ \omega^n + 2 \ldots & \omega^n + p, \ldots \\
\omega^\omega,\ \omega^\omega + 1,\ \omega^\omega + 2 \ldots & \omega^\omega + p, \ldots
\end{array}$$

A seguir à classe de transfinitos agora definida existe um novo número transfinito, do mesmo modo que existe um transfinito depois de todos os inteiros. Usando um procedimento análogo ao anterior, gera-se uma extensão transfinita. Fortalecidos com a indexação transfinita, podemos, do mesmo modo que Cantor, perguntar: dado um conjunto arbitrário, serão os números transfinitos suficientes para indexarem todos os seus elementos?

Paradoxos do infinito

Com o infinito actualizado, outras questões surgiram. A bela teoria dos conjuntos infinitos foi abalada pelo aflorar de paradoxos lógicos.

Foi desde logo observado que o uso demasiado «livre» do conceito de «conjunto» conduziria a contradições inevitáveis. Um dos paradoxos, proposto por Bertrand Russell, pode ser assim formulado: chamemos *ordinários* aos conjuntos que não contêm como elementos eles próprios. Por exemplo, o conjunto dos inteiros contém como elementos apenas inteiros. Não se contém a si próprio como elemento, porque não é um inteiro, mas um conjunto de inteiros.

Podem existir conjuntos que se contenham a si próprios como elementos. Designemos estes conjuntos por *extraordinários.* É extraordinário, por exemplo, o conjunto *S,* definido do seguinte modo:

> S contém como elementos todos os conjuntos definidos por uma frase em português com menos de 20 palavras.

Seja *C* o conjunto de todos os conjuntos ordinários. Cada elemento de *C* é um conjunto, um conjunto ordinário. Será *C* um conjunto ordinário ou extraordinário?

Se *C* é ordinário, como é o conjunto de todos os conjuntos ordinários, contém-se a si próprio como elemento e, assim sendo, é extraordinário. Logo, há aqui uma contradição! *C* deve ser extraordinário. Mas então *C* contém como elemento um conjunto extraordinário — ele próprio —, o que contradiz a definição.

O infinito existe?

Nos começos do século XX admitia-se que a obra de Cantor aclarara o conceito de infinito, de tal modo que era lícito tratá-lo como qualquer outro respeitável ente matemático. Porém, a controvérsia em torno da *existência do infinito* continuava a ocupar filósofos e matemáticos.

Não teria Cantor demonstrado a existência do infinito? A resposta a esta pergunta pressupõe que saibamos o que é *demonstrar* e o que se entende por *existência* em matemática.

Demonstrar vem do termo grego *apodeixis,* que significa *mostrar a partir de.* Demonstrar é apresentar provas lógicas irrefutáveis, é encadear juízos/proposições de modo que se seja racionalmente compelido a aceitar a(s) conclusão(ões) derivada(s) da hipótese.

A *existência,* na acepção matemática, é distinta da existência (de objectos) no mundo físico. Desde Euclides e Aristóteles que a existência matemática é tema de reflexão. Nos tempos modernos, as diferentes escolas de filosofia matemática, logicistas, formalistas e intuicionistas, discutiram a sua essência. A escola logicista, que considera as matemáticas um ramo da lógica, e os formalistas, para quem a matemática é um mero jogo desprovido de outro sentido para além do do jogo, perfilharam as teorias de Cantor e defenderam os álefes. A defesa baseou-se na noção de compatibilidade evidente. Existência, para os formalistas, apenas significa «livre de contradição».

Existência é uma expressão com conotações metafísicas. Mas, matematicamente falando, a existência fica estabelecida por uma *proposição consistente em si mesma.* Uma proposição que não é contraditória é um verdadeiro enunciado de existência. Nesta perspectiva, as teorias cantorianas do infinito são inexpugnáveis. O infinito conquistou, por assim dizer, um estatuto respeitável, tão real e seguro como o finito, todavia com carácter distinto.

Estaria, enfim, tudo resolvido? Não! Novos problemas e novos paradoxos ensombraram a estrutura de Cantor. Designadamente, as dificuldades de uso da palavra *todo,* já inerentes à lógica clássica, tinham de ser superadas. Afirmações como *todas as generalidades são falsas, incluindo esta,* ou o célebre paradoxo de Epiménides *todos os cretenses são mentirosos,* o qual torna mentiroso quem fala verdade, constituem um verdadeiro problema na fundamentação da lógica. Teoricamente, o problema dos paradoxos seria resolúvel com a formalização do pensamento, ou com a construção de uma linguagem totalmente bem formada.

Nada disto aconteceu. As reformas da lógica clássica e as tentativas de superação dos paradoxos não foram satisfatórias, a saber, a *teoria dos tipos* de Bertrand Russell, o *intuicionismo* de Brouwer (com recusa de parte da lógica clássica, do infinito actual e da aplicação indevida do terceiro excluído), e o *axiomatismo* de Hilbert (a lógica como sistema hipotético-dedutivo formal, que deriva a partir de certas proposições primitivas as restantes proposições do sistema).

No tocante ao infinito e à teoria dos transfinitos, as reformas foram bem sucedidas. Vestígio algum de incompatibilidade ensombra o belo edifício de Cantor. A teoria dos transfinitos pode parecer absurda a alguns (e chegou a sê-lo ao próprio autor), mas é, sem margem para dúvidas, compatível. O aforismo de Henri Poincaré *a logística já não é* *estéril: gera a contradição* foi refutado pela doutrina logicista no que toca ao infinito.

Somas paradoxais

Concluímos a análise do infinito com algumas reflexões sobre a incidência deste conceito (e do de infinitésimo, seu parente) na análise. Ao longo da história, o infinito surgiu com insistência a propósito de somas infinitas. Quanto vale, por exemplo, a soma infinita

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots ?$$

À medida que o número de parcelas aumenta, a soma aproxima-se cada vez mais de 2. Quando aquele número de parcelas tende para o infinito, a soma é 2. Existe uma espécie de tensão entre o primeiro membro (infinito) e o segundo (finito)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots = 2$$

Atentemos no seguinte caso paradoxal: qual é a soma da série

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots ?$$

Escrita a série na forma

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

a soma é, obviamente, 0. Por outro lado, escrita na forma

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - \ldots$$

é claramente 1. Logo, $0 = 1$!

Havia que *dar* sentido a problemas como este! Que solução encontraram os matemáticos para *a crise das somas?* Nada mais do que reduzir o problema de somas infinitas $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ a um problema de somas finitas $s_n = a_1 + a_2 + \ldots a_n$. Se existir um a tal que esta soma finita «difira» de a, em módulo, uma quantidade menor do que qualquer ε preestabelecido, desde que se tome n suficientemente grande (n maior do que um certo N que só depende de ε), então diz-se que a soma faz sentido e vale a. Ou seja, a soma da série terá sentido se o limite de s_n, quando n tender para o infinito, for a, que é também o valor da soma procurada.

Fantasmas desaparecidos

Em análise matemática, o infinito abarca um duplo aspecto: o infinitamente grande e o infinitamente pequeno. Apesar de o método dos «infinitamente pequenos» ter sido utilizado com sucesso pelos sábios da Grécia antiga e da Europa medieval (no cálculo de áreas, volumes, em problemas de geometria e de filosofia natural), as definições exactas dos conceitos fundamentais da teoria das funções infinitamente pequenas só vieram a ser alcançadas no século XIX.

Durante muito tempo considerou-se que as grandezas finitas eram compostas por «um número infinitamente grande» de «infinitamente pequenos» *(indivisíveis)*, que não eram encarados como variáveis, antes como constantes menores do que qualquer grandeza conhecida. Esta concepção é um exemplo da separação ilegítima entre infinito e finito. O que tem sentido é a subdivisão de grandezas finitas num número indefinidamente crescente de componentes indefinidamente decrescentes.

Os infinitésimos atormentaram os matemáticos dos séculos XVII e XVIII, não impedindo, porém, o cálculo de se desenvolver. Newton e Leibniz foram os grandes criadores do cálculo infinitesimal em finais de Seiscentos. Em 1734, o bispo George Berkeley, crítico da jovem análise moderna, publicou a obra *O Analista, ou Um Discurso Destinado a Um Matemático Infiel. Onde Se Examina Se o Objecto, Princípios e Implicações da Análise Moderna São mais Distintamente Concebidos, ou Claramente Deduzidos, do Que os Mistérios Religiosos e os Pontos da Fé. «Primeiro Tira a Trave do Teu Próprio Olho; depois Verás claramente para Tirar o Argueiro do Olho do Teu Irmão»*. O *matemático infiel* era, crê-se, Edmund Halley, que deu nome ao cometa. Halley financiou e incentivou a publicação dos *Principia* de Newton (1687) (Newton publicava com extrema reserva) e diz-se que convenceu um amigo de Berkeley das «impossibilidades da doutrina cristã».

No século XVII «o problema das tangentes» — isto é, a determinação do coeficiente angular da tangente à curva $y=f(x)$ — era um problema candente. Também o desenvolvimento da mecânica requeria o cálculo da razão instantânea do movimento arbitrário de um ponto, como no caso precedente uma derivada. Apolónio de Perga, no século III (a. C.), resolvera o problema das tangentes para as secções cónicas recorrendo a argumentos geométricos. Newton e Leibniz atacaram a questão usando a geometria analítica, recém-criada por Descartes. Como não existisse então uma *teoria dos limites,* tentaram calcular a derivada

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

como a razão dos *infinitésimos*

$$f'(x) = \frac{dx}{dy}$$

Mas o que é um infinitésimo?

A propósito da parábola $y=x^2$, o argumento de Newton consistia em aumentar x ligeiramente para $x+o$, sendo a *taxa* média de variação

$$\frac{(x+o)^2 - x^2}{(x+o)-x}$$

ou simplicando

$$\frac{2ox+o^2}{o} = 2x+o$$

Quando o tende para zero, o declive $2x+o$ é $2x$ (tende para $2x$). É este o valor da *fluxão* — como Newton dizia — do fluente x^2. A argumentação de Leibniz era semelhante, mas, em vez de o, usava o símbolo dx, «um pedaço de x».

Newton definiu fluxão (derivada) como «a razão última de incrementos evanescentes». Ao que Berkeley pergunta: «E o que são estas fluxões? As velocidades de incrementos evanescentes. E o que são estes mesmos incrementos evanescentes? Não são quantidades finitas, nem quantidades infinitamente pequenas, nada. Não poderemos chamar-lhes fantasmas de quantidades desaparecidas?» Berkeley argumentava que ou *o* é zero, e os cálculos não fazem sentido porque não tem sentido dividir por zero, ou *o* não é exactamente zero e, neste caso, os cálculos estão errados, ainda que por pouco. Berkeley pensava *o* como uma constante bem definida, que ao mesmo tempo devia ser zero e diferente de zero, um absurdo. Newton pensava *o* como uma *variável* tão *próxima* de zero quanto se quisesse.

O conceito de infinitésimo como grandeza variável que tende para zero e o de derivada como limite da razão de incrementos infinitamente pequenos foram propostos por Newton (1642-1727), embora de forma não totalmente rigorosa. A forma rigorosa é creditada a Cauchy (1789-1857). O moderno conceito de diferencial como parte principal do incremento é-lhe igualmente atribuído, sem prestar o devido tributo ao papel pioneiro de Anastácio da Cunha. Cauchy deu também a definição rigorosa de integral como um limite de somas.

Cauchy, no seu famoso livro *Cours d'analyse* de 1821, definiu assim *limite:* «Quando os sucessivos valores atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, acabando por diferir dele uma quantidade tão pequena quanto queiramos, este último é chamado o limite de todos os outros.» Quanto ao infinitésimo, explicitou: «Dizemos que uma quantidade variável se torna infinitamente pequena quando o seu valor numérico decresce indefinidamente de modo a convergir para o limite 0». E *variável* já fora antes definida?

No estudo das funções reais de variável real, o sistema dos números reais é completado com dois elementos $-\infty$ e $+\infty$. Podemos supor que para todo o a finito $-\infty < a < +\infty$ e que são preservadas as propriedades fundamentais das desigualdades neste campo alargado. Valem para $-\infty$ e $+\infty$ as seguintes regras das operações aritméticas:

$$
\begin{array}{ll}
-\infty + a = -\infty, & \text{se } a \neq +\infty; \\
+\infty + a = +\infty, & \text{se } a \neq -\infty; \\
(+\infty) \cdot a = +\infty, & \text{se } a > 0; \\
(+\infty) \cdot a = -\infty, & \text{se } a < 0; \\
(-\infty) \cdot a = -\infty, & \text{se } a > 0; \\
(-\infty) \cdot a = +\infty, & \text{se } a < 0; \\
(+\infty) + (-\infty) & \text{sem sentido;} \\
(+\infty) \cdot 0 \text{ e } (-\infty) \cdot 0 & \text{sem sentido;}
\end{array}
$$

Na teoria das funções de variável complexa é necessário adicionar ao sistema dos números *um infinito sem sinal:* ∞. Não são consideradas desigualdades que envolvam ∞ e a questão de saber se ∞ é maior ou menor do que um número finito não tem sentido.

5

A quadratura do círculo

> Para alcançar a verdade é necessário, uma vez na vida, pôr tudo em dúvida — até onde seja possível.
>
> DESCARTES

O século de Péricles

O século V a. C. é um marco na história da cultura ocidental. Conhecido por *século de Péricles,* este período começa com a derrota dos Persas nas batalhas de Maratona e Salamina e é dominado pela supremacia de Atenas sobre Esparta.

A atmosfera intelectual de Atenas atraía vultos das diferentes partes do mundo grego. Da Jónia veio Anaxágoras; do Sudoeste da Itália, Zenão de Eleia, com fortes inclinações metafísicas e opositor das doutrinas pitagóricas; de Abdera, Demócrito, com a sua visão materialista da realidade, antagónica da das correntes idealistas. Notáveis realizações vieram então à luz no campo da literatura e da arte. É deste período a trindade dos grandes tragediógrafos helénicos: Sófocles, Ésquilo e Eurípedes. E também o Pártenon, o Discóbolo e outras maravilhas escultóricas e arquitectónicas. São do século V os primeiros relatos sobre os famosos *problemas clássicos*, três problemas que haveriam de intrigar a humanidade durante mais de 2000 anos e que estariam na origem de grandes desenvolvimentos da matemática.

O espírito especulativo grego engendrou concepções ousadas. Anaxágoras foi preso *por impiedade* por afirmar que o Sol não era uma divindade, mas uma estrela, vermelha, quente, tão grande como o Peleponeso, e que a Lua era um solo desabitado que recebia a luz do Sol. O projecto de vida de Anaxágoras era o estudo do universo e da natureza, herança da tradição jónica iniciada com Tales. Em Atenas, a sua obra *A Natureza* circulava ao preço de apenas um dracma, saciando a avidez intelectual dos curiosos do saber. Enquanto penava no cárcere, Anaxágoras entretinha-se a *quadrar o círculo.*

Nas civilizações pré-helénicas, a matemática prendia-se com questões de natureza meramente prática. As fontes históricas contêm um preceituário onde os escribas revelam grande sagacidade e virtuosismo, mas não dedução de fórmulas, com excepção de esboços muito incipientes e raros. Pelo contrário, a ciência grega radica na curiosidade intelectual, denotando uma forte conexão entre a filosofia e a matemática. Esta visão especulativa da ciência, a busca do saber pelo saber e não pelas suas aplicações utilitárias, seria responsável por avanços extraordinários.

Os três problemas clássicos

Anaxágoras morreu cerca de 428 a. C., um ano antes de Platão nascer e um ano depois de Péricles perecer numa praga que vitimou um quarto da população de Atenas. Segundo os testemunhos, esta catástrofe esteve na origem do problema da duplicação do cubo, também conhecido por *problema deliano.*

Por ocasião da praga deslocou-se ao oráculo de Apolo em Delos uma delegação para perguntar ao oráculo como poderiam aplacar os deuses e abrandar a sua ira contra a população flagelada. O oráculo pronunciou-se no sentido da duplicação do altar cúbico de Apolo. Os Atenienses duplicaram então a aresta do altar dos sacrifícios. Procederam de acordo com o alvitre de um jovem e obscuro poeta que compôs um poema comemorativo sobre a duplicação do altar. A praga não foi debelada. O volume do altar, em vez de duplicar, octoplicara. E a ira dos deuses também!

Platão refere que o sentido da pronúncia do oráculo de Delos era alertar para a ignorância crassa dos Gregos em matéria de geometria, coisa essa deveras lamentável...

Nas medições de áreas de figuras planas, o procedimento genérico consiste em aplicar uma quadrícula à figura em questão, quadrícula que pode ser mais ou menos fina e que fornece resultados mais ou menos precisos consoante a regularidade da figura.

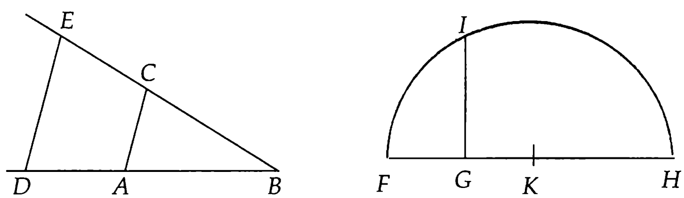
Um dos problemas que despertavam grande interesse aos Gregos era o da *quadratura.* Ou seja, exprimir a área de qualquer forma geométrica plana em termos de unidades de área — quadrados —, usando certos princípios fundamentais.

Ilustremos com um exemplo simples. Suponhamos que queremos *quadrar,* usando *régua* e *compasso,* um rectângulo de lados a e b. O que se pretende é *construir* um quadrado *equivalente* ao rectângulo, isto é, com área igual. Designemos por x o lado do quadrado a construir. Queremos que $x^2 = ab$. Usando régua e compasso, é fácil construir um segmento de comprimento igual à raiz quadrada de ab (como adiante se indica). Deste modo se quadra o rectângulo.

A multiplicação e a extracção da raiz quadrada encontram-se ilustradas na figura. Para multiplicar os segmentos $[B,D]$ e $[B,C]$ toma-se a unidade $[A,B]$, une-se A a C e traça-se $[D,E]$, paralela a $[C,A]$. Então $[B,E]$ é o produto pretendido. (Porquê?)

Para determinar a raiz quadrada de $[G,H]$ adiciona-se a este segmento o segmento unidade $[F,G]$. Bissecta-se o segmento $[F,H]$. Com centro no ponto médio K assim determinado, traça-se a semicircunferência FIH. Levanta-se a perpendicular $[G,I]$ a $[F,H]$. O segmento $[G,I]$ é a raiz quadrada procurada. (Porquê?)

Podemos quadrar qualquer triângulo (e qualquer paralelogramo), construindo com régua e compasso um rectângulo *equivalente,* ou seja, com a mesma área. Daqui decorre de imediato a possibilidade de quadratura de qualquer polígono, pois qualquer polígono pode ser dissecado em triângulos *(triangulado).*



Como já referimos, na resolução dos problemas de geometria, os Gregos utilizavam dois instrumentos: a régua não graduada e o compasso, os chamados *instrumentos euclidianos.* À régua euclidiana não são atribuídas propriedades métricas e o compasso é de pontas colapsáveis, ao contrário do nosso, que é de pontas fixas. A possibilidade de transporte de comprimentos com compasso euclidiano requer justificação teórica. É, justamente, esse o teor da proposição 2 do livro I dos *Elementos* de Euclides.

Munidos dos instrumentos euclidianos, os antigos *construíam* triângulos equiláteros, conhecido o lado, bissectavam ângulos e segmentos, inscreviam polígonos regulares no círculo, daqui partindo para outras questões de idêntica genealogia, por vezes de considerável dificuldade.

No final do livro I dos *Elementos* há uma sequência de construções de quadriláteros com áreas predeterminadas. Na proposição 45 prova-se que, dado qualquer polígono, é possível construir um paralelogramo com a mesma área e com um ângulo dado. Em particular, podem construir-se rectângulos com a mesma área de qualquer polígono dado. Na sequência, o mais natural seria analisar o que se passaria com os quadrados. Contudo, nenhuma alusão a esta questão surge nos *Elementos.* O comentador Proclo considera que esta omissão teria suscitado o interesse dos antigos pela *quadratura do círculo,* um dos *três famosos problemas da Antiguidade.*

Plutarco refere que Anaxágoras, enquanto permaneceu no cárcere, se entretinha a quadrar o círculo. E acerca do nascimento desta questão não são conhecidos outros pormenores, para além de que Péricles teria libertado o seu antigo mestre Anaxágoras da prisão.

Impossível — que significa?

Os problemas clássicos desafiaram os matemáticos durante mais de 2000 anos, vindo a sua *impossibilidade* a ser demonstrada apenas no século XIX. Dizem respeito a construções com régua e compasso e admitem os seguintes enunciados:

- ***Quadratura do círculo:*** *construir* um quadrado de área igual à de um círculo dado.
- ***Duplicação do cubo:*** *construir* um cubo de volume duplo do de um cubo dado, ou seja, duplicar um cubo.
- ***Trissecção de um ângulo:*** *trissectar* um ângulo arbitrário, ou seja, dividir um ângulo qualquer em três partes iguais.

Os três problemas clássicos são impossíveis. Mas que significa ser *impossível?*

O filósofo francês Augusto Comte *demonstrou* que seria sempre *impossível* à mente humana descobrir a composição química das estrelas. Todavia, pouco tempo depois de esta afirmação ter sido proferida utilizou-se o telescópio para analisar a luz emitida pelas estrelas e hoje é perfeitamente conhecida a sua composição química até às nebulosas mais distantes.

Sábios de outros tempos provaram a *impossibilidade* de construção de uma máquina voadora mais pesada do que o ar. No entanto, contrariando essas previsões, os ares são cruzados por frotas aéreas cada vez mais espectaculares.

É impossível chegar à Lua, ouvíamos dizer na nossa infância. Mas em 1969 os Americanos provaram ao mundo que, afinal, tal impossibilidade era possível.

Um cientista, ao afirmar que um projecto é *impossível,* exprime as limitações da sua época. A *impossibilidade matemática* tem uma acepção especial. Trata-se de uma *impossibilidade* inapelável, teórica, que nada tem a ver com avanços técnicos ou do conhecimento. Impossível em matemática significa a impossibilidade de provar, por exemplo, que 6 vezes 2 é 13. Tal como, de acordo com as regras do xadrez, o peão deve efectuar, pelo menos, 5 movimentos antes de ser convertido em rainha, assim, pelas regras da aritmética, 6 vezes 2 é 12, e não 13.

Perante a inexistência de uma prova teórica da impossibilidade de um problema, é legítimo tentar uma solução, ainda que a hipótese de sucesso seja ínfima. A *construção* do polígono regular de 17 lados foi tentada durante séculos. Gauss, um dia antes de fazer 19 anos, provou a sua possibilidade. Ao invés, encontraram-se demonstrações lógicas através de raciocínio puramente matemático da *impossibilidade* dos três problemas clássicos. Perante tais provas, continuar a tentar a quadratura do círculo, ou a trissecção do ângulo, equivale *a caçar um bípede de três pés.*

Construindo polígonos

Os Gregos sabiam construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12 e 15 lados com os instrumentos euclidianos, mas não de 7, 11, ou 13 lados. Por bissecção obtinham novos polígonos de 16, 24, 30 lados, etc. Porém, não conheciam em rigor que polígonos era possível ou impossível traçar.

Gauss estudou esta questão e, com extraordinária precocidade, na primeira juventude, demonstrou quais os polígonos que poderiam ser construídos da maneira clássica. Gauss provou que podem ser construídos os polígonos com um número primo de lados P tal que $P = 2^{2^n} + 1$, onde n é um inteiro até 4.

Tomando $n = 0, 1, 2, 3, 4$, obtém-se $P = 3, 5, 17, 257, 65\,537$. É possível construir polígonos com estes números de lados. Mas já não é possível, por exemplo, construir um heptágono regular. Para n maior do que 4 não há primos conhecidos da forma $2^{2^n} + 1$.

Divagando pelo mundo dos números

> A matemática é a rainha das ciências e a teoria dos números é a rainha das matemáticas.
>
> Gauss

Em matemática, os números desempenham um papel fundamental. Na natureza, na ciência, na vida quotidiana também. Existem vários tipos de números. Os *números naturais* são os inteiros positivos 1, 2, 3, ... Os *inteiros* são os números inteiros positivos (os naturais e o 0) e os números negativos. Os *números racionais* ou fracções são as razões de números inteiros. Os *números reais* são todos os números que podem representar-se por uma dízima, finita ou infinita. Os *complexos* ou *imaginários* são uma extensão dos reais onde se admite a existência de raízes quadradas de números negativos.

Os sucessivos alargamentos do campo dos números ao longo da história foram marcados por árduas disputas filosóficas. Como já anteriormente referimos, a descoberta dos irracionais foi devastadora para os pitagóricos. (O leitor interessado poderá consultar o famoso livro de Bento de Jesus Caraça *Conceitos Fundamentais da Matemática,* Lisboa, Gradiva.)

Em geometria, os números surgem de modo natural como comprimentos de segmentos de recta. Os antigos efectuavam as operações aritméticas através de construções geométricas. Por exemplo, adicionar dois números resume-se a justapor os segmentos correspondentes. Ao depararem com certos segmentos — como a diagonal de um quadrado de lado 1 — aos quais não correspondia racional algum, os Gregos chamaram-lhes *irracionais* ou *incomensuráveis.* Outro número desta natureza é o conhecido *número de ouro* $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que surge na geometria da estrela pentagonal, símbolo da escola pitagórica.

O livro X dos *Elementos* de Euclides trata dos incomensuráveis. Introduz uma ferramenta importante no tratamento dos diferentes tipos de irracionais: o conceito de fracção contínua. Ou seja, uma fracção da forma

$$1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}$$

Uma notação mais simples e conveniente para esta fracção é [1; 3, 2, 4]. Dado qualquer número, racional ou irracional, é possível encontrar a sua fracção contínua. No caso dos primeiros, a fracção acaba, o que não acontece com os segundos. Para estes, a fracção prolonga-se indefinidamente. Eis os desenvolvimentos de alguns irracionais:

$$\begin{aligned}
\pi &= [3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 3,\ \ldots]\\
e &= [2;\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 1,\ 8,\ \ldots]\\
\sqrt{2} &= [1;\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots]\\
\sqrt{3} &= [3;\ 7,\ 15,\ 1,\ 292,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1,\ 3,\ \ldots]\\
\tau &= [1;1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,\ldots]
\end{aligned}$$

Os mistérios da transcendência

Um número diz-se *algébrico* se satisfaz uma equação polinomial com coeficientes racionais; caso contrário, diz-se *transcendente.* Por exemplo, $\sqrt{3}$ é algébrico, pois satisfaz a equação $x^2 - 3 = 0$. O número de ouro é outro número algébrico. Um exemplo simples de número transcendente é 0,1001000100001...

Provar que um número não é algébrico é, em geral, muito difícil. Liouville demonstrou, em 1844, que nem e nem e^2 podem ser raízes de uma equação do segundo grau com coeficientes inteiros. Mas tiveram de decorrer quase trinta anos para que Charles Hermite (1822-1901) amadurecesse estas ideias e mostrasse que e não pode ser raiz de equação alguma com coeficientes inteiros, isto é, e é transcendente. Este resultado ficou conhecido como teorema de Hermite. O matemático francês Hermite deixou contributos assinaláveis na teoria das funções.

O número π continuava a desafiar os matemáticos. Lambert, em 1770, e Legendre, em 1794, tinham provado que tanto π como π^2 eram irracionais. Em 1882, o matemático alemão Lindemann (1852-1939) publicou na revista *Mathematische Annalen* um artigo intitulado *Uber die Zahl* π, onde, finalmente, demonstrava a transcendência de π. Na sua prova (que recorre a métodos do cálculo diferencial e integral), Lindemann começou por mostrar que a equação $e^{ix} + 1 = 0$ não pode ser satisfeita se x for algébrico. (Recorde-se que i é um símbolo que satisfaz as regras aritméticas usuais e cujo quadrado vale -1.) Como Euler provara (usando desenvolvimentos em série)

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

pelo que π não é algébrico.

Ora aqui estava a chave para o problema da quadratura do círculo! Para que o problema fosse possível, o número π não podia ser transcendente...

A razão é esta: qualquer construção geométrica com os instrumentos euclidianos pode reduzir-se a uma sequência de resoluções de equações lineares ou quadráticas com coeficientes inteiros. Logo, qualquer comprimento que possa obter-se através de uma construção geométrica satisfaz uma destas equações polinomiais. Quadrar o círculo é equivalente a construir um segmento de comprimento π. Só que a sua transcendência impossibilita-o!

Quando Arquimedes disse «dai-me um ponto de apoio, que eu moverei a Terra!», não estava a fazer alarde da sua força física, mas antes a dar ênfase ao princípio da alavanca. Dizer que o círculo não pode ser quadrado apenas significa que tal objectivo não pode ser levado a cabo *apenas com régua e compasso*, ainda que seja possível com recurso a outros meios.

Remete-se o leitor interessado numa exposição exaustiva sobre os três problemas clássicos para o livro de Felix Klein *Famous Problems of*

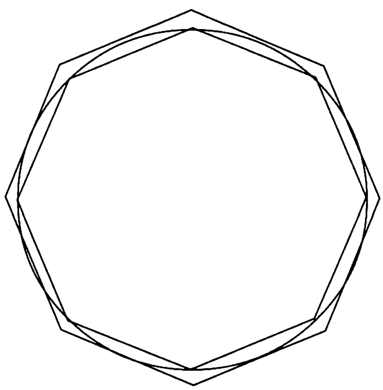
Elementary Geometry, trad. de Beman e Smith, reimp. em Nova Iorque, 1955.

Ainda π

Um parêntesis sobre π. Este número pode ser definido como a razão (constante) entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência.

Na Bíblia, no Livro dos Reis e nas Crónicas (Paralipómenos), o valor atribuído a π é 3. Os matemáticos egípcios encontraram uma aproximação mais exacta: 3,16. No tempo de Ptolemeu, por volta de 150 da nossa era, o valor usual para π era 3,1416. Arquimedes demonstrou, mediante a inscrição e circunscrição de polígonos de 96 lados num círculo, que o valor de π está compreendido entre $\frac{31}{7}$ e $\frac{310}{71}$. O método usado por Arquimedes é conhecido por *método dos polígonos crescentes e decrescentes*. Consiste em inscrever e circunscrever num círculo, utilizando régua e compasso, polígonos cujos lados vão sendo sucessivamente duplicados até *exaurir* a figura.

O círculo é o *limite* destas duas séries de polígonos; uns aproximam-no interiormente, outros exteriormente.



Na Idade Média, o método de Arquimedes foi entusiasticamente seguido. Francisco Vieta, considerado o mais eminente matemático do século XVI, aproximou o valor de π até dez casas decimais.

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \times \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \times \ldots$$

Em 1596, o matemático alemão Ludolf van Ceulen calculou π com 35 casas decimais e pediu que esses dígitos fossem o epitáfio da sua lápide tumular.

Com a invenção do cálculo infinitesimal, o método grego foi substituído por métodos algébricos com séries convergentes, fracções contínuas e produtos infinitos. Deve-se ao matemático inglês John Wallis (1616-1703) o famoso desenvolvimento de π segundo o produto:

$$\frac{2}{1}\times\frac{2}{3}\times\frac{4}{3}\times\frac{4}{5}\times\frac{6}{5}\times\frac{6}{7}\times\frac{8}{7}\times\frac{8}{9}\times\ldots$$

A série de Leibniz é a seguinte:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\ldots$$

Em 1699, Sharp calculou π com 71 casas decimais; em 1824, Gauss foi até às 200 casas decimais; em 1850, Richter alcançou 500 casas decimais; em 1873, Shanks conquistou uma efémera imortalidade determinando 707 casas decimais do desenvolvimento de π. Actualmente, os computadores fazem-nos sorrir de todo o tempo despendido pelos ilustres matemáticos do passado neste inglório labor.

Por que teriam os matemáticos desenvolvido tantos esforços para calcularem π? Vislumbram-se razões hipotéticas. Primeira: os matemáticos esperariam, estudando séries infinitas, achar indícios da natureza transcendente de π. Segunda: podendo obter-se de π — definido como simples razão geométrica — tanta relação aritmética com fraca relação aparente com a geometria, π revelava-se uma fonte de estímulo à criatividade matemática.

Sobre a história de e

Consideremos um número da mesma árvore genealógica de π — o *e*. Comecemos por contar uma velha história sobre *e*, relatada pelo matemático Jakob Bernoulli em 1690.

Um credor, desejando enriquecer rapidamente, em vez de cobrar um juro anual, ou semestral, ou mesmo mensal, decidiu cobrar juros diariamente, ou, mais genericamente, *n* vezes por ano, e adicionar os juros parciais ao capital inicial, passando assim os juros a contribuir para o cálculo do juro seguinte. Concretizemos. Suponhamos que o juro é cobrado n vezes por ano à taxa de x vezes 100% ao ano. Assim, de cada vez o valor cobrado é $\frac{x}{n}$ do capital acumulado. Designando por 1 o montante inicialmente depositado (a unidade), ao cabo da primeira cobrança obtém-se $1+\frac{x}{n}$, ao cabo da segunda

$$1+\frac{x}{n}+\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(\frac{x}{n}\right)=\left(1+\frac{x}{n}\right)^2$$

da terceira

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\left(\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{x}{n}\right)^2=\left(1+\frac{x}{n}\right)^3$$

e assim sucessivamente, de modo que ao cabo da n-ésima vez obtém-se

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Se x for 1, o dinheiro acumulado tende para 2,718..., ou e, cujo desenvolvimento decimal nunca acaba nem apresenta repetições. Esta observação experimental do problema dos juros deve ter surpreendido os matemáticos do século XVII, para quem o conceito de limite era ainda desconhecido.

O limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$, quando n tende para o infinito, é e^x. Que significa isto?

A ideia de limite é uma das fundamentais da análise matemática. Todos os que frequentaram matemática no ensino secundário detiveram-se um pouco no seu estudo. Como vimos, a descoberta do conceito deve-se ao inglês Isaac Newton e ao seu contemporâneo alemão Gottfried Wilhelm Leibniz. Newton e Leibniz inventaram o cálculo independentemente entre 1665 e 1675, e a disputa da prioridade da descoberta é uma história com pormenores rocambolescos que faz parte dos anais da ciência. O uso dos procedimentos de limite remonta aos gregos Eudoxo e Arquimedes.

De acordo com uma das definições usuais, e é o limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, quando n tende para o infinito. Intuitivamente, por maior que seja n, os valores de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ localizar-se-ão à volta de 2,71827, ou seja, de e. Quando $n = 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é 2, quando $n = 2$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é 2,25, quando $n = 100$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ é 2,71827.

A essência do conceito de limite de uma sequência é que esta pode aproximar o limite tanto quanto se deseje, mas a sequência nunca alcança o limite (excepção feita quando o valor do limite é inserido na sequência). A ideia recorda-nos os famosos paradoxos de Zenão de Eleia. No paradoxo da dicotomia, Aquiles, partindo de *A*, antes de alcançar o ponto *B*, tem de alcançar o ponto médio entre *A* e *B*, e depois o ponto médio da distância que resta, e assim indefinidamente. Como o processo envolve uma infinidade de passos, Aquiles nunca alcançará o fim. Os Gregos, que não compreendiam o infinito, não conseguiam assimilar a ideia de que a soma infinita

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

«converge» para 1.

O papel desempenhado por *e* na matemática, na física e na biologia, na arte e na música, é verdadeiramente espantoso. Analisaremos à frente aspectos desta versatilidade, observando as propriedades de duas curvas onde *e* tem proeminência: *a hipérbole* e a *espiral logarítmica.* Antes, uma pausa para falarmos de logaritmos e de duas quadraturas famosas: a da parábola e a da hipérbole.

Logaritmos

O matemático escocês John Napier, que nasceu em Edimburgo em 1550, era um excêntrico. Dotado de um engenho mecânico notável, que lhe permitiu conceber máquinas bélicas prodigiosas, Napier era também um protestante inflamado. Em 1593 publicou um livro com as suas concepções teológicas que lhe valeu grande popularidade. Intitulado *A Plaine Discovery of the Whole Revelation of Saint John,* nele proclamava Napier que o Papa era o Anticristo. Receoso de que o rei Filipe II de Espanha invadisse a Inglaterra, Napier planeava estratagemas militares, como o grande Arquimedes, no século III a. C., arquitectara a defesa de Siracusa com os seus espelhos incendiários.

Mas Napier haveria de ficar para a história sobretudo por outras razões. Napier desenvolveu durante cerca de vinte anos um conceito porventura tão importante para a matemática como o conceito de 0, o sistema de numeração decimal ou a notação posicional. O conceito introduzido por Napier que lhe conferiu um lugar firme na história, e que lhe levou cerca de vinte anos a desenvolver, foi o de *logaritmo.* O tratado de Napier sobre logaritmos, publicado em 1614, intitula-se *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio.*

Conforme aprendemos na escola secundária, o *logaritmo* de um número é a potência, ou expoente, ao qual um número fixo — *a base* — deve ser elevado de modo a igualar o número dado.

Por exemplo, o logaritmo de 100 na base 10 é 2, porque 10^2 é igual a 100.

Os logaritmos que então usávamos — e a que chamávamos *comuns* — eram relativos à base 10. Mas as nossas tábuas de logaritmos aludiam a «logaritmos naturais», denotados por *ln* ou *log.* Esses eram aqueles que o nosso professor garantia terem papel importante na matemática superior e referiam-se à base *e.* Por que se diriam os logaritmos na base *e naturais?* A base 10 parecia-nos tão natural... Só mais tarde haveríamos de compreender.

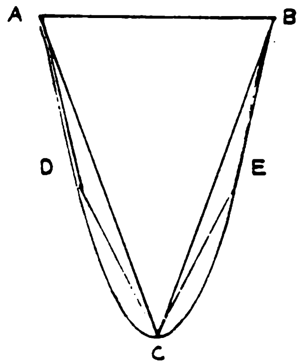
Kepler, nas *tabelas rodolfinas* (em honra do imperador Rodolfo II, seu patrono), que versavam registos astronómicos, utilizou os logaritmos para fazer cálculos rápidos. Aí incluiu um extenso desenvolvimento sobre a natureza e utilização dos logaritmos. As tabelas divulgaram o uso deste processo de cálculo, largamente utilizado durante cerca de trezentos anos, até ao advento dos computadores.

Quadrando a parábola

As quadraturas de figuras curvas figuram entre os mais intratáveis problemas da matemática. Uma das primeiras tentativas neste domínio — bem sucedida — deve-se a Arquimedes.

