

“ Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos. É aí que o seu espírito se manifesta mais livremente. Seria desejável que existisse um curso inteiro de jogos tratados matematicamente ”

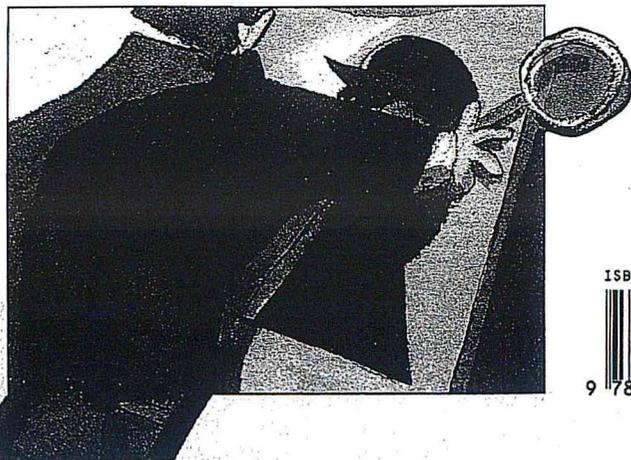
Leibniz, 1715

Os mecanismos simples têm constituído desde sempre uma fonte de inspiração inesgotável para os amantes da matemática, que neles encontraram um campo muito fértil para as aplicações desta ciência.

Neste volume Brian Bolt apresenta uma série de matemáquinas — dispositivos mecânicos correntes, tais como uma bicicleta, uma fechadura ou uma cadeira de praia —, desafiando o leitor a observá-las, a compreender o seu funcionamento em termos matemáticos e até a construir modelos semelhantes.

Numa linguagem clara e acessível, *Matemáquinas* encoraja os projectos multidisciplinares, nomeadamente da matemática com a tecnologia, e proporciona uma melhor compreensão do espaço através do movimento.

BRIAN BOLT é autor de diversas obras no domínio da matemática recreativa, das quais a Gradiva já publicou *Actividades Matemáticas* e *Mais Actividades Matemáticas*.