Arquimedes sentia verdadeiro fascínio pela parábola, a curva descrita por uma pedra arremessada ao ar durante a queda. Reza a lenda que tal interesse resultaria da descoberta de uma artimanha militar que lhe permitira defender Siracusa, sitiada durante dois anos pelos Romanos, aquando da segunda guerra púnica entre Roma e Cartago. Arquimedes descobrira prodigiosas máquinas bélicas — catapultas, como içar no ar os navios inimigos e como incendiá-los no alto mar — fazendo convergir os raios solares num certo ponto, justamente o foco de uma lente parabólica. As parábolas estão presentes em várias utilizações tecnológicas: nas antenas ditas parabólicas, nas superfícies reflectoras dos automóveis, nos satélites, etc.

Arquimedes determinou a área de uma secção parabólica, dividindo e subdividindo a secção numa sequência de triângulos cada vez mais pequenos, cujas áreas decrescem em progressão geométrica (a razão entre dois termos consecutivos é constante). Continuando o processo, Arquimedes poderia *aproximar* com progressivo rigor a secção parabólica por triângulos, aproximá-la tanto quanto o desejasse, *exaurindo-a* (v. figura). Este método é conhecido por *método de exaustão* (o termo «exaustão» surge pela primeira vez em 1647 com Grégoire de Saint-Vincent).



Ao somar as áreas dos triângulos parcelares, notou que a área se aproximava de $\frac{4}{3}$ da área do primeiro triângulo (o triângulo *ABC* da figura). Para maior precisão, havia que considerar mais e mais triângulos. Em terminologia actual, dizemos que, se a área do triângulo *ABC* for 1, a área dos sucessivos triângulos aproxima o limite $\frac{4}{3}$ à medida que o número dos triângulos tende para o infinito.

Arquimedes formulou o resultado *apenas* em termos de somas finitas. Com a sua visão estática do cosmos, os Gregos consideravam que todas as quantidades geométricas — e os infinitésimos — tinham grandezas fixas. Ora os conceitos de limite e infinito, pela sua própria natureza, requerem o recurso a *grandezas variáveis* (e um domínio de técnicas algébricas que ainda não possuíam). Por conseguinte, temendo o infinito, evitavam-no.

Quadrando a hipérbole

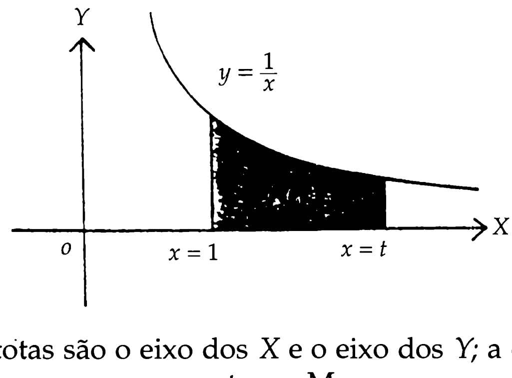
No começo do século XVII, os maiores matemátios franceses, René Descartes, Blaise Pascal e Pierre de Fermat, tentaram fazer a quadratura da hipérbole. Porém, essa glória haveria de caber ao jesuíta belga Grégoire de Saint-Vincent.

Arquimedes, apesar de ter sido bem sucedido a quadrar a parábola, não pôde aplicar o método de exaustão à hipérbole. A parábola, a elipse e a hipérbole são chamadas *(secções) cónicas,* porque podem ser obtidas seccionando um cone circular com um plano segundo determinados ângulos.

À hipérbole encontram-se associadas duas rectas, as suas tangentes no infinito. Com efeito, progredindo ao longo de cada ramo da hipérbole, aproximamo-nos cada vez mais dessas rectas, mas sem nunca as alcançarmos. Essas rectas são chamadas as *assíntotas* da hipérbole (designação que provém da palavra grega que significa *não se encontram*).

No século XVII, após a descoberta das leis de Kepler sobre as órbitas dos planetas, as cónicas tornaram-se um tópico importante de estudo. A determinação da área da hipérbole revelou-se um problema candente. Ao invés das restantes cónicas, a hipérbole não é uma curva *fechada:* cada um dos seus ramos vai para o infinito, pelo que importa clarificar o que se entende por área.

Atentemos na representação geométrica de um ramo da hipérbole $xy = 1$, o ramo no primeiro quadrante (v. figura).



As suas assíntotas são o eixo dos X e o eixo dos Y; a curva aproxima-se destes eixos sem nunca os tocar. Marquemos no eixo dos X o ponto fixo $x = 1$ e o ponto genérico $x = t$. Define-se a área da hipérbole como sendo a área limitada pelo gráfico de $xy = 1$, o eixo dos X e as rectas $x = 1$ e $x = t$. Obviamente, o valor numérico da área depende da escolha de t. E quadrar a hipérbole envolve expressar a área mediante uma fórmula em t.

Grégoire de Saint-Vincent dedicou grande parte da sua vida aos problemas de quadratura. Foi um dos seus pupilos, Alonso Anton de

Sarasa, que explicitou a relação $A = \log t$, onde A denota a área sombreada na figura. A hipérbole fora, finalmente, quadrada. Saint-Vincent solucionava uma questão já atacada sem êxito pelos Gregos 2000 anos antes. Ora para tornar a fórmula prática em cálculos numéricos havia necessidade de uma base conveniente para o logaritmo. Tal base é e.

A espiral logarítmica

Desde a Antiguidade que a *espiral logarítmica* tem sido motivo decorativo da preferência dos artistas. Provavelmente, nenhuma curva é tão apelativa para artistas, e também para cientistas e naturalistas, como esta. Com a possível excepção da circunferência, ocorre mais frequentemente na natureza do que qualquer outra.

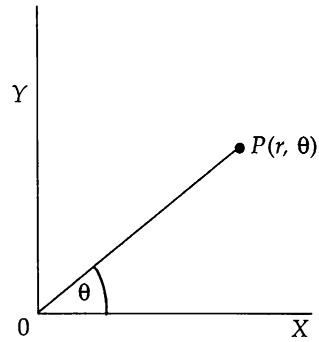
O naturalista escocês D'Arcy W. Thompson, no seu tratado de 1917, *On Growth and Form,* discute pormenorizadamente o papel da espiral logarítmica em várias espécies naturais — conchas, flores dos girassóis, etc. A estes exemplos há ainda que acrescentar as galáxias espirais, então desconhecidas.

Em 1914, Theodore Andrea Cook publicou a obra *The Curves of Life,* sobre a espiral e a sua presença na arte e na natureza.

Em 1932, Edwards B. Edwards, influenciado pela obra de Jay Hambridge de 1926, *Elements of Dynamic Symmetry,* sobre a razão dourada, a perfeição e a harmonia, escreveu *Pattern and Design with Dynamic Symmetry,* onde inclui centenas de padrões com o motivo da espiral.

Antes do estudo da espiral importa introduzir um importante conceito matemático: o de *coordenadas polares.* A ideia de Descartes de localizar cada ponto P no plano atribuindo-lhe coordenadas x e y (ditas *cartesianas* ou *rectangulares*) — e que são as suas distâncias relativamente a dois eixos (o eixo das *abcissas* X e o das *ordenadas* Y) — tem a seguinte alternativa: podemos localizar P, fornecendo a distância r do referido ponto a um ponto fixo O, chamado *pólo,* e o ângulo (geralmente designado por *teta* — θ) de OP com o eixo dos X. Os números r e θ dizem-se *coordenadas polares,* enquanto x e y se dizem rectangulares.

Newton, no *Method of Fluxions and Infinite Series,* menciona as coordenadas polares como um dos oito sistemas de coordenadas adequados para a descrição das curvas espirais. Foi, porém, um contemporâ-



neo de Newton, Jakob Bernoulli (um dos membros da famosa família de matemáticos suíços Bernoulli, ancestrais do músico Bach), quem utilizou extensivamente estas coordenadas no estudo de várias propriedades das curvas — declives, curvaturas, comprimento de arco, área, etc.

A curva favorita de Bernoulli (a quem se deve a descoberta de muitas curvas novas) era a espiral logarítmica. Chamou-lhe *spira mirabilis* (maravilhosa espiral) e expressou o desejo de que lha gravassem na sua tumba com a inscrição *Eadem mutata resurgo* (em tradução livre, *embora transformado, ressurgirei o mesmo*). Este desejo vinha na tradição do de Arquimedes, que, de acordo com a lenda, pediu que lhe gravassem na pedra tumular uma esfera com o cilindro circunscrito. (Uma das mais notáveis obras de Arquimedes intitula-se *Sobre a Esfera e o Cilindro.* O sábio ficara tão fascinado com a relação entre a área da esfera e a área lateral do cilindro circunscrito que escolheu essa figura para o acompanhar no além.) Por ignorância, ou comodidade, o desejo de Bernoulli não foi satisfeito integralmente: em vez da espiral logarítmica, o gravador da pedra gravou a espiral de Arquimedes, também dita *linear* (v. na próxima secção). A inscrição escolhida por Bernoulli para figurar na sua pedra tumular é uma alusão às propriedades da espiral. Bernoulli reverenciava tanto esta curva que escreveu assim:

> Visto que esta espiral maravilhosa, por uma tão singular e admirável peculiaridade, produz sempre uma espiral semelhante a si própria, de facto, precisamente a mesma espiral, de qualquer modo que seja envolvida ou evolvida, reflectida ou refractada... pode ser usada como um símbolo, quer da fortaleza e constância na adversidade, quer do corpo humano, que depois de todas as transformações que sofre, mesmo depois da morte, será restaurado no seu exacto e perfeito ser.

A equação da espiral logarítmica é

$$\log r = a\theta$$

onde a é uma constante e log é o logaritmo natural, ou hiperbólico, como então foi designado. Usualmente, a equação escreve-se na forma $r = e^{a\theta}$. A constante a determina o *crescimento* da curva. Assim, se a é positivo, a distância r ao pólo cresce (quando tomamos o sentido contrário ao dos ponteiros do relógio), resultando uma espiral para a esquerda. Quando a é negativo, r decresce e obtém-se uma espiral para a direita. As duas curvas são a imagem no espelho uma da outra.

Uma das propriedades mais relevantes da espiral logarítmica é a sua auto-semelhança: rodando-a de ângulos de igual amplitude, cresce a partir do pólo segundo uma razão constante, isto é, em progressão geométrica. Na natureza, esta propriedade é facilmente observável na concha do náutilo. As câmaras da concha são réplicas precisas umas das outras, crescendo geometricamente de tamanho.

Outro facto notável é a aparência da espiral ser a mesma em todas as direcções, mais precisamente: qualquer linha recta que passe pelo centro (pólo) intersecta a espiral segundo o mesmo ângulo (ângulo entre curvas num ponto é o ângulo entre as tangentes à curva no referido ponto). Desta propriedade provém outra designação para a curva: *espiral equiangular.* Esta propriedade confere à espiral a simetria perfeita do círculo. A circunferência pode ser vista como a espiral logarítmica de ângulo de 90°.

A invariância da espiral logarítmica relativamente a grande parte das transformações geométricas impressionou tanto Bernoulli que, num arroubo místico, escreveu o excerto que anteriormente transcrevemos. Consideremos, por exemplo, a inversão. O ponto P com coordenadas polares (r, θ), quando sofre uma inversão, é transformado no ponto de coordenadas polares $(\frac{1}{r}, \theta)$. Assim, a equação vem transformada em $r = e^{-a\theta}$, cujo gráfico é a imagem no espelho da espiral original.

Para cada ponto da espiral podemos determinar um *centro de curvatura,* justamente o centro da circunferência que *aproxima localmente a curva.* O raio de curvatura da curva nesse ponto é precisamente o raio desta circunferência. A *evoluta* da curva é o lugar geométrico dos sucessivos centros de curvatura. Geralmente, a evoluta de uma curva difere substancialmente da curva original. Surpreendentemente, a evoluta da espiral logarítmica é a própria espiral logarítmica. Mais ainda: a *cáustica* da espiral logarítmica — ou seja, a *envolvente* dos raios emanentes do pólo e reflectidos pela curva — é ainda a mesma espiral.

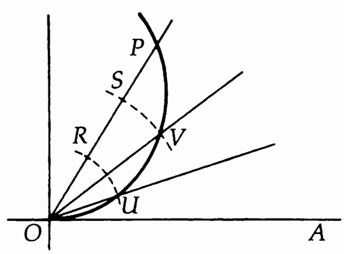
Chama-se *curva pedal* de uma curva relativamente a um ponto ao lugar geométrico dos pontos de intersecção das tangentes à curva com os raios traçados a partir do ponto perpendicularmente às tangentes. A curva pedal da espiral logarítmica relativamente ao pólo é ainda a mesma espiral.

A espiral de Arquimedes

Ao longo dos séculos ocorreram inúmeras tentativas de resolução dos três problemas da Antiguidade. Em 1775, a Academia de Paris tinha tantos trabalhos submetidos sobre esta matéria que, incapaz de lhes dar seguimento, aprovou uma deliberação que proibia a aceitação de novos contributos que versassem o tema.

Arquimedes também se dedicou ao estudo dos famosos problemas clássicos. Inventou uma curva — a chamada *espiral de Arquimedes* — que permite trissectar o ângulo com extraordinária simplicidade. (Mas não apenas com régua e compasso! E, quando mudam as regras, o jogo muda também...) A espiral de Arquimedes é o lugar geométrico dos pontos do plano descrito por um ponto que se move uniformemente ao longo de uma semi-recta que parte da origem, em torno da qual a semi-recta gira uniformemente. Em coordenadas polares a equação é $r = a\theta$.

Vejamos como se processa a trissecção do ângulo. Consideremos o ângulo de tal modo que o seu vértice e o primeiro lado coincidam com o ponto inicial O da espiral e a posição inicial OA da semi-recta (v. figura). Dividamos em três partes iguais o segmento OP, onde P é o ponto em que o segundo lado do ângulo corta a espiral. Sejam R e S os pontos assim determinados. Com centro em O e raios, respectivamente, OR e OS tracemos duas circunferências. Sejam U e V os pontos onde estas circunferências cortam a espiral. Então as rectas definidas por OU e OV trissectam o ângulo AOP.



6
Passatempos destes e de outros tempos

> Não há homens mais inteligentes do que os que são capazes de inventar jogos.
>
> LEIBNIZ

Sistema binário

Nem todas as civilizações adoptaram o sistema decimal como base de numeração. Segundo Aristóteles, a escolha da base 10 foi ditada por um acidente anatómico: o facto de termos 10 dedos nas mãos. Nalgumas tribos primitivas a escolha recaiu sobre a base 5 e o sistema eleito pelos Babilónios foi, como já vimos, o sexagesimal.

Na base 2, qualquer número pode exprimir-se como soma de potências de 2, do mesmo modo que, no sistema decimal, qualquer número pode escrever-se como soma de potências de 10. Assim, o número expresso no sistema decimal por 25 representa-se no sistema binário — que apenas usa os símbolos 0 e 1 — na forma 11001.

$$\begin{array}{ccc} \text{Decimal} & & \text{Binário} \\ 25 & = & 11001 \\ (2 \times 10^1) + (5 \times 10^0) & = & (1 \times 2^4) + (1 \times 2^3) + (1 \times 2^0) \end{array}$$

A referência mais antiga ao sistema binário surge numa fonte chinesa e remonta a 3000 a. C. Muitos séculos depois, Leibniz maravilhar-se-ia com este sistema, ao qual atribuía grande significação mística: a unidade representava Deus, o zero o nada e, porque Deus tudo criara a partir do nada, 0 e 1 representavam todo o universo. Leibniz comunicou-o ao jesuíta Grimaldi, presidente do Tribunal de Matemática na China, esta jóia de sabedoria, na esperança de que este pudesse provar ao imperador o erro que cometia ao professar o budismo, em vez de adoptar um *Deus que criara o universo do nada.* Esta ideia de Leibniz parece não ter alcançado o sucesso esperado de conversão da China ao cristianismo...

O sistema decimal apresenta conveniência em relação ao binário, por exemplo, no que respeita à comodidade de escrita. (Basta observar a representação decimal e a binária do exemplo anterior. No caso de números grandes, o número de dígitos envolvidos cresce drasticamente.) O sistema binário revela, porém, um alcançe surpreendente nas ciências informáticas, permitindo uma cómoda digitalização da informação. O sistema binário facilita também a solução de conhecidos problemas recreativos. Vejamos alguns exemplos, começando pelo *jogo dos cartões.*

Adivinhando números

Os populares jogos de salão que consistem em adivinhar números, previamente pensados por outrem, embora passíveis de sugerirem uma «percepção extra-sensorial» invulgar, não passam, em geral, de simples quebra-cabeças aritméticos. Frequentemente, a natureza desconcertante de tais ardis apenas provém da exploração de certas estruturas dos números. Concretizando, recorremos ao conhecido *jogo dos cartões.*

O jogo consiste em propor a um jogador voluntário que pense num número entre 1 e, digamos, 63. Exibimos, sucessivamente, seis cartões, que contêm uma «diversidade» de números, e perguntamos em quais destes cartões figura o número pensado. Adivinharemos o número se os cartões tiverem sido devidamente elaborados (como adiante se exporá).

Preparamos seis cartões, escrevendo no primeiro todos os positivos até 63 que, na base 2, incluam a potência 2^0. No segundo cartão escrevemos aqueles cuja expressão contém 2^1 ... e no último aqueles cuja escrita binária envolve 2^5.

Torna-se, assim, claro o modo de *adivinhar* qualquer número natural menor do que 63 pensado por outrem, desde que este revele em quais dos cartões figura o número.

O jogo dos cartões

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

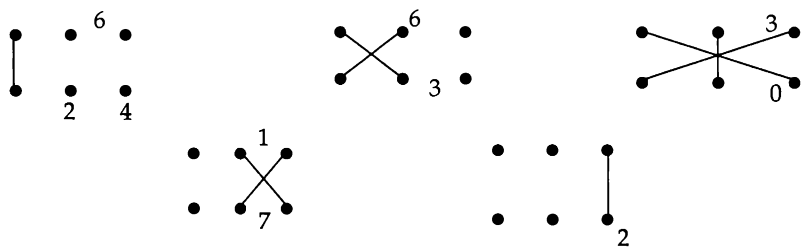
16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Multiplicações curiosas

O nosso método usual de multiplicação tem raízes antigas. De acordo com a lenda, decifrava o matemático indiano Bhaskara uma carta astrológica quando descobriu que o homem destinado a desposar a filha Lilavati viria a assassiná-lo. Tentando desviar Lilavati do destino funesto de desposar o homicida do próprio pai, proibiu-a de abandonar a sua companhia. Em simultâneo, presenteou-a com uma colecção de recreações matemáticas que a poupariam ao tédio e à qual deu o nome de Lilavati.

No *Lilavati,* Bhaskara apresenta um método de multiplicação conhecido naquele tempo. Para multiplicar 633 por 384, Bhaskara coloca três pontos em linha, repete os três pontos em linha noutra linha abaixo e faz cinco vezes o mesmo padrão. Os três pontos representam os três dígitos de cada factor da multiplicação e são cinco os passos do método de Bhaskara. Bhaskara une os pontos de cima aos de baixo, consoante os dígitos a multiplicar em cada passo. A multiplicação começa à direita e prossegue para a esquerda.



Na figura, os números abaixo de cada padrão representam o resultado da multiplicação em questão, apenas exibindo o dígito das unidades. O outro dígito é escrito em cima no padrão imediato à esquerda, sendo depois adicionado ao correspondente produto. Por exemplo, o padrão mais à direita indica que $4 \times 3 = 12$: escreve-se 2 e coloca-se o 1 no padrão subsequente. De seguida, calcula-se $(4 \times 3) + (3 \times 8) = 36$, adiciona-se o 1 que veio de trás, o que perfaz 37. Prosseguindo de acordo com este procedimento, conclui-se a operação, lendo-se o resultado da esquerda para a direita: 243 072.

A multiplicação usual não é mais do que um rearranjo deste antigo método indiano.

Existe uma fascinante variedade de outros processos de multiplicar. Em muitas regiões da Rússia, os camponeses utilizavam até há pouco tempo um método de multiplicação algo estranho, o qual, em essência, não difere do utilizado pelos Egípcios 2000 a. C. e que subsistiu na Europa até à época medieval (método de *duplatio mediatio*).

É mais simples explicar esta multiplicação através de um exemplo do que por uma descrição abstracta. Multipliquemos então 45 por 64. Comecemos por formar duas colunas. Uma das colunas obtém-se por sucessivas multiplicações por 2 e a outra por sucessivas divisões também por 2. Nas divisões de ímpares desprezam-se os restos. O resultado será:

Dividir ÷ 2	Multiplicar × 2
45	64
22	128
11	256
5	512
2	1024
1	2048

Na coluna à esquerda suprimem-se as linhas em que figuram pares (porque os pares são números diabólicos) e soma-se na coluna à direita o que resta. Deste modo obtém-se o pretendido:

Dividir	Multiplicar	
45	64	$64 = 2^0 \times 64$
22	128	$128 = 2^1 \times 64$
11	256	$256 = 2^2 \times 64$
5	512	$512 = 2^3 \times 64$
2	1024	$1024 = 2^4 \times 64$
1	2048	$2048 = 2^5 \times 64$
		$2889 = 45 \times 64$

A relação deste método com o sistema binário é óbvia. Com efeito, expressando 45 na notação binária (dividindo, sucessivamente, por 2, desprezando restos, substituindo ímpares por 1 e pares por 0), segue-se

$$\begin{aligned} 45 \times 64 &= (2^5 + 2^3 + 2^2 + 2^0) \times 64 \\ &= (2^5 \times 64) + (2^3 \times 64) + (2^2 \times 64) + (2^0 \times 64) \end{aligned}$$

Assim, o que o camponês faz ao multiplicar 45×64 não é senão multiplicar sucessivamente 2^5, 2^3, 2^2, 2^0 por 64 e tomar a soma.

Descrevemos de seguida uma multiplicação popular na Nova Zelândia na transição para o século XX. No fim de cada jornada, os encarregados das serrações recebiam uma tabela (semelhante à que a seguir se representa) que mostrava o número de toros preparados de cada um dos diferentes comprimentos.

Comprimento dos toros	24	25	26	27	28	29
Número de toros	34	42	96	0	40	53

A tarefa do encarregado consiste em calcular o comprimento total de todos os toros cortados. Começa na coluna da direita e procede para a esquerda, retendo em cada passo o total das operações efectuadas. Assim, escreve 53, depois 93 (53 + 40), depois de novo 93 (53 + 40 + 0), etc. O último número da sequência é 265, o número total de toros cortados (independentemente do comprimento). A esta lista de números é acrescentado mais um: 6095, que é o produto do último número — 265 — pelo comprimento do mais pequeno toro subtraído de uma unidade, isto, é 23. O comprimento total é a soma destes números. Em notação usual, tem-se:

$$53 + 93 + 189 + 231 + 265 + (265 \times 23) = 7019$$

Este procedimento tem a justificação seguinte:

$$\begin{gathered} 53 + 93 + 189 + 231 + 265 + (265 \times 23) = \\ = (1 \times 34) + (2 \times 42) + (3 \times 0) + (4 \times 96) + (5 \times 40) + (6 \times 53) + (265 \times 23) = \\ = [(6 \times 53) + (23 \times 53)] + [(5 \times 40) + (23 \times 40)] + [(3 \times 96) + (23 \times 96)] + \\ + [(2 \times 42) + (23 \times 42)] + [(1 \times 34) + (23 \times 34)] = \\ = (29 \times 53) + (28 \times 40) + (26 \times 96) + (25 \times 42) + (24 \times 34) \end{gathered}$$

A torre de Hanói

É muito conhecido o jogo da torre de Hanói. Sobre a torre de Hanói existe uma curiosa lenda que reza assim:

> No grande templo de Benarés, sob a cúpula que marca o centro do mundo, está colocada uma placa de bronze com três agulhas de diamante da espessura de uma cinturinha de vespa. Numa destas agulhas colocou Deus, no dia da criação, sessenta e quatro discos de ouro puro, o maior dos quais se apoia sobre a placa de bronze e os demais, por ordem decres-

> cente do raio, repousam sobre ele. É isto que constitui a torre de Brama. Dia e noite, incessantemente, mudam os sacerdotes os discos de uma das agulhas de diamante para outra, de acordo com as leis fixas e imutáveis de Brama. As leis exigem ao sacerdote que não mova mais de um disco de cada vez e que os coloque na agulha segundo a ordem decrescente dos diâmetros. Quando, de acordo com estes preceitos, os sessenta e quatro discos tiverem sido mudados da agulha onde Deus os colocou no dia da criação para outra, torre, templo e bramas transformar-se-ão em pó e, por entre um tremendo fragor, o mundo desaparecerá...

O número de passos para cumprir a profecia é $2^{64} - 1$, isto é,

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

Se os sacerdotes efectuassem um passo por segundo e trabalhassem 24 horas diárias durante os 365 dias do ano, o cumprimento desta tarefa exigiria 58 454 204 609 séculos, acrescidos de seis anos (isto supondo que não cometessem erro algum).

O número $2^{64} - 1$, que em notação binária se representa com 64 dígitos, aparece, como é sabido, na solução de um problema relacionado com a origem do jogo do xadrez. De acordo com uma velha fábula, o rei hindu Shirham concedeu ao grão-vizir Sissa Ben Dahir um presente à sua escolha como recompensa pela invenção do jogo do xadrez. Sissa, desconcertantemente, pediu um grão de trigo para colocar na primeira casa do tabuleiro, dois para a segunda, quatro para a terceira, oito para a quarta, e assim sucessivamente, até cobrir todo o tabuleiro. O rei, estupefacto, perguntou se era apenas isso que ele desejava, ao que o outro retorquiu ter pedido mais trigo do que todo o que havia naquele reino ou no mundo inteiro...

Voltemos ao jogo da torre de Hanói. O jogo consiste num tabuleiro com três cavilhas, de acordo com a figura (v. p. 145). Numa destas cavilhas estão colocados discos de diferentes raios, por ordem decrescente de baixo para cima (o mais pequeno fica no topo). O problema consiste em passar todos os discos de uma cavilha para outra, movendo de cada vez somente um e impedindo que um disco de maior raio pouse sobre outro de menor raio.

Designemos por *passo* a acção de transferir um disco de uma cavilha para outra e por $P(n)$ o número mínimo de passos necessário para mudar n discos.

Na tabela que se segue determina-se $P(n)$ em notação decimal (coluna do meio) e binária (terceira coluna):

Discos	Número de passos	Notação binária
1	1	1
2	3	11
3	7	111
4	15	1111
5	31	11111
...	...	...
n	$2^n - 1$	1 ... 1 (n dígitos)

É claro que

$$P(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \\ 2P(n-1) + 1, \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Mas, como $P(n-1) = 2P(n-2) + 1$, segue-se

$$P(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \\ 2^2P(n-2) + 2 + 2^0, \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

Prova-se facilmente que

$$P(n) = \begin{cases} 1, \text{ se } n = 1 \\ 2^{n-1} + 2^{n-2} + \ldots + 2^0, \text{ se } n > 1 \end{cases}$$

No tratamento matemático deste passatempo é adequado o uso do *princípio de indução matemática.*

A sequência dos inteiros é, porventura, o exemplo mais simples e mais natural de infinito (matemático). A sequência 1, 2, 3, ... *não tem fim:* ao inteiro n segue-se o inteiro $n + 1$. O procedimento *passo a passo* de geração dos inteiros (de n a $n + 1$) está no cerne de um tipo fundamental de raciocínio matemático: o *princípio de indução matemática,* originalmente formulado por Pascal no seu *Traité du triangle arithmétique.*

É bem conhecido o aforismo popular «cesteiro que faz um cesto faz um cento». A ideia subjacente à indução apenas traduz que aquilo que já fizemos uma vez podemos voltar a fazê-lo de novo. Sempre. Esta crença leva-nos eventualmente a prosseguir *ad eternum*, sem fim. E a fazer a própria ponte para o infinito. O princípio de indução matemática assenta no facto de após um inteiro r existir um subsequente inteiro $r + 1$ e de qualquer inteiro n poder ser atingido através de um número finito destes passos, partindo do inteiro 1.

Nas ciências naturais, *a indução empírica* procura, a partir da observação particular de fenómenos, o estabelecimento de leis gerais que os rejam. A *indução matemática* não deriva da experiência, é antes intuitiva e inerente à mente humana, quase instintiva.

Denotemos por A_n uma proposição que envolve o inteiro positivo n. Por exemplo:

> n rectas traçadas no plano dividem-no, quando muito, em 2^n partes.

Para se provar a veracidade desta proposição para todo o inteiro n não basta prová-la para os primeiros 10 ou 100, ou mesmo 1000, valores de n, como na indução empírica. Devemos antes usar um raciocínio do seguinte teor: comecemos por observar que, para $n = 1$, a proposição é verdadeira, uma vez que uma recta divide o plano em duas partes. Consideremos agora uma nova linha. Cada uma das partes anteriores será dividida em duas novas partes, a menos que a nova recta seja paralela à primeira. Em suma, para $n = 2$, temos, quando muito, $4 = 2^2$ partes. Tracemos uma terceira recta. Cada um dos domínios anteriores será cortado em duas partes, ou então permanecerá como anteriormente (em caso de paralelismo). O nú-mero total de partes é sempre não superior a $2^2.2 = 2^3$. Isto feito, podemos provar o caso seguinte de modo análogo, e assim indefinidamente.

A ideia essencial do argumento anterior consiste no estabelecimento da validade universal da proposição A_n para todos os valores de n, provando-a, sucessivamente, para uma sequência de casos A_1, A_2, ... O argumento desenvolve-se, provando a veracidade da proposição A_1, *lema 1*, seguindo-se a prova de que, *se* a proposição A_r é verdadeira, *então* a subsequente proposição A_{r+1} é *também* verdadeira, *lema 2*. Aceitar que a demonstração destes dois lemas é suficiente para provar a veracidade de *todas* as proposições A_1, A_2, A_3, ... é aceitar um princípio lógico tão fundamental em matemática como as regras clássicas da lógica aristotélica. Devemos aceitar este princípio — o princípio de Pascal — sem reservas, como aceitamos as regras ordinárias da lógica.

Peano, na sua obra *Arithmetices Principia,* estabeleceu como axioma o princípio de Pascal (v. «O infinito»).

Provar, por indução, a veracidade de uma proposição que depende de n consiste, assim, em mostrar a sua validade no caso de $n = 1$ e que, sendo válida para n, é válida para $n + 1$. Cumpridos estes requisitos, a proposição é verdadeira para a totalidade dos inteiros.

Os anéis de Cardano

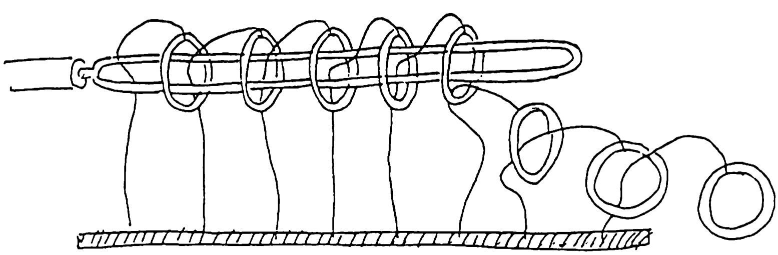
O jogo dos anéis de Cardano, ou dos anéis chineses, consiste em retirar todos os anéis de uma vara de acordo com as seguintes regras:

a) O primeiro anel pode sempre retirar-se;
b) Qualquer outro pode pôr-se ou retirar-se, se o contíguo (à esquerda, v. figura) estiver sobre a vara e os demais à direita fora da vara.

Este problema é um quebra-cabeças, com uma multiplicidade de passos e onde o próprio manejamento dos anéis é complicado. (Já a construção do jogo não oferece dificuldades.)

Designemos por $P(n)$ o número mínimo de passos requerido para retirar n anéis da vara. Se tivermos apenas um anel, é óbvio que $P(1) = 1$. No caso de 2 e 3 anéis, são precisos, respectivamente, 2 e 5 passos. No caso de 4 anéis, este número sobe para 10 e, se $n = 5$, então será $P(5) = 21$. Utilizando a notação binária, com 1 a designar um anel fora da vara e 0 um anel enfiado na vara, obtém-se para $P(n)$ a seguinte sequência:

1, 10, 101, 1010, 10101, ...



Deixa-se à curiosidade do leitor a dedução da expressão geral $P(n)$ em notação decimal.

O jogo do Nim

Na versão mais simples do jogo do Nim, dois jogadores retiram, sucessivamente, contas de um monte ou de uma fiada. Cada um dos jogadores retira a seu bel-prazer um número de contas compreendido entre 1 e um número máximo pré-fixado. Vence aquele que retirar a última conta.

Imaginemos, por exemplo, um monte de 21 contas e que cada um dos dois jogadores deve retirar em cada jogada entre 1 e 5. O primeiro jogador ganhará se na primeira jogada levantar 3 contas e em cada uma das outras retirar o complementar em relação a 6 do número escolhido pelo adversário.

Numa modalidade mais elaborada existem vários montes ou fiadas. Dois jogadores jogam alternadamente e em cada jogada o jogador retira 1 ou mais contas de um dos montes à sua escolha. (Note-se que não se fixa o número máximo, mas unicamente o mínimo, que é 1.) Aquele que retirar a última conta e esgotar os montes ganha.

Designemos por *nímeros* os números

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ \ldots$$

São, afinal, os números comuns, mas tomamos *novas* regras de adição, as quais nos permitem uma estratégia vencedora para o nosso jogo. Com efeito, consideremos os nímeros munidos da adição + definida de acordo com as seguintes regras:

1) Dois nímeros iguais somam zero;
2) Se o maior de dois nímeros distintos for 1, 2, 4, 8, 16, etc. (ou seja, uma potência de 2), os números adicionam-se do modo ordinário usual.

Assim, nesta aritmética:

$$5 + 5 = 0, \qquad 5 + 6 = (4 + 1) + (4 + 2) = (4 + 4) + (1 + 2) = 0 + 3$$

Como sabemos a estratégia adequada no Nim? Se jogarmos com uma só fiada, devemos procurar fazer um 0 (que nos dará a vitória) e evitar qualquer outro nímero.

Suponhamos agora três fiadas, uma com 3, outra com 5 e outra com 7 contas. A aritmética Nim dá

$$3 + 5 + 7 = 1$$

Devemos procurar uma configuração 0. Se nos movermos para qualquer das configurações

$$2,\ 5,\ 7; \quad 3,\ 4,\ 7; \quad 3,\ 5,\ 6$$

venceremos, pois

$$2 + 5 + 7 = 3 + 4 + 7 = 3 + 5 + 6 = 0$$

Consideremos o número de contas de cada fiada expresso na base 2. A estratégia vencedora consiste em assegurar que seja par o número de uns em cada fiada. Se tal ocorrer, qualquer movimento destruí-la-á. Se tal não ocorrer, será sempre possível repô-la. Assim, partindo da configuração

$$A - 100011; \quad B - 11010; \quad C - 10110$$

deve substituir-se $A - 100011$ por 1100, retirando 111 pedras (ou seja, 7 contas).

$a+b$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	0	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
2	2	3	0	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
3	3	2	1	0	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
4	4	5	6	7	0	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
5	5	4	7	6	1	0	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
6	6	7	4	5	2	3	0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
7	7	6	5	4	3	2	1	0	15	14	13	12	11	10	9	8
8	8	9	10	11	12	13	14	15	0	1	2	3	4	5	6	7
9	9	8	11	10	13	12	15	14	1	0	3	2	5	4	7	6
10	10	11	8	9	14	15	12	13	2	3	0	1	6	7	4	5
11	11	10	9	8	15	14	13	12	3	2	1	0	7	6	5	4
12	12	13	14	15	8	9	10	11	4	5	6	7	0	1	2	3
13	13	12	15	14	9	8	11	10	5	4	7	6	1	0	3	2
14	14	15	12	13	10	11	8	9	6	7	4	5	2	3	0	1
15	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

O sistema binário e a informática

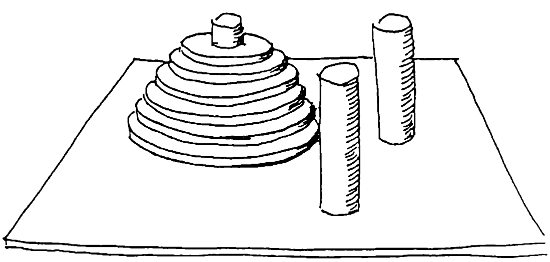
Touring e John von Neumann conceberam o mais remoto ancestral dos computadores: a *máquina de Touring.* Esta máquina tem uma estrutura simples: é basicamente uma fita dividida em *células* e uma *cabeça* que capta a informação contida na fita, ou transmite informação para a fita, usando os símbolos 0 e 1. Qualquer informação pode ser codificada utilizando apenas *zeros* e *uns.* Por exemplo, no código Morse, o *zero* representa o ponto e o *um* o traço. O comportamento da máquina é controlado por uma espécie de programa, conhecido por *programa de Touring-Post.* O programa consiste em passos numerados, cada um dos quais consiste numa das seguintes instruções:

Escrever 1 na célula corrente;
Escrever 0 na célula corrente;
Deslocar uma célula para a direita;
Deslocar uma célula para a esquerda;
Avançar para o passo k do programa se a célula corrente tiver 1;
Avançar para o passo k do programa se a célula corrente tiver 0;
Parar.

Além do programa, a fita deve conter dados iniciais para o programa funcionar. Outro problema importante é o da paragem. Longo caminho foi já percorrido desde o arcaico projecto de Touring e von Neumann. E dificilmente ocorrerá a um leigo que na base dos computadores sofisticados se encontra uma codificação com *zeros* e *uns...*

Bibliografia

Boyer, C., *História das Matemáticas,* São Paulo, Brasil, Ed. Blücher, 1974.
Gardner, M., *Ah, Descobri!,* Lisboa, Gradiva, 1990.
Kasner, E., e Newman, J., *Matemáticas e Imaginación,* Buenos Aires, Hachette, 1994.



7
Os primos

Primos — o que são?

Um número natural maior do que 1 será *primo* se apenas puder ser dividido exactamente (isto é, sem resto) por si próprio e por 1; caso contrário, diz-se *composto.* O número 5 é primo e o 6 (= 2 × 3) é composto (não primo). O número 1 é um caso à parte: nem é primo nem composto.

Há mais de 2000 anos que os primos têm vindo a ser estudados com empenho, porventura devido ao seu *mistério* e à sua grande importância. Mas não só os primos têm mistério. Pois que dizer da própria aritmética? De acordo com o teorema da incompletude de Gödel, a aritmética possui, pelo menos, uma propriedade indecidível, ou seja, cuja veracidade ou falsidade jamais pode ser demonstrada a partir dos axiomas da aritmética.

Sabe-se, provavelmente desde tempos ancestrais, que qualquer número se exprime de forma única (à parte a ordem) como produto de primos. Este é o teorema fundamental da aritmética (TFA), enunciado explicitamente por Gauss em 1801 nas *Disquisitiones Arithmeticae,* mas já intuído por Euclides. (As proposições 30, 31 e 32 dos *Elementos* estão relacionadas com o conteúdo do TFA.) Podemos, assim, dizer que os primos são as fundações de todo o edifício dos números inteiros, servindo a aritmética como o alfabeto serve a linguagem. Como adiante circunstanciaremos, a factorização de um número *grande* num produto de primos é uma questão de grande interesse e com importantes aplicações correntes.

Os primos desempenham um papel fundamental em vários ramos da matemática, como a teoria dos números, a geometria, a teoria dos grupos, a análise e a criptografia. O que os tornará assim tão especiais? Don Zagier, especialista em teoria dos números, elucida-nos sumariamente sobre o carácter insólito dos primos:

> Há dois factos acerca dos números primos de que espero convencê-los tão profundamente que ficarão para sempre marcados nos vossos corações. O primeiro consiste em que são os objectos mais arbitrários estudados pelos matemáticos: crescem como ervas daninhas por entre os números naturais, parecendo não obedecer a outra lei, além da do acaso, e ninguém pode prever onde vai surgir o próximo número. O segundo facto afirma exactamente o contrário: os números primos apresentam uma regularidade tão espantosa que existem leis que regem o seu comportamento e eles cumprem estas leis quase com uma precisão militar.

A teoria dos números é um ramo da matemática onde vários problemas têm enunciados que podem ser entendidos com facilidade, mas cujas soluções requerem o mais sofisticado tratamento matemático. São disso exemplo as duas questões seguintes:

— Determinação de um processo «rápido» de factorizar naturais «grandes»;
— O «último teorema» de Fermat.

Várias questões sobre primos ocorrem naturalmente. Por exemplo, quantos primos existem e como estão distribuídos *pelos* naturais? Como é que podemos reconhecer os primos? Ou seja, como podemos averiguar facilmente se um natural de uma ordem de grandeza elevada é ou não primo? Por exemplo, o número 19 979 é primo ou composto? O recurso exclusivo à definição requer 19 977 divisões, já que todos os números de 2 a 19 978 são possíveis divisores. Existirá alguma fórmula, ou uma regra simples, que gere apenas primos, mesmo que os não forneça todos? E, no caso de um número composto, poderemos factorizá-lo por um processo alternativo ao de *tentativa e* *erro?* Ou seja, existirá algum processo *eficiente* de decompor um número em factores primos? (*Eficiente* significa os cálculos envolvidos no processo não crescerem demasiado rapidamente com o tamanho do número.) Que propriedades dos primos serão merecedoras de atenção e quais devem ser consideradas simples curiosidades ou passatempos?

Durante muito tempo, o estudo dos primos foi encarado como um jogo intelectual, desprovido de qualquer utilização prática. Actualmente, os números primos desempenham um papel importante em criptografia, no sistema de codificação e descodificação de mensagens (v. a secção «Códigos secretos»). Mas talvez seja inútil especular sobre o que é útil em matemática. Afinal, a história nesta matéria acaba sempre por surpreender-nos. E é sempre o tempo quem tem a última palavra...

Infinitos primos

Euclides provou que existe um número infinito de primos (*Elementos*, IX, 20). Contudo, o infinito não aparece explicitamente, mas antes como potencialidade:

> Os primos são mais do que qualquer número dado.

Podemos demonstrar facilmente (por redução ao absurdo) esta proposição. Suponhamos que existe um número finito de primos. Concretamente, suponhamos que o conjunto dos primos é

$$\mathcal{P} = \{p_1 = 2, \ldots, p_N\}$$

Multipliquemos todos os primos e adicionemos 1. Seja $K = (p_1, \ldots, p_N) + 1$. Este número não é primo (porquê?). Mas deve ter um factor primo, o qual figura na listagem original onde estão todos os primos. Seja q um factor primo de K Então, como já observámos, q pertence a $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_N\}$. Portanto, existe algum i em $\{1, \ldots, N\}$ tal que $q = p_i$. Ora é óbvio que q divide $p_1, \ldots, p_i, \ldots, p_N = K - 1$. Mas, por hipótese, também q divide K. É claro que q divide a diferença entre ambos, $K - (K - 1) = 1$, o que é absurdo. Logo, há uma infinidade de primos.

Crivo de Eratóstenes

A sequência dos primos começa por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... e continua de modo bastante irregular. O crivo de Eratóstenes (Eratóstenes de Cirene viveu no século III a. C.) permite encontrar primos. Como? Visto que este processo é mais fácil de pôr em prática do que de descrever em abstracto, ilustrá-lo-emos através de um exemplo. Vejamos como determinar os primos até 200. Escrevamos os naturais, começando em 2 e indo até ao número desejado, neste caso 200:

$$2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 198, 199, 200$$

O primeiro número que encontramos é 2, um primo. Deixemos 2 de lado e prossigamos, eliminando todos os números de 2 em 2, isto é, eliminemos 4, 6, 8, 10, ..., ou seja, todos os números pares até 200. Voltemos ao começo até encontrarmos o primeiro número posterior a 2 que não foi eliminado: o 3, um primo. Deixemos 3 de lado e eliminemos todos os números de 3 em 3, ou seja, 6, 9, 12, 15, ... Prossigamos deste modo, repetindo este procedimento para 5, ..., N, onde N é o maior inteiro não superior a $\sqrt{200}$ (a chamada *parte inteira* de $\sqrt{200}$). Os números que não foram eliminados são os primos até 200. (Por que basta proceder até à parte inteira de $\sqrt{200}$? Porque, dado um número até n, ou é primo, ou, sendo composto, tem um divisor primo p, com p menor do que $\sqrt{n}$.) Uma vez que $\sqrt{200} = 14, 142...$ apenas temos de eliminar os números de 2 em 2, ..., de 13 em 13. De facto, como 2 é o único primo par, podemos partir da lista dos naturais ímpares: 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., 199, e eliminar os números de 3 em 3, ..., de 13 em 13.

Números perfeitos

Um natural chama-se *perfeito* se for igual à soma dos seus divisores próprios. (Os divisores próprios de um número são todos os divisores do número diferentes do próprio número.) Por exemplo, 6 é um número perfeito, pois $6 = 1 + 2 + 3$. Os números perfeitos menores do que 10 000 são 6, 28, 496 e 8128. Os antigos pensavam que os números perfeitos tinham significado especial ou mesmo mágico.

Euclides mostrou que, se $2^n - 1 = p$ é um primo, então $(2^{n-1}) \times p$ é um número perfeito. Esta fórmula, com $n = 3$, permite encontrar com facilidade 28 (verifique!). Será então pertinente perguntar quando é que $2^n - 1$ é um primo?

Nos começos do século XVII só eram conhecidos os seis primeiros expoentes geradores de primos (mediante esta fórmula): 2, 3, 5, 7, 13 e 19. Em 1644, o teólogo e matemático francês Marin Mersenne, na obra *Cogitata physica mathemathica*, anunciou os quatro primos seguintes: 31, 67, 127 e 257. Mersenne enganou-se e a sequência correcta é 31, 61, 89, 107, 127 e 521. Os primos da forma $2^n - 1$ são conhecidos por *primos de Mersenne.*

Euler mostrou que qualquer número perfeito *par* tem de ter a forma de um primo de Mersenne. A existência, ou não existência, de números perfeitos ímpares é ainda um problema em aberto. O que sabemos é que não existe número perfeito ímpar algum menor ou igual a 10^{300}, pelo que, a existir, deve ser verdadeiramente gigantesco.

Serão estes problemas importantes ou, no mínimo, interessantes? Aqui a opinião dos matemáticos divide-se...

Se $2^m - 1$ for primo, então m tem de ser primo. Caso contrário, sendo m composto, digamos da forma $m = kj$, ter-se-ia

$$2^m - 1 = 2^{kj} - 1 = (2^j - 1)\ (2^{(k-1)j} + 2^{(k-2)j} + \dots + 1)$$

(Comprove!) Mas então $2^m - 1$, ao admitir uma factorização, não seria primo. Contradição!

Para q primo, define-se o *q-ésimo número de Mersenne* por

$$M_q = 2^q - 1$$

Como anteriormente referimos, alguns destes números são primos, enquanto outros são compostos. Por exemplo, M_2, M_3, M_5, M_7, são primos, enquanto $M_{11} = 23 \times 89$. O livro de Paulo Ribenboim tem uma lista dos 30 primos de Mersenne conhecidos em 1988, dos quais o maior é $M_{216\,091}$. Mais recentemente, foi descoberto que $M_{756\,839}$ e $M_{859\,433}$ são primos. Em notação comum, o primo $M_{756\,839}$ ocupa 47 páginas densamente escritas.

Não se sabe se existe, ou não, um número infinito de primos de Mersenne. Como também jamais se provou se há infinitos números perfeitos.

Números de Fermat

Se $2^m + 1$ for primo, então m tem de ser da forma $m = 2^n$. Com efeito, se m admitir uma factorização da forma $m = kj$, com $k \geq 3$ ímpar, teremos

$$2^m + 1 = 2^{kj} + 1 = (2^j + 1)(2^{(k-1)j} - 2^{(k-2)j} + \ldots + 1)$$

o que contraria a primalidade de $2^m + 1$. Define-se o *n-ésimo número de Fermat* do seguinte modo:

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

Temos então que $F_0 = 3$, $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65\,537$, sendo primos todos estes naturais. Fermat conjecturou que F_n é sempre primo, qualquer que seja n, mas Euler descobriu que $F_5 = 641 \times 6\,700\,417$ é composto. Os números F_5 até F_{21} são compostos, sendo a factorização desconhecida na maioria dos casos: F_9 só foi factorizado completamente em 1990. Desconhece-se se existem, ou não, outros números de Fermat primos, além de F_0, F_1, F_2, F_3, F_4.

Conjecturas

A título de curiosidade, mencionamos de passagem duas conjecturas em aberto relativas a primos:

A conjectura de Goldbach

A conjectura de Goldbach afirma que qualquer natural par, $n \geq 6$, pode ser escrito como soma de dois primos ímpares. A veracidade desta conjectura foi verificada até 10^8 por Stein e Stein, 1965. (Para maior desenvolvimento sugere-se o livro de Ribenboim.)

A conjectura dos primos gémeos

Se p e $p + 2$ são ambos primos, dizem-se *primos gémeos*. Por exemplo, 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19, ... são primos gémeos. A observação de tabelas de primos leva-nos a conjecturar a existência de um número infinito de «primos gémeos». A conjectura encontra-se em aberto, ou seja, não sabemos se é verdadeira ou falsa.

O maior par de primos gémeos conhecido é $1\,692\,923\,232 \times 10^{4020} \pm 1$ (Dubner, 1993). Foi calculado por Brent, em 1976, que $\pi_2(10^{11}) = 224\,376\,048$, onde $\pi_2(n)$ designa o número de primos $p \leq n$ tal que $p + 2$ é também primo.

Factorização

Não é muito fácil averiguar se um número de vários dígitos é ou não primo, mas, em termos gerais, é muito mais difícil factorizar um número de uma certa grandeza do que mostrar que um primo da mesma ordem de grandeza é primo. Este facto (empírico) está por detrás de um processo de construção de códigos secretos.

Existem actualmente várias técnicas (e cada vez mais sofisticadas) de factorização de números grandes. Muitas destas técnicas são elaborações de uma observação elementar fundamental: se é possível escrever n (natural) na forma $n = u^2 - v^2$, então $n = (u + v)(u - v)$, e, assim, obtemos uma factorização, a não ser que $u - v = 1$. Esta observação deve-se a Fermat, que a utilizou para o número 2 027 651 281 e, ao cabo de 12 passos, encontrou para factorização o produto $46\,061 \times 44\,021$.

A factorização de um número por tentativas, experimentando dividi-lo por todos os números (até à sua raiz quadrada) não é um processo eficiente. Um computador que efectuasse um milhão de tentativas por segundo demoraria cerca de um dia a resolver o problema para um número com trinta dígitos, um milhão de anos no caso de um número com quarenta dígitos e 10 quadriliões de anos no caso de um número com cinquenta dígitos.

Nos últimos anos, sobretudo devido aos progressos informáticos e ao desenvolvimento de computadores poderosos, testar a primalidade tornou-se menos espinhoso. Já na factorização os sucessos não têm sido tão apreciáveis. Mas vejamos agora como se aplica a factorização de primos à criptografia.

Códigos secretos

A ideia dos códigos secretos perde-se no tempo. Júlio César codificava as ordens enviadas aos seus generais e na literatura abundam relatos de decifração de mensagens secretas (v., por exemplo, o livro *The Adventure of the Dancing Man,* de Sir Arthur Conan Doyle, Nova Iorque, Clarkson N. Potter, Inc., 1967).

Francisco Vieta, o maior matemático do século XVI (ainda que não fosse matemático de profissão), prestou serviços ao rei Henrique IV de França na guerra contra a Espanha decifrando missivas enviadas pela coroa de Espanha aos seus governadores nos Países Baixos. Os Espanhóis ficaram tão impressionados com a descoberta por Vieta da cifra-chave que atribuíram o feito a acto de bruxaria.

O sistema de codificação R. S. A. de 1975, devido a Rivest Shamir e Adleman, também conhecido por *sistema de chave pública,* consiste sumariamente no seguinte: o receptor deve escolher dois primos, p e q (da ordem dos 100 dígitos), e multiplicá-los, constituindo $n = pq$ o seu endereço. A chave do código — n — pode ser tornada pública, mantendo-se, porém, secretos os primos, os quais servirão para a descodificação da mensagem.

O emissor que pretenda comunicar uma mensagem secreta ao receptor associa à sua mensagem M um número P (por exemplo, associando o espaço entre as letras ao número 00, a letra a ao número 01, a letra b ao número 02, etc., ou qualquer outra forma conhecida). Este número é codificado através de uma função de codificação f que depende de n e é conhecida. Assim, ao número P é associado um número $f(P)$, mas, como só o receptor conhece a função de descodificação f^{-1}, pois esta depende da factorização de n, ao aplicar-se a descodificação ao número codificado $f(P)$, obtém-se P, seguindo-se a passagem para a mensagem escrita M de acordo com a chave atrás referida.

A segurança deste método baseia-se na impossibilidade em tempo útil de factorização de primos grandes.

Dois *primos grandes,* da ordem de grandeza dos 100 dígitos, podem ser multiplicados pelo computador com relativa facilidade. Para codificar uma mensagem há que levar a cabo esta operação com a ajuda da chave pública. Porém, descodificar envolve a factorização de um número composto com factores de uma centena de dígitos. Ora esta tarefa, mesmo recorrendo a um computador sofisticado, revela-se virtualmente impossível.

Shamir e Adleman propuseram o famoso problema de criptografia conhecido por R-129, que consiste na decifração de uma mensagem, cuja parte mais delicada requer a factorização de um número n de 129 algarismos nos anteriormente mencionados primos p e q. Em 1977, o tempo estimado para este empreendimento era de 40 000 biliões de anos! Contudo, o método de factorização de Pomerance de 1981, conhecido por *crivo quadrático*, aliado aos avanços no mundo dos computadores, permitiu que Atkins, Graff, Lenstra e Leyland, em trabalho simultâneo com 600 voluntários recrutados na Internet, conseguissem descobrir os primos em *apenas* 8 meses de labor! Assim, foi decifrada na noite de 26 de Abril de 1994 a célebre mensagem de Rivest, Shamir e Adleman, mantida inviolável durante dezassete anos.

Testando a primalidade

Além do famoso «último teorema» de Fermat, outro teorema ostenta o nome do grande matemático amador francês. Referimo-nos ao «pequeno teorema» de Fermat, um teorema com espantosas aplicações, nomeadamente na testagem da primalidade. Antes de expormos o seu conteúdo, impõe-se um breve parêntesis a propósito da chamada *aritmética do relógio.*

Pensemos num relógio com as suas doze horas marcadas, mas onde, em vez de 12, escrevemos 0. O relógio não distingue entre as 2 da tarde de hoje e as 2 da tarde de amanhã, ou da semana seguinte, ou tão-pouco entre as 2 da tarde e as 2 da manhã. Por exemplo, 3 horas após as 5 são 8, isto é, $3 + 5 = 8$, mas $3 + 10$ é 1 e $3 + 11$ é 2. Designemos esta aritmética, onde todos os múltiplos de 12 são ignorados, por aritmética *módulo 12.* Assim, por exemplo, $10 + 3 = 13 \equiv 1$, mas, para evitar confusões, substituamos o símbolo = por ≡. Este símbolo designa-se por *congruência.* A ideia desta aritmética deve-se a Gauss e foi desenvolvida na sua obra *Disquisitiones Arithmeticae,* um importante marco na teoria dos números. É claro que qualquer número natural n serve como módulo. Havendo que desprezar os múltiplos de n, o sistema resultante consiste apenas nos números $0, 1, 2, ..., n - 1$.

Vejamos agora em que consiste o pequeno teorema de Fermat. Seja p um primo e a um número não divisível por p. O teorema afirma que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, onde mod p nos recorda que estamos a operar módulo p. Ou seja, o teorema garante que a^{p-1} dá resto 1 quando dividido por p.

Exemplifiquemos: 2048, quando dividido por 12, dá resto 8, pelo que 12 não é primo. Note-se que, sem recurso a qualquer factorização, provámos a não primalidade de 12. Este teste pode ser extremamente útil no caso de valores muito grandes de p, podendo o cálculo de a^{p-1} módulo p ser feito num tempo que cresce com o *cubo* dos dígitos de p. E tudo funciona bem desde que saibamos que valor de a escolher...

Já que falámos de congruência, façamos uma breve pausa para referir um problema onde *congruência* surge com nova acepção — o *problema dos números congruentes.*

Neste contexto, um *número congruente* é um natural que pode exprimir a área de um triângulo rectângulo cujos lados têm comprimentos dados por racionais. O problema dos números congruentes, que remonta aos Gregos e foi estudado no século X por matemáticos árabes, consiste em fornecer uma classificação efectiva dos números congruentes. Ou seja, quais são os números naturais que podem dar a área de um triângulo rectângulo cujos lados tenham comprimentos racionais? Este problema foi «quase» resolvido (por J. Tunnell em 1983) usando a geometria algébrica. A lacuna implícita na palavra «quase» tem a ver com uma conjectura ainda em aberto em geometria algébrica.

A distribuição dos primos

A distribuição dos primos é um problema intrigante para os matemáticos. Estarão os primos distribuídos de acordo com alguma *regularidade* ainda desconhecida? Com que frequência ocorrem? Serão cada vez «mais e mais» ou cada vez «mais e mais» raros? Encontrar-se-ão essencialmente dispersos ou com algum *tipo* de concentração? Aparentemente, a sequência dos primos é bastante irregular:

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59
61 67 71 73 79 83 89 97 101 103 107 109 113
127 131 137 139 149 151 157 163 167 173...

Sendo x um número real positivo, denotemos por $\pi(x)$ o número de primos menores ou iguais a x.

O gráfico desta função apresenta um comportamento muito irregular, com saltos e descontinuidades, pelo que os especialistas tentaram encontrar uma curva mais regular que se lhe ajustasse. Gauss (1792) observou que, para x suficientemente grande, a função $\pi(x)$ é bem aproximada por $x/\log x$. (No denominador surge o logaritmo natural.)

O facto foi demonstrado por Jacques Hadamard e Charles-Jean de la Vallée Poussin, independentemente, em 1896 e é conhecido por teorema dos números primos. O teorema afirma:

$$lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{(x/\log x)} = 1$$

Observe-se que *não* estamos a dizer que a diferença $|\pi(x) - x/\log x|$ tende para zero. Por exemplo, se $x = 4 \times 10^{16}$, então $\pi(x) \sim 1{,}075 \times 10^{15}$, enquanto $x/\log x \sim 1{,}046 \times 10^{15}$. Neste caso, $\pi(x) - x/\log x \sim 29 \times 10^{12}$, enquanto $\pi(x)/(x/\log x) \sim 1{,}028$.

Para x grande, Gauss reconheceu que a *função integral logarítmica* de x, ou $\mathrm{Li}(x)$, definida por $\mathrm{Li}(x) = \int_2^x dt/\log t$, aproxima razoavelmente bem a função número de primos $\pi(x)$.

Euler

A publicação em 1748 de dois volumes da autoria do prolífico matemático e físico suíço Leonhard Euler marcou o começo de um fascinante desenvolvimento da teoria dos primos. Nesta obra, intitulada *Introduction in analysis infinitorum,* Euler apresentou pela primeira vez a conexão entre primos e inteiros, expressa pela seguinte fórmula:

$$\frac{1}{1-2^{-n}} \times \frac{1}{1-3^{-n}} \times \frac{1}{1-5^{-n}} \times \ldots = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \ldots$$

No produto infinito à esquerda, os denominadores das fracções progridem através de todos os primos, 2, 3, 5, 7, etc. Na série à direita (uma série é uma soma com um número infinito de parcelas), os denominadores percorrem os números naturais, 1, 2, 3, etc., cuja distribuição não apresenta enigmas. Os matemáticos tentaram estudar este segundo membro — a chamada *função zeta* —, na esperança de melhor conhecerem o primeiro membro.

A fórmula de Euler inspirou um novo processo de contagem de primos. Designemos por $\psi(x)$ o número estimado de primos menores ou iguais a x.

A função $\pi(x)$ define-se adicionando uma unidade sempre que ocorrer um primo. Para se obter $\psi(x)$ efectua-se também uma soma: começa-se por 2 (primo), que contribui para a soma com *o peso* log 2, depois vem o 3 (primo), que contribui com log 3. A seguir vem 4, que é uma potência de 2 (primo), pelo que se soma log 2. Mais concretamente, se o inteiro é um primo p, ou a potência de um primo p, adiciona-se $\log p$ à contagem; de outro modo, adiciona-se 0. Suponhamos que x é 10. Procedendo deste modo, obtém-se

$$\psi(10) = \log 2 + \log 3 + \log 2 + \log 5 + \log 7 + \log 2 + \log 3 = 7{,}83\ldots$$

Do processo de contagem com $\psi(x)$ resulta algo muito interessante: o número de primos contado iguala praticamente o limite superior da contagem. Se contarmos os primos inferiores a 200, a contagem dá-nos cerca de 200, etc.!

Assim, o gráfico da função $\psi(x)$ *aproxima* uma linha recta que faz um ângulo de 45 graus com o eixo horizontal, especialmente para números x grandes.

O filósofo medieval Guilherme de Occam desenvolveu uma teoria filosófica segundo a qual, quando temos de escolher entre duas explicações, devemos optar sempre pela mais simples. Quando as questões se revelam muito complicadas, por vezes faz sentido perguntar se estamos a fazer a pergunta correcta. Temos duas funções para contar primos: uma $\psi(x)$, aproximada por uma linha recta, outra, $\pi(x)$, aproximada pela curva $\mathrm{Li}(x)$. Seguramente, Guilherme de Occam não hesitaria...

A hipótese de Riemann

Em 1859, o matemático alemão Bernhard Riemann publicou o seu único artigo em teoria dos números — verdadeiramente notável no que toca à distribuição dos primos — criando a chamada *teoria analítica dos números.*

Riemann foi um matemático talentoso, na opinião de alguns da mesma estatura de Gauss. As suas ideias eram extremamente profícuas. Klein terá afirmado que Riemann era um caso de *grandes ideias gerais*, no sentido de que os seus rasgos de intuição eram extraordinários. Este *mito* viria a ser revisto quando, em 1920, o matemático alemão Carl Ludwig Siegel e Andrew Weil, do Instituto de Estudos Avançados de Princeton, consultaram o espólio de Riemann na Biblioteca

Pública de Frankfurt. Siegel, ao deparar com os complicadíssimos cálculos feitos manualmente por Riemann, exclamou: «Aqui estão os grandes pensamentos gerais de Riemann!» Mais tarde, Siegel escreveria assim:

> A lenda de que Riemann obteve os seus resultados matemáticos através de «grandes ideias gerais», sem usar os conceitos formais da análise, já não prevalece como no tempo de Klein.

Na verdade, Riemann não era avesso a trilhar a *via inferior* dos cálculos laboriosos a fim de lograr um rasgo de génio.

Riemann mostrou como definir $\zeta(z)$ — a função complexa zeta de z — para todo o complexo z, através de um processo designado por *continuação analítica:*

$$\zeta(z) = \sum_{1}^{\infty} 1/n^{z}$$

Dada a importância desempenhada pelos zeros desta função (os zeros de uma função são os pontos para os quais a função se anula), Riemann procurou localizá-los. A função ζ tem a seguinte propriedade: se a parte real do complexo z — $Re(z)$ — for superior a 1, então $\zeta(z) \neq 0$. Por outro lado, se $Re(z) < 1$, então $\zeta(z)$ admite zeros para z inteiro par — os chamados *zeros triviais*, ..., −6, −4, −2. Outros eventuais zeros da função encontram-se na faixa $0 \leq \Re(z) \leq 1$ (a faixa compreendida entre o eixo imaginário e a recta parela uma unidade à sua direita).

Sabe-se que existe um número infinito de zeros na faixa mencionada. Por computação provou-se que os primeiros $1{,}5 \times 10^9$ zeros com parte imaginária positiva — $\Im(z) > 0$ — são simples e encontram-se na linha $\Re(z) = \frac{1}{2}$, a chamada *recta crítica.* (Hardy provou a existência de infinitos zeros sobre a recta crítica.)

A *hipótese de Riemann* afirma que os zeros de ζ nesta faixa se encontram na linha $\Re(z) = \frac{1}{2}$ (e que estes zeros são todos simples).

Até hoje ninguém conseguiu demonstrar ou negar a *hipótese de Riemann,* um dos mais famosos problemas da matemática.

Cabe perguntar: os resultados de Riemann explicam as regularidades e irregularidades da distribuição dos primos? Não. Mas uma demonstração (ou refutação) da sua *conjectura* terá consequências profundas para o conhecimento da distribuição dos primos.

Bibliografia

ALENCAR FILHO, Edgard de, *Teoria dos Números,* São Paulo, Livraria Nobel, S. A., 3.ª ed., 1992.

BAKER, Alan, *A Concise Introduction to the Theory of Numbers,* Cambridge, Cambridge University Press, 1986.

BELSKY, A. A., e KALUJNIN, L. A., *Divisão Inexacta,* Moscovo, Editora Mir, 1982.

DAVENPORT, H., *The Higher Arithmetic,* Cambridge, Cambridge University Press, 6.ª ed., 1992.

ENDLER, Otto, *Teoria dos Números Algébricos,* Rio de Janeiro, IMPA (Projecto Euclides), 1986.

FOMIN, S., *Sistemas de Numeração,* Moscovo, Editora Mir, 1984.

GIBLIN, Peter, *Primes and Programming,* Cambridge, Cambridge University Press, 1993.

GOLDFELD, Dorian, «Beyond the last theorem», in *The Sciences,* Março-Abril de 1996.

GUELFOND, A. O., *Resolução de Equações em Números Inteiros,* Moscovo, Editora Mir, 1982.

HARDY, G. H., e WRIGHT, E. M., *An Introduction to the Theory of Numbers,* Oxford, Oxford University Press, 5.ª ed., 1979 (e edições prévias).

HILL, Raymond, *A First Course in Coding Theory,* Oxford, Oxford University Press, 1986.

KOBLITZ, Neal, *A Course in Number Theory and Cryptography,* Springer-Verlag, 2.ª ed., 1994.

LEVEQUE, William J., *Elementary Theory of Numbers,* reimp. por Dover Publications, Mineola, Nova Iorque, 1990.

MCCOY, Neal H., *The Theory of Numbers,* Nova Iorque, Macmillan, 1965.

NIVEN, Ivan, ZUCKERMAN, Herbert S., e MONTGOMERY, Hugh L., *An Introduction to the Theory of Numbers,* Nova Iorque, John Wiley, 5.ª ed., 1991.

ORE, Oystein, *Invitation to Number Theory,* Nova Iorque, Random House, 1967.

ORE, Oystein, *Number Theory and it History,* McGraw Hill.

RESNIKOFF, H. L., e WELLS, JR., R. O., *Mathematics in Civilisation,* reimp. por Dover Publications, Mineola, Nova Iorque, 1984.

RIBENBOIM, P., *The Book of Prime Number Records,* Nova Iorque, Springer-Verlag, 1988.

ROSE, H. E., *A Course in Number Theory,* Oxford, Oxford University Press, 2.ª ed., 1994.

SCHRÖDER, M. R., *Number Theory in Science and Communication,* Berlim, Springer-Verlag, 2.ª ed., 1986.

STEWART, Ian, e TALL, David, *Algebraic Number Theory,* Londres, Chapman & Hall, 2.ª ed., 1987.

WELLS, David, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers,* Londres, Penguin Books, 1986.

8
Os imaginários

Imaginários — o que são?

> O espírito divino encontrou uma expressão sublime nessa maravilha da análise, nesse portento do mundo ideal, nesse anfíbio entre o ser e o não-ser, a que chamamos a raiz imaginária da unidade negativa.
>
> GOTTFRIED LEIBNIZ

Historicamente, os números complexos surgiram para resolução das equações quadráticas e cúbicas. Se a equação $x^2 - 1 = 0$ é solúvel, por que razão não o será também a equação $x^2 + 1 = 0$? Ou seja, não terá -1 *uma* raiz quadrada?

É inútil perguntar qual a *natureza* desse número que, multiplicado por si mesmo, é igual a -1. Como Euler, representemos esse número pelo símbolo i e observemos que *tudo* funciona bem. O objecto i — a unidade imaginária — nada tem a ver com número como instrumento de *contagem.* A unidade imaginária é puramente um símbolo cuja natureza parece alheia ao carácter concreto e intuitivo que os números naturais apresentam. Designemos desde já por imaginárias ou complexas as raízes quadradas dos números negativos. Como veremos, os imaginários são tão *reais* como os reais. Mais ainda: estes números obedecem às regras que já conhecemos para os números reais.

Como entraram em uso estes números? Compreenderemos melhor o que se passou recordando as reacções aos diversos alargamentos do campo do número.

Quando os pitagóricos descobriram os *irracionais* (etimologicamente, irracional significa *sem razão*), reinou a consternação e, por tê-los revelado, um membro da seita pagou com a vida o seu crime de apostasia. Os Gregos, *para quem a geometria era um regozijo e a álgebra um mal necessário,* baniram-nos, incapazes que eram de os representarem geometricamente. Mas a álgebra precisava deles para se desenvolver. As equações do tipo $ax + b = 0$, com a e b positivos (como $x + 1 = 0$), conduzem naturalmente a números negativos! Mais sábios do que o sábio árabe Omar Kayan, que os evitou, os Chineses e os Hindus reconheceram-nos ainda antes do começo da era cristã. Os Europeus demorariam muito mais tempo. Mais: sem terem ainda assimilado bem os irracionais e os negativos, depararam com outros entes problemáticos — *os complexos.* A humanidade demorou algum tempo a compreender que, afinal, os complexos são simples.

Os números negativos foram considerados *impossíveis* durante muito tempo. De que falamos, afinal, quando falamos de −2 maçãs? Decerto, de nada realmente *real* (pelo menos no sentido físico)! Porém, todos falamos com naturalidade de temperaturas negativas ou de saldos bancários negativos. O hindu Brahmagupta, em 628 da nossa era, lidou com os negativos sem grandes problemas. O que é interessante, pois a introdução das diferentes espécies de números sempre desencadeou reacções de espanto e de não aceitação.

No século XVI, os negativos surgem na *Ars Magna* de Cardano, famoso tratado de álgebra da Renascença. No entanto, repugnaram tanto à consciência científica de Girolamo Cardano que este lhes chamou *fictícios.* No século XVII, Antoine Arnauld argumenta que a proporção $-1 \div 1 = 1 \div -1$ é absurda, pois *como pode um mais pequeno estar para um maior, como um maior está para um mais pequeno?*

Cardano, ao resolver a equação $x(10 - x) = 40$, obtém as soluções $5 + \sqrt{-5}$ e $5 - \sqrt{-5}$ e afirma:

> Deixando de lado as torturas mentais envolvidas, substituamos a pretensa solução na equação. Observando sem preconceitos, concluímos que
>
> $$x(10 - x) = \left(5 + \sqrt{-15}\right)\left(5 - \sqrt{-15}\right) = 5^2 - \left(\sqrt{-15}\right)^2 = 40$$

como se pretendia. Portanto, progride a subtileza da aritmética, cujo fim é tão refinado quanto inútil.

Ou seja, pode não fazer sentido, mas a verdade é que funciona! Um verdadeiro enigma.

Cedo terão os matemáticos deparado com equações quadráticas cuja resolução conduzia a raízes quadradas de números negativos. Todavia, incapazes de aceitarem esses entes, rejeitaram-nos, afirmando que as equações que a eles conduziam não tinham solução. No século XVI, Cardano concebeu que, se *tais números* fossem tratados como números ordinários com a regra adicional

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1$$

então satisfariam as equações. Estes números, a que no passado se atribuía a impossibilidade de qualquer significação, sendo por isso designados por «imaginários», conquistariam progressiva cidadania matemática. Mas, como veremos, não foi de modo algum simples o alargamento do campo real ao imaginário.

Os contributos de Wessel (1797), Argand (1806), que sugeriu o uso dos pontos do plano para representar os complexos, Gauss (1831), Hamilton (1837), entre outros, ajudariam a clarificar o seu significado.

Ars Magna

A publicação da *Ars Magna*, de Cardano (1501-1576), em 1545 representa um progresso tão notável no mundo matemático que o ano de 1545 é tomado como o marco do início do período moderno da matemática. Que tinha assim de tão extraordinário a obra de Cardano? Nada menos do que as *resolventes* das equações do terceiro e quarto graus, um dos problemas que durante mais tempo desafiaram a argúcia dos matemáticos! (Na *resolução* apenas são utilizadas as operações usuais da aritmética — soma, subtracção, multiplicação, divisão — e a radiciação.)

Assinale-se desde já que Cardano não foi o verdadeiro descobridor destas resolventes. Como o próprio afirma na obra, a sugestão para resolver a cúbica fora-lhe dada por Tartaglia (1500-1557) e a solução da quártica fora obtida, *a seu pedido*, pelo seu amanuense Ludovico Ferrari

(1522-1565). Cardano, com a publicação da resolução da cúbica, quebrou uma jura solene feita a Tartaglia...

A descoberta original da resolução da cúbica, uma equação de coeficientes reais da forma

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

deve-se a Scipione del Ferro (1465-1526), professor da Universidade de Bolonha. Ferro, porém, nunca publicou o seu sucesso num problema insolúvel durante 3000 anos, limitando-se a confidenciá-lo a Annibale della Nave (mais tarde seu genro e sucessor na universidade) e a Antonio Maria Fiore.

Fiore, que apenas conhecia a regra, mas não a dedução, desafiou Tartaglia, professor em Veneza, para uma disputa matemática sobre o tema. Propôs uma lista de cerca de 30 cúbicas a Tartaglia, o qual se empenhou em deduzir a fórmula que Fiore recebera de Ferro. Tartaglia venceu a disputa, resolvendo todas as questões propostas pelo oponente, enquanto este falhou todas as que o adversário lhe propusera. Curioso acerca deste verdadeiro feito, Cardano atraiu Tartaglia a sua casa. Mediante promessa de sigilo, obteve a regra para resolver $x^3 + px = q$, regra dada sob a forma de versos um tanto enigmáticos. E quebrou a jura!

Tartaglia reagiu muito negativamente à publicação da *Ars Magna.* Acusou Cardano de quebra de um juramento solene, acendendo uma polémica que se arrastaria por mais de um ano. Ferrari, dando mostras de extrema dedicação, resguardou Cardano, o qual se manteve sempre fora da disputa. Vieram à luz 12 panfletos conhecidos por *Cartelli de sfida mathematica,* onde cada parte expôs as suas razões. Tartaglia aceitou o desafio de Ferrari para um debate matemático em Milão. O desfecho não foi claro e as autoridades universitárias de Brescia, para onde Tartaglia acabara de ser transferido, insatisfeitas com o seu desempenho, rescindiram-lhe o contrato. Nove anos decorridos, Tartaglia morreu, obscuro e humilde.

A *Ars Magna* deu um impulso extraordinário à álgebra. O estudo de equações polinomiais de ordem arbitrária, em particular a quíntica, impunha-se como generalização natural do que já fora desvendado até ao quarto grau. Desta questão, que teve o seu epílogo com Abel e Galois no século XVIII, haveriam de ocupar-se os matemáticos nos dois séculos subsequentes.

Um resultado que decorre imediatamente da resolução da cúbica é a inevitável aceitação dos complexos. Aos números negativos, usados por Cardano e por ele designados por *ficti*, junta-se novo quebra-cabeças. A fórmula de Cardano-Tartaglia conduz aos imaginários. Se aplicada, por exemplo, à equação $x^3 = 15x + 4$, conduz a

$$x = \left(2 + \sqrt{-121}\right) + \left(2 - \sqrt{-121}\right)$$

Cardano não conseguia entender como teria a fórmula sentido nestes casos. Referindo-se às raízes quadradas de números negativos como *sofísticas*, concluiu que o resultado era *tão subtil quanto inútil*. Por observação directa via-se que 4 era a raiz da equação. Mas como obter este número da expressão acima?

Caberia a outro importante algebrista italiano da Renascença, Rafael Bombelli (1526-1573), a glória de desvendar a intrigante questão. Bombelli teve (aquilo a que o próprio chamou) uma *ideia louca*. Imaginou que talvez os radicais estivessem relacionados do mesmo modo que os seus radicandos. Ou, como hoje dizemos, estava-se perante imaginários conjugados. Ora sabemos que a soma de imaginários conjugados conduz a um número real, neste caso concreto 4:

$$\left(2 + b\sqrt{-1}\right) + \left(2 - b\sqrt{-1}\right) = 4$$

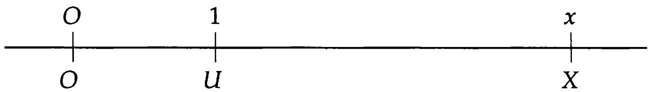
Uma vez que $2 + b\sqrt{-1}$ deve ser a raiz cúbica de $2 + 11\sqrt{-1}$, então é fácil concluir que b é 1.

Bombelli escreveu a sua *Algebra* cerca de 1560, mas esta só foi impressa em 1572. (Uma curiosidade: Bombelli usava os símbolos *p* e *m* para + e –, mas não utilizava ainda qualquer símbolo para a igualdade.) Descartes, em 1637, chamou *imaginárias* às expressões que envolviam raízes quadradas de números negativos. Por volta de 1712 Leibniz e Bernoulli travaram uma batalha centrada nos logaritmos de números negativos, que são, como viria depois a aceitar-se, números complexos.