ISBN 972-662-335-9

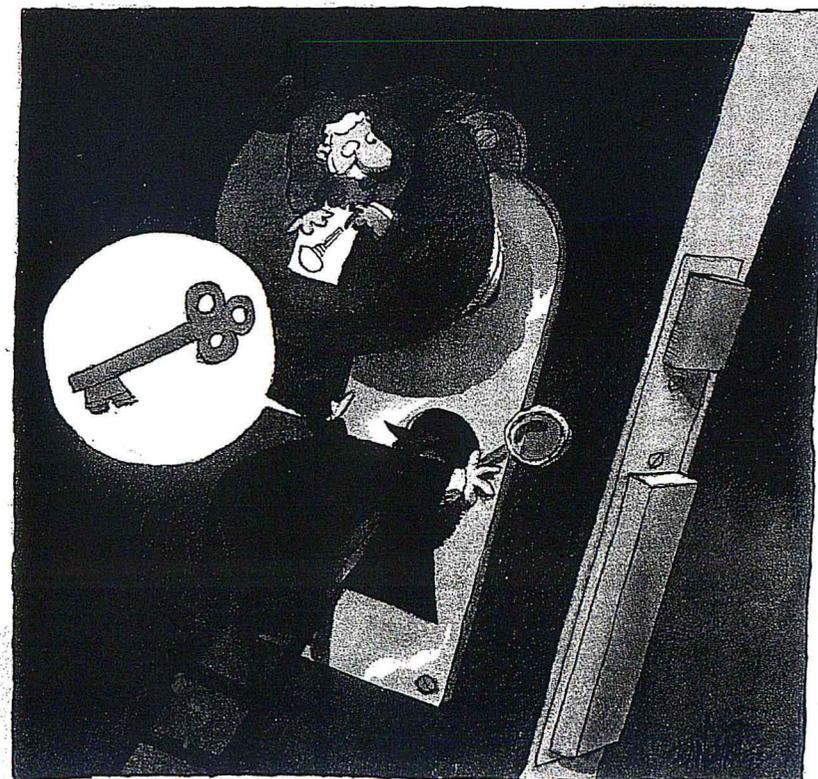


9 789726 623359

BRIAN BOLT MATEMÁQUINAS
gradiva

BRIAN BOLT

MATEMÁQUINAS



O PRAZER DA MATEMÁTICA

1. Aventuras Matemáticas
Miguel de Guzmán
2. Ah, Descobri!
Martin Gardner
3. 100 Jogos Numéricos
Pierre Berloquin
4. 100 Jogos Lógicos
Pierre Berloquin
5. Contos com Contas
Miguel de Guzmán
6. 100 Jogos Geométricos
Pierre Berloquin
7. Actividades Matemáticas
Brian Bolt
8. Matemática, Magia e Mistério
Martin Gardner
9. As Enigmáticas Aventuras do Dr. Ecco
Dennis Shasha
10. Rodas, Vida e Outras Diversões Matemáticas
Martin Gardner
11. Mais Actividades Matemáticas
Brian Bolt
12. Ah, Apanhei-te!
Martin Gardner
13. Círculos Viciosos e Infinito
Patrick Hughes e George Brecht
14. Matemáquinas
Brian Bolt

BRIAN BOLT

MATEMÁQUINAS

O Ponto de Encontro
da Matemática com a Tecnologia

TRADUÇÃO DE
LEONOR MOREIRA

gradiva

Titulo do original inglês: *Mathematics meets Technology*

© Cambridge University Press, 1991

Tradução: *Leonor Moreira*

Revisão de texto: *Manuel Joaquim Vieira*

Capa: *Armando Lopes*, com ilustração de *José Bandeira*

Fotocomposição: *Grádiva*

Impressão e acabamento: *Gráfica Manuel Barbosa & Filhos, L.^{da}*

Reservados os direitos para Portugal por: *Grádiva — Publicações, L.^{da}*

Rua de Almeida e Sousa, 21, r/c, esq. — Telef. 397 40 67/8

1300 Lisboa

1.º edição: *Janeiro de 1994*

Depósito legal n.º 74 632/93

AGRADECIMENTOS

O autor deseja manifestar os seus agradecimentos a Tom Brierley, que leu o manuscrito original e testou todas as soluções.

As ilustrações são de Nigel Weaver.

A fotografia da p. 104 foi reproduzida com a amável autorização do National Railway Museum, Iorque.

ÍNDICE

Introdução	9
Indicações para a utilização deste livro	13
0 Considerações prévias ao estudo de mecanismos	19
1 Andar às voltas!	22
Transmissão do movimento de rotação mediante correias de transmissão, roldanas, rodas dentadas e correntes	
2 Ranger de dentes	40
Uma análise de trens de engrenagens	
3 Inclinar, balançar e girar	66
O triângulo de base variável	
4 Balouços, elevadores e balanças	85
Aplicações do paralelogramo articulado	
5 Dos cavalos de baloço à máquina de vapor	101
Aplicações do trapézio isósceles articulado	
6 Qual a semelhança entre um ciclista e um cubo de pedal?	115
Aplicações e análise do quadrilátero geral articulado	
7 Içar!	130
Mecanismos de enrolamento	
8 Rodar sem pressa	143
Cilindros e rodas	
9 Para a frente, rodando!	158
Composição dos movimentos rectilíneo e de rotação	
10 Um trajecto acidentado!	170
Excêntricos e catracas	
11 O que se ganha por um lado perde-se pelo outro!	185
Alavancas e arietes hidráulicos	
12 Manipuladores mecânicos	201
Uma análise do desenho de autómatos	
Soluções	214
Bibliografia	247
Apêndice	249

INTRODUÇÃO

Desde a revolução industrial que temos sido envolvidos por uma multiplicidade de máquinas e mecanismos, cada qual mais engenhoso, por um verdadeiro tesouro de exemplos de formas interagindo com outras formas em movimento, cujo estudo proporcionaria uma profunda compreensão das relações geométricas no espaço.

Nos últimos vinte anos, o ensino da tecnologia mudou mais do que habitualmente se pensa e integrou o estudo de mecanismos. Contudo, os estudantes que fazem esta opção são uma minoria. Mas, na Grã-Bretanha, o National Curriculum já colocou a Tecnologia em pé de igualdade com a Matemática, atribuindo-lhe o carácter de matéria básica que todos têm de estudar. Tal determinação abriu perspectivas apaixonantes e suscitou possibilidades de cooperação interdisciplinar. Este livro foi escrito com o objectivo de as promover.