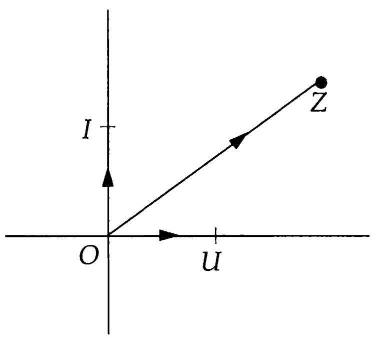
Os imaginários são reais!

A partir do século XVI os matemáticos viam-se compelidos a utilizar expressões para as raízes quadradas dos números negativos de modo a acharem as soluções das cúbicas e das quárticas. Mas, incapazes de explicarem o significado exacto destas expressões, olhavam-nas de modo *supersticioso.* A designação de *imaginários* é uma reminiscência do entendimento que tinham destes *entes* como de algo fictício e irreal. A busca da significação dos imaginários decorreria até ao século XIX.

Podemos visualizar os complexos no plano com o mesmo espírito com que podemos visualizar os reais numa recta. O número real x é a razão OX/OU, medida relativamente a um comprimento fixo OU, sendo x negativo quando marcado para a esquerda da origem O.



No século XVII, John Wallis, na sua *Algebra,* publicada em 1637, interpretou um número complexo $z = x + iy$ como um ponto do plano. No plano fixou uma origem, dois eixos perpendiculares — o eixo dos X (chamado *eixo real*) e o eixo dos Y (dito *eixo imaginário*) — e uma unidade de comprimento. Aos números reais x e y chama-se, respectivamente, *parte real* e *parte imaginária* do complexo z. Em termos usuais correntes, a *proposta* de Wallis consiste em marcar as partes real e imaginária do complexo, respectivamente, no eixo real e imaginário, levantar perpendiculares por estes pontos e na sua intersecção encontrar a representação do imaginário. A unidade imaginária é o ponto I, representado na figura:



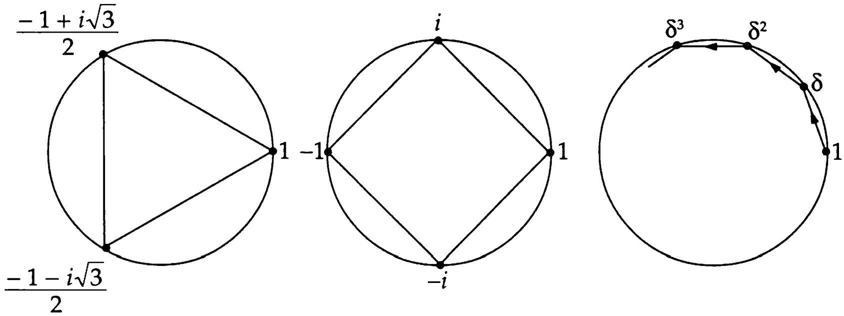
A proposta de Wallis não singrou. Em 1797, o topógrafo norueguês Gaspar Wessel publicou em dinamarquês um artigo sobre a representação de números complexos no plano, o qual passou despercebido durante um século, ou seja, até ser traduzido para francês. Assim, Leibniz ainda se entregou a especulações filosóficas bizarras sobre a natureza dos complexos, afirmando que *eram uma espécie de anfíbio, a meio-caminho entre a existência e a não-existência, no que se assemelhavam ao Espírito Santo.*

Entretanto, a descoberta da representação dos complexos no plano veio a ser tributada a Argand, que, em 1806, escreveu as suas ideias sobre a questão. Também Gauss pensava os complexos como pontos do plano, publicando sobre o assunto em 1831. E, por sua vez, De Moivre, Euler, Vandermonde, tiveram a mesma ideia, pois, ao tentarem resolver a chamada *equação ciclotómica*

$$x^n - 1 = 0$$

imaginaram as soluções como vértices de um polígono regular com n lados.

De facto, dado um polígono regular centrado na origem do plano complexo com um vértice no ponto 1, os números complexos que correspondem aos demais vértices são as soluções da equação ciclotómica de grau igual ao número de vértices do polígono. A esses números é costume chamar *números de De Moivre* (1667-1754).



(*a*) (*b*) (*c*)

Como Farkas Bolyai observou ao filho Janos Bolyai aquando da descoberta da geometria hiperbólica, as ideias, quando surgem, despontam por toda a parte, *tal como as violetas na Primavera...*

Em 1837, Hamilton identificou os números complexos com pares ordenados (x, y) de números reais. A adição e o produto *(escalar)* por um número real são assim definidos:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$
$$a(x, y) = (ax, ay)$$

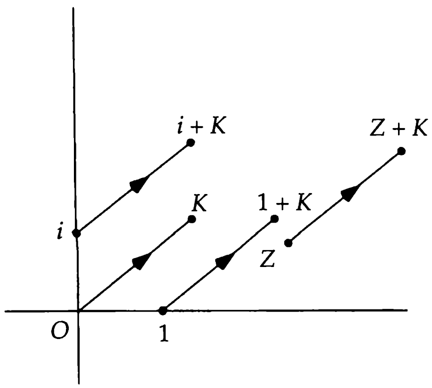
Quanto à multiplicação, define-se do seguinte modo:

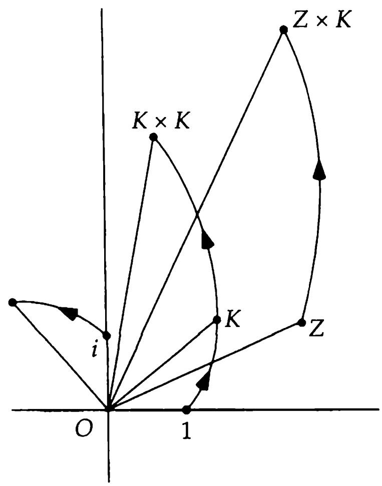
$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + y_1x_2)$$

Daqui decorre com facilidade que

$$i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

e tudo se passa de modo perfeito e sem sombra de mistério. As figuras ilustram operações com complexos. Geometricamente, a soma de complexos é dada pela regra do paralelogramo. Achar a potência inteira de um complexo consiste em efectuar uma rotação do complexo, seguida de expansão ou contracção (consoante a base da potência tenha «módulo» maior ou menor do que 1).





A fórmula milagrosa de Euler

No século XVIII, Euler estabeleceu na sua obra *Introductio*, publicada em Lausana em 1748, uma das mais famosas identidades da matemática:

$$e^{i\theta} = cos\theta + isin\theta$$

Esta fórmula veio revelar a existência de uma relação profunda entre os complexos e as funções trigonométricas. Em particular, temos a admirável fórmula (que congrega os mais importantes números da análise: 0, 1, e, π, i)

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

a qual, contudo, já não era original. Em 1714, Roger Cotes havia descoberto uma expressão muito semelhante que caíra no esquecimento.

Tomando $\theta = \pi$ na fórmula de Euler, obtém-se, como já vimos, $e^{i\pi} = -1$. Logo, $\log(-1) = i\pi$. Se $\theta = 3\pi$, segue-se $e^{i3\pi} = -1$, e assim sucessivamente. Logo, $\log(-1) = 3i\pi$. Euler, longe de sentir embaraço, concluiu que o $\log(x)$ tem muitos valores. Mas isso é já outra história a contar noutro lugar.

Que significado tem a fórmula de Euler? Comecemos por observar que a definição de e^x como limite de $(1 + \frac{x}{N})^N$ é também válida para x complexo. Porquê $e^{i\pi} = -1$? Isto apenas significa que

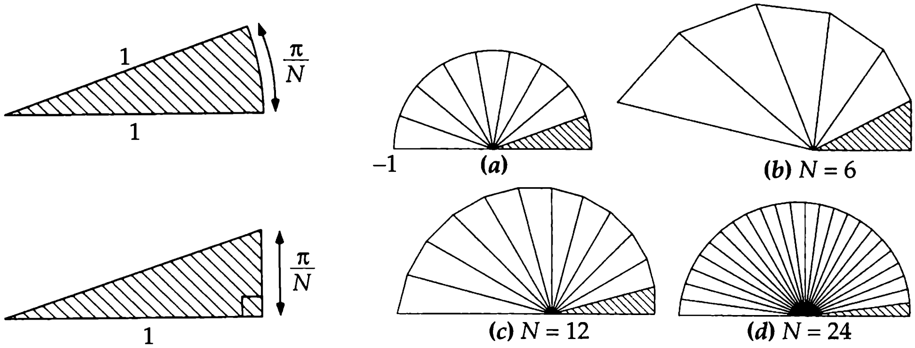
$$\left(1 + \frac{i\pi}{N}\right)^N$$

aproxima mais e mais -1 à medida que N cresce mais e mais. A ideia subjacente, ilustrada na figura, é simples. O triângulo na figura, cujo vértice de topo está em $1 + i\pi/N$, aproxima (em forma) a secção circular sombreada, onde o comprimento do arco circular é π/N.

Tomando N cópias deste sector, conforme se mostra na figura, obtém-se exactamente o semicírculo em (a). Por outro lado, a multiplicação de complexos diz-nos que a potência

$$\left(1 + \frac{i\pi}{N}\right)^N$$

se obtém justapondo N triângulos de idêntica forma e tamanhos ligeiramente crescentes, como em (b), (c) e (d), onde se tomou $N = 6, 12, 24$.



À medida que N cresce, as figuras aproximam o semicírculo em (a), cujo ponto mais à esquerda é -1.

Os quaterniões

O famoso matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) despendeu grande parte do tempo a tentar encontrar um análogo para números complexos, mas com ternos de números reais, em vez de pares. (Como vimos, os complexos são pares de números reais.) Ao cabo de várias tentativas mal sucedidas, Hamilton concluiu que não deveria usar apenas três coordenadas, mas quatro. Assim, divisou um novo sistema de números a que chamou *quaterniões.* O quaternião típico

$$a + ib + cj + dk$$

tem uma *parte escalar, a,* e uma *parte imaginária, ib + cj + dk.*

Os quaterniões adicionam-se da forma usual e multiplicam-se usando as regras

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

e

$$ijk = -1$$

Estes números têm aplicações dentro da matemática e noutras ciências. Têm como generalização os *octoniões.*

A análise complexa

Os complexos estão entre as mais belas, perenes e fecundas ideias de todo o edifício matemático. Pura criação do espírito, os imaginários impregnam a estrutura profunda da realidade. São indispensáveis para a descrição matemática do universo tanto a nível cósmico como a nível subatómico. A função de onda que descreve a realidade subatómica, função das coordenadas das partículas constitutivas do corpo e do tempo, é uma função complexa. Recentemente, foram utilizadas em óptica quântica algumas funções complexas.

A teoria das funções de variável complexa conheceu um desenvolvimento extraordinário no século XIX com Cauchy (1789- 1857) e, posteriormente, com Dirichlet (1805-1859), Weierstrass (1815-1897) e Riemann (1826-1866). Enquanto a álgebra dos complexos teve um longo e acidentado trajecto, o cálculo floresceu de modo súbito.

A teoria dos limites, a diferenciação, as sucessões e séries complexas estendem-se com extrema simplicidade a partir da análise real. Já o cálculo integral apresenta notáveis especificidades. As abordagens de Cauchy, de Weierstrass (baseando a teoria em séries de potências) e de Riemann (privilegiando os aspectos geométricos) complementaram-se e proporcionaram desenvolvimentos de notável alcance.

A partir de meados do século XIX, a análise complexa tornou-se um ramo importantíssimo da matemática. Tem aplicações em hidrodinâmica, electrostática, teoria quântica, etc., e é um poderoso instrumento utilizado por matemáticos, físicos e engenheiros.

Bibliografia

AHLFORS, L., *Complex Analysis,* 2.ª ed., McGraw-Hill Book Co., 1966.

ASH, R. B., *Complex Variables,* Academic Press, Inc., 1971.

BEARDON, A. F., *Complex Analysis,* John Wiley & Sons, 1979.

BOYER, C., *A History of Mathematics,* trad. brasileira, Ed. Blücher

CARRIER, F., KROOK, M., e PEARSON, C. E., *Functions of a Complex Variable: Theory and Technique,* McGraw-Hill, Inc., 1966.

CHURCHILL, R., *Complex Variables and Applications,* 2.ª ed., McGraw-Hill Book Co., 1960.

DUNCAN, J., *The Elements of Complex Analysis,* John Wiley & Sons, Ltd. 1968.

FEYNMAM, R., LEIGHTON, R., e SANDS, M., *The Feynmam Lectures on Physics,* vols. 1 e 3, Addison-Wesley Publishing Co., 1964.

FRANKLIN, Philip, *Functions of Complex Variables,* Prentice-Hall, Inc., 1958.

FUCHS, B. A., e SHABAT, B. V., *Functions of a Complex Variable and Some of Their Applications,* vol. I, Pergamon Press, 1964.

GREENLEAF, F. P., *Introduction to Complex Variables,* W. B. Saunders Co., 1972.

KIRALA, A., *Applied Functions of a Complex Variable,* Wiley-Interscience, 1972.

MARSDEN, J. E., *Basic Complex Analysis,* W. H. Freeman Co., 1973.

NARASIMHAN, R., *Complex Analysis in one Variable,* Birkhauser Boston, Inc., 1985.

PENROSE, R., «Life, the universe, & all that», in *Oxford Today. The University Magazine,* vol. 6, n.º 2, 1994.

RUDIN, W., *Principles of Mathematical Analysis,* 2.ª ed., McGraw-Hill Book Co., 1964.

9
A divina proporção

A divina proporção

Como vimos no capítulo 2, chama-se *número de ouro* à solução positiva da equação quadrática

$$x^2 = x + 1$$

O número de ouro denota-se por τ e o seu valor com aproximação até cinco casas decimais é

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = 1{,}61803...$$

A outra raiz da equação é

$$\sigma = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61803$$

(numa aproximação até cinco casas decimais).

O número de ouro tem propriedades muito curiosas e, desde a Antiguidade até aos nossos dias, tem deliciado estudiosos, matemáticos, artistas, poetas... Frei Luca Pacioli publicou em 1509 um livro dedicado ao tema com o título *A Divina Proporção;* Vasco Graça Moura publicou *O Número de Ouro na Poesia de Camões.*

Os arquitectos e escultores gregos usaram a *secção* nas suas obras, tendo o célebre escultor Fídias feito grande uso dela. No início deste século foi sugerida a letra ϕ, inicial do nome de Fídias, para designar o número áureo.

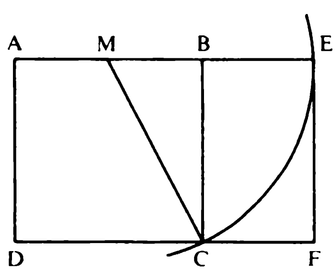
O rectângulo cujos lados estão em proporção áurea diz-se *rectângulo áureo.* Atribui-se-lhe um valor estético especial, pelo que tem sido insistentemente utilizado nas belas-artes. O Pártenon, construído em Atenas no século v (a. C.), é um excelente exemplo do uso do rectângulo áureo na arquitectura. A construção geométrica do rectângulo áureo não apresenta dificuldades (v. figura). Partindo de um segmento [*AB*], construímos um quadrado de lado *AB.* Tomamos o ponto médio de [*AB*]: seja *M.* Com centro em *M* e raio *MC* desenhamos o arco de circunferência que corta o prolongamento de [*AB*] em *E.*

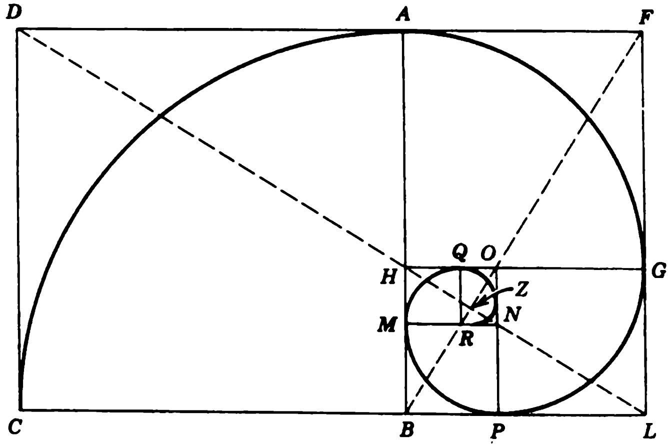
Traçamos [*EF*] perpendicularmente a [*AE*]; a intersecção desta perpendicular com o prolongamento de [*DC*] é *F.* O rectângulo *AEFD* é o rectângulo áureo de lado *AB.*

A prova é simples. Tomamos o comprimento *AB* de 2 unidades. Então $EM = CM = \sqrt{5}$ e

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AB + BE}{EF} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

Não é difícil verificar que, retirando ao rectângulo áureo *AEFD* o quadrado *ABCD,* sobra um rectângulo que é também áureo: *BEFC.* Este processo pode ser repetido indefinidamente até atingir o ponto rectangular. Estes rectângulos circunscrevem uma espiral, a «espiral áurea». Que relação terá esta espiral com a maravilhosa (pp. 129--133)?





Fibonacci

Os chamados *números de Fibonacci*, f_n, apresentam uma incrível relação com o número de ouro, a qual foi primeiramente observada por Kepler. Os números de Fibonacci são

$$f_n = 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610...$$

Antes de analisarmos a relação destes números com o número de ouro vamos fazer uma breve pausa para falarmos de Leonardo de Pisa, seu criador. A vida de Leonardo encontra-se sumariada na introdução do seu famoso *Liber abacci* (1202). Leonardo pertencia à família Bonacci, referindo-se a si próprio como *filio Bonacci*, cuja abreviatura conduziu a Fibonacci. O pai, secretário da república de Pisa, tendo-lhe sido confiada por volta de 1192 a direcção da companhia mercantil de Pisa em Bugia (agora Bougie), Argélia, levou consigo Leonardo, esperando que este se tornasse mercador. Aí aprendeu Leonardo a calcular com numerais hindu-arábicos.

Nas viagens de negócios ao Egipto, Síria, Bizâncio, Sicília e Sudeste da França, Fibonacci conheceu mundo. Cerca de 1200 regressou a Pisa e nos vinte e cinco anos subsequentes compôs várias obras. Dessas, umas perderam-se, outras foram preservadas. Entre as primeiras encontra-se um tratado sobre o livro x de Euclides, com um tratamento numérico dos irracionais (no original, Euclides usa um tratamento geométrico com rectas e áreas). Entre as obras que prevaleceram encontram-se:

1. *Liber abbaci,* 1202, revisto em 1228;
2. *Practica geometriae,* 1220;
3. Um livro intitulado *Flos,* 1225;
4. Uma carta ao filósofo Teodoro, que viveu na Sicília, na corte do imperador Frederico II;
5. *Liber quadratorum,* 1225.

O imperador Frederico II fazia-se rodear de homens de saber, como Miguel Escoto, [a que Dante baniu do inferno (*Inferno,* XX, 115)], o filósofo Teodoro ou o matemático John de Palermo. Quando, cerca de 1225, Frederico II reuniu as cortes em Pisa, Leonardo, que já era conhecido na corte da Sicília pelo seu saber, foi apresentado ao imperador pelo astrónomo Domínico. Então João de Palermo colocou vários problemas, que Leonardo resolveu prontamente.

O primeiro problema consistia na determinação de um número x tal que $x^2 + 5$ e $x^2 - 5$ fossem números quadrados. Uma solução sem prova foi apresentada no livro *Flos.* O segundo problema pedia a solução da equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. No *Flos* Leonardo prova que a solução não é um inteiro, nem um fracção, tão-pouco um dos irracionais definidos no livro X dos *Elementos* de Euclides. Apresenta uma solução aproximada na forma sexagesimal:

$$1;\ 22,\ 7,\ 42,\ 33,\ 4,\ 40$$

Uma das questões do torneio consistia no seguinte:

> Três homens possuem, em conjunto, uma certa quantia, da qual o primeiro homem é dono de metade, o segundo de um terço e o terceiro de um sexto. Pretendendo fazer um depósito, dividem a quantia pelos três. O primeiro fica com um certo montante, do qual deposita metade; o segundo toma outro montante e deposita um terço; ao terceiro cabe o restante e, desse, deposita a sexta parte. Quando levantam o depósito, e pondo de parte eventuais juros, cada um tem direito a um terço. Que quantia depositou cada um dos homens?

Este é um exemplo de um problema indeterminado. Representando por u um terço do depósito e atribuindo-lhe, por exemplo, o valor 7, será difícil, por resolução de um sistema de equações lineares algébricas, obter a solução?

Em 1240, a república de Pisa premiou o «sério e sabedor mestre Leonardo Bigolli» com um salário anual de 20 libras em prata, «além do seu provento usual, em reconhecimento da sua utilidade à cidade e cidadãos através do ensino e devotados serviços».

O *Liber abacci* é a obra mais influente de Leonardo de Pisa. Dos quinze capítulos, os primeiros sete são sobre os numerais hindu-arábicos e os métodos de cálculo com fracções e inteiros.

A necessidade de tratados de aritmética, ditada pelas condições em que decorriam as transacções dos mercadores italianos, deve ser analisada no devido contexto histórico. No século XIII, o carácter da economia muda radicalmente de uma economia de troca para uma economia predominantemente monetária, com circulação de moedas, invenção de cartas de crédito, contas de troca, etc. A classe de mercadores errantes, que iam trocar produtos às grandes feiras de Génova, Pisa e Veneza ou aos portos árabes do Norte de África, levando lã e trazendo sedas, especiarias e jóias, dá lugar a uma nova classe de mercadores que residem nos grandes centros manufactureiros e mercantis. Representantes de uma mesma companhia instalam-se em cidades distantes, sendo o contacto desta rede mantido através de cartas, com um sistema bem montado de contas, etc. Há, pois, que calcular preços, pagamentos, lucros, débitos. Para estas operações era preciso um sistema eficiente de escrita de números e operações. O sistema de numeração hindu-arábico era, sem dúvida, mais eficiente do que o sistema de numeração romano. A necessidade de execução de cálculos com eficiência determinou o aparecimento de uma classe de *abacistas* que desenvolveu este sistema.

Os capítulos 8-11 do *Liber abacci* contêm problemas relativos a mercadores. Aí surge um problema recreativo interessante: «o problema dos trinta pássaros». Um homem compra 30 pássaros: perdizes, pombas e pardais. Uma perdiz custa 3 moedas de prata, uma pomba 2 e um pardal $\frac{1}{2}$. O homem paga 30 moedas. Quantas perdizes, pombas e pardais comprou?

Denotando o número de perdizes, pombas e pardais, respectivamente, por x, y, z, o problema reduz-se à solução do par de equações

$$x + y + z = 30$$

$$3x + 2y + \frac{1}{2}z = 30$$

nos inteiros positivos x, y, z. A única solução é $x = 3$, $y = 5$, $z = 22$.

Este problema é uma variante do «problema dos 100 pássaros», que aparece em fontes chinesas, indianas e árabes.

Os capítulos 12 e 13 do livro contêm vários tipos de problemas recreativos, conduzindo alguns a uma, duas ou três equações lineares com duas ou três incógnitas. Nas pp. 228-234 há uma sequência de problemas do tipo «comprando um cavalo». Leonardo começa com o caso simples de duas pessoas em que uma diz à outra «se me deres um terço do teu dinheiro, posso comprar o cavalo», ao que a outra replica «se me deres um quarto do teu dinheiro, posso comprar o cavalo». Trata-se de um problema indeterminado que se traduz num sistema de duas equações a três incógnitas. Também estes problemas surgem em fontes árabes e bizantinas. Uma invenção original de Leonardo é a «série de Fibonacci», em que cada termo é a soma dos dois precedentes.

O teorema binomial

Muitas vezes torna-se importante dispor de uma *fórmula* explícita para a n-ésima potência de um binómio — $(a + b)^n$. Para $n = 1$, $n = 2$ e $n = 3$ obtêm-se com facilidade os seguintes desenvolvimentos:

$$\begin{array}{ll}
a + b = & a + b \\
(a + b)^2 = & a^2 + 2ab + b^2 \\
(a + b)^3 = & a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a + b)^4 = & a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4
\end{array}$$

Examinemos o processo de formação das diferentes expressões. Ora $(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$ obtém-se multiplicando $(a + b)$ por a e por b e adicionando. Um procedimento análogo vale para $(a + b)^3 = (a + b)^2(a + b)$ multiplica-se cada termo da expressão anteriormente obtida para $(a + b)^2$ por a e por b e soma-se. Obtém-se $(a + b)^n = (a + b)^{n-1}(a + b)$ multiplicando cada coeficiente da expressão anteriormente obtida para $(a + b)^{n-1}$ por a e por b e somando. Este procedimento conduz ao seguinte diagrama:

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 2 & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 3 & & 3 & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 4 & 6 & 4 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 5 & & 10 \quad 10 & & 5 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 6 & & 15 & 20 & 15 & & 6 & & 1 & & \\
 & 1 & & 7 & & 21 & 35 & & 35 & 21 & & 7 & & 1 & \\
 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

Este diagrama dá uma regra geral de formação dos coeficientes da expressão de $(a + b)^n$. Construamos um *arranjo triangular* de números, começando pelos coeficientes 1, 1 de $a + b$, de tal modo que cada número do triângulo seja a soma dos dois números (um de cada um dos seus lados) na linha anterior. Chama-se a este arranjo *triângulo de Pascal. A n-ésima linha dá os coeficientes do desenvolvimento de* (a + b)^n *em potências descendentes de* a *e potências ascendentes de* b. Podemos escrever os números na n-ésima linha do triângulo de Pascal usando a seguinte notação:

$$C_0^n = 1, C_1^n, C_2^n, C_3^n, \ldots, C_{n-1}^n, C_n^n = 1$$

O símbolo C_p^n lê-se «combinações de n a p». Existe outra notação para as combinações, usando parênteses curvos $\binom{n}{p}$. De acordo com a lei de formação do triângulo de Pascal, segue-se

$$C_i^n = C_{i-1}^{n-1} + C_i^{n-1}$$

Partindo de que $C_0^1 = 1 = C_1^1$, não é difícil provar (por indução matemática) que

$$C_i^n = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-i+1)}{1 \times 2 \times 3 \ldots i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

(Para n inteiro positivo, o símbolo $n!$ — lê-se «n factorial» — denota o produto dos n primeiros inteiros: $n! = 1 \times 2 \times 3 \ldots n$. Por convenção, $0! = 1$.) A fórmula para $(a + b)^n$ com os coeficientes expressos por *combinações* costuma designar-se por *teorema binomial.*

Números de Fibonacci

> Mais coisas há, Horácio, no céu e na Terra do que as que sonha a tua filosofia.
>
> HAMLET

Leonardo obteve a sequência 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... como resposta ao seguinte problema:

Quantos casais de coelhos podem ser produzidos num ano a partir de um único casal se:

a) Cada casal originar um novo casal em cada mês, o qual se torna produtivo a partir do segundo mês,
b) Não ocorrerem mortes?

Se designarmos por f_n o número de casais de coelhos na n-ésima geração, então

$$f_1 = f_2 = 1$$
$$f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$$

Os números de Fibonacci ocorrem nas mais espantosas circunstâncias e as suas manifestações são tão numerosas como os coelhos do problema original. Publica-se um periódico matemático completamente dedicado a este assunto, o *Fibonacci Quarterly.*

Os *números de Lucas*, l_n,

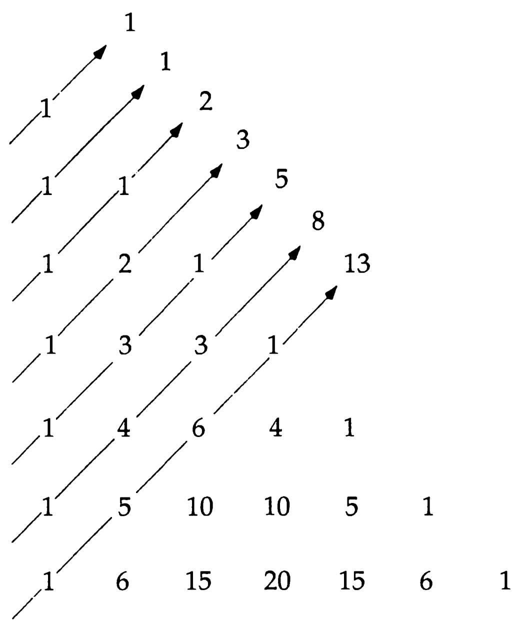
$$l_0 = 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364 \ldots$$

definidos pela mesma regra, mas com diferente ponto de partida, estão relacionados com os números de Fibonacci de vários modos:

$$
\begin{array}{rl}
f_{2n} = f_n l_n & l_{2n} = l_n^2 - 2(-1)^n \\
f_0 + f_1 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1 & l_0 + l_1 + \ldots + l_n = l_{n+2} - 1 \\
l_n = f_{n-1} + f_{n+1} & 5f_n = l_{n-1} + l_{n+1} \\
2f_{m+n} = f_m l_n + f_n l_m & 2l_{m+n} = l_m l_n + 5 f_m f_n
\end{array}
$$

$$f_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \ldots$$

A última relação observada por Lucas mostra que podemos ler os números de Fibonacci a partir do triângulo de Pascal (v. figura: somando diagonais no triângulo de Pascal, obtêm-se números de Fibonacci).



Kepler observou que as razões de dois números de Fibonacci consecutivos aproximam 1, 618..., o número de ouro. As razões de dois números de Lucas consecutivos tendem para o mesmo limite.

Designando o número de ouro por τ e por σ a outra solução da equação quadrática $x^2 - x - 1 = 0$, verifica-se facilmente que nas sequências

$$1 \; \tau \; \tau^2 \; \tau^3 \; \tau^4 \; \tau^5 \; \tau^6 \; \tau^7 \ldots$$

$$1 \; \sigma \; \sigma^2 \; \sigma^3 \; \sigma^4 \; \sigma^5 \; \sigma^6 \; \sigma^7 \ldots$$

cada termo iguala a soma dos dois termos precedentes, tal como na sequência de Fibonacci. As seguintes expressões obtêm-se com facilidade:

$$f_n = \frac{\tau^n - \sigma^n}{\tau - \sigma} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

$$l_n = \tau^n + \sigma^n = \left\{ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}$$

n	f_{n+1}/fn	l_{n+1}/l_n	l_n/f_n
1	1	3	1
2	2	1,333...	3
3	1,5	1,75	2
4	1,666...	1,5714...	2,333...
5	1,6	1,6363...	2,2
6	1,625	1,6111...	2,25
7	1,6153...	1,6206...	2,2307...
8	1,6190...	1,6170...	2,2380...
9	1,6176...	1,6184...	2,2352...
10	1,6181...	1,6178...	2,2363...

Número de ouro e filotaxia

Tudo é uma folha.

GOETHE

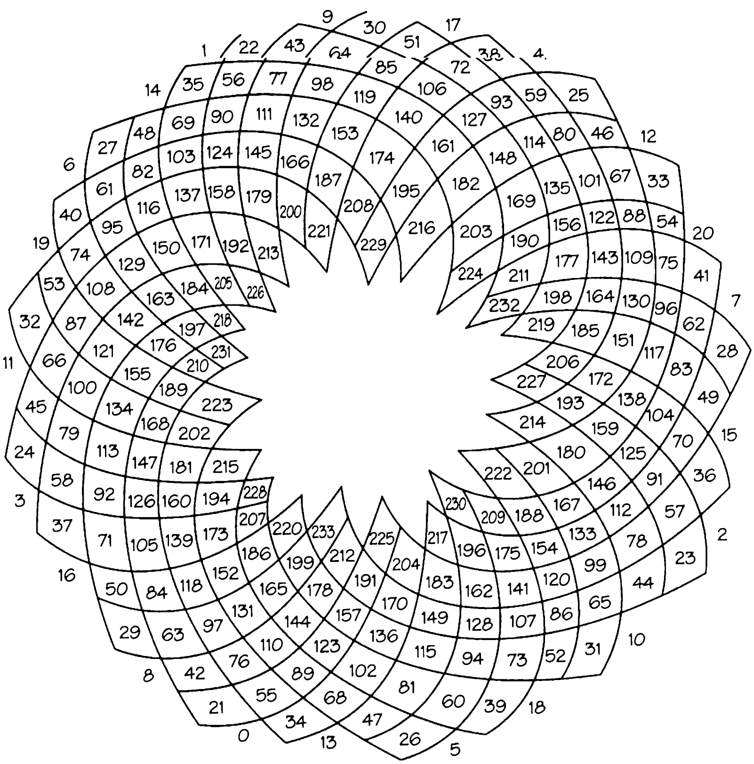
Filotaxia é a designação que se emprega em botânica para descrever a disposição das folhas nas plantas. O número de ouro tem uma presença quase mágica na filotaxia.

O número de ouro aparece disfarçado nas espécies botânicas com grande e estranha incidência. Observemos a flor do girassol. Os folículos do botão parecem dispor-se simetricamente em espirais. Contando no sentido dos ponteiros do relógio, encontramos 55 espirais; contando em sentido contrário, obtemos 34.

Nos ananases e nos malmequeres verifica-se algo análogo. Aqui contam-se 21 espirais num sentido e 34 no outro. Estas espirais aparecem em muitas outras plantas, como a couve-flor, a pinha e algumas espécies de cactos.

Que encontramos de comum nas várias situações? Todos os números mencionados são números de Fibonacci consecutivos!

Por que é assim? Decerto Leonardo de Pisa jamais teria sonhado que o seu problema de coelhos tivesse algo a ver com ananases, pinhas e girassóis e que os seus números estivessem relacionados com o número de ouro. E este de tal modo omnipresente na natureza! Por que razão? A resposta é difícil. Nos casos botânicos, a razão encontrar-se-á nos estádios mais primários da vida das espécies.



Também é frequente que as distâncias entre as inserções de folhas nos caules obedeçam à lei de Fibonacci, isto é, sejam números da sua sequência.

Na figura relativa ao girassol, os números mostram progressões aritméticas com razões de Fibonacci 21 e 34.

$\tau =$	1.6180339887	4989484820	4586834365	6381177203	0917980576	2862135448-
	6227052604	6281890244	9707207204	1893911374	8475408807	5386891752 . . .
$\sqrt{2} =$	1.4142135623	7309504880	1688724209	6980785696	7187537694	8073176679-
	7379907324	7846210703	8850387534	3276415727	3501384623	0912297024 . . .
$\sqrt{3} =$	1.7320508075	6887729352	7446341505	8723669428	0525381038	0628055806-
	9794519330	1690880003	7081146186	7572485756	7562614141	5406703029 . . .
$\pi =$	3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5820974944-
	5923078164	0628620899	8628034825	3421170679	8214808651	3282306647 . . .
$e =$	2.7182818284	5904523536	0287471352	6624977572	4709369995	9574966967-
	6277240766	3035354759	4571382178	5251664274	2746639193	2003059921 . . .
$\sigma =$	0.5772156649	0153286060	6512090082	4024310421	5933593992	3598805767-
	2348848677	2677766467	0936947063	2917467495	1463144724	9807082480 . . .
$\ln 10 =$	2.3025850929	9404568401	7991454684	3642076011	0148862877	2976033327-
	9009675726	0967735248	0235997205	0895982983	4196778404	2286248633 . . .
$\ln 2 =$	0.6931471805	5994530941	7232121458	1765680755	0013436025	5254120680-
	0094933936	2196969471	5605863326	9964186875	4200148102	0570685733 . . .
$\log_{10} 2 =$	0.3010299956	6398119521	3738894724	4930267681	8988146210	8541310427-
	4611271081	8927442450	9486927252	1181861720	4068447719	1430995379 . . .
$\log_2 3 =$	1.5849625007	2115618145	3738943947	8165087598	1440769248	1060455752-
	6545410982	2779435856	2522280474	9180882420	9098066247	5059167343 . . .
$f_1 =$	4.6692016091	0299067185	3203820466	2016172581	8557747576	8632745651 . . .
$f_2 =$	2.5029078750	9589282228	3902873218	2157863812	7137672714	9977336192 . . .

10
A harmonia das esferas

> O universo é feito essencialmente de coisa nenhuma. Intervalos, distâncias, buracos, porosidade etérea. Espaço vazio, em suma. O resto é a matéria.
>
> ANTÓNIO GEDEÃO, *Máquina do Mundo*

As teorias planetárias dos antigos

Desde o balbuciar dos tempos, o homem sentiu fascínio pelos céus, procurando no rasto das estrelas o seu destino. Os astrólogos caldeus observavam os astros, previam eclipses e traçavam horóscopos. Nas civilizações megalíticas, os sacerdotes eram calendaristas e os monumentos de natureza cerimonial e ritual tinham forte significação astral. (Pensemos, por exemplo, em Stonehenge ou nas pirâmides do Egipto.)

Na sua fase arcaica, a ciência é indiscernível da filosofia. A orientação de toda a especulação é cosmológica. O sábio pergunta de que é feito o mundo, como funciona, procurando encontrar um número reduzido de causas explicativas para a multiplicidade dos fenómenos.

Os filósofos mais antigos são Tales, Anaximandro e Anaxímenes, todos de Mileto. Pertencem a três gerações sucessivas e são, por vezes, referidos como os *sábios da Jónia.* Para Tales (século VI a. C.), o princípio primordial era a água. A Terra flutuava na água e tinha a forma de um tronco de cilindro coberto pelo hemisfério celeste. Anaximandro, que foi autor do primeiro mapa, defendia o princípio de que tudo o que existia estava no «indeterminado» ou «indefinido». A Terra estava no centro do mundo e tinha a forma de um tronco de cilindro de altura igual a $\frac{1}{3}$ do diâmetro. A face plana era a superfície habitada. Os astros eram rodas de fogo num invólucro de ar que os ocultava, só se tornando visíveis nas aberturas do ar que, acaso tapassem, provocavam um eclipse. Anaxímenes via na bruma o princípio de tudo o que existe, assemelhando-se a Terra a um tampo de mesa que flutuava no ar. Quanto à abóbada celeste, era sólida, com estrelas cravadas. Parménides (século VI a. C.) apercebeu-se de que a Terra era redonda, mas, sem vislumbrar uma boa razão para ela se mover, idealizou-a imóvel.

Os pitagóricos concebiam que os corpos celestes emitiam sons harmoniosos nos seus movimentos (que só não ouvíamos devido ao hábito) e que os *tamanhos* das órbitas planetárias eram proporcionais aos comprimentos das cordas de um instrumento de modo a assegurarem a *harmonia das esferas.* A escola pitagórica teve larga influência em Platão, através de quem a inspiração pitagórica se difundiu pela posteridade. O movimento circular uniforme dos corpos celestes que adoptaram iria dominar a astronomia durante mais de 2000 anos. Assinalavelmente, as «fantasias» pitagóricas impulsionaram grandemente o desenvolvimento da matemática e da ciência.

Para os pitagóricos, o mundo era harmonia, o universo um «cosmos», um todo harmoniosamente ordenado, harmonia essa que devia corresponder à harmonia da alma. O que existia era harmonia, harmonia resultante de certas leis e relações numéricas. Segundo a divisa da escola — «tudo é número» —, o número regulava a realidade existente e as especulações sobre o número entravam no domínio do misticismo e da clara fantasia.

Os pitagóricos adoravam o número 10 (*tetractys* ou década), afirmando que era *grande, todo-poderoso, gerador de tudo, o começo e o guia da vida divina e terrestre.* A visão do 10 como símbolo da saúde, da harmonia e do perfeito parece ter inspirado o primeiro sistema astronómico não geocêntrico.

Filolau de Tarento (morreu cerca de 390 a. C.), a quem se atribui a primeira exposição escrita do pitagorismo, idealizou o seguinte esquema cósmico: no centro do universo havia o fogo central, em torno do qual giravam a Terra, bem como a Lua, o Sol e os outros cinco planetas então conhecidos (Vénus, Mercúrio, Marte, Júpiter, Saturno). Como deste modo o número total de corpos celestes perfazia 9, assumiram a existência de um décimo objecto celeste: a Antiterra. O Sol dava uma volta por ano em torno do fogo central e as estrelas fixas eram estacionárias, ocupando a esfera das estrelas fixas. No seu movimento, a Terra conservava sempre a mesma face inabitada voltada para o fogo central, razão pela qual nenhum destes era visto. Esta cosmologia abre perspectivas — ainda que remotas — ao heliocentrismo.

Da observação dos astros surgia espontaneamente a ideia de que estes se encontravam presos a uma esfera material — a esfera celeste — animada de movimento de rotação uniforme em torno da Terra. Não admira, pois, que os antigos tivessem adoptado tal sistema planetário. Porém, a observação mais atenta revelava a existência de anomalias naquela rotação uniforme, como se alguns astros se movessem mais ou menos lentamente em relação aos outros, o que dava a sensação da existência de vários céus. Mais ainda: certos astros não mantinham posições fixas na esfera celeste, antes se moviam de um modo regular, mas algo complicado. A essas «estrelas» chamaram os antigos planetas, o que, em grego, significa *corpos errantes.*

Além da Terra e da Lua, podem ver-se a olho nu cinco corpos brilhantes que se movem entre as estrelas. São os *astros vagabundos* ou planetas: Vénus, Mercúrio, Marte, Júpiter, Saturno. Úrano, Neptuno e Plutão foram descobertos com observações telescópicas e qualquer deles era ainda desconhecido cerca de um século após a morte de Newton. Tal como o Sol e a Lua, todos os planetas se levantam a este e se põem a oeste. Além destes movimentos, apresentam outro movimento notável e intrigante: em determinadas ocasiões, cada planeta pára de se mover de oeste em relação ao fundo das estrelas e durante meses volta para trás, viajando para leste. Este movimento no sentido errado denomina-se *movimento retrógrado.*

Outro fenómeno celeste observado, igualmente misterioso, era a variação de brilho dos planetas.

Nos começos do século IV a. C., Platão (427-347 a. C.) propôs aos discípulos a representação geométrica dos movimentos do Sol e da Lua e dos cinco planetas conhecidos. Platão questionou que movimentos uniformes haveria que admitir para explicar os movimentos observados dos astros. Este problema viria a ter influência determinante no desenvolvimento posterior das teorias sobre o sistema solar e um papel importante na história da ciência.

A concepção platónica do cosmos apoiava-se na ideia de perfeição. A estrutura do universo era explicada em termos de formas e figuras perfeitas e de movimentos uniformes. As figuras perfeitas eram círculos e esferas e a esfera era o sólido mais perfeito que existia. As estrelas — representando seres eternos, divinos e imutáveis — moviam-se com movimento uniforme na mais perfeita e regular das trajectórias — o círculo interminável. Outros, como o Sol e os planetas, «vagabundeavam» pelos céus, chegando mesmo a apresentar movimentos retrógrados. Todavia, como corpos celestes que eram, mover-se-iam de modo adequado à sua elevada categoria. Não em circunferências perfeitas, mas decerto em combinações de movimentos circulares uniformes.

Eudoxo de Cnido (408-355 a. C.), discípulo da Academia de Platão, é, possivelmente, o criador do «método de exaustão» e do cálculo integral, o mais importante contributo matemático da Academia. Para além de matemático, de quem, infelizmente, todas as obras se perderam, Eudoxo é conhecido como «o pai da astronomia científica». Idealizou um sistema muito engenhoso constituído por diversas esferas celestes concêntricas com a Terra e com raios variáveis. Cada esfera girava uniformemente em torno do respectivo eixo, o qual estava fixo na esfera seguinte. Deste modo interpretava Eudoxo o movimento real observado do Sol, o movimento diurno e o anual. O Sol estava fixo na esfera interior, a qual, por sua vez, estava fixa na exterior por intermédio do respectivo eixo. O movimento da esfera exterior descrevia o movimento diurno do Sol e a interior, movendo-se mais lentamente, reproduzia o movimento anual aparente. Eudoxo concebia as suas esferas (no total, 27), não como objectos físicos reais, mas como entidades matemáticas abstractas.

Aristóteles (384-322 a. C.), sucessor de Platão e o maior filósofo da Antiguidade, interpretou as esferas como objectos materiais, as chamadas *esferas cristalinas.* Concebeu um mecanismo gigantesco constituído por 56 esferas, as 27 esferas de Eudoxo e 29 adicionais, para explicar as discrepâncias entre o sistema eudoxiano e os movimentos observados dos planetas. Essas esferas eram movidas pelo divino motor primário *(primum mobile),* por fricção e transferência. O motor primário ficava para além da esfera maior e mais exterior, onde se encontravam as estrelas. Este sistema viria a servir de base ao universo descrito por Dante na *Divina Comédia,* escrita por volta de 1300 da nossa era. O movimento retrógrado de Marte, que lhe valeu o epíteto (dado pelos antigos egípcios) de *sekded-efem khetkhet,* que significa «o que anda para trás», já Aristóteles pretendera explicá-lo.

Platão e outros filósofos gregos admitiam a existência de certos elementos básicos que reproduziam a diversidade de matéria existente no universo. A Terra era constituída por quatro elementos: água, ar, fogo, terra, sempre em processo de mudança — «geração e corrupção». Os céus, morada dos deuses, eternos e imutáveis, e os corpos celestes eram compostos de éter, também conhecido por *quinta-essência,* por definição puro e imutável. O movimento dos corpos celestes era sem princípio nem fim, circular, conforme o ideal platónico, por conveniência matemática e necessidade filosófica. A doutrina aristotélica congregava, assim, elementos científicos, poéticos e teológicos, prevalecendo durante quase 2000 anos na conhecida *cosmologia peripatética* até ao nascimento da ciência moderna.

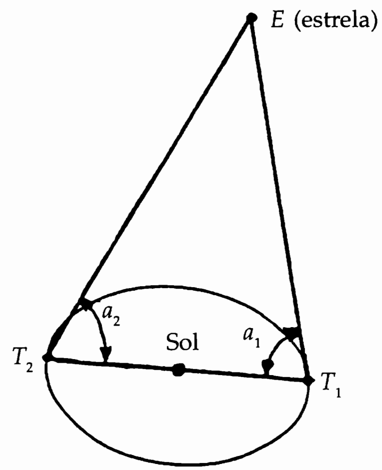
Aristarco de Samos

No século III a. C., Aristarco de Samos sugeriu que os movimentos celestes seriam mais facilmente interpretados se se aceitasse a ideia de um sistema *heliocêntrico,* ou seja, com o Sol colocado no centro das órbitas circulares. Aristarco admitia que a Terra pudesse ter movimentos de rotação (em torno do mesmo eixo das estrelas fixas) e de revolução. Aristarco foi punido por *impiedade,* pois a sua doutrina contradizia o senso comum, as observações e a ideia intuitiva do repouso terrestre, ideia que todos partilhavam, filósofos, teólogos, homem comum. O lugar natural da Terra era o centro do mundo.

Quanto aos astrónomos gregos, refutavam o sistema heliocêntrico, baseando-se num argumento convincente: a ausência de paralaxe estelar.

O que é a paralaxe estelar? Devido ao movimento de translação da Terra, as estrelas aparentam mover-se na esfera celeste, mantendo fixas posições médias, das quais, aliás, nunca se afastam muito. Denomina-se *paralaxe* o máximo desvio angular aparente. (Compreenderemos facilmente este fenómeno se pensarmos no movimento que observamos, dos planos mais próximos relativamente aos mais afastados, quando, de comboio, contemplamos a paisagem. As árvores mais próximas «parecem» deslocar-se relativamente às mais longínquas.) Quanto mais afastada se encontra a estrela, menor é a paralaxe. [Na figura, $\pi - (a_1 + a_2)$ é o ângulo de paralaxe.]

Aos astrónomos de então não ocorria como concebível que as estrelas, mesmo as mais próximas da Terra, se encontrassem demasiadamente distantes para que o efeito de paralaxe pudesse ser observado a olho nu... Com telescópio, tal efeito só viria a ser detectado em 1838! A distância da nossa estrela mais próxima é de 40 milhões de milhões de quilómetros.

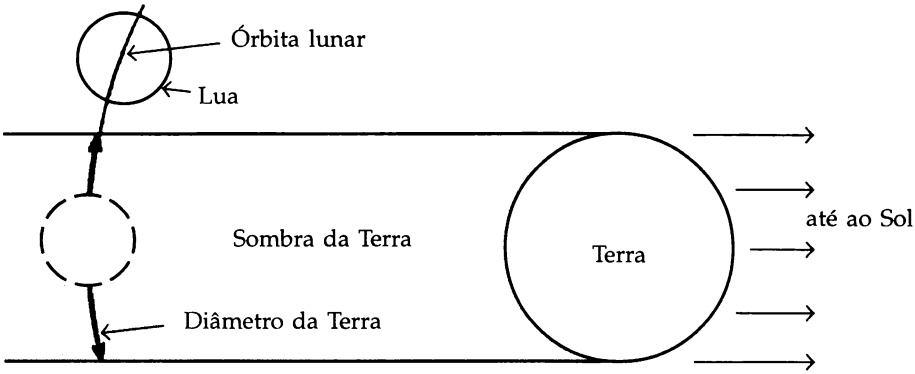


Distância da Terra à Lua

Aristarco de Samos obteve um valor aproximado para a distância d da Terra à Lua, partindo da observação de um eclipse lunar. Comparando a duração τ do eclipse com o período t da órbita lunar, supostamente circular, estimou o ângulo $2\pi\tau/t$ varrido pelo raio vector dirigido da Terra para a Lua enquanto esta atravessa a zona de sombra. Supondo que o Sol está tão afastado que os seus raios incidem paralelamente sobre a Terra, e admitindo, além disso, que a distância percorrida pela Lua durante o eclipse é aproximadamente igual ao diâmetro terrestre $2R$, pôde fazer uma estimativa bastante correcta do raio da órbita lunar:

$$d = 2R \frac{t}{2\pi\tau}$$

São possíveis refinamentos que tomem em conta o facto de a Lua e o Sol não serem vistos como pontos.



Raio da órbita terrestre

É novamente a Aristarco que se deve a primeira determinação da distância da Terra ao Sol. Note-se, no entanto, que o valor encontrado não está correcto. O seu engenhoso método decorre da observação de um simples facto: o intervalo de tempo t_1 que decorre da lua nova ao quarto crescente é um pouco menor do que o intervalo t_2 que decorre do quarto crescente à lua cheia. Na verdade, $t_2 - t_1$ é de uma ordem de grandeza inferior à estimativa do sábio grego, pois apenas vale 35 minutos. Aristarco notou ainda que, na lua nova, a Terra, T, o Sol, S, e a Lua, L, formam um triângulo rectângulo em L e que o ângulo $\angle STL$ está para o ângulo raso como t_1 está para o semiperíodo lunar $t_1 + t_2$. Aristarco concluiu que a distância D da Terra ao Sol era 19 vezes maior do que a distância d da Terra à Lua, quando, na realidade, é 384 vezes maior: $D/d = 2\pi(\pi/2 - \angle STL)$. Tivemos de aguardar dezassete séculos para que o erro, de um factor 20, fosse corrigido.

Medição de distâncias por triangulação

Como medir, por exemplo, a distância da Terra ao Sol pelo tradicional método de *triangulação?* Considerando um triângulo em que dois dos vértices são pontos à superfície da Terra e o terceiro é o Sol; depois há que medir ângulos e usar matemática elementar.

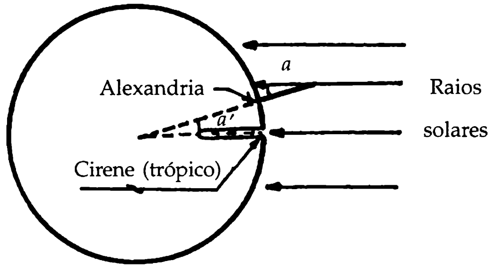
Sabe-se que qualquer triângulo fica completamente determinado pelo conhecimento de um dos seus lados e dos ângulos adjacentes a esse lado. Baseia-se nesta propriedade elementar a técnica de triangulação para a determinação de distâncias a pontos inacessíveis. Sejam A e B dois pontos acessíveis e C o ponto inacessível, embora supostamente visível tanto de A como de B. Pretendemos determinar as distâncias $b = CA$, e $a = CB$, partindo do conhecimento da distância $c = AB$ e dos ângulos $\alpha = \angle CAB$ e $\beta = \angle ABC$, em princípio mensuráveis. A chamada lei de *analogia dos senos*

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

($\gamma = \angle BCA$) fornece-nos a solução do problema, já que $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$.

O raio da Terra

Eratóstenes, director da famosa biblioteca de Alexandria e contemporâneo de Aristarco, engendrou um processo para determinar o raio da Terra, admitindo que esta tinha forma esférica. O método baseava-se na diferença de inclinação dos raios solares em dois pontos afastados da superfície terrestre, situados no mesmo meridiano. Eratóstenes notara que, no solstício de Verão, os raios solares alcançavam o fundo de um poço profundo situado em Cirene. O Sol ficava então precisamente na vertical do lugar. Sabia também que a distância de Cirene a Alexandria era, em unidades dos nossos dias, cerca de 900 km. Eratóstenes mediu em Alexandria, no solstício de Verão, ao meio-dia, o comprimento da sombra de uma estaca vertical, e concluiu que o ângulo dos raios solares com a vertical era de $\frac{1}{50}$ do círculo, ou seja, 7°12'. Assim, por uma simples regra de três, Eratóstenes determinou a circunferência terrestre, bem como o respectivo raio: $2\pi R = 900 \times 50$.

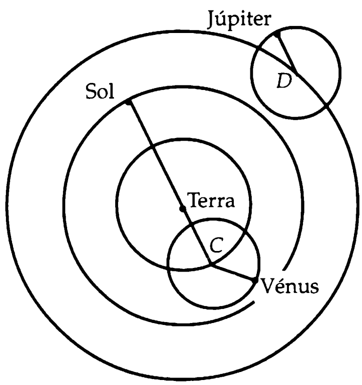


Cláudio Ptolemeu de Alexandria

Ptolemeu considerou inicialmente o modelo heliocêntrico, mas rejeitou-o de imediato com base na *Física* de Aristóteles.

O modelo das esferas celestes contradizia as observações astronómicas no que concerne à variação do brilho dos planetas no decurso das suas órbitas, sobretudo quando retrogridem, sugerindo que, ora se aproximam, ora se afastam da Terra. Isto era incompatível com o facto de os planetas estarem fixos sobre uma esfera geocêntrica. Para colmatar esta deficiência, o astrónomo grego Hiparco de Rodes, no século II a. C, propôs um novo modelo, posteriormente retomado e adaptado por Cláudio Ptolemeu de Alexandria (século II d. C.).

No modelo de Ptolemeu, que permanece fiel ao platonismo e recorre somente a figuras perfeitas e movimentos uniformes, a Terra ocupa o centro do universo e o Sol e a Lua giram em seu torno com movimento circular e uniforme. Cada planeta encontrava-se ligado a uma esfera transparente, perfeita, através de uma roda excêntrica, quer dizer, uma roda cujo centro se apoiava sobre a dita esfera transparente. A trajectória do planeta resultava, assim, da composição de dois movimentos de rotação uniformes: o da roda e o da esfera. O *deferente* é uma circunferência cujo centro é a Terra e o *epiciclo* é uma circunferência cujo centro está sobre o deferente. Para os planetas interiores, Vénus ou Mercúrio, o Sol, a Terra e *C*, centro do epiciclo do planeta, estão sempre numa linha recta (figura). Para um planeta exterior, Marte, Júpiter, Saturno, se *D* é o centro do respectivo epiciclo, então a linha que une o planeta a *D* é paralela à linha que une a Terra ao Sol. Quanto às estrelas, ocupavam a «esfera de estrelas fixas», que revolvia em torno de um eixo que passava pelos pólos. (Em rigor, a Terra não ocupava o centro do universo, mas encontrava-se ligeiramente deslocada.)



As esferas etéreas de Ptolemeu que, na Idade Média, se criam feitas de cristal, explicam por que ainda se fala da música das esferas e do sétimo céu. (Existia uma esfera ou *céu* para a Lua, Mercúrio, Vénus, o Sol, Marte, Júpiter, Saturno, e outra para as estrelas.)

Ptolemeu retomou a tradição astrológica babilónica. Escreveu o *Tetrabiblos* cerca de 150 da nossa era. Entre os Árabes a obra tornou-se conhecida como o *Almajesto*, que significa «o maior dos livros». Nesse tempo, e ainda por muito tempo, a fronteira entre a astronomia e a astrologia não era clara. Ptolemeu classificou as estrelas, registou os respectivos brilhos, estabeleceu regras para a previsão dos eclipses, fundamentou a teoria da esfericidade da Terra. A contemplação e estudo dos céus extasiou Ptolemeu, levando-o a escrever:

> Como mortal que sou, sei que nasci por um dia. Mas, quando sigo à minha vontade a densa multidão de estrelas no seu curso circular, os meus pés deixam de tocar a terra...

Ptolemeu continuava a defender o sistema geocêntrico, com o Sol, a Lua, os planetas a girarem em torno da Terra, concepção esta naturalmente transmitida pela observação e apreendida pelo senso comum. Ou, como Kepler escreveria:

> Era, portanto, impossível que a razão, não previamente instruída, pudesse imaginar outra coisa senão que a Terra fosse uma espécie de casa grande com a abóbada celeste no topo; é imóvel e, dentro dela, o Sol, tão pequeno, passa de uma região para outra como um pássaro a esvoaçar no ar.

Mas então como explicar o movimento aparente dos planetas, como o movimento de Marte, conhecido há milhares de anos?

Ptolemeu, no seu modelo, deslocou a Terra para uma posição ligeiramente excêntrica. Este «deslocamento» impunha-se pelos dados das observações astronómicas, que revelavam alterações regulares nas características do movimento retrógrado dos planetas. O modelo de Ptolemeu dava conta destas anomalias e permitia prever as posições dos planetas com precisão assinalável para a época (aproximadamente 2 graus). O modelo explicava as variações de brilho dos corpos celestes. A sua obra, apogeu da astronomia antiga, prevaleceu durante mais de quinze séculos. Quando o modelo ptolemaico foi reintroduzido pelos Árabes na Europa, os escolásticos conferiram-lhe um profundo significado teológico.

Parece que o próprio Ptolemeu não acreditava ter obtido um modelo físico real do universo, contentando-se em considerá-lo um modelo matemático capaz de calcular as posições dos objectos celestes.

O problema astronómico de Platão tornou-se uma questão primordial no tempo de Kepler e de Galileu. O sistema de Ptolemeu, com a síntese da fé cristã e da *Física* de Aristóteles efectuada por S. Tomás de Aquino, foi longamente aceite. Acabaria por ser substituído por uma teoria heliocêntrica. Foi da tentativa abortada de construir um sistema do mundo de acordo com o axioma do movimento uniforme em órbitas circulares, ou de vários movimentos circulares combinados, que nasceu a ciência moderna. A teoria planetária dos antigos, inteligível num mero contexto apriorístico e metafísico, acabaria por ceder às vantagens interpretativas da nova teoria.

Nicolau Copérnico

Em 1543 veio a lume uma hipótese explicativa do movimento aparente dos planetas. Nada menos do que: o movimento retrógrado aparente dos planetas não nasce dos seus movimentos, mas do movimento da Terra. O autor era o clérigo católico polaco Nicolau Copérnico (1473-1543). Copérnico viveu na época do Renascimento e da Reforma, um período de turbulência e inovação em vários campos da criatividade humana. As grandes navegações abriam novos horizontes à geografia, astronomia, botânica, etc. Urgia uma reforma do calendário. Muitos dos argumentos de autoridade anteriormente aceites eram questionados. Com a invenção da imprensa móvel, a difusão cultural processava-se de modo promissor e o labor intelectual fervilhava de ideias novas.

O tratado de Copérnico, *De revolutionibus orbium celestium (Sobre as revoluções das esferas celestes),* foi publicado em 1543, apesar de concluído anos antes, em 1532. Copérnico dedicou a obra ao papa Paulo III, avançando no prefácio os previsíveis argumentos teológicos das autoridades religiosas. No tratado encontrava-se formulada a hipótese heliocêntrica, situando-se, contudo, o *De revolutionibus* ainda conceptualmente próximo da astronomia grega:

> As ideias aqui apresentadas são difíceis, se não quase impossíveis de aceitar; são quase diametralmente opostas às noções populares. Todavia,

> e com a ajuda de Deus, faremos com que tudo o que é exposto a seguir se torne tão claro como o dia, pelo menos para aqueles que não sejam ignorantes da matemática...

O modelo heliocêntrico gozava das vantagens interpretativas do modelo de Ptolemeu, mas era mais simples, pois recorria a um único movimento circular, enquanto o ptolemaico recorria a uma composição de movimentos circulares. (Na verdade, os dois modelos são *equivalentes*, na medida em que um resulta do outro através de uma *mudança de referencial.* Hoje em dia a atitude na escolha do sistema de referência consiste em utilizar aquele que facilite o mais possível a discussão do problema.) O modelo copernicano permitia dois resultados importantes (impossíveis de alcançar na teoria ptolemaica): obter o período do movimento dos planetas em torno do Sol e as dimensões das órbitas dos planetas. Copérnico pôde também obter, pela primeira vez na história, as distâncias relativas dos planetas ao Sol.

Copérnico invocava como vantagem do seu sistema a simplicidade da descrição dos movimentos dos planetas. Simplicidade, assinale-se, não só conveniente, como *maravilhosa e agradável ao espírito.* Ou seja, Copérnico prezava o sentido estético da ciência.

Não era totalmente original a ideia de um sistema heliocêntrico, ou seja, com o Sol colocado no centro das órbitas circulares. De facto, tal modelo já havia sido proposto pelos astrónomos gregos, em particular por Aristarco de Samos, no século III a. C.

No modelo copernicano, a Terra passava a ser *apenas* um dos planetas, o terceiro a contar do Sol, movendo-se numa órbita perfeitamente circular. Além do heliocentrismo, o aspecto mais radical da teoria de Copérnico era os planetas não serem entes individuais, mas parte de uma entidade, *o sistema solar.* Se supor que a Terra não era o centro do universo já era bastante ofensivo dos cânones tradicionais, que dizer de tal inovação? O conceito antigo defendido pelas autoridades religiosas e filósofos de que a matéria celeste era intrinsecamente diferente da terreste encontrava-se ameaçado, levantando intrincados problemas filosóficos e teológicos. Acaso haveria outros corpos celestes habitados? Seriam esses povos pagãos?

Passariam mais de cem anos até que as ideias de Copérnico fossem aceites, mesmo pelos astrónomos. Todas as fés religiosas da Europa, incluindo as protestantes, apoiavam-se em citações bíblicas que confirmavam que o Divino Arquitecto obrara de acordo com o sistema de

Ptolemeu. De modo esclarecedor, Lutero chamou a Copérnico «o louco que viraria do avesso toda a ciência da astronomia».

A teoria de Copérnico, por contrariar a letra das Sagradas Escrituras, afrontava a Igreja católica, pelo que, em 1616, esta incluiu a sua obra no Índex (até ser «corrigida pelos censores eclesiásticos»). Tal censura revelar-se-ia ineficaz, pois apenas 60% dos exemplares foram corrigidos em Itália e nenhum na Península Ibérica.

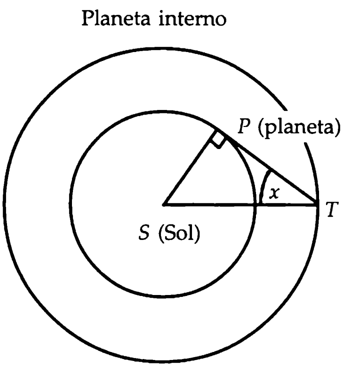
Copérnico retardou a publicação das suas *ousadas* concepções. Diz-se que viu o seu livro pronto e morreu. Galileu Galilei afoitou-se na defesa da teoria heliocêntrica, atitude que o levaria a comparecer perante o Santo Tribunal em Florença, onde abjuraria todas as heresias que proclamara.

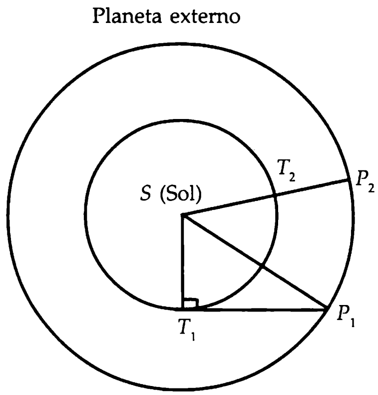
Distâncias do Sol aos planetas

O modelo de Copérnico permitiu comparar as distâncias do Sol aos planetas com a distância da Terra ao Sol.

Há uma propriedade importante e óbvia no contexto do modelo copernicano, a qual distingue os planetas cuja órbita tem um raio inferior ao da órbita terrestre daqueles cuja raio da órbita é superior. Essa propriedade exprime-se em termos da *elongação* máxima do planeta relativamente ao Sol. Ou seja: consideremos o ângulo formado pelas direcções em que são vistos o planeta e o Sol. Verifica-se que este atinge um valor máximo x (elongação máxima). Para os planetas internos, Vénus e Mercúrio, $x < \pi$; para os planetas externos, Marte, Júpiter e Saturno, $x = \pi$, dizendo-se neste caso que estão em *oposição.* Baseiam-se nesta propriedade, que não passou despercebida aos Gregos antigos, os métodos de determinação dos raios das órbitas planetárias, distintos para planetas internos e externos.

Consideremos primeiro o caso dos planetas internos. Suponhamos que se atingiu a conjuntura para a qual a elongação referida anteriormente atinge o seu máximo, $x < \pi$. Então o Sol, S, o planeta, P, e a Terra, T, formam um triângulo rectângulo em P, pois o segmento $[PT]$ é tangente à órbita do planeta e $x = \angle STP$. A razão entre o raio d da órbita do planeta e o raio r da órbita terrestre é $\frac{d}{r} = \sin x$. O caso dos planetas externos resolve-se considerando o seu movimento num referencial que roda em torno do Sol, acompanhando o movimento de translação da Terra. O *período sinódico* do planeta é o intervalo de tempo, τ, que separa duas conjunturas consecutivas tais que $x = \pi$, isto é, tais que o Sol e o planeta estejam em oposição relativamente à Terra. Consideremos a conjuntura tal que seja de $\frac{\pi}{2}$ a elongação do planeta relativamente ao Sol. Então o Sol, *S*, o planeta, *P*, e a Terra, *T*, formam um triângulo rectângulo em *T*. Seja *t* o intervalo de tempo que decorre desde a conjuntura considerada àquela em que o Sol e o planeta estão em oposição. A solução do problema reduz-se à determinação do ângulo $\angle TSP$, descrito pelo planeta durante o intervalo *t*. Uma regra de três simples permite concluir que $\angle \mathrm{TSP} = 2\pi \times \frac{t}{\tau}$. A razão entre o raio *d* da órbita planetária e o raio *r* da órbita terrestre é tal que $\frac{r}{d} = \cos\angle TSP$.





Joannes Kepler

Joannes Kepler nasceu na Alemanha em 1571 e recebeu educação sacerdotal no seminário protestante de Maulbronn. Aí estudou grego, latim, música e matemática. Na geometria de Euclides vislumbrava Kepler a imagem da perfeição e da glória cósmica, vindo a escrever:

> A geometria existia antes da criação. É tão eterna como o pensamento de Deus [...] A geometria deu a Deus um modelo para a criação [...] A geometria é o próprio Deus.

Em 1589 Kepler abandonou o seminário para prosseguir estudos na Universidade de Tübingen, aí entrando em contacto com as correntes intelectuais mais importantes da época. Os *perigosos mistérios* da hipótese de Copérnico circulavam na Europa culta.

Em 1596, com 26 anos, sendo professor de Matemática na Escola Secundária de Graz, na Áustria, Kepler publicou uma das suas obras de referência: *Mysterium Cosmographicum.* (Fazia também almanaques astronómicos e meteorológicos e horóscopos. Segundo Kepler, «Deus dá a todos os animais um meio de subsistência. Ao astrónomo deu a astrologia.»)

No tempo de Kepler só eram conhecidos seis planetas (principais): Mercúrio, Vénus, Terra, Marte, Júpiter e Saturno. A Lua, no sistema copernicano, era um satélite da Terra, e não um planeta principal. Kepler perguntava-se porquê seis planetas e qual a razão de ser das razões orbitais determinadas por Copérnico. Kepler acreditava que a existência de seis planetas era determinada pela existência dos cinco sólidos platónicos, mas para este facto, a que chamou «mistério cósmico», havia uma explicação «a mão de Deus, Supremo Geómetra».

Kepler concebeu um modelo do sistema solar (heliocêntrico) no qual as órbitas planetárias eram representadas por esferas que circunscreviam e, por sua vez, estavam inscritas nos *sólidos platónicos.* (Estes sólidos são os poliedros regulares, poliedros cujas faces são polígonos regulares iguais. Demonstra-se que só existem cinco poliedros nestas condições: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.) Os sólidos encontravam-se encaixados uns nos outros, como *matrioscas* russas, intercalando-se as órbitas celestes (esferas) entre eles de tal modo que cada esfera contivesse um dos cinco poliedros, o qual, por sua vez, continha uma nova esfera (figura da p. 203). O espaço das órbitas de Saturno e de Júpiter é ocupado pelo cubo, que, inscrito na esfera de Saturno, circunscreve a órbita de Júpiter; analogamente, o espaço entre as órbitas de Júpiter e de Marte é ocupado pelo tetraedro; entre Marte e a Terra anicha-se um dodecaedro, entre a Terra e Vénus um icosaedro e, finalmente, entre Vénus e Mercúrio um octaedro.

Kepler propôs ao duque de Vurtemberga o financiamento da construção do seu modelo dos sólidos anichados para que todos pudessem vislumbrar a beleza da geometria divina. O modelo projectado seria de prata e pedras preciosas e poderia servir de cálice ducal. Esteticamente apelativo, este modelo estabelecia uma conexão entre o universo e a geometria. Contudo, o modelo não reproduzia as distâncias correctas entre o Sol e os planetas, pelo que Kepler se lançou em cálculos cada vez mais complexos:

> A intensidade de prazer que me deu esta descoberta nunca poderá ser descrita em palavras [...] Não recuei perante os cálculos, por mais difíceis que fossem. Passei noites embrenhado em trabalhos matemáticos até conseguir verificar se a minha hipótese concordava com as órbitas de Copérnico ou se a minha alegria se desfaria em fumo.

Por mais que Kepler se esforçasse, os resultados dos cálculos não concordavam com as medições de que dispunha para os raios das órbitas planetárias. Concluiu então que os valores obtidos não eram suficientemente precisos. Pensou recorrer a Tycho Brahe (1546-1601), renomado matemático imperial do imperador católico Rodolfo II.

Kepler estava firmemente convicto de que a estrutura do universo obedecia a um plano matemático. De acordo com as ideias platónico-pitagóricas, tal plano podia ser gizado com argumentos de perfeição e harmonia das esferas. Por outro lado, Kepler valorizava a experiência e a observação, não se contentando com o modelo matemático em si, antes exigindo uma concordância perfeita entre as consequências desse modelo e os dados da observação. Ora, os dados experimentais haveriam de contradizer as suas especulações doutrinais! Kepler estava consciente de que as suas ideias só teriam validade se resistissem à prova da comparação com as observações, atitude científica revolucionária para a época.

Em 1598, no período de agitação que precedeu a guerra dos 30 anos, a escola onde Kepler ensinava foi encerrada, as orações, livros e hinos heréticos foram proibidos e os habitantes de Graz foram convocados para análise dos seus credos religiosos. Os que se recusavam a professar a fé católica eram multados e expulsos de Graz sob pena de morte. Kepler optou pelo exílio: «Nunca aprendi a hipocrisia. Estou convicto da minha fé. Não brinco com ela.» Assim, decidiu-se a ir para Praga, onde aspirava vir a trabalhar com o prestigioso astrónomo dinamarquês Tycho Brahe, que durante trinta e cinco anos se dedicara a medir o universo e era considerado o maior conhecedor dos céus do seu tempo.

Tycho era um aristocrata excêntrico que tinha um nariz postiço de ouro; perdera o verdadeiro nariz ainda estudante num duelo para decidir quem era o melhor matemático. Senhor de considerável fortuna, vivia rodeado de aduladores, num ambiente de intriga, escárnio e orgias. Tycho e Kepler encontraram-se em Praga em 1600. A parafernália de instrumentos astronómicos de que Tycho dispunha impressionou extraordinariamente Kepler, que assim desabafaria (revelando que a convivência entre ambos terá sido conturbada):

> Tycho não me deu oportunidade de partilhar as suas experiências. Mencionava apenas de passagem, durante uma refeição ou entre outros assuntos, hoje, a medida do apogeu de um planeta, amanhã, os nodos de outro [...] Tycho possui as melhores observações [...] Tem também colaboradores. Falta-lhe apenas o arquitecto que ponha tudo isto a funcionar.

O astrónomo imperial de Rodolfo II não parecia disposto a colaborar com aquele rival mais jovem. Durante os dezoito meses que Tycho ainda teria de vida e em que privaria com Kepler sucederam-se conflitos e reconciliações. No leito de morte, Tycho legou as observações a Kepler e «na última noite do seu delírio repetiu vezes sem conta estas palavras, como se estivesse a escrever um poema: *que não pareça que vivi em vão...*»

Kepler sucedeu a Tycho como astrónomo imperial e confirmou que as observações que dele herdara contrariavam a sua quimérica doutrina do *mysterium.* As suas conjecturas eram também desmentidas pela existência da lua da Terra e das quatro luas de Júpiter, entretanto descobertas por Galileu. Assim, Kepler escreveu a Galileu:

> Comecei imediatamente a pensar como poderia haver uma adição ao número de planetas sem renunciar ao meu *Mysterium Cosmographicum,* segundo o qual os cinco sólidos regulares de Euclides não permitem mais de seis planetas em volta do Sol [...] Estou longe de descrer na existência de quatro planetas circum-jovianos e anseio por um telescópio para me antecipar, se possível, na descoberta de dois à volta de Marte e, como parece requerer a proporção, seis ou oito em volta de Saturno e talvez um em volta de Mercúrio e Vénus.

Durante três anos desenvolveu cálculos laboriosos, estudando a órbita de Marte tal como Tycho lhe sugerira e tentando reproduzir as suas observações. O movimento anómalo de Marte seria o mais difícil de conciliar com a figura geométrica perfeita: o círculo. Ao cabo de setenta tentativas, quando o sucesso parecia próximo, fez uma descoberta desconcertante. As deduções discordavam em oito minutos das observações de Brahe:

> Se tivesse acreditado que podíamos ignorar estes oito minutos, teria refeito a minha hipótese de modo correspondente. Mas, uma vez que não era admissível ignorá-los, esses oito minutos apontavam o caminho para uma completa reforma da astronomia.

Kepler decidiu aceitar corajosamente os factos e optou por rever as suas teorias:

> O universo está marcado com o adorno das proporções harmónicas, mas as harmonias têm de se adaptar à experiência.

As três leis de Kepler

Kepler abandonou a ilusão das órbitas circulares, invocando a *imperfeição* dos planetas, feitos de matéria imperfeita, como a Terra, minada pela fome e pela guerra. Fez cálculos, cometeu erros, ensaiou fórmulas e descobriu a equação da elipse que se ajustava às observações de Tycho. Assim, estabeleceu a primeira lei do movimento planetário:

Primeira lei de Kepler (lei das órbitas)

As órbitas descritas pelos planetas em torno do Sol são elipses, ocupando o Sol um dos focos.

A *elipse* é o lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos fixos —*focos*— é constante. A equação-padrão da elipse é

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

A *excentricidade* da elipse, e, é dada por $e = \frac{c}{a}$, onde $c = \sqrt{a^2 - b^2} (a > b)$ é a semidistância focal e a e b, respectivamente, o semieixo maior e menor. (A circunferência tem excentricidade 0.)

Kepler procurou depois um enunciado que exprimisse o modo como, de acordo com os dados de Tycho, Marte descrevia a sua trajectória. Para o efeito, concebeu um modelo errado (segundo o qual o planeta era varrido tangencialmente pelos raios solares e não sujeito a uma força central), fez um cálculo errado das áreas varridas e chegou, como que por milagre, à lei certa.

Segunda lei de Kepler (lei das áreas)

O raio vector que liga um planeta ao Sol descreve áreas iguais em tempos iguais.

Kepler acabou por perceber que tinha cometido erros que se compensavam mutuamente e procurou compreender porquê. Caprichosamente, a explicação que encontrou estava também errada. Kepler publicou as duas primeiras leis — extraordinariamente simples e belas — no livro *Astronomia Nova.* Como o título exprimia, tratava-se de uma reformulação total da astronomia. Com esta obra gorava-se o intento platónico de ajustar círculos perfeitos aos céus, propósito esse que durante séculos seduzira os espíritos de muitos sábios.