No ensino tradicional da geometria sempre se deu importância aos aspectos estáticos e mesmo a introdução das transformações geométricas, nos anos 60, colocou a ênfase em questões demasiado abstractas, aparentemente desligadas da realidade. Mas, enquanto isto acontecia, o Schools Council britânico desenvolvia um ambicioso projecto de ensino da Tecnologia que poderia ter complementado facilmente a nova abordagem da geometria.

Em minha opinião, foi esta passagem, de uma visão estática do espaço para uma visão dinâmica, proporcionada pela geometria das transformações, que lançou a semente que daria origem a uma nova abordagem do conhecimento do espaço. Na busca de vias que tomassem inteligível e significativa a «geometria do movimento, como foi vulgarmente designada, explorei o funcionamento de mecanismos correntes, como macacos de automóvel, máquinas de costura, bicicletas e máquinas de lavar, e descobri que, além de interessarem os estudantes, proporcionavam um abundante

caudal de estimulantes ideias geométricas. Outro aspecto que, neste estudo, me fascinou foi ter descoberto que as noções espaciais mais relevantes para o estudo de figuras em movimento são, na maior parte das vezes, muito diferentes das tradicionalmente consideradas importantes. A geometria das formas em movimento realça conceitos que não se encontram nos teoremas de Euclides.

Desde meados dos anos 60, em que tomei consciência da importância do estudo do espaço através do movimento (ciência conhecida por cinemática), aproveitei todas as oportunidades que se me depararam para explorar este tema com professores e alunos de todos os níveis. Também tomei conhecimento da longa lista de engenheiros de renome e matemáticos famosos que advogaram, com vigor, o estudo da cinemática e, mais particularmente, o estudo dos mecanismos.

É provável que tenha sido Leonardo da Vinci (1452-1519) o primeiro a registar sistematicamente uma ampla variedade de mecanismos, muitos dos quais se pensa mesmo terem sido inventados por ele. Muito mais tarde, no início do século XVIII, o engenheiro sueco Christopher Polhem construiu modelos detalhados e operacionais dos 80 mecanismos básicos então conhecidos, que utilizou como base de um curso de Projectos de Engenharia. Depois, Carl Cranstedt (1709-79), discípulo de Polhem, resumiu a sua lista de mecanismos básicos num livro de esboços a que chamava o seu «alfabeto mecânico». Nos finais do século XIX, Franz Reuleaux, professor de Mecânica Aplicada em Berlim, compilou um alfabeto mecânico de 800 modelos, enquanto, mais ou menos na mesma época, Henry Brown, um americano, publicava um livro intitulado *Five Hundred and Seven Mechanical Movements*. Mais recentemente, Ivan Ivanovich Artobolevsky, grande autoridade russa em mecanismos, publicou cinco volumes com o título *Mecanismos em Projectos Modernos de Engenharia*.

Mas nada disto começou a fazer parte dos nossos programas escolares senão muito recentemente. Porquê? Terá sido porque os nossos programas se preocuparam demasiado com teoremas, demonstrações e exames formais? Não há dúvida de que um estudo dos mecanismos exige uma abordagem prática, uma abordagem que, como Polhem e Reuleaux descobriram, não merecia o favor das tradições académicas da maioria das faculdades e departamentos de Matemática.

Em 1873, o matemático russo Tchebycheff escrevia ao famoso matemático britânico Sylvester, incitando-o a abordar a cinemática, já que esta constituía «um estudo mais gratificante, mais frutífero do que a geometria, pois acrescenta uma quarta dimensão, o movimento». Sylvester tornou-se um obcecado pela cinemática e dedicou muito tempo a exaltar as suas virtudes em lições e conferências públicas, na Grã-Bretanha e nos Estados Unidos

da América. No seu país, Kempe seguiu as pisadas de Sylvester, como grande paladino da cinemática. Contudo, os esforços de ambos não produziram efeitos duradouros, provavelmente devido à abordagem académica que um e outro lhe fizeram, a qual não permitiu tirar partido das aplicações práticas da disciplina.