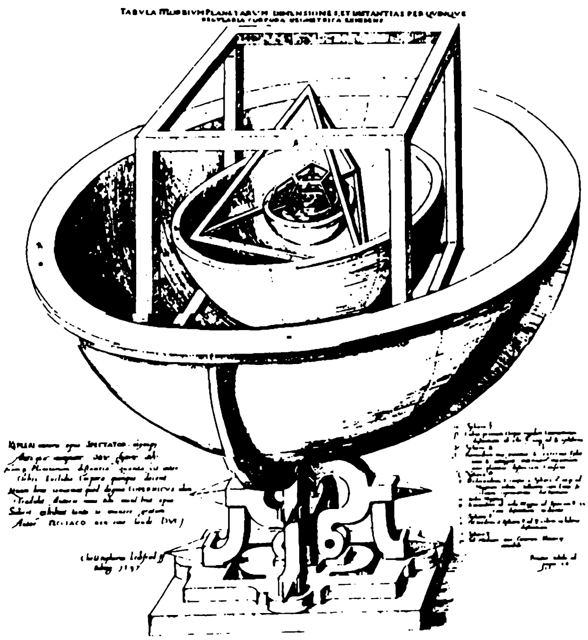


Figura 1 — *Modelo do sistema solar publicado no* Mysterium Cosmographycum, *de Johannes Kepler, 1596: os espaços interplanetários são preenchidos pelos cinco poliedros regulares* [reprodução tirada de Gullberg (1977)]

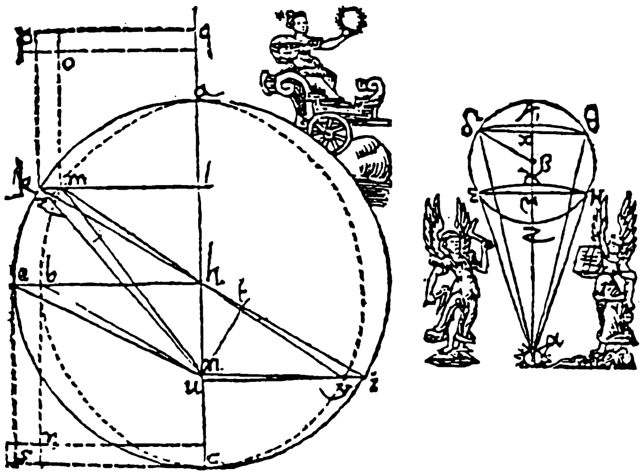


Figura 2 — *Demonstração de que a órbitra de Marte é elíptica, da obra* Nova Astronomia... [reprodução tirada de Crombie (1052)]

Só muito mais tarde Kepler chegou à formulação da terceira lei, a qual seria publicada no livro *As Harmonias do Mundo* (*Harmonices Mundi,* 1619). O termo «harmonia» tinha um significado amplo: a ordem e beleza dos movimentos planetários, a existência de leis matemáticas que descreviam esses movimentos (à boa maneira pitagórica) e até harmonia em sentido musical, a «harmonia das esferas». O título do livro exprime uma interpretação literal da «harmonia das esferas», procurando provar que os planetas, no seu movimento, executam uma espécie de música celeste. Cada planeta emitiria uma ou mais notas musicais, conforme as suas variações de velocidade na órbita. Vénus, que tinha a menor excentricidade, emitiria sempre a mesma nota; Marte, cuja excentricidade conduzia a maiores variações de velocidade, emitiria várias notas diferentes; a Terra trauteava indefinidamente *fá* e *mi,* tons que representavam a palavra latina «fome», palavra essa que bem descrevia a realidade do *planeta azul.*

No livro *Harmonices Mundi* escreveu:

> Com esta sinfonia de vozes, o homem pode percorrer a eternidade do tempo em menos de uma hora e apreciar em pequenas quantidades o prazer de Deus, o Artista Supremo [...] Entrego-me livremente ao sagrado frenesim [...] Os dados estão lançados e estou a escrever o livro — para ser lido agora ou pela posteridade, não importa. Ele pode esperar um século

pelo leitor, do mesmo modo que Deus esperou 6000 anos por um contemplador da sua obra.

A 8 de Março deste ano de 1618 [...] [a solução] apareceu-me na cabeça. Mas estava sem sorte. E, quando a testei pelo cálculo, rejeitei-a como falsa. Afinal, a ideia voltou-me em 15 de Maio e, em novo ataque, venceu a obscuridade da minha mente; concordava tão perfeitamente com os dados obtidos nos dezassete anos de trabalho sobre as observações de Tycho que pensei primeiro estar a sonhar...

Ainda não passaram dezoito meses desde que tive o primeiro rasgo de luz, três meses desde a madrugada, muito poucos dias desde que o Sol descoberto, tão admirável para contemplar, se me revelou. Nada me detém; saciarei a minha fúria sagrada; triunfarei sobre a humanidade através da confissão honesta de que roubei os vasos dourados aos Egípcios para construir um tabernáculo para o meu Deus longe das fronteiras do Egipto. Se me perdoarem, exultarei; se ficarem zangados, aguentarei; o molde está feito, o livro está escrito...

Assim surge a lei seguinte:

Terceira lei de Kepler (lei dos períodos)

Os quadrados dos períodos de revolução de dois planetas quaisquer estão entre si como os cubos das suas distâncias médias ao Sol.

Para além do estabelecimento das leis planetárias, Kepler procurou encontrar uma causa subjacente aos movimentos. Tal causa seria análoga ao magnetismo e às leis quantitativas que se aplicavam à Terra, também base das leis físicas quantitativas que regem os céus. Este era um contributo audacioso, prenúncio de uma ideia de gravitação, e uma primeira explicação não mística do movimento dos céus.

Oito dias depois de Kepler ter descoberto a terceira lei planetária ocorreu em Praga o incidente que desencadeou a guerra dos Trinta Anos. Kepler perdeu a mulher e o filho numa epidemia, o seu protector real foi deposto e ele próprio excomungado pela Igreja luterana. Na sua cidade natal, Weil der Stadt, a mãe foi presa por bruxaria. Kepler sentiu-se culpado porque no seu livro de ficção científica *Somnium* havia claras referências autobiográficas. No *Somnium,* que descreve uma viagem à Lua, o herói visita Tycho Brahe, os pais vendem drogas, a mãe tem ligações com espíritos e demónios, fornecendo a um deles os meios para viajar até à Lua. O livro foi usado como prova incriminatória.

Kepler correu para Vurtemberga, onde a mãe, de 74 anos, se encontrava presa e ameaçada de tortura, tal como Galileu, preso noutra masmorra. Kepler procurou explicações para as doenças físicas que os cidadãos de Vurtemberga atribuíam aos feitiços da mãe. Deste modo, conseguiu que esta fosse exilada. Mas, se acaso ousasse voltar a Vurtemberga, seria queimada.

Kepler passou os últimos anos de vida em Sagan, cidade da Silésia, pedindo apoios e fazendo horóscopos para o duque de Walenstein. O epitáfio que compôs para si próprio dizia: «Medi os céus, agora meço as sombras. O espírito volta-se para o céu, o corpo repousa na Terra.» Porém, a guerra dos Trinta Anos destruiu a campa, perdendo-se o epitáfio.

A pesquisa de Kepler para compreender o movimento dos planetas e a harmonia dos céus culminaria com as contribuições de Newton, trinta e seis anos mais tarde...

Newton, o grande unificador

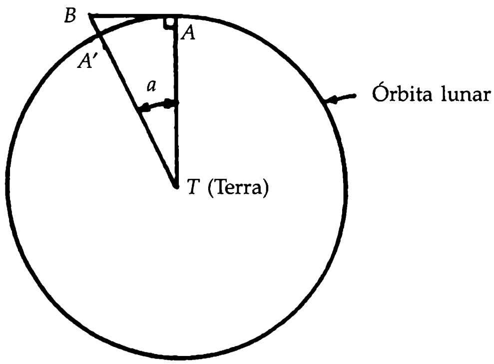
A natureza não faz nada em vão.

NEWTON

Newton tinha apenas 23 anos quando (recolhido em casa por ocasião da peste negra) se interrogou por que razão caem os graves para a Terra, mas não cai a Lua. Descartes (1596-1650) propusera uma teoria segundo a qual o espaço estava cheio de um fluido subtil e invisível que transportava os planetas num gigantesco remoinho em torno do Sol. Newton (descrente da teoria dos remoinhos) encontrou a seguinte explicação para a queda da Lua: esta, ao desviar-se da sua trajectória rectilínea, está permanentemente a cair. Ao fim de um pequeno intervalo de tempo, δt, a queda da Lua é a diferença entre o comprimento, r, do raio da sua trajectória e a hipotenusa de um triângulo rectângulo de catetos iguais a r e a $v\delta t$, onde v é a velocidade da Lua:

$$\sqrt{r^2 + (v\delta t)^2} - r \approx \frac{(v\delta t)^2}{2r}$$

A órbita curva da Lua é produzida pela combinação do seu *movimento de inércia* em linha recta e pela sua «queda» motivada pela *atracção gravitacional* da Terra. Nesta interpretação radica, como adiante se exporá, uma grande unificação: a unificação dos fenómenos terrestes e celestes. Cumpre não esquecer que durante séculos se acreditara que os fenómenos celestes eram completamente diferentes dos fenómenos terrestres.



Como fez Newton uso da sua conclusão relativa à queda lunar? Concluiu que a aceleração da Lua na sua queda é $\frac{v^2}{r}$. Newton sabia a distância, r, da Terra à Lua e o tempo, t, que a Lua leva a dar uma volta à Terra, logo $v = \frac{2\pi r}{t}$. A partir destes dados, calculou a razão entre a aceleração da Lua e a aceleração de um grave à superfície da Terra (9,8 metros por segundo quadrado, conforme era sabido). Comparou esta razão com a razão entre o raio da Terra e o raio da órbita lunar. Verificou que a segunda razão é aproximadamente igual ao quadrado da primeira. O que sugeria que a atracção de um corpo para o centro da Terra era inversamente proporcional ao quadrado da sua distância a esse ponto.

Segundo Galileu, na Terra, todos os corpos caem da mesma maneira, sendo o espaço percorrido proporcional ao quadrado dos tempos de queda e a aceleração de 9,8 metros por segundo quadrado. Kepler descrevia as órbitas dos planetas como elipses, uma inovação singular que destronava as seculares quimeras da perfeição circular. Newton vai muito mais longe, descobrindo leis para todos os movimentos celestes. E afirma que todos os corpos celestes caem da mesma maneira, a maçã, a Lua... e que a força que os faz cair é inversamente proporcional ao quadrado da distância do corpo à fonte da força. A força de atracção, F, é, assim,

$$F = \frac{G.m.m'}{d^2}$$

onde G é uma constante (a *constante de atracção universal*, mais tarde calculada por Cavendish) e m, m', as massas dos corpos cujos centros distam d.

Newton propôs uma simples equação matemática que unifica o movimento dos graves e o dos corpos celestes. Era aplicável tanto a dois átomos, como a duas estrelas ou dois grãos de areia. É esta a grande síntese de Newton, um passo gigantesco na compreensão do universo. Dessa equação deduziam-se as leis de Kepler, explicavam-se as marés, o achatamento polar da Terra... Como consequência, Halley atreveu-se a prever o retorno de um cometa, que aparecera em 1531, 1606 e 1682, em 1758... o que aconteceu!

Os cálculos da *gravitação universal* foram possíveis graças à teoria das fluxões que Newton desenvolvera.

Nos começos do século XVIII, as ciências matemáticas foram marcadas pela descoberta do cálculo infinitesimal, descoberta que ocorreu em Inglaterra, devida a Newton, sob a forma de cálculo das *fluxões* e no continente europeu, devida a Leibniz, sob a forma de *diferenciais*. O tratamento das equações diferenciais e do cálculo das variações tornou possível o decisivo incremento das aplicações da matemática às ciências naturais, apesar das ainda vivas dificuldades lógicas em torno dos fundamentos do cálculo.

Estas dificuldades estimulariam os matemáticos a melhor compreenderem as noções de infinito, infinitésimo, fluxão e diferencial. Na *Encyclopédie*, t. 4, de 1754, d'Alembert expôs a noção de derivada como o limite de um quociente de incrementos, correspondendo à forma actual

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

apesar de o significado das noções de limite e de quantidades infinitesimais não estar ainda clarificado. Apenas no século XIX, a partir dos anos 20 e devido aos contributos de Cauchy (1789-1857), tal noção viria a ser definitivamente aceite. Assinale-se que o matemático José Anastácio da Cunha (1744-1787) incluiu na sua obra *Principios Mathematicos*, publicada em Lisboa entre 1782 e 1787, a definição rigorosa de diferencial.

Os Principia

Os *Principia* de Newton são uma obra extraordinária que honra a humanidade. Newton, homem complexo e introvertido, após a amarga controvérsia provocada pela sua obra *Teoria da Luz e das Sombras*, tornara-se avesso à ideia de qualquer publicação. Os *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* foram publicados em 1687 com patrocínio da Royal Society, por incentivo de Halley (seu amigo e mecenas da edição). Começam com definições: massa, movimento, inércia, força. Incluem as famosas «regras do raciocínio em filosofia», que reflectem a crença de Newton na unificação de toda a natureza. Apresentam as conhecidas *leis de Newton:*

1. *(Lei de inércia)* Um corpo continua em estado de repouso ou movimento rectilíneo uniforme, a não ser que seja actuado por uma força resultante não nula.
2. A força resultante que actua num objecto é directamente proporcional e tem a mesma direcção da aceleração.
3. Para cada acção existe uma reacção igual e oposta.

Newton utiliza nos *Principia* uma argumentação do teor da de Euclides, demonstrações de tipo geométrico. As três principais secções dos *Principia* contêm um manancial de descobertas matemáticas e físicas, mas com relevo absoluto para a teoria da gravitação.

Importa recordar que a teoria da gravitação universal encontrou grande resistência, sobretudo por parte dos seguidores de Descartes — cartesianos —, que consideravam a *acção à distância* (a gravidade) uma ressurreição das *qualidades ocultas* dos escolásticos, recentemente banidas pelo espírito das luzes. Leibniz rejeitou a gravitação, insurgindo-se contra *a ressurreição das qualidades escolásticas e das potências quiméricas...*

As obras dos grandes filósofos de Seiscentos, Galileu, Newton, Leibniz, tiveram dificuldades de penetração em Portugal, subjugadas pelas doutrinas tradicionais da escolástica. D'Alembert não reprimiu a sua surpresa por em 1750 ainda se mandar imprimir numa capital europeia — Lisboa — um trabalho intitulado *Systema aristotelicum de formis substancialibus et accidentibus absolutis.*

Mau-grado as resistências, os *Principia* de Newton, publicados em 1687, acabariam por marcar todo o panorama científico universal. Obra de leitura difícil, coube a vulgarizadores notáveis a sua divulgação, cumprindo salientar a publicada pelo filósofo Voltaire em 1736.

11
De Galileu a Einstein

> Pois não é evidente, Galileo?
> Quem acredita que um penedo caia
> com a mesma rapidez que um botão de camisa ou que um seixo da praia?
> Esta era a inteligência que Deus nos deu.
>
> ANTÓNIO GEDEÃO, *Poema para Galileo*

Galileu Galilei

> Tem sido referido que os projécteis descrevem um certo tipo de trajectória curva; mas ninguém referiu o facto de esta trajectória ser uma parábola. Mas eu consegui provar este e outros factos, não poucos em número ou de interesse menor; e, o que considero mais importante, foram abertos a esta vasta e excelente ciência, da qual o meu trabalho é apenas o início, caminhos e meios pelos quais outros espíritos mais perspicazes do que o meu irão explorar os seus cantos remotos.
>
> GALILEU GALILEI

Galileu Galilei, filho de um músico, nasceu em Pisa em 1564. Concluiu os primeiros estudos de humanidades e lógica em Florença.

Frequentou medicina durante quatro anos na Universidade de Pisa, onde se matriculou em 1581, regressando a Florença sem haver concluído o curso. Graças às boas influências do marquês del Monte, ocupou a cátedra de Matemática em Pisa (1589) e, posteriormente, na Universidade de Pádua (1592). Em Pádua dava também lições privadas em círculos aristocráticos cultos.

Espírito observador, reza a história que, ao contemplar as oscilações de um candelabro na Catedral de Pisa, descobriu a lei do *isocronismo do pêndulo.* (Esta lei afirma que o período de oscilação é o mesmo para todos os pêndulos com o mesmo comprimento, independentemente da amplitude das oscilações e do peso. Esta lei permite a utilização do pêndulo para medir a duração de intervalos de tempo.)

Entre Galileu e os cientistas da sua época havia grande antagonismo relativamente ao tipo de questões que levantou. Os seus problemas pareciam banais e os processos de estudar o mundo bem peculiares. Que importância tinha observar a oscilação do pêndulo ou o rolar de esferas em planos inclinados? Não havia problemas filosóficos profundos a necessitarem de clarificação? Enquanto Galileu falava de tempo e distância, forças e matéria, os aristotélicos dissertavam sobre *essências* e *causas finais* e outras árduas questões.

Intelecto multifacetado, culto e sagaz, dotado de notável habilidade prática, Galileu cultivava Minerva e também as musas. No campo literário deu à luz as *Postille* a Ariosto, as *Considerazioni* sobre Tasso e as *Lezioni circa la figura, sito e grandezza dell'Inferno dantesco.*

Galileu manifestava inclinação para estudos de mecânica, hidráulica e balística e gosto pela astronomia, sendo de especial realce as suas contribuições neste campo.

Em 1604 apareceu na constelação Ofiúco uma nova estrela brilhante. Galileu mostrou que a estrela estava mais distante do que os planetas, confirmando, assim, as conclusões de Tycho Brahe. Vivendo rodeado de pessoas que criam que os céus eram eternos e imutáveis, o aparecimento da nova estrela foi um acontecimento marcante. Despertou-lhe um interesse pela astronomia que manteria até ao fim da vida.

Em 1609 Galileu reinventou o telescópio a partir de uma descrição de um desses instrumentos recém-construído na Holanda. (São interessantes as alusões que faz aos seus telescópios na obra *Mensageiro Sideral.*) Em 1609 e 1610, num período de curtas semanas, utilizando o telescópio, fez descobertas de primordial importância. O registo da sua observação da Lua foi contrário à ideia de perfeição: em vez de lisa, era marcada por enrugações e cavidades (como montes e vales). Descobriu que também Vénus, tal como a Lua, mostrava fases, devendo, portanto, mover-se em torno do Sol, contrariamente ao que supunha Ptolemeu.

A construção do telescópio, para além de lhe facultar a observação dos céus, valeu-lhe grande nomeada, bem como a confirmação vitalícia na universidade. O aperfeiçoamento do telescópio de refracção permitiu-lhe fazer descobertas astronómicas notáveis, publicadas em 1610 no *Mensageiro Sideral,* nomeadamente montanhas na Lua, uma imensidão de estrelas na Via Láctea e a *revelação de quatro satélites de Júpiter, planetas nunca antes vistos, desde a criação do mundo até aos nossos dias.* Com esta obra conquistou enorme prestígio, sendo os livros vendidos tão rapidamente quanto podiam ser impressos. Foi então nomeado «matemático chefe e filósofo» pelo grão-duque da Toscânia.

Em 1611, de visita a Roma, foi eleito membro da Accademia dei Lincei.

As novas doutrinas defendidas por Galileu no campo da astronomia tornavam-se inconciliáveis com os princípios da filosofia tradicional e a palavra das Sagradas Escrituras. A reivindicação, por direito e necessidade, de um método científico na investigação dos fenómenos naturais com clara independência relativamente à religião não foi bem aceite pelas autoridades eclesiásticas. A Sagrada Congregação condenou em 1616 a doutrina heliocêntrica como absurda e herética e o movimento da Terra erróneo. O *Diálogo sopra i due massimi sistemi del mondo* de Galileu, dado à estampa em 1632 e escrito em forma dialógica, não esconde a sua visão copernicana e Galileu foi julgado e condenado pelo Santo Ofício.

A Inquisição veio a retratar-se formalmente deste caso pela voz do papa João Paulo II em 31 de Outubro de 1992.

Os sistemas do mundo

E pur se muove.

GALILEU GALILEI

Ao contrário de Kepler, que escreveu em latim livros complexos (cuja leitura exigia conhecimentos especializados), Galileu escreveu ensaios e livros em italiano, num estilo que agradava a muitos leitores, os quais foram sucesso de vendas. Escreveu para um público vasto — escolásticos, nobres, políticos, dignitários religiosos — e os seus argumentos envolviam sátiras e críticas. Foi um mestre na arte de divulgação das suas descobertas.

O Diálogo dos Dois Principais Sistemas do Mundo (1632) (já referido) e *Discursos das Duas Novas Ciências* (1638) são dois dos mais famosos tratados de Galileu.

O primeiro é uma discussão sobre os sistemas de Ptolemeu e de Copérnico para o universo, discussão travada entre Salviati (um estudioso com boa formação científica, a voz de Galileu), Sagredo (leigo inteligente que, em geral, acaba por aceitar os argumentos de Salviati) e Simplício (aristotélico). Galileu defendeu nesta obra as ideias não geocêntricas de Copérnico, condenadas pela Igreja como heréticas e proscritas. Em consequência, a venda do livro foi proibida. Julgado pela Santa Inquisição sob ameaça de tortura, Galileu foi condenado a prisão domiciliária perpétua, como recompensa das suas confissões e repúdio da teoria copernicana.

Concluiu a obra *Discursos das Duas Novas Ciências* na residência de Arcetri, nos arredores de Florença, onde cumpria reclusão domiciliária. Sob a forma de uma discussão entre as personagens antes mencionadas, a temática versa sobre dinâmica, ciência criada por Galileu, e resistência de materiais. Ali discute os princípios da mecânica, provando, por exemplo, que um projéctil em movimento, desprezando a resistência do ar, descreve uma parábola. Nesta obra influente aflora a questão do infinitamente pequeno, sendo Simplício conduzido por Salviati do infinito em geometria ao infinito em aritmética.

Menos de cinquenta anos volvidos sobre o julgamento de Galileu, os *Principia* de Newton vieram unificar brilhantemente os trabalhos de Copérnico, Kepler e Galileu, com uma nova formulação dos princípios da mecânica.

Ciência e religião

Não era fácil os teólogos de Seiscentos aceitarem que a Terra não estava no centro da criação, como as Sagradas Escrituras claramente enunciavam. Porque, a aceitar-se o *desvio* da Terra, talvez pudesse pensar-se que o universo não fora criado para a humanidade. Assim, em 1616, Galileu foi intimado a cessar o ensino do heliocentrismo, podendo apenas admiti-lo *como hipótese* dos movimentos planetários.

Alguns argumentos contra as novas doutrinas eram tão disparatados que se torna difícil levá-los a sério, como os do astrónomo florentino Francesco Sizzi ao objectar contra a existência dos satélites de Júpiter (descobertos por Galileu):

> Existem sete janelas na cabeça, duas narinas, dois ouvidos, dois olhos e uma boca; assim, existem no céu duas estrelas favoráveis, duas adversas, duas luminárias e o solitário Mercúrio, indeciso e indiferente. A partir disto e de muitos outros fenómenos semelhantes da natureza, tal como os sete metais, etc., que seria fastidioso enumerar, concluímos que o número de planetas é necessariamente de sete (incluindo o Sol e a Lua)... Além disso, os Judeus e outros povos antigos, bem como os Europeus modernos, adoptaram a divisão da semana em sete dias, designando estes com os nomes dos sete planetas; ora, se aumentássemos o número de planetas, todo este sistema cairia por terra... Além disso, os satélites são invisíveis a olho nu e por isso não podem ter qualquer influência sobre a Terra, e por isso não têm qualquer utilidade, e por isso não existem.

Quando o cardeal Barberini, antes amigo íntimo de Galileu, foi eleito papa em 1623 (papa Urbano VII), Galileu falou-lhe do decreto contra a teoria copernicana. E sentiu-se a salvo para escrever sobre tão controverso tema. E obteve consentimento papal, mediante pequenas alterações, para publicação da obra *O Diálogo dos Dois Principais Sistemas do Mundo.* Após a publicação, em 1632, os adversários argumentaram que ignorara a proibição de 1616. E Galileu, velho e doente, foi julgado e penitenciado e obrigado a confessar que defendia e ensinava doutrinas proibidas. Os amigos não ousaram defendê-lo publicamente. O livro foi colocado no *Índex* até 1835, juntamente com o de Copérnico e um dos de Kepler.

Galileu era profundamente religioso. Em cartas de 1613 e 1616 escreveu que a mente de Deus continha todas as leis naturais, sustentando que os vislumbres dessas leis pelos investigadores eram revelações directas de Deus tão válidas como as constantes na Bíblia. «Da palavra divina provinham igualmente a Sagrada Escritura e a natureza... Nem podia Deus mostrar-se-nos menos admiravelmente na acção da natureza do que nas lições sagradas da Escritura.»

A Inquisição ficou em transe com tais posições, pois pareciam negar a Bíblia como fonte correcta de conhecimento. Para além disso, podiam ser olhadas como sintomas de panteísmo, crime pelo qual Giordano Bruno, contemporâneo de Galileu, foi queimado na fogueira.

Proposições a serem censuradas — censura feita no Santo Ofício da cidade, quarta-feira, 24 de Fevereiro de 1616, na presença dos abaixo assinados padres teólogos:

> ***Primeira:*** O Sol é o centro do mundo e, ao mesmo tempo, imóvel quanto ao movimento local.
>
> ***Censura:*** Todos disseram que a dita proposição é um disparate e absurda em filosofia e formalmente herética, na medida em que contradiz expressamente as opiniões das Sagradas Escrituras em muitos sítios e segundo a explicação comum e sentido dos santos padres e teólogos eruditos.
>
> ***Segunda:*** A Terra não é o centro do mundo e não é imóvel, mas move-se como um todo, também com um movimento diurno.
>
> ***Censura:*** Todos disseram que esta proposição deve ser condenada em termos filosóficos e, no que diz respeito à verdade teológica, é pelo menos errónea na fé.

Galileu e o método experimental

> A filosofia está escrita nesse grandíssimo livro que temos aberto ante os olhos, isto é, o universo, mas não pode entender-se se antes não se aprender a entender a sua língua, a conhecer os caracteres em que está escrito. Está escrito em língua matemática e os seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível entender sequer uma palavra; sem eles é como andar às voltas, em vão, num obscuro labirinto.
>
> GALILEU, *Il Saggiatori (O Ensaiador)*

Neste excerto Galileu exprime a sua concepção de natureza, afirmando-se platonista relativamente à matemática. Platonista porquê? Porque aceita a existência da matemática independentemente do homem, sendo o objectivo do matemático a descoberta das verdades matemáticas. Platonista especial para quem a realidade não imita as ideias, neste caso os números, as figuras geométricas, mas é, ela própria, uma geometria. Esta concepção, que aponta para uma matematização da natureza, em particular da física, leva à busca das leis gerais que regem os fenómenos naturais e à sua formalização matemática.

Galileu critica os processos do saber tradicional, a sua natureza dogmática, o recurso ao princípio da autoridade, quer dos textos filosóficos aristotélicos, quer dos escritos sagrados. Elimina as pretensões metafísicas do pensamento, substituindo o problema da essência da realidade, o «porquê» pelo «como» dos factos. A observação directa dos fenómenos e a recolha de dados da experiência devem obedecer a uma exigência racional e ser dirigidas no sentido de uma análise quantitativa, traduzida em relações matemáticas. A originalidade do pensamento de Galileu confere-lhe o epíteto de *criador da ciência moderna.*

Galileu Galilei , ao submeter à verificação experimental as concepções teóricas, é um dos pioneiros da utilização do método científico. Os conceitos têm origem na observação, e não, como em Aristóteles, na *experiência pensada,* ou seja, nas especulações. Posteriormente, as consequências lógicas dos modelos teóricos desenvolvidos são sujeitas à experimentação. A linguagem própria para formular as leis que regem os fenómenos naturais é a matemática.

Galileu aborda com clareza o *problema do método* em dois textos: numa carta de 7 de Janeiro de 1639 a Baliani e no *Diálogo dos Grandes Sistemas,* do qual reproduzimos um extracto significativo:

> SIMPLÍCIO — Aristóteles baseia-se inicialmente no raciocínio *a priori* e deduz de princípios naturais claros e evidentes a necessidade da inalterabilidade do céu, que em seguida estabelece *a posteriori* pelos dados dos sentidos e pelas tradições dos antigos.
>
> SALVIATI — O que dizeis é o método segundo o qual ele escreve a sua doutrina, mas não creio que seja o que lhe permitiu encontrá-la, porque tenho como certo que, pela via dos sentidos, das experiências e das observações, teria, primeiro, o cuidado de se certificar, tanto quanto possível, da veracidade da sua conclusão e, em seguida, procuraria o meio de a demonstrar. Assim procedemos a maior parte das vezes nas ciências demonstrativas, e isto porque, se a conclusão é verdadeira, facilmente reencontramos, ao utilizarmos o método resolutivo, qualquer proposição já demonstrada ou chegamos a qualquer princípio evidente. Se, pelo contrá-

rio, a conclusão é falsa, procedemos indefinidamente sem reencontrarmos qualquer verdade conhecida, ou então chegamos mesmo a um absurdo manifesto.

Galileu, *op. cit.*, p. 61

No processo de investigação galilaico distinguem-se os seguintes passos:

1. *Selecção no real das qualidades primárias.* Neste primeiro passo opera-se uma selecção nos dados da observação, extirpando tudo o que não seja quantificável. A abstracção quantitativa retira ao fenómeno todos os aspectos qualitativos, recusando a busca do ser, a substância essencial das coisas, antes procurando as relações mensuráveis entre as coisas, isto é, as percepções objectivas.
2. *Estabelecimento de relações matemáticas entre os dados quantitativos de um fenómeno — busca da lei.* Nesta fase, o cientista procura uma lei inteligível para os dados em causa. Exprime a crença moderna de que *a natureza opera sempre pela forma mais simples para produzir os seus efeitos.*
3. *Dedução a partir da lei enunciada de uma ou mais relações passíveis de serem verificadas experimentalmente.* Hipoteticamente, descoberta a lei geral, deduzem-se dela consequências que serão sujeitas a verificação experimental e que justificarão a justeza da dedução anterior. O papel que cabe à experimentação é, pois, crucial, uma vez que, da lei geral inicialmente proposta, nada fica concluído. Confirmada a dedução, aceita-se como verdadeiro o ponto de partida.
4. *Fase final.* O procedimento galilaico não se esgota na verificação da veracidade de uma única consequência da relação proposta, mas contém em si mesmo o gérmen de progresso científico, na medida em que convida a um questionar permanente, à verificação ou rejeição de novas consequências. Esta actuação conduzirá, finalmente, à substituição da relação inicialmente proposta por outra mais geral.

Em síntese, podemos afirmar que o método de Galileu é uma junção da experiência com o raciocínio dedutivo.

Exemplificaremos, de seguida, este método com o estudo da queda dos graves.

Acerca desta questão, enquanto Aristóteles pergunta «por que caem os graves?», e a sua preocupação fundamental consistia em encontrar a causa última da queda, Galileu interroga «como caem os graves?», interessando-se pela descrição objectiva do fenómeno e não pela sua explicação metafísica.

Contrariando a crença aristotélica de proporcionalidade entre a velocidade da queda de um corpo e o peso desse corpo, Galileu mostrou que, na ausência de resistência do ar, todos os corpos caíam com a mesma velocidade. Observa a queda e procura identificar as grandezas relacionadas com o fenómeno susceptíveis de quantificação. Propõe uma relação matemática entre as grandezas quantificáveis, entre elas o espaço, o tempo, a velocidade... guiado pelo princípio de simplicidade da natureza, que perfilhava. Segue-se a fase de verificação experimental.

Nota, por exemplo, que, quando um grave cai, a velocidade vai aumentando gradualmente. Surge então a pergunta: a velocidade aumenta proporcionalmente ao espaço ou ao tempo? Admitindo que a velocidade é proporcional ao espaço percorrido, as consequências desta regra entram em conflito com os factos da observação. Então abandona a primeira regra e tenta a outra, igualmente simples: a velocidade adquirida é proporcional ao tempo decorrido. Desta lei resulta que o espaço é proporcional ao quadrado do tempo gasto para o percorrer, facto verificável experimentalmente. Dada a impossibilidade material de verificação directa, recorre a um modelo mecânico, mais exactamente a um plano inclinado, por onde faz descer os graves.

Galileu pôde verificar a veracidade da consequência lógica da segunda alternativa de lei que concebeu. Assim, provou que, quando um grave cai, a velocidade adquirida é proporcional ao tempo. (Observe-se que esta não é uma demonstração matemática.)

É claro que a prova experimental se encontra sujeita a limitações de diversa índole. A verificação encontra-se sempre condicionada à capacidade dos instrumentos disponíveis, a erros de medida, etc. O progresso científico depende da superação engenhosa dessas limitações.

Controvérsia em torno da experimentação galilaica

Koyré, nos seus *Études galiléennes* de 1935, interroga-se sobre a veracidade da confirmação experimental dos dados científicos por Galileu. Reivindica para Galileu o génio de ter prescindido das experiências, deveras irrealizáveis com os meios de que dispunha, cingindo-se à experiência imaginária. Assim, colocava Galileu no pedestal de físico que estrutura um sólido edifício científico com o uso exclusivo da razão, afastando-o da tradição experimentalista moderna.

Os estudos desenvolvidos por Drake na década de 70, analisando manuscritos de Galileu existentes na Biblioteca Nacional de Florença, refutam a teoria de Koyré.

Galileu concebeu e executou *de facto* experiências reais, como os seus *Discursos* revelam. Nas pp. 299-300 desta obra, o sábio relata-nos a experiência do plano inclinado. Drake provou que Galileu realizava já desde 1604 experiências com um plano inclinado de declive inferior a 2 graus e fazia medições de tempo com um metrónomo, o que lhe sugeriu a lei da queda dos graves.

*Avanços da ciência moderna à luz do paradigma galilaico**

As diversas fases da construção do edifício científico previstas por Galileu são perfeitamente identificáveis tanto na ciência moderna como na contemporânea. À medida que a complexidade dos conhecimentos vai aumentando, vemos essas fases associadas a um número de nomes em gradual crescimento.

O método experimental galilaico é exemplarmente ilustrado na evolução de diversas teorias físicas, nomeadamente da teoria atómica. Vejamos alguns exemplos.

Os químicos do século XVIII, após terem concebido as noções de substância pura e de mistura, enfrentaram a necessidade da pesagem de reagentes e produtos das reacções (do mesmo modo que os cozinheiros precisam de pesar os ingredientes das receitas). Viram-se então confrontados com uma imensidão de resultados aparentemente desconexos. Seguindo o paradigma galilaico, havia que proceder à selecção dos dados da observação, eliminando tudo aquilo que não pudesse ser quantificável, de modo a descortinar regularidades susceptíveis de expressão matemática.

Lavoisier verifica que *a soma dos pesos dos produtos é igual à soma dos pesos dos reagentes* e, assim, enuncia a *lei da conservação da massa.* Analogamente, a *lei das proporções simples,* formalmente enunciada por Proust em 1801, traduz a regularidade notável de que se revestem os resultados das medidas que vinha efectuando:

> *Quando dois ou mais elementos se combinam para formar um composto, essa combinação ocorre sempre em proporções de peso bem definidas* (isto é, as proporções não variam consoante o processo utilizado na preparação do referido composto).

No princípio do século XIX, Dalton, espírito místico e penetrante, formula a teoria atómica, no contexto da qual estas leis encontravam uma interpretação óbvia. Dalton postula a existência de átomos indivisíveis e imutáveis, admite que todos os átomos do mesmo elemento são idênticos e que os compostos são formados por moléculas (átomos compostos), as quais, por sua vez, são constituídas por átomos dos elementos constituintes. Todas as moléculas do mesmo composto são idênticas. As reacções químicas consistem no rearranjo dos átomos nas moléculas.

Conservação da massa e proporções simples são consequências triviais das ideias unificadoras de Dalton. O seu átomo apoia-se num suporte experimental e nada tem a ver com o átomo do filósofo grego Demócrito, visto que este resulta de mera especulação filosó-fica. Com efeito, Dalton não só era conhecedor dos resultados de Proust, como também intuiu que as conclusões das suas pesquisas relativas à pressão de misturas gasosas (numa mistura gasosa, cada componente exerce a mesma pressão que exerceria se, sozinha, ocupasse o volume da mistura) indiciavam a estrutura corpuscular da matéria. Além disso, as ideias de Dalton são férteis em consequências confirmáveis experimentalmente. Entre estas, assume particular relevância a *lei das proporções múltiplas* enunciada pelo químico sueco Berzelius:

> Quando dois elementos podem combinar-se originando mais do que um composto, os diversos pesos de um deles que se combinam com um peso fixo do outro para formarem diferentes compostos estão entre si na razão de inteiros pequenos.

No entanto, e apesar dos seus sucessos, muitos químicos eminentes, animados por uma atitude positivista radical, consideraram inconclusivo o suporte experimental da teoria atómica. Ainda nos fins do século XIX cientistas notáveis, como Ostwald e Mach, rejeitavam a estrutura corpuscular da matéria. Consideravam frágeis e insuficientes as provas experimentais existentes. Para eles, a hipótese atómica era apenas uma ferramenta de trabalho conveniente.

Einstein formulou as leis do movimento browniano, movimento errático de pequenas partículas microscópicas em suspensão num líquido ou gás, recorrendo à teoria atómica, segundo as suas próprias palavras, com o «objectivo principal de encontrar factos que garantissem, na medida do possível, a existência de átomos de tamanho bem definido». Da teoria atómica Einstein deduz consequências, as leis do movimento browniano, que, sujeitas à verificação experimental, confirmarão a correcção do ponto de partida.

*Fenómenos de luz**

Um dos mais acesos e prolongados debates que incendiaram a comunidade científica desde os tempos de Newton e Huygens respeita à natureza da luz. Digladiavam-se duas teorias, a corpuscular e a ondulatória. Ora era hegemónica uma, ora outra.

No século XIX, os pratos da balança dão sinais de se inclinarem decisivamente para o lado da teoria ondulatória. Com efeito, esta parece dar uma explicação cabal da maior parte dos fenómenos luminosos conhecidos: reflexão, refracção, difracção, interferências. A série de sucessos desta teoria viria a culminar na teoria electromagnética da luz, que nascera da unificação feliz devida a Maxwell da electricidade com o magnetismo.

Para Fresnel, na primeira metade do século XIX, a luz era uma vibração luminosa. Porém, esta nem assim era concebível sem um suporte material, o éter. Para Maxwell, na segunda metade desse século, a luz era um fenómeno electromagnético cujas equações privilegiavam um determinado referencial, novamente o éter. De facto, a mudança para um novo referencial animado de movimento de translação uniforme em relação ao primeiro (transformação de Galileu) implicava uma concomitante transformação das equações. Somente em relação ao éter era possível a propagação da perturbação luminosa com a velocidade prevista pelas equações de Maxwell.

*Os princípios da relatividade de Galileu e de Einstein**

> As datas das minhas contribuições científicas mais importantes são:
> 1905 — teoria da relatividade restrita. Inércia da energia. Lei do movimento browniano. Leis quânticas da emissão e absorção da luz.
> 1907 — Ideias base da teoria da relatividade geral.
> 1912 — Reconhecimento do carácter não euclidiano da métrica e sua relação física com a gravitação.
> 1915 — Equações de campo da gravitação. Explicação do movimento do periélio de Mercúrio.
>
> ALBERT EINSTEIN

A detecção, identificação ou caracterização experimental do éter constituía o grande desafio que se colocava aos físicos. O éter, substância considerada como o meio de transmissão da luz e radiação, era uma invenção do espírito humano muito conveniente para fornecer uma geometria do mundo, mas não adequada para explicar todos os fenómenos. Por exemplo, revelou-se impossível a detecção do movimento da Terra relativamente ao éter. E Einstein decidiu *substituí-lo* pela *sua* teoria da relatividade.

Procuremos compreender aquilo que está em causa. Consideremos, por exemplo, uma escada rolante, ou, ainda melhor, uma passadeira rolante (como aquelas que existem nos grandes aeroportos), e três passageiros sobre a passadeira rolante: um permanece imóvel, um avança e o terceiro diverte-se a caminhar em sentido proibido. O que observamos é que o passageiro que avança sobre a passadeira rolante se desloca mais depressa do que o que caminha fora. O passageiro que retrocede sobre a passadeira rolante desloca-se mais lentamente do que o que retrocede fora. Para determinarmos as velocidades relativamente ao edifício do aeroporto, às velocidades dos passageiros sobre a passadeira há que somar ou subtrair a velocidade da passadeira, consoante o sentido do deslocamento. É a esta observação comezinha que os matemáticos, pomposamente, chamam *teorema da composição das velocidades.*

Com o objectivo de comprovar o movimento da Terra em relação ao éter, Michelson concebeu uma experiência extremamente engenhosa que envolvia medidas da velocidade da luz de precisão inexcedível. Se a velocidade, *c*, da luz prevista pelas equações de Maxwell (a mesma em todas as direcções) é a velocidade em relação ao éter, Michelson espera encontrar uma direcção tal que, num dos sentidos, a velocidade da luz seja maior do que c e, no sentido oposto, menor. A experiência, cujo resultado foi negativo, veio a ser posteriormente repetida inúmeras vezes, sem melhor sucesso, por Michelson em colaboração com Moreley.

O éter apresentava-se sempre como um meio extraordinariamente esquivo e subtil que não se deixava detectar. A luz propagava-se em violação flagrante do teorema da composição das velocidades. Desafiando o senso comum, a velocidade de propagação da luz é sempre a mesma, qualquer que seja o referencial (passadeira ou edifício, terra ou éter), sendo o respectivo valor uma constante universal. Foi esta a conclusão das experiências de Michelson. Era tão incompreensível como se o passageiro que avança sobre a passadeira rolante se não deslocasse mais depressa do que o que caminha fora e o passageiro que retrocede sobre a passadeira rolante se não deslocasse mais lentamente do que o que retrocede fora dela.

Com o objectivo de encontrarem uma interpretação para esta situação paradoxal, Fitzgerald e Lorentz conjecturaram a contracção dos corpos em movimento uniforme relativamente ao éter. Assim, supunham que o comprimento de uma régua que, em repouso, media l_0 passava a ser

$$l = l_0\sqrt{1 - (\tfrac{v}{c})^2}$$

quando esta se deslocava com velocidade v segundo a sua própria direcção. Lorentz fala ainda da dilatação dos tempos, significando que, enquanto um relógio pousado sobre a passadeira rolante do aeroporto (cuja velocidade é v) regista o intervalo t_0, os relógios (devidamente sincronizados) do edifício do aeroporto registam o intervalo de tempo dilatado

$$t = t_0\sqrt{1 - (\tfrac{v}{c})^2}$$

Lorentz descobre uma transformação das coordenadas espaciais e temporais que não altera a forma das equações de Maxwell. Cada explicação encontrada carecia, por sua vez, de ser explicada. Tudo se passava como se a natureza conspirasse para que fracassassem todas as tentativas de detecção do éter.

Há trezentos e setenta anos Galileu, pela boca de Salviati, registava observações que ao comum dos mortais talvez parecessem inócuas e desprovidas de consequências, mas que haviam de revelar-se fonte perene de avanços científicos: «Encerre-se com um amigo na cabina principal sob o convés de um grande navio.» Depois de referir uma série de experiências do âmbito da mecânica, tais como lançar algum objecto ao amigo, primeiro numa direcção e depois noutra, saltar a pés juntos, etc., Salviati conclui: «Faça o navio deslocar-se com a velocidade que quiser, contanto que o movimento seja uniforme e o navio não flutue para um lado e para o outro. Não se aperceberá da mínima alteração nos efeitos mencionados e em qualquer deles será impossível dizer se o navio está parado ou em movimento». Assim como Salviati, também Michelson não pôde dizer, recorrendo agora a medições da velocidade da luz, se o «navio» estava parado ou em movimento.

Foi Einstein quem se apercebeu do carácter profético do texto de Galileu. Vejamos como. O resultado da experiência de Michelson não estava destinado a ser explicado, mas a explicar. Por isso, parecia paradoxal. Por isso, era inexplicável.

Por definição, num referencial de inércia, um corpo sobre o qual não actuam forças exteriores (corpo livre) ou permanece em repouso ou se desloca com movimento rectilíneo e uniforme.

O princípio da relatividade de Galileu afirma a validade das leis da mecânica (isto é, as leis que regem o movimento dos corpos) em qualquer referencial de inércia e a consequente impossibilidade de detectar qualquer movimento rectilíneo uniforme através do seu efeito sobre essas leis.

Em 1905, Einstein publica um trabalho fundamental intitulado *Sobre a Electrodinâmica dos Corpos em Movimento*, no qual expõe uma nova teoria do espaço e do tempo, a teoria da relatividade restrita. Analisemos sucintamente a génese de alguns dos seus conceitos mais importantes e elementares.

Einstein observa que os resultados das experiências de Michelson-Moreley implicam:

a) Questionar o conceito de simultaneidade;
b) Tornar o princípio de Galileu extensivo a todas as leis da física.

O novo conceito de simultaneidade ao qual Einstein foi conduzido resulta de considerações do seguinte teor: imaginemos três passageiros que estão a ser transportados pela passadeira rolante de um aeroporto, encontrando-se o da frente e o de trás equidistantes do terceiro. Este emite um sinal luminoso que os outros dois julgam receber simultaneamente, já que, de acordo com as experiências de Michelson-Moreley, a luz se propaga para a frente e para trás, em relação à passadeira, com iguais velocidades. Relativamente ao edifício do aeroporto, a luz também se propaga para a frente e para trás com iguais velocidades. Neste referencial, o passageiro de trás dirige-se ao encontro da frente de onda gerada pela produção do sinal luminoso, enquanto o da frente se vai deslocando perseguido pela frente de onda que vai no seu encalce. É evidente que, para os observadores que se encontram em repouso relativamente ao aeroporto, o sinal luminoso alcança o passageiro de trás antes de alcançar o da frente. Os dois fenómenos, chegada do sinal luminoso a cada um dos passageiros, ocorrem simultaneamente no primeiro referencial, mas não no segundo.

Ao aceitar a universalidade da velocidade da luz no vácuo, Einstein teve de renunciar ao conceito de tempo absoluto, que permite medir intervalos de tempo simultaneamente em todos os sistemas de referência. A relatividade do tempo deduz-se, pois, da lei da constância da luz. O *tempo absoluto* não passa de fruto ilusório de uma especulação metafísica. Carece de suporte experimental. Como tal, há que rejeitá-lo.

O princípio da relatividade de Einstein afirma que:

a) As leis dos fenómenos físicos são válidas em qualquer referencial de inércia, sendo, consequentemente, impossível detectar qualquer movimento rectilíneo uniforme através do seu efeito sobre essas leis;

b) O valor da velocidade da luz no vácuo é uma constante universal (aproximadamente 300 000 km/s).

Deste princípio, que tomou como postulado, Einstein deduziu a teoria da relatividade especial ou restrita.

Bibliografia

BANFI, António, *Galileu,* Edições 70, 1992.

BOYER, Carl, *História da Matemática,* São Paulo, Blücher, 1974, pp. 222-243.

CRAWFORD, Paulo, «O significado da relatividade no final do século», in *Colóquio/Ciências, Revista de Cultura Científica,* **16,** 3-23, 1995.

12

Do espaço euclidiano ao espaço curvo

> Se não esperais o inesperado, não o encontrareis, visto que é penoso descobri-lo e, além disso, difícil.
>
> HERACLITO

A descoberta das geometrias não euclidianas

> Os teoremas desta geometria (a hiperbólica) parecem paradoxais e, para os não iniciados, absurdos; mas calma e aturada reflexão revelam que não contêm nada de impossível.
>
> GAUSS

No capítulo dedicado aos *Elementos* referimos algumas das tentativas de demonstração do postulado das paralelas até ao século XVIII. Depois de Saccheri e Lambert, cujos contributos foram especialmente importantes, o labor neste domínio não esmoreceu. Adrien Marie Legendre, o maior matemático francês do seu tempo (1752-1833), fez várias tentativas (falhadas) de demonstração do postulado 5, publicadas nas sucessivas edições dos seus *Elementos de Geometria,* obtendo vários resultados interessantes e redescobrindo alguns dos resultados de Saccheri.

Nos começos do século XIX, Schweikart (1780-1857), influenciado pelos trabalhos de Saccheri e Lambert, distinguiu duas espécies de geometria: a geometria euclidiana e uma *geometria* fundada sobre a hipótese de a soma dos ângulos internos de um triângulo não ser igual a dois rectos. A esta geometria deu o nome de *geometria astral.* Seu sobrinho, o matemático Taurinus (1794-1874), estudou esta geometria e concluiu que era consistente.

Lambert, Schweikart e Taurinus concebiam a possibilidade de substituição do postulado das paralelas por um outro, com ele contraditório, podendo desse elenco deduzir-se uma geometria logicamente consistente. Contudo, não se terão apercebido de que a geometria euclidiana não era a única passível de descrever as propriedades do espaço nos limites da experiência física.

Assim, por volta de 1800 continuava a dominar a ideia de que a geometria euclidiana era a única idealização certa do mundo físico. O eminente filósofo Immanuel Kant, na *Crítica da Razão Pura* (1781), classificou as verdades geométricas como *verdades sintéticas a priori,* declarando que o espaço euclidiano é inerente à estrutura do nosso espírito e de modo algum de origem empírica, antes uma necessidade inevitável do pensamento. Segundo a concepção kantiana, o mundo físico *deve* ser euclidiano, pois só assim o nosso espírito nos permite visualizá-lo, por princípios apriorísticos anteriores à experiência.

Porém, extraordinárias descobertas no campo da geometria estavam prestes a abalar esta concepção...

A geometria de Bolyai-Lobatchevski

Do nada criei um novo e estranho universo.

JANOS BOLYAI

A descoberta da primeira geometria não euclidiana é creditada a Gauss (1777-1855), J. Bolyai (1802-1860) e Lobatchevski (1793-1856). Corresponde à *hipótese do ângulo agudo* de Saccheri e foi designada por Klein por *geometria hiperbólica.* Esta geometria assenta nos postulados da geometria neutra (todos os da geometria euclidiana, excepto o postulado das paralelas) e no seguinte: no plano, por qualquer ponto fora de uma linha passam, pelo menos, duas linhas que lhe são paralelas *(axioma hiperbólico).* Na geometria hiperbólica, a soma dos ângulos de qualquer triângulo é estritamente menor do que π radianos. Gauss foi, porventura, o primeiro a aperceber-se da independência do postulado 5 em relação aos outros quatro. (A correspondência trocada com outros matemáticos parece apontar no sentido da prioridade de Gauss.) Porém, a publicação dos seus resultados neste campo só ocorreria postumamente, crê-se que por receio de desafiar a autoridade de Kant. Em 1829, Gauss escrevia a Bessel:

> Pode levar muito tempo antes que torne públicas as minhas investigações... (neste campo): de facto, pode não acontecer durante a minha vida, porque temo o clamor dos Beócios.

Janos Bolyai era filho de Farkas Bolyai, antigo colega de Gauss em Göttingen. Oficial de artilharia audacioso, teria vencido treze duelos consecutivos num só dia. Com o mesmo garbo arquitectava geometrias logicamente consistentes, mas contradizendo a teoria das paralelas de Euclides.

Farkas Bolyai, que dedicara grande parte da sua vida ao estudo das paralelas, vendo no filho o mesmo intento, escreveu-lhe em termos apreensivos:

> Não deves fazer tal tentativa. Conheço esse caminho até ao fim. Atravessei essa noite sem fim, que extinguiu toda a luz e alegria da minha vida. Peço-te, abandona a ciência das paralelas... Pensei que me sacrificava por amor à verdade. Estava pronto a ser o mártir que removeria a mancha da geometria e a devolveria purificada à humanidade. Esforcei-me bastante... [...] Irreflectidamente, arrisquei a minha vida e a minha felicidade.

Ao ter conhecimento dos espantosos progressos do filho neste campo, Farkas aconselhou o jovem Bolyai a publicar imediatamente os seus resultados:

> Se tiveste sucesso, publica imediatamente, por duas razões: primeiro, porque as ideias passam facilmente de uns para os outros, que podem antecipar a sua publicação; segundo, há alguma verdade nisto, muitas coisas têm uma época, na qual aparecem em vários lugares, tal como as violetas na Primavera.

As descobertas de Janos Bolyai foram publicadas em apêndice a um livro do pai — o *Tentamen* (1832). Farkas enviou uma cópia da obra a Gauss, depois de uma primeira se haver perdido. Gauss respondeu de modo algo desconcertante:

> Elogiá-lo (o trabalho) seria elogiar-me a mim próprio. Na verdade, todo o conteúdo do trabalho, o caminho traçado pelo seu filho e os resultados a que chegou, coincide praticamente com as minhas meditações, as quais me têm ocupado nos últimos trinta ou trinta e cinco anos. [...] No que se refere ao meu trabalho, pouco tenho escrito, pois não é minha intenção publicá-lo enquanto for vivo.

A decepção do jovem Bolyai foi enorme. Imaginou que o pai tivesse confidenciado a Gauss os seus resultados, permitindo-lhe prioridade na descoberta e ressentiu-se. Apesar de ter continuado a desenvolver este tema, não voltou a publicar mais nada e a sua vida foi amarga.

Lobatchevski, aluno de Bartels, amigo e correspondente de Gauss na Universidade de Kazan, revelou interesse pela teoria das paralelas a partir de 1815. Em 1823 considerou a hipótese de uma geometria em que a soma dos ângulos de um triângulo é inferior a dois rectos e onde duas rectas que se intersectam podem ser paralelas à mesma recta. Primeiro chamou a esta geometria *imaginária,* depois *pangeometria.* Em 1826 expôs os resultados na Universidade de Kazan e em 1829 publicou-os pela primeira vez. Como o seu impacto tivesse sido reduzido, Lobatchevski não se poupou a esforços para divulgar as suas descobertas, publicando-as em francês e em alemão. Gauss, em 1842, ao tomar conhecimento delas, elogiou-as numa carta a Schumacher e, por sua recomendação, Lobatchevski foi eleito membro da Royal Society de Göttingen.

Em 1855 Lobatchevski, já completamente cego e apenas a um ano da morte, publicou em russo e em francês uma exposição completa do seu sistema geométrico, que intitulou *Pangeometria.*

Riemann e o espaço curvo

A concepção kantiana do espaço, o hábito euclidiano de pensar a realidade e a recém-descoberta geometria projectiva terão pesado decisivamente no alheamento inicial da comunidade científica em relação às descobertas de Bolyai e Lobatchevski.

Em 1854, o jovem matemático alemão Georg Bernhard Riemann apresentou à sua *habilitacion* na Universidade de Göttingen a lição intitulada «Sobre as hipóteses em que se baseiam os fundamentos da geometria». Gauss, que pertencia ao júri, escutou com apreço o novel matemático.

Riemann supôs que a geometria do espaço podia variar, ora ser euclidiana, ora elíptica, ora hiperbólica. Na geometria de Riemann, por um ponto que não está sobre uma «linha» não é possível traçar qualquer «linha» que lhe seja paralela. O termo «linha» significa geodésica, ou seja, a mais curta distância entre dois pontos, enquanto «linhas paralelas» significam linhas sem pontos comuns. Aqui a soma dos ângulos de qualquer triângulo é sempre estritamente maior do que π, significando «triângulo» figura definida por três pontos unidos por geodésicas. Um exemplo simples desta geometria é, como circunstanciaremos a propósito dos modelos, a superfície da esfera, sendo as geodésicas os círculos máximos (v. definição na secção «Modelos»).

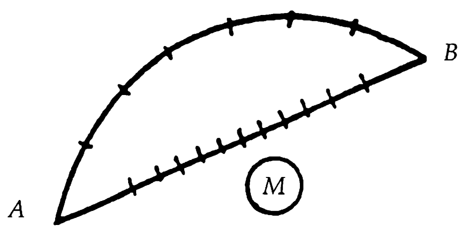
Riemann abordou a questão dos fundamentos da geometria de modo abstracto e geral. Introduziu a noção de *grandeza, espaço* ou *contínuo.* Salientou a importância das possíveis relações *métricas* numa tal grandeza e aí definiu *curvatura,* generalizando este conceito das curvas planas e das superfícies de modo tão natural quanto possível. Riemann considerava que toda a geometria se baseava em medidas intrínsecas. Para cada superfície era possível determinar a curvatura e esta determinava as relações métricas sobre a superfície. Daqui resultava a possibilidade de haver geometrias diversas, de acordo com a superfície e com a métrica escolhida.

A publicação dos resultados de Riemann em 1868, dois anos após a sua morte, inaugurou um novo período da história da geometria, marcado pelo estudo das propriedades locais das curvas e superfícies, usando o cálculo diferencial. Tem a designação de geometria diferencial.

A teoria mágica de Einstein

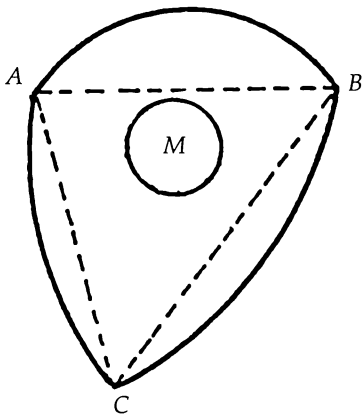
> É tal a magia desta teoria que quase ninguém que a compreenda adequadamente consegue escapar-lhe.
>
> ALBERT EINSTEIN

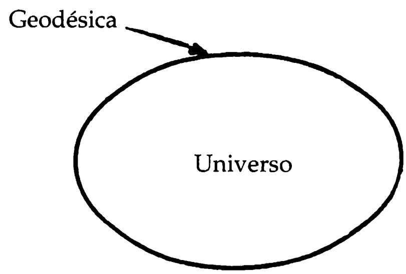
O impacto do pensamento de Einstein na nossa concepção do universo foi extraordinário. De acordo com a teoria de Einstein, a presença de um corpo faz com que se curvem os raios de luz que passem perto, como a órbita de um planeta. E, no entanto, a luz prossegue a sua trajectória segundo o caminho mais curto. A relatividade diz-nos que os corpos parecem mais pequenos quando estão em movimento ou quando estão próximos de grandes massas. A distância entre dois pontos, *A* e *B*, é, digamos, o número de unidades de medida que podem ser ajustadas entre os referidos pontos. Se a massa grande, *M*, estiver próxima de *A* e *B*, as unidades de medida «comprimem-se» quando mais próximas de *M* e, consequentemente, mais unidades de medida são necessárias à medida. Se tomarmos um caminho mais curvo, as unidades de medida não se comprimem tanto, sendo precisas menos para ir de *A* a *B*. Para cada *M* e cada par *A*, *B*, existe um caminho para o qual o número de unidades de comprimento é mínimo — a geodésica. A teoria afirma que o espaço se curva *positivamente* na presença de grandes massas. Suponhamos três pontos, *A*, *B*, *C*, e uma grande massa, *M*. Conforme atrás se referiu, existem geodésicas de *A* para *B*, de *B* para C e de C para *A* e o triângulo *ABC* tem uma soma angular maior do que π.



Todo o universo pode ser encarado como uma grande massa contornada por uma geodésica de modo análogo ao que o círculo máximo circunda a esfera. Assim, o universo da teoria da relatividade geral é limitado, mas sem limites, tal como a esfera. Um raio de luz emitido de um ponto regressa a esse ponto biliões de anos volvidos...

Einstein, na sua *teoria da relatividade geral,* dada à luz em 1928, encara a força da gravidade como uma manifestação da curvatura do espaço-tempo. O adjectivo «geral» refere-se ao facto de esta teoria admitir *transformações gerais de contacto,* de tal modo que todos os referenciais se tornam legítimos, e não apenas os referenciais anima-





dos de velocidade inferior à da luz, considerados na relatividade restrita.

Para Einstein, apenas as entidades intrínsecas (ou seja, aquelas que não dependem do referencial) possuem significado físico. Com a proposta inovadora de Einstein de interpretação geométrica da gravitação foi possível explicar o misterioso avanço do periélio (o ponto da órbita elíptica do planeta mais próximo do Sol) de Mercúrio de 43 segundos de arco por século. Efeito semelhante ocorre com os outros planetas, mas, dada a proximidade do Sol, o efeito é mais significativo no caso de Mercúrio. A relatividade restrita conduz a correcções à órbita de Mercúrio prevista pela dinâmica e gravitação newtonianas. No entanto, estas correcções revelaram-se demasiadamente pequenas quando confrontadas com os dados astronómicos.

Como observámos, um raio luminoso que rase um corpo pesado é atraído por esse corpo, sofrendo um desvio angular, fenómeno previsto pela teoria da relatividade geral, que supõe a curvatura do espaço-tempo. Estas são algumas das confirmações experimentais das previsões geométricas da teoria. As *irregularidades* da curvatura localizam-se na vizinhança das estrelas de massa elevada.

A influência das concepções de Gauss na obra de Einstein é manifesta. O caminho matemático que Einstein teve de percorrer para desenvolver as suas teorias havia sido desbravado por Gauss na sua *Teoria das Superfícies* e por Riemann na sua famosa lição inaugural em Göttingen.

Lei de Hubble

A distância correspondente à paralaxe de 1 segundo angular é tomada como unidade astronómica de comprimento, a qual se denomina *parsec* (pc), sendo o *megaparsec* (Mpc) a unidade um milhão de vezes maior. Verifica-se que 1 pc vale 3,26 anos-luz, ou seja, a distância enorme que a luz leva 3,26 anos a percorrer.

Em 1929, Edwin Hubble constatou que as galáxias se afastam de nós com velocidade, v, proporcional à distância, s, que nos separa delas, $v = Hs$ *(lei de Hubble).* A constante de Hubble, H, não é conhecida com grande precisão, $H = h_0 \times 100$ km/s/Mpc, sabendo-se apenas que $0,4 < h_0 < 1$. A lei de Hubble é a mais importante descoberta da astronomia contemporânea e constitui o fundamento da moderna cosmologia.

Para se chegar à lei de Hubble foi necessário medir as distâncias às galáxias e as respectivas velocidades de recessão. O método da paralaxe permitiu medir distâncias inferiores a 30 pc. A partir daí, o recurso a outros métodos revelou-se indispensável.

A velocidade de recessão é medida recorrendo a técnicas que se apoiam no efeito de Doppler. É a este efeito que se devem as variações do tom (gravidade ou acuidade) do silvo de uma locomotiva quando esta se aproxima ou afasta. Os átomos, quando excitados, emitem radiações electromagnéticas de comprimentos de onda característicos e muito bem definidos. No entanto, quando a fonte da radiação electromagnética (os átomos) se aproxima ou afasta do observador, esses comprimentos de onda apresentam desvios para o ultravioleta ou para o vermelho, conforme o caso, os quais permitem determinar com rigor a velocidade de aproximação ou recessão. O facto de nos espectros luminosos provenientes das estrelas terem sido encontradas as linhas espectrais características de determinados átomos veio mostrar não só que na composição da atmosfera estelar se encontram esses átomos, mas também que as leis da física que nos são familiares permanecem válidas em qualquer ponto do universo. Ora, essas linhas espectrais apresentam desvios para o vermelho que caracterizam rigorosamente a velocidade de recessão das galáxias.

O big bang

Visto que estão a afastar-se de nós com a velocidade que a lei de Hubble estipula, é evidente que em determinado instante do passado remoto as galáxias, as próprias estrelas, estiveram em contacto umas com as outras. Admitamos que as galáxias mantiveram no passado a mesma velocidade de expansão que apresentam agora. Se assim for, separa-nos, obviamente, desse instante primevo o intervalo de tempo $T = \frac{1}{H}$, que outra coisa não é senão a idade do universo. Com efeito, por um lado, temos, de acordo com a lei de Hubble, $v = Hs$ e, por outro lado, de acordo com a hipótese de invariância da velocidade galáctica, teríamos $s = Tv$. Deste modo, concluiríamos que o *big bang*, ou a grande explosão que deu origem ao universo, ocorreu há 14×10^9 anos (o valor de $\frac{1}{H}$ em anos). Na realidade, por efeito da atracção gravítica, a velocidade das galáxias tem vindo a sofrer uma redução gradual. Assim, o número que apresentámos constitui um limite superior para a idade do universo, que se estima em cerca de 20 mil milhões de anos.

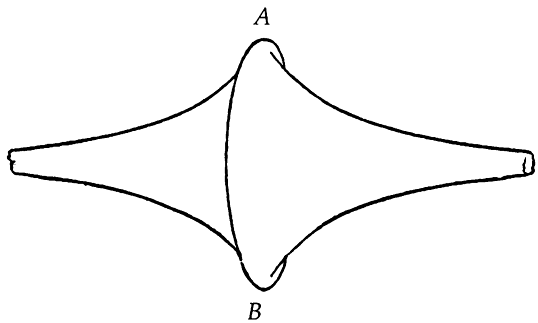
A teoria do *big bang* permite resolver um velho paradoxo proposto em 1823 por Heinrich Wilhelm Olber. Admitindo que o universo é infinito, não se compreende que o céu nocturno seja escuro e não luminoso, como seria de esperar. Com efeito, segundo o argumento de Olber, o número de estrelas que caem, à distância r do vértice, no interior de um ângulo sólido arbitrário deveria ser, supondo uniforme a distribuição, proporcional ao quadrado de r, o que compensaria o facto de o brilho aparente ser inversamente proporcional a esse quadrado. Ora, se o *big bang* ocorreu apenas há cerca de 20 mil milhões de anos, então o universo não é infinito em sentido matemático, não se estende indefinidamente no espaço. À Terra não pode chegar luz de estrelas distantes de mais 20 mil milhões de anos-luz, o que é, provavelmente, suficiente para que seja escuro o firmamento nocturno e resolve o paradoxo de Olber.

Uma bem conhecida analogia do universo em expansão recorre à imagem da superfície, salpicada de manchas, de um balão a encher-se de ar. À medida que o balão incha, as manchas vão-se afastando umas das outras. Este modelo permite-nos compreender que a existência de um observador que vê as galáxias a afastarem-se de si não viola o *princípio cosmológico*, herdado de Copérnico, segundo o qual o universo apresenta as mesmas características em todas as direcções, seja qual for o local onde se encontra o observador. Com efeito, será, obviamente, irrelevante a mancha que escolhamos na superfície do balão para descrevermos a recessão das demais.

Modelos

> Todos os meus esforços para descobrir uma contradição, uma inconsistência, nesta geometria não euclidiana foram sem sucesso.
>
> GAUSS

Um impulso decisivo para a aceitação das geometrias não euclidianas deve-se ao engenheiro italiano Eugénio Beltrami. No seu *Ensaio para a Interpretação da Geometria não Euclidiana,* Beltrami considerou uma superfície, chamada *pseudo-esfera* [lembra uma trombeta dupla (v. figura)], e as suas *geodésicas,* ou seja, linhas sobre a superfície que davam a mais curta distância entre dois pontos. Mostrou que estas geodésicas satisfazem a hipótese do ângulo agudo de Saccheri e os postulados de Euclides da geometria neutra. Beltrami encontrara um modelo para a geometria hiperbólica!



Beltrami e Klein provaram que, se a geometria euclidiana for consistente, a geometria hiperbólica também o será. A única forma de a geometria hiperbólica conduzir a uma contradição é a geometria euclidiana, ela própria, entrar em contradição. Até à descoberta das geometrias não euclidianas ninguém se lembrara de colocar tal questão. Sempre se *acreditara* na consistência da *geometria!* E como *provar* que a geometria euclidiana é consistente? Tomemos o modelo usual da geometria analítica plana, o conjunto dos pontos (x, y) em que x e y são números reais, as chamadas *coordenadas do ponto.* As linhas são lugares geométricos dos pontos que satisfazem equações do tipo $ax + by + c = 0$. Assim, estabelecemos uma correspondência entre geometria e álgebra elementar. Verifica-se, sem dificuldade, que todos os axiomas da geometria euclidiana são satisfeitos neste modelo. Contudo, o modelo da geometria analítica só garante a consistência se a aritmética, ela própria, for consistente! Será a aritmética consistente? Em 1900, Hilbert propôs esta questão ao Congresso Internacional de Matemática. E a resposta à questão é que não sabemos!

Se a aritmética for consistente, a geometria euclidiana será consistente. Se a geometria euclidiana for consistente, a geometria hiperbólica também o será. Ambas gozam dos mesmos direitos de cidadania matemática.

Finalmente, podia provar-se que o postulado das paralelas era independente dos outros. Como? Aceitando a consistência da geometria hiperbólica relativamente à euclidiana (provada por Beltrami e Klein) e raciocinando por *redução ao absurdo.* Assim, suponhamos que o postulado das paralelas é dependente dos outros postulados (ou seja, pode deduzir-se deles). Então a geometria hiperbólica seria inconsistente, pois o postulado das paralelas contradiz o axioma hiperbólico. Mas, por hipótese, a geometria hiperbólica é consistente relativamente à geometria euclidiana. Contradição! Logo, não pode provar-se o postulado das paralelas a partir dos outros postulados. E será possível provar a negação do postulado problemático? Também não. Por hipótese, a geometria euclidiana é consistente!

Ao modelo de Beltrami, outros se seguiram. Klein apresentou modelos para a geometria hiperbólica e a geometria *elíptica,* nomenclatura atribuída, respectivamente, a geometrias que, no tocante ao axioma das paralelas, estabelecem:

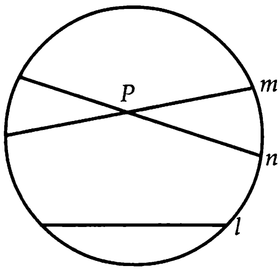
Geometria hiperbólica: dada, num plano, uma linha L e um ponto P fora de L, existem, pelo menos, duas linhas que passam por P e são paralelas a L;

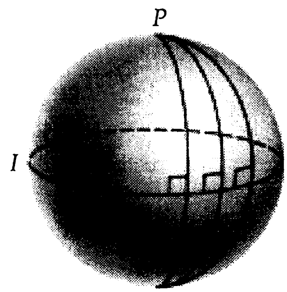
Geometria elíptica: dada, num plano, uma linha L e um ponto P fora de L, não existe linha alguma que passe por P e seja paralela a L.

Riemann, ao considerar o espaço ilimitado, o que não implica que a linha recta seja infinita, abriu a porta a novas geometrias. Admitindo que as rectas são finitas, podem ser concebidos dois tipos de geometria. Uma distinção crucial, feita por Klein, é a seguinte:

> Na *geometria elíptica simples,* duas rectas quaisquer encontram-se sempre num ponto, enquanto, na *geometria elíptica dupla,* duas rectas encontram-se sempre em dois pontos.

Um modelo para a primeira é fornecido por uma semiesfera. Neste modelo, «ponto» é interpretado como ponto sobre a semiesfera; pontos opostos sobre o equador são identificados; «linha» é interpretada como *semicírculo máximo.* A esfera fornece um modelo para a geometria elíptica dupla, interpretando «ponto elíptico» como ponto da esfera e «linha» como círculo máximo. (Um círculo máximo é aquele que é definido na superfície da esfera por intersecção desta com um plano que passa pelo centro.) Riemann, ao afirmar que um espaço de curvatura constante positiva em duas dimensões podia ser realizado sobre a superfície de uma esfera, já sugerira este modelo.





Uma questão se impõe: qual a geometria que (melhor) descreve o espaço físico? Esta é uma questão fora da matemática. Poderemos admitir que os axiomas e teoremas de Euclides se aplicam às medidas físicas? Ou ainda: será o espaço físico euclidiano? A geometria de Riemann é a que melhor se adequa à teoria da relatividade geral, enquanto a geometria hiperbólica é a que melhor serve a teoria da expansão do universo de Hubble, segundo a qual as galáxias se afastam mais e mais. Para responder à questão da *geometria* do espaço físico, a contemplação é insuficiente, há que recorrer à experiência para encontrar uma resposta (v. última secção deste capítulo).

Axiomas de Hilbert para a geometria euclidiana

A geometria, do mesmo modo que a aritmética, só precisa para a sua edificação lógica subsequente de poucas e simples proposições fundamentais. Estas proposições funda-

> mentais chamam-se axiomas da geometria [...] O presente trabalho é uma nova tentativa para dar um sistema completo e tão simples quanto possível para a geometria...
>
> DAVID HILBERT

O desenvolvimento das geometrias não euclidianas veio dar realce às *falhas lógicas* dos *Elementos,* tornando premente a fundamentação rigorosa da geometria euclidiana.

Como já observámos, a axiomática de Euclides apresenta várias imperfeições. Por exemplo, Euclides «pressupôs» que existiam pontos e linhas, que nem todos os pontos eram colineares e que qualquer linha tinha pelo menos dois pontos. Sem o postular ou de algum modo deduzir, usou estes factos como hipóteses implícitas. Euclides nunca mencionou de modo explícito os requisitos sobre «ordem» e «entre», usando-os tacitamente nos diagramas com que ilustrava os raciocínios e demonstrações. Ora há o perigo de um diagrama poder sugerir argumentos falaciosos, de ser pouco rigoroso ou de representar apenas um caso especial. Muitas das demonstrações de Euclides baseiam-se em diagramas. Para as tornar rigorosas há que fornecer um sistema mais amplo de axiomas — e o sistema de Euclides não é completo. O sistema apresentado por Hilbert talvez seja o mais intuitivo e próximo do espírito de Euclides.

Um ano antes da Conferência de Paris, em 1899, Hilbert, já renomado professor em Göttingen, publicou a sua famosa obra *Grundlagen der Geometrie (Fundamentos da Geometria),* que viria a exercer forte influência sobre a matemática do presente século. O seu método enquadra-se na corrente formalista, oponente à corrente intuicionista de Brouwer e Weyl. Hilbert, com os *Grundlagen,* tornou-se um dos principais representantes da «escola axiomática», que tanta influência teve na visão contemporânea da matemática e seu ensino.

Com a aritmetização da análise e os axiomas de Peano, importantes ramos da matemática alcançavam bases axiomáticas. Nos *Grundlagen* foi a vez de a geometria, disciplina que registara extraordinário florescimento no século XIX, alcançar o carácter formal da álgebra e da análise. É claro que também os *Elementos* de Euclides possuíam uma estrutura dedutiva, mas continham hipóteses implícitas, definições sem grande sentido e falhas lógicas. Depois da obra pioneira de Hilbert, outros sistemas axiomáticos foram propostos para a geometria, ficando firmado a partir do começo do nosso século o carácter dedutivo e formal desta ciência.

Durante o 1.º quartel do século XX, Hilbert foi considerado o maior matemático do mundo devido aos seus importantes contributos em diversos campos da matemática e da física. Entre esses, são de salientar, além da fundamentação da geometria, a teoria algébrica dos números, a obra que versa espaços de dimensão infinita e lógica. É também famosa a lista de 23 problemas que apresentou no Congresso Internacional de Matemática de Paris, em 1900, em torno dos quais se centrou grande parte do labor deste século.

Os *Grundlagen* começavam com uma frase de Kant: «Todo o conhecimento humano começa com intuições, passa a conceitos e termina com ideias.» Porém, todo o desenvolvimento da obra exprime uma visão antikantiana. Hilbert dava ênfase a que não deviam ser atribuídas aos termos não definidos outras propriedades além das enunciadas nos axiomas. O carácter empírico-dedutivo das antigas concepções geométricas devia ser posto de lado, havendo que entender pontos e rectas como meros elementos de conjuntos dados. Para que, parafraseando Hilbert, *possamos sempre dizer — em vez de pontos, rectas, planos — mesas, cadeiras e canecas de cerveja.* Os axiomas de Hilbert dividem-se em cinco grupos: incidência, ordem, congruência, continuidade e paralelismo. Os *termos não definidos* para a geometria euclidiana plana são ponto, linha, sobre (ou incidente), entre, congruência.

Será o espaço físico euclidiano?

A linguagem da matemática possui a simplicidade que a formulação rigorosa das leis da física exige e possibilita a economia de pensamento indispensável à discussão cabal das respectivas consequências. No entanto, apenas a experiência pode comprovar se determinados axiomas da matemática são relevantes para a descrição de qualquer apecto específico da natureza.

Pretendemos saber se a razão entre o perímetro do equador e o raio terrestre é 2π, isto é, se os postulados da geometria euclidiana são aplicáveis ao espaço físico tridimensional. Apenas a experiência pode decidir estas questões. O grande matemático Carl Friedrich Gauss propôs-se averiguar a ausência de curvatura do espaço tridimensional medindo a soma dos ângulos internos de um triângulo de grandes dimensões. Se o espaço fosse curvo e as dimensões do triângulo fossem suficientemente grandes, essa soma acabaria por tornar-se significativamente diferente de 180^0. Gauss usou instrumentos de geodesia para determinar com grande precisão as grandezas dos ângulos definidos por Brocken, Hoehagen e Inselberg. O lado maior do triângulo considerado media cerca de 100 km. Gauss concluiu que, dentro da precisão das observações que efectuara, o espaço era euclidiano.

No entanto, podia acontecer que a curvatura do espaço se manifestasse apenas para distâncias maiores. Sabe-se que, antes de os planetas Neptuno e Plutão terem sido observados com o auxílio do telescópio, as suas posições tinham já sido inferidas por meio de cálculos que se apoiavam nos postulados da geometria euclidiana. A confirmação experimental das previsões teóricas constitui evidência bastante convincente da validade dos pressupostos de que se partira. O raio médio da órbita de Plutão mede 6×10^{14} cm. Prova-se que o grau de concordância entre a posição de Plutão observada e a calculada não é consistente com um raio de curvatura do espaço inferior a 5×10^{17} cm. A ausência de curvatura (raio de curvatura infinito) não é de excluir.

Outro argumento a favor da ausência de curvatura do espaço físico tridimensional deve-se a Scwarzchild. Suponhamos que uma estrela é observada com um intervalo de seis meses. Sejam A e B as posições (diametralmente opostas) que a Terra ocupa na sua órbita, respectivamente, por ocasião da primeira e da segunda observações. Seja C a posição da estrela. As distâncias em causa são agora muito maiores do que as consideradas por Gauss. No entanto, do triângulo A, B, C, apenas dois dos ângulos internos são acessíveis ao astrónomo, isto é, os ângulos α, β, com vértices, respectivamente, em A e em B. Se o espaço for curvo, espera-se que não só a soma dos ângulos internos do triângulo A, B, C, mas a própria soma $\alpha + \beta$ sejam superiores a π, para estrelas suficientemente afastadas. Ora os valores observados para a soma $\alpha + \beta$, embora muito próximos de π, são inferiores. Este facto não significa, só por si, que o espaço não seja curvo. No entanto, os dados astronómicos relativos a esse tipo de medidas permitem estabelecer como limite inferior do raio de curvatura do espaço o comprimento de 6×10^{19} cm.

A teoria da relatividade restrita teve por origem a constatação de um facto experimental: a luz propaga-se no vácuo com velocidade constante, *c*, independentemente da direcção de propagação, do estado de movimento ou repouso do sistema de referência, da velocidade da fonte luminosa... Na génese da relatividade geral encontra-se outro facto crucial da observação: a «surpreendente» equivalência entre *massa de inércia* e *massa gravítica*. «Surpreendente» porquê? Porque não existe qualquer relação lógica entre os dois conceitos. Assim como a carga eléctrica determina a força a que um corpo electrizado fica sujeito sob acção de um campo eléctrico, também a massa gravítica determina a força a que um corpo fica sujeito sob acção de um campo gravítico. Por outro lado, a massa de inércia caracteriza o modo como o corpo reage à acção de qualquer força que sobre ele actue (sendo a força motriz igual ao produto da massa do corpo pela aceleração adquirida). Não há relação de espécie alguma entre carga eléctrica e massa de inércia. Donde provém, pois, a equivalência entre massa de inércia e massa gravítica?

Galileu e Newton aperceberam-se de uma propriedade notável que caracteriza a queda dos graves. Se a resistência do ar puder ser ignorada, o tempo de queda é o mesmo para qualquer grave, independentemente da massa respectiva, forma, etc. Esta propriedade é uma consequência óbvia da equivalência entre massa de inércia e massa gravítica e constitui evidência experimental dessa mesma equivalência. Em 1889, Eötvös, recorrendo a técnicas experimentais elaboradas, confirmou tão admirável equivalência com uma precisão surpreendente, sendo o erro relativo inferior a 10^{-9}.

Em sistemas não inerciais (sistemas acelerados) manifestam-se as denominadas forças de inércia (força centrífuga, por exemplo), as quais são proporcionais à massa de inércia. Einstein notou que é artificial a distinção entre referenciais de inércia e referenciais não inerciais. Postulou que as forças gravíticas têm uma origem análoga à das forças de inércia e enunciou o *princípio de equivalência*, segundo o qual *num pequeno laboratório em queda livre num campo gravítico, as leis da física são as mesmas que num referencial de inércia livre de qualquer campo gravítico*. O princípio da relatividade restrita estabelece a equivalência mútua de referenciais de inércia. O princípio de equivalência da relatividade geral estabelece a equivalência entre referenciais arbitrários e abre as portas à interpretação geométrica do campo gravítico, associando-o à curvatura local do espaço-tempo.

Bibliografia

BANFI, António, *Galileu*, Edições 70, 1992.

BOYER, Carl, *História da Matemática*, São Paulo, Blücher, 1974, pp. 222-243.

CRAWFORD, Paulo, «O significado da relatividade no final do século», in *Colóquio/Ciências, Revista de Cultura Científica*, **16**, 3-23, 1995.

13
Simetria

Simetria, o que é simetria?

No reino vegetal, várias espécies florais apresentam *elevado grau de simetria.* É o caso dos malmequeres, das gerberas e das margaridas, radialmente simétricas. Já as orquídeas, as bocas-de-lobo ou as violetas possuem um único elemento de simetria: um plano. O gene responsável por esta *fraca simetria* tem o nome de *cycloidea* e foi recentemente identificado. Uma curiosidade: do ponto de vista da evolução das espécies, as flores de pétalas assimétricas são mais evoluídas do que as outras.

A ideia de simetria ocorre naturalmente ao espírito humano. Simetria sugere equilíbrio e proporção, padrão e regularidade, harmonia e beleza, ordem e perfeição. Estes vocábulos resumem as nossas reacções subjectivas às *simetrias* que abundam na natureza nas formas vivas e inanimadas. Por exemplo, na forma dos planetas ou das pérolas das ostras, nos flocos de neve, nas borboletas, nas estrelas-do-mar, nos ouriços, ou nas criações artísticas dos vários géneros, escultura, arquitectura, poesia, pintura, música.

Segundo o famoso matemático alemão Hermann Weyl, simetria «é uma ideia pela qual o homem através dos tempos tem tentado compreender e criar ordem, beleza e perfeição». Ainda de acordo com Weyl, um objecto é simétrico quando é possível actuar sobre ele de tal modo que, depois de ter cessado a acção, o objecto mantém a configuração original.

O conceito de simetria inspira atraentes discussões filosóficas e estéticas. É um tema fecundo. A simetria é também um instrumento que facilita cálculos e conduz à previsão de novos factos científicos. Este carácter previsivo, *quase profético*, permitiu a descoberta de novas partículas. A existência de uma partícula de vida curta, o Ω^-, prevista em 1962 por Gell-Mann, foi experimentalmente confirmada em 1964 como sendo o membro desconhecido de uma família de dez ressonâncias. Existe uma simetria entre partículas e antipartículas, denominada *conjugação de carga.* Essencialmente com base nesta simetria, Dirac previu em 1930 a existência do antielectrão, previsão essa que, depois, viria a ser confirmada experimentalmente.

Para além de possibilitar previsões, a simetria permite ainda excluir hipóteses inaceitáveis, fazendo incidir a acção de pesquisa sobre um universo muito mais restrito do que o do cenário desenhado *a priori.* O *princípio da relatividade de Galileu* impõe determinada simetria às leis do movimento, simetria essa que restringe drasticamente as possíveis equações da dinâmica de um sistema de partículas.

Um *poliedro regular* é um poliedro cujas faces são polígonos regulares iguais (poliedro: *poly,* muitas, *hedra,* faces). O cubo, que tem seis faces quadradas, é um exemplo de poliedro regular. O tetraedro, cujas faces são quatro triângulos equiláteros, o octaedro, com oito faces triangulares equiláteras, o dodecaedro, com doze faces pentagonais, e o icosaedro, com vinte faces triangulares, são outros exemplos. Estes são os chamados sólidos platónicos, pois surgem num diálogo de Platão intitulado *Timeu* (v. figura 3). Haverá outros poliedros regulares para além dos sólidos platónicos? A resposta é *não.* A simetria impede-o!

A simetria pode ser encarada como um grande princípio ordenador que permite a classificação de sistemas físicos. A tabela periódica do famoso químico russo Mendeleev é um exemplo paradigmático do recurso a uma lei de simetria (variação periódica de certas propriedades com o número atómico) para a classificação de um sistema físico, neste caso o átomo.

A simetria desempenha em cristalografia um papel fulcral. Um cristal é uma organização periódica de átomos ou moléculas no espa-

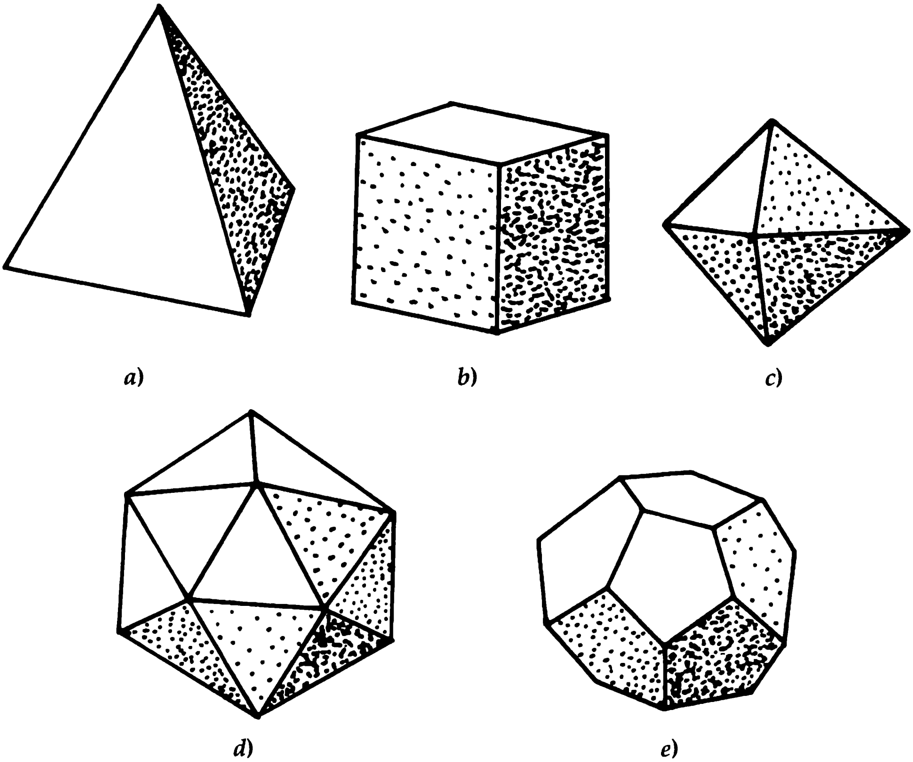


Figura 3 — *Os sólidos platónicos:* ***a)*** *tetraedro;* ***b)*** *cubo;* ***c)*** *octaedro;* ***d)*** *icosaedro;* ***e)*** *dodecaedro*

ço. Os cristais possuem simetrias espaciais de translação, de rotação e de reflexão ou combinações delas. No plano existem exactamente dezassete tipos de grupos de simetria para os cristais, os designados *dezassete grupos cristalográficos,* ou dezassete padrões de papel de parede. Estes padrões foram usados pelos mouros nas decorações do Palácio de Alhambra. Um notável resultado matemático garante que existem no espaço tridimensional 230 grupos cristalográficos, subindo para 4783 o número de grupos cristalográficos a quatro dimensões.

Os cristais podem ter simetria binária, ternária, quaternária ou hexagonal (respectivamente, associadas a rotações de $\pi = \frac{2\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{4}$ e $\frac{2\pi}{6}$ radianos). No entanto, a simetria pentagonal, correspondente à rotação de $\frac{2\pi}{5}$ radianos (a simetria do pentágono regular), não pode ocorrer. Os *quasi-cristais,* novo estado da matéria descoberto em 1984 por D. Shechtman, I. Blech, D. Gratias e J. H. Canh, apresentam este tipo de simetria. Um quasi-cristal bidimensional é exemplificado pela chamada *pavimentação aperiódica de Penrose,* que usa dois tipos de losangos imbricados (figura 5).

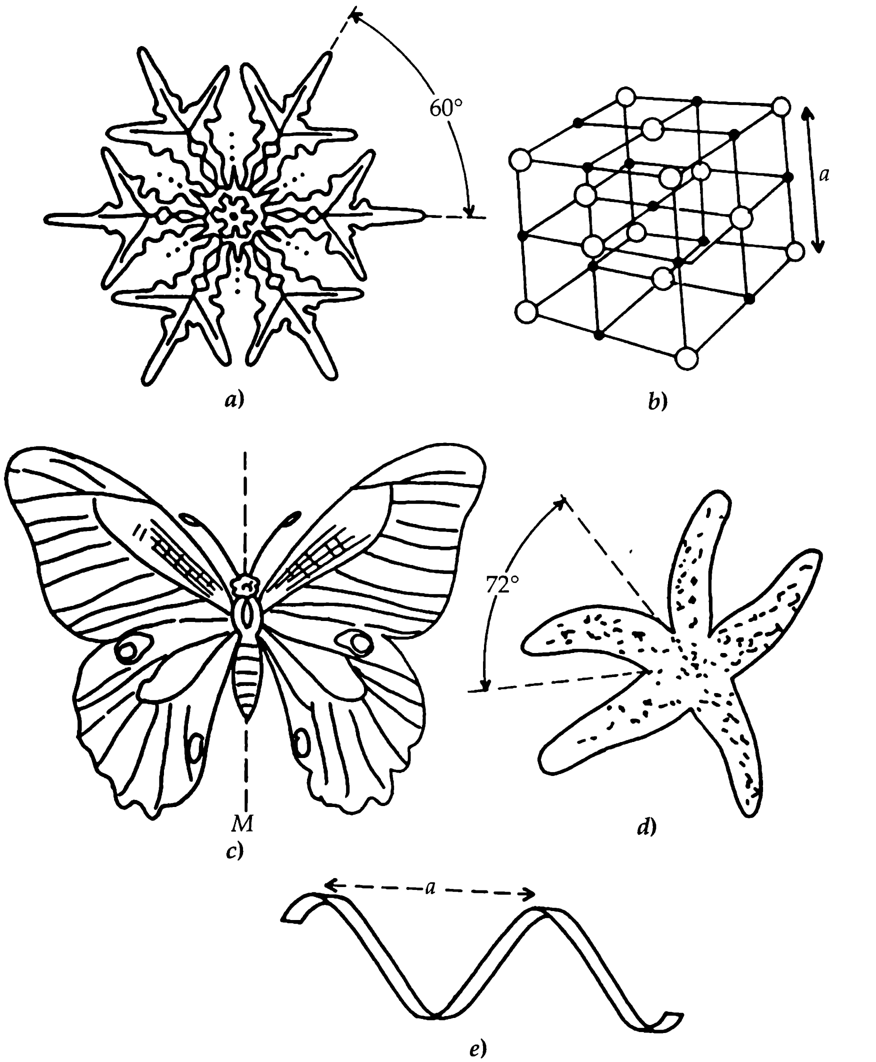


Figura 4 — *a*) *Floco de neve com simetria hexagonal;* ***b*)** *célula unitária de cristal de sal com simetria de translação;* ***c*)** *borboleta com simetria de reflexão;* ***d*)** *estrela-do-mar com simetria pentagonal;* ***e*)** *hélice dextrogira com simetria de translação* ***a***

Para os matemáticos, a simetria é uma noção extraordinariamente precisa. A linguagem própria para o seu estudo sistemático é a linguagem da *teoria dos grupos*, um importante ramo da matemática.

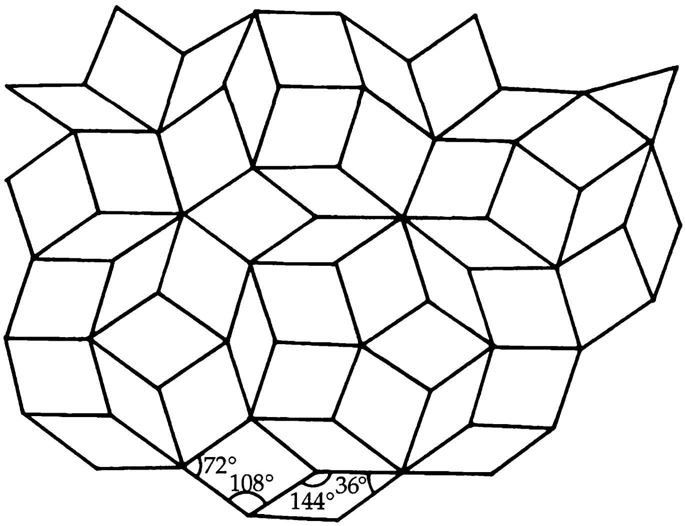


Figura 5 — *Pavimentação aperiódica de Penrose*

O conceito de grupo

Consideremos um triângulo equilátero, as suas três medianas m_1, m_2 e m_3 e o ponto O de intersecção destas.

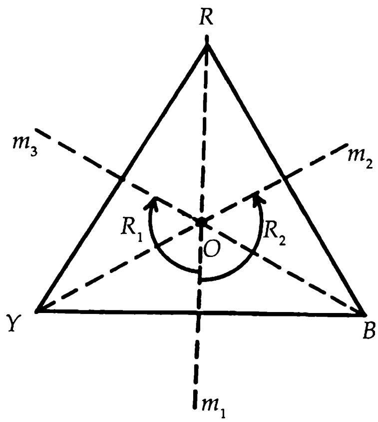


Figura 6

Não é difícil verificar que as *transformações* seguintes deixam o triângulo invariante:

1. Reflexão segundo o eixo m_1 (como se se tratasse de uma reflexão no espelho);
2. Reflexão segundo o eixo m_2;
3. Reflexão segundo o eixo m_3;
4. Rotação de 120° em torno de O (no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio);
5. Rotação de 240° em torno de O (no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio);
6. Não actuar (ou seja, efectuar uma rotação de 0° em torno de O).

Cada uma destas operações é uma *simetria* do triângulo. Se combinarmos duas delas sucessivamente, o resultado será uma nova simetria. Por exemplo, uma rotação de 120°, seguida de outra de 240°, significa uma rotação de 360°, operação prevista no item 6. Esta combinação ou composição de operações sucessivas designa-se vulgarmente por *produto.* O produto de duas simetrias é ainda uma simetria. Por isso se diz que o conjunto das simetrias é fechado para o produto. A operação trivial descrita em 6 chama-se identidade. A operação inversa de uma simetria é também uma simetria — restaura o estado inicial. Os itens 4 e 5 definem operações inversas uma da outra. Em cada um dos itens 1, 2 e 3 estão definidas operações que são inversas de si próprias. Dizemos que o conjunto das simetrias munido do produto é um *grupo,* o que significa que o conjunto é fechado, com identidade, cada elemento tem um (único) inverso e verifica-se a associatividade da composição das operações. Por ter seis elementos diz-se um grupo de *ordem* seis.

Qualquer objecto matemático pode ter simetrias. Por exemplo, a equação de uma circunferência de raio 1, $x^2 + y^2 = 1$, ou a energia potencial de uma partícula de coordenadas (x, y) atraída para a origem (0, 0) por uma força elástica e dada por $\phi(x, y) = x^2 + y^2$, são invariantes para qualquer rotação no plano em torno da origem. Enquanto o grupo das simetrias do triângulo tem seis elementos e o do quadrado oito, o da circunferência e o da esfera têm um conjunto contínuo de simetrias. Estes grupos contínuos (isto é, contendo um contínuo de elementos) foram estudados por Sophus Lie, usando técnicas da análise infinitesimal (diferenciação e integração).

Galois e a quíntica

> Quando discutimos uma questão transcendente, devemos ser transcendentemente claros.
>
> DESCARTES

Galois foi o grande criador da teoria dos grupos. Galois é célebre pelo seu talento matemático, extraordinariamente precoce, e pela tragicidade da sua vida. Morreu em consequência de um duelo ainda não tinha completado 21 anos, mas deixou para a posteridade um legado científico notável.

A vida do jovem Évariste Galois foi cheia de reveses. Aos 16 anos tentou ingressar na École Polytechnique, mas não foi bem sucedido. Aos 17 anos solicitou a Cauchy que apresentasse à Académie um artigo com as suas ideias originais, mas Cauchy perdeu-o. O fracasso numa segunda tentativa de ingresso na École Polytechnique veio aumentar a sua frustração. Entretanto, o pai, prefeito nas proximidades de Paris, vítima de intrigas, suicidou-se.

Galois ingressou na École Normale e em 1830 submeteu a concurso à Académie uma memória. Fourier, secretário da Académie, morreu logo de seguida e o artigo perdeu-se. Galois aderiu à causa republicana. Espírito insubmisso, dirigiu críticas ao director da École Normale e foi expulso da instituição. Submeteu novo artigo à Académie, desta vez através de Poisson. Este artigo, que continha parte do que viria a chamar-se teoria de Galois, foi recusado com a observação de *incompreensível.* Desiludido, Galois entrou para a Guarda Nacional. Num jantar de republicanos propôs um brinde a Luís Filipe e, mal interpretado o gesto, foi preso. Liberto, sofreu logo depois nova condenação de seis meses de prisão. Devido a uma epidemia de cólera, foi transferido para um hospital e posto em liberdade condicional. Por causa de uma mulher, foi desafiado para um duelo *por dois patriotas.* «Era impossível recusar», escreveu a um amigo na noite anterior ao trágico desfecho. Com premonição de morte, redigiu apressadamente as suas descobertas e pediu a esse amigo que cuidasse de as publicar na *Révue encyclopedique.* Em 31 de Maio, um dia volvido sobre o duelo à pistola travado em nome de um *código de honra,* morreu de peritonite no hospital, para onde um camponês, que o encontrara caído nos campos, o levara. Foi enterrado na vala comum do cemitério de Montparnasse. «Morro vítima de uma infame *coquette*», escreveu na noite que precedeu o duelo. Noutra carta escreveu: «Peço publicamente a Jacobi ou a Gauss que dêem a sua opinião, não acerca da verdade, mas da importância destes teoremas. Mais tarde haverá, espero, quem tirará vantagem de decifrar toda esta embrulhada *(gâchis)*.»

A *embrulhada* viria a revelar-se fundamental em áreas tão diversas da ciência como a cristalografia, a física das partículas ou a aritmética.

Em 4 de Julho de 1843, Liouville dirigiu-se à Académie nos seguintes termos:

> Espero interessar a Academia com o anúncio de que encontrei entre os escritos de Galois uma solução tão precisa quão profunda deste belíssimo problema: se é possível ou não resolver por meio de radicais...

Nestes escritos estavam as conclusões de Galois sobre a *resolução da equação geral do quinto grau usando radicais,* ou seja, através de uma fórmula que envolvia somente as operações aritméticas usuais — adição, subtracção, multiplicação, divisão — e a extracção de raízes.

Cerca de 2000 anos a. C., os Babilónios haviam descoberto a resolução das equações lineares e quadráticas, respectivamente, de graus 1 e 2. As equações de grau 3 e de graus superiores resistiram a diversos ataques até à Renascença. No século XVI, Scipione del Ferro, professor em Bolonha, Niccolo Fontana (alcunhado de Tartaglia, o tartamudo) e Cardano *resolveram* a cúbica (grau 3). Poucos anos volvidos, Lodovico Ferrari *resolveu* a quártica (grau 4).

A quíntica continuava a não se render às várias abordagens. No século XIX, Niels Henrik Abel (que morreu de tuberculose aos 27 anos) e Galois provaram, independentemente, a impossibilidade de uma tal solução por radicais. Galois foi mais longe do que Abel. Galois procurou um método para decidir se, dada qualquer equação algébrica, ela podia ser, ou não, *resolvida por radicais*. Apesar de a equação quíntica geral *ser insolúvel,* há certas equações do quinto grau que são algebricamente resolúveis. A resposta dada por Galois foi absolutamente geral. O resultado é técnico e difícil de explicar. Informalmente, é este o cerne da questão: no fundo, *as simetrias* da equação é que decidem.

O programa de Erlänger de Klein

Em 1872, Felix Klein apresentou na sua lição inaugural na Universidade de Erlänger um novo princípio unificador para a classificação das várias geometrias surgidas após a descoberta das geometrias não euclidianas. Desde então, o *programa de Erlänger* tem tido um enorme impacto em toda a matemática e na física.

Invariância e *grupo* são os conceitos unificadores de Klein. A originalidade da ideia de Klein consiste em considerar o grupo e os seus invariantes objectos de interesse primário em geometria. Consideremos, por exemplo, a geometria euclidiana. Duas figuras geométricas dizem-se *congruentes* se coincidirem na forma e tamanho, ou seja, se uma puder ser transformada na outra através de um movimento rígido do plano. Os movimentos rígidos do plano formam um grupo. As propriedades estudadas na geometria euclidiana são aquelas que não se modificam por acção deste grupo, como sejam os comprimentos e os ângulos.

A ideia de colocar a teoria dos grupos na essência da geometria revelou-se de grande alcance em vários ramos da matemática e da física. As transformações rígidas do plano podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = -bx + ay + c \end{cases}$$

onde $a^2 + b^2 = 1$. Estas transformações constituem um grupo.

As transformações que preservam a área das figuras são dadas por

$$\begin{cases} x' = ax + by + c \\ y' = dx + ey + f \end{cases}$$

onde $ae - bd = 1$ e são um grupo. Se substituirmos esta restrição por $ae - bd \neq 0$, as novas transformações também constituem um grupo. No entanto, comprimentos e áreas não são já preservados. Porém, qualquer cónica de um dado tipo (elipse, hipérbole ou parábola) permanece uma cónica do mesmo tipo. Essas transformações, estudadas por Möbius, são conhecidas por *transformações afins* e caracterizam uma geometria conhecida por geometria afim. Sob o ponto de vista de Klein, a geometria euclidiana é um caso particular da geometria afim.

Esta, por sua vez, é um caso especial de outra geometria ainda mais geral — a geometria projectiva.

A importância assumida pela teoria dos grupos na matemática do século XIX foi contagiante, extravasando os limites da própria matemática.

A invariância das equações de Maxwell do electromagnetismo face às transformações de Lorentz sugeriu a Minkowski uma nova geometria do espaço-tempo. Para a teoria da relatividade, Einstein escolheu inicialmente o nome *Invariantentheorie.* Wigner, perante os avanços que a simetria e a invariância permitiram em física das partículas elementares, afirmou que, no futuro, «haveremos de poder deduzir as leis da natureza e tentar comprovar a sua validade por meio de leis de invariância, em vez de tentarmos deduzir as leis de invariância daquilo que cremos serem as leis da natureza».

*Leis de conservação e simetria**

> As leis da natureza — compêndio de correlações — permanecem as mesmas seja qual for o local e a ocasião em que foram estabelecidas. Se isto não fosse assim, podia ter sido impossível ao espírito humano descobrir as leis da natureza.
>
> WIGNER

As leis de conservação desempenham em física um papel primordial. São exemplos típicos de leis de conservação a *lei das áreas* de Kepler ou a *lei de inércia* formulada por Galileu, segundo a qual uma partícula não actuada por qualquer força mantém o seu estado de movimento. Recordemos alguns outros exemplos familiares: a conservação da energia, a conservação do momento angular, a conservação da massa, a conservação da carga eléctrica, etc. Sabe-se hoje que estas leis são manifestações de propriedades de simetria dos sistemas físicos. Deste modo, surge a *simetria* como o princípio unificador da grande variedade de leis de conservação.

Quando se refere a um sistema físico, *simetria* significa invariância das suas propriedades face a determinada transformação. Os princípios de invariância e as leis de conservação estão intimamente relacionados. A célebre matemática alemã do princípio do século Emmy Noether provou um teorema famoso que sintetiza essa relação. Se uma certa simetria contínua ocorre em determinado sistema físico, então as propriedades desse sistema obedecem a uma lei de conservação associada à referida simetria. O teorema de Noether caracteriza a(s) quantidade(s) cuja conservação é implicada por determinada simetria. Por exemplo, simetria de translação de um sistema implica conservação da sua quantidade de movimento (a quantidade de movimento de um sistema é a soma das quantidades de movimento das suas partículas e a quantidade de movimento de uma partícula é o produto da sua massa pela respectiva velocidade).

Se aplicarmos uma translação espacial ao equipamento científico utilizado em determinada experiência de física e, em seguida, repetirmos essa mesma experiência, esperamos, naturalmente, que os resultados se não alterem. Assim acontece de facto. Quando afirmamos que *o espaço é homogéneo* apenas queremos significar que as coisas se passam deste modo. Se, em vez de uma translação, aplicarmos uma rotação, tudo se passa analogamente, dizendo-se, por isso, que o espaço é *isotrópico.*

Quando afirmamos que *o tempo é homogéneo* apenas queremos significar que voltaremos a obter os mesmos resultados se, volvidos segundos ou anos, repetirmos a experiência efectuada. Como observou Wigner, as correlações entre os fenómenos *A*, *B*, ..., não dependem dos instantes em que esses fenómenos ocorrem, mas apenas dos intervalos de tempo que separam os referidos instantes.

A conservação da energia, ou seja, a impossibilidade de criar energia, foi intuída mesmo antes de Galileu. Leonardo da Vinci postulou a impossibilidade do *perpetuum mobile.*

A conservação da energia encontra-se associada à *homogeneidade do tempo.* Afirmar que o tempo é homogéneo equivale a admitir que os sistemas físicos apresentam hoje precisamente o mesmo comportamento que apresentavam ontem e que apresentarão amanhã. Dito de outro modo, esse comportamento possui simetria de translação no tempo. Se o tempo não fosse homogéneo, por exemplo, se às segundas, quartas e sextas a gravidade fosse mais fraca do que às terças, quintas e sábados, já o *perpetuum mobile* seria perfeitamente possível. Bastaria conceber uma máquina que nos dias de gravidade fraca procedesse ao transporte económico de água para depósitos elevados e que nos dias de gravidade intensa utilizasse a queda dessa água para pôr em funcionamento dínamos geradores de energia eléctrica, a qual ficaria disponível para uso posterior. A energia despendida na primeira operação seria recuperada com ganho na segunda e a máquina manter-se-ia em movimento perpétuo.

Consideremos, a título ilustrativo, o modelo mecânico constituído por uma partícula de massa m sujeita à acção de um *potencial* $V(\mathbf{r}, t)$, o qual é função da posição $\mathbf{r}$ e do instante t. Sendo o tempo homogéneo, o potencial não depende de t. Com efeito, se mudarmos a origem dos tempos do instante 0 para o instante t_0, o potencial passa a ser $V(\mathbf{r}, t - t_0)$. Mas tempo homogéneo significa que esta operação não vai alterar o comportamento da partícula e, portanto, o potencial. Por conseguinte, $V(\mathbf{r}, t - t_0)$ não depende de t_0. Isto é, $V(\mathbf{r}, t - t_0) = V(\mathbf{r}, t)$. Fazendo $t = t_0$, vem $V(\mathbf{r}, t_0) = V(\mathbf{r}, 0)$. O potencial tem no instante t_0 o mesmo valor que tinha no instante 0. De acordo com um resultado elementar, a energia mecânica, soma das energias cinética $\frac{1}{2}mv^2$ e potencial $V(\mathbf{r})$, conserva-se, isto é, não varia de instante para instante. É este o *princípio de conservação da energia.*

A conservação da quantidade de movimento generaliza a lei da inércia e está associada à homogeneidade espacial (inexistência de origem preferencial das coordenadas espaciais) e a conservação do momento angular generaliza a lei das áreas e está associada à isotropia do espaço (inexistência de direcções espaciais preferenciais).

A homogeneidade e a isotropia do espaço físico são propriedades tão importantes que sem elas, como observou Wigner, ficaria comprometida a própria existência do património científico de que a humanidade usufrui. Com efeito, se as equações que descrevem as propriedades dos sistemas físicos flutuassem ao sabor do instante convencionalmente designado por inicial ou do ponto arbitrariamente escolhido para origem das coordenadas, então careceria a natureza da regularidade necessária à catalogação e à própria existência de leis científicas.

O estudo das relações entre leis de conservação e princípios de simetria assume uma importância crucial em física, porque conduz a uma classificação natural dos fenómenos conhecidos e permite prever novos fenómenos.

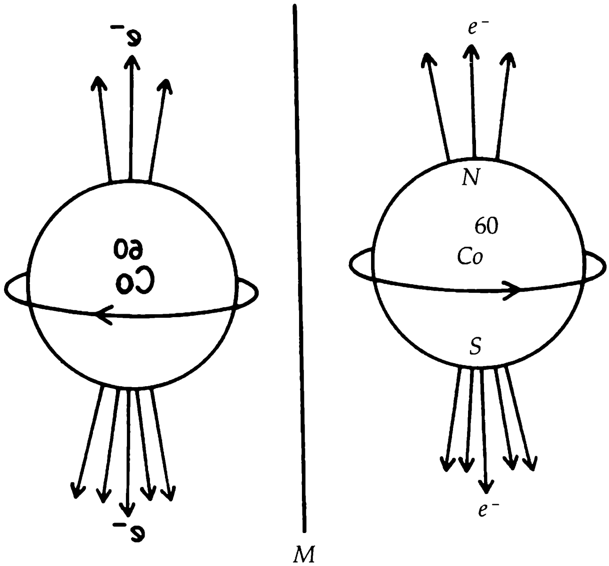


Figura 7 — *Reflexão no espelho do núcleo de cobalto 60*

*Simetrias dinâmicas**

Os estados dos sistemas quânticos são representados por vectores de componentes complexas, isto é, sequências ordenadas de números complexos sujeitas às regras operatórias da álgebra: somam-se vectores somando componentes homólogas, multiplica-se um vector por um número real multiplicando cada uma das suas componentes por esse número. Os vectores de componentes reais são familiares em inúmeras áreas da física. Pode, à primeira vista, parecer artificial a necessidade de descrever estados por vectores de componentes complexas. O caso do fotão, átomo de energia luminosa, é ilustrativo e ajuda-nos a compreender que não há qualquer artificialidade.

Consideremos um fotão associado a uma onda que se propaga na direcção do eixo dos X. A luz possui, simultaneamente, carácter ondulatório e corpuscular. Como ondas, as vibrações luminosas são caracterizadas por uma direcção de oscilação perpendicular à direcção de propagação, a qual pode decompor-se em dois *estados de polarização* distintos, dextrogira (de *dextru* — direito; *gagudoacentoyros* — volta) e levogira (de *levu* — esquerda), analogamente a parafusos que avançam rodando, respectivamente, no sentido directo e no sentido retrógado. No entanto, a onda luminosa, em geral, é uma sobreposição desses dois estados. Se tivéssemos de descrever tal sobreposição recorrendo apenas a números reais, não poderíamos tomar em conta a diferença de fase entre vibrações em estados de polarização distintos. Assim, o estado do fotão é descrito por um vector com duas componentes complexas. O comprimento (ou norma) do vector, grandeza que se reveste de significado e interesse físico, é dado por uma generalização da regra pitagórica, substituindo nessa regra os quadrados das componentes complexas pelos quadrados dos respectivos valores absolutos.

À evolução no tempo do estado do sistema quântico corresponde uma transformação, sujeita a regras precisas, do vector que descreve esse estado. A transformação está condicionada pelo princípio da sobreposição, típico de fenómenos ondulatórios, e deve preservar o respectivo comprimento. O princípio da sobreposição traduz-se na seguinte propriedade: se a, b e $c = a + b$ representam estados de um sistema quântico no instante inicial e os estados que representam noutro instante esse mesmo sistema são, respectivamente, a', b', c', então verifica-se $c' = a' + b'$. Transformações que não só preservam a aditividade, mas também o comprimento, como é o caso, dizem-se unitárias e o seu conjunto constitui um grupo, denominado *grupo unitário* — $U(n)$ —, onde n é o número de componentes do vector que sofre a transformação.

Assumem interesse particular as transformações que podem resultar de uma evolução gradual, a partir da identidade. Essas transformações constituem o sugbrupo $SU(n)$ de $U(n)$. (Note-se que nem todos os elementos de $SU(n)$ estão associados à evolução no tempo do vector que representa um determinado sistema quântico.)

Após as descobertas de Chadwick, em 1932, passou a admitir-se que o núcleo atómico era constituído por neutrões e protões, partículas dotadas de massas aproximadamente iguais, sendo, no entanto, o neutrão electricamente neutro e o protão possuidor de uma unidade positiva de carga.

A interacção forte ou nuclear a que estas partículas estão sujeitas possui certas simetrias dignas de registo. Se ignorarmos a interacção electromagnética (cerca de 1000 vezes mais fraca do que a nuclear), as interacções protão-protão, neutrão-neutrão e protão-neutrão são iguais. É vantajoso supor que protão e neutrão são dois estados nos quais a mesma partícula, o nucleão, pode existir. Os estados do nucleão são, assim, representados por vectores com duas componentes complexas. O caso do fotão é análogo. A simetria neutrão-protão, levada às últimas consequências, equivale a admitir que o grupo $SU(2)$ das transformações do vector do estado do nucleão deixa invariante a interacção nuclear e manifesta-se pelo surgimento de famílias de partículas com propriedades semelhantes: a família do par protão-neutrão, a família do trio de mesões, π^+, π^-, π^0, etc.

Bibliografia

BARKER, S. F., *Philosophy of Mathematics*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1964.

BELL, E. T., *Men of Mathematics*, Nova Iorque, Simon and Schuster, 1937.

BELL, E. T., *The Development of Mathematics*, Nova Iorque, McGraw-Hill, 1949.

BOYER, C. B., *A History of Mathematics*, Nova Iorque, John Wiley & Sons, 1968.

CHANDRASEKHAR, S., *Truth and Beauty, Aesthetics and Motivations in Science*, Chicago, University of Chicago Press, 1990.

COURANT, R., e ROBBINS, H., *What is Mathematics?*, Nova Iorque, Oxford University Press, 1948.

DANTZIG, T., *Number, The Language of Science*, Nova Iorque, MacMillan, 1959.

DAVIS, P. J., e HERSCH, R., *A Experiência Matemática*, Lisboa, Gradiva, 1995.

DIAS AGUDO, F. R., «Matemática: bela ou monstro», conferência proferida no Centro Nacional de Cultura, incluída na série «Matemática e Cultura II», Centro Nacional de Cultura, 1995.

FIOLHAIS, C., *Universo, Computadores e Tudo o Resto*, Lisboa, Gradiva, 1994.

GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History*, São Francisco, W. H. Freeman, 1974.

HALMOS, P., «Mathematics as a creative art», in *American Scientist*, 56, pp. 375-389, 1968.

HARDY, G. H., *A Mathematician's Apology*, Cambridge University Press, 1967.

HEATH, T. L., *Euclid's Elements*, vol. I, Nova Iorque, Dover, 1956.

KASNER, E., e NEWMAN, J., *Mathematics and the Imagination*, Nova Iorque, Simon and Schuster, 1940.

KLINE, M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times,* Oxford, Oxford University Press, 1972.

LAKATOS, I., *Proofs and Refutations, in* J. Worral e E. Zahar (eds.), Cambridge, Cambridge University Press, 1976.

STEWART, I., *Os Problemas da Matemática,* Lisboa, Gradiva, 199?.

STRUIK, D. J., *A Concise History of Mathematics,* Nova Iorque, Dover, 1967 (*História Concisa das Matemáticas,* 2.ª ed., Lisboa, Gradiva, 1990).

Agradecimentos

Agradeço ao professor João da Providência o incentivo, sugestões e colaboração crítica nas secções assinaladas com asterisco.

Agradeço também ao *staff* da Gradiva, de modo especial a Soares de Almeida, pela leitura cuidadosa e excelente revisão do texto, e a Paulo Pereira, pelo competente desempenho técnico. Ao Dr. Guilherme Valente agradeço a receptividade e o estímulo.