A revolução industrial legou-nos um tesouro que devemos estudar, analisar e classificar. Com raras excepções, o sistema educativo demonstrou a mais superlativa cegueira ante as potencialidades que tal estudo oferece. As fábricas modernas, providas de equipamentos automáticos e autómatos nas suas linhas de montagem, ou a agro-pecuária, com a moderna maquinaria, contam com a engenhosa aplicação dos mecanismos inventados durante os últimos duzentos anos. A mesma coisa se pode dizer acerca dos equipamentos e instalações domésticas. Quando despertaremos e tiraremos partido das possibilidades que oferece a sua análise?

Este livro foi escrito para professores de Matemática e de Tecnologia; tem a ambição de os ajudar a tirar partido da variedade de ideias que o estudo dos mecanismos despoleta. Uma ampla variedade de mecanismos é aqui discutida e são explicadas as suas aplicações, seguindo-se um conjunto de exercícios cuja solução se apresenta no final do livro.

INDICAÇÕES PARA UTILIZAR ESTE LIVRO

Tem este livro a pretensão de facilitar ao leitor a compreensão dos mecanismos tal como os vê um matemático. Pode servir-se dele de vários modos. Não há nenhum inconveniente em o ler, como um romance, de fio a pavio; contudo, é provável que os professores sejam mais selectivos e utilizem o livro como fonte de ideias e de actividades que enriqueçam as suas aulas de Matemática ou de Tecnologia. Os exercícios constituem uma parte abundante e essencial deste livro. Estão graduados para os diferentes níveis de ensino e os que pressupõem maiores conhecimentos estão assinalados com um asterisco. Considerarei inúteis mais subdivisões, pois quase todos os problemas sem asterisco podem ser resolvidos pelos alunos do terceiro ciclo do ensino básico, desde que se utilizem modelos adequados. Dito isto, há que acrescentar que os caps. 10, 11 e 12 são mais apropriados para os alunos dos últimos anos do ensino secundário. Muitas questões repetem as mesmas ideias matemáticas, mas o facto de serem apresentadas em diferentes contextos ajudará o leitor a apreciar o seu significado e importância. Como é óbvio, deixa-se ao critério do professor a selecção de questões em cada série concreta. Algumas podem constituir exemplos para uma primeira abordagem do tópico em questão, deixando-se as outras para actividades a realizar pelos alunos.

O cap. 0 deve ser lido antes de todos os outros, pois proporciona algumas noções básicas, essenciais para os capítulos seguintes. Os outros capítulos são, em larga medida, independentes entre si, o que permite lê-los pela ordem que se queira. No entanto, os caps. 1 e 2, que tratam do movimento de rotação, formam um conjunto; por outro lado, os caps. 4, 5 e 6 tratam todos de quadriláteros articulados, pelo que convém estudá-los conjuntamente.

Para tirar o máximo partido do material deste livro é indispensável realizar as actividades práticas. Muitas vezes acreditei que sabia o que iria

acontecer sem construir ou manipular um modelo, mas, depois de o fazer, descobri que havia aspectos importantes da situação que não tinha tomado em conta. E, se isto acontece a quem tem tantos anos de experiência, compreende-se como são importantes a construção e o ensaio de modelos para aqueles que possuem pouca ou nenhuma experiência nesta área. A única forma de compreender e apreciar devidamente os mecanismos articulados e os trens de engrenagens é construindo-os. Actualmente existem à venda, a preços competitivos, conjuntos de roldanas e engrenagens para construir, com a ajuda de tiras de plástico ou metal, mecanismos articulados. Damos uma lista deles no final desta secção, mas pode fazer-se muita coisa, com baixos custos, usando cartão, tachas metálicas e rebites.

Dispõe-se assim de abundante material para estudar, na aula, as aplicações dos sistemas articulados, permitindo que os alunos construam os seus próprios modelos de, por exemplo, uma caixa de ferramentas, um cavalo de balouço, ou uma máquina de costura accionada a pedal. A vantagem de trabalhar com tiras de cartão é os alunos poderem conservar os modelos que constroem, o que supõe um incentivo adicional. Por outro lado, com o material comercializado, fica bastante caro ter equipamento para toda uma turma e seria necessário desmontar os modelos no final de cada aula. Contudo, para o estudo das engrenagens é mesmo necessário dispor de rodas dentadas de plástico ou metal; é possível adquirir, por pouco dinheiro, uma boa selecção deste material, o que permitirá que os alunos façam as suas próprias experiências em pequenos grupos. Além disso, as actividades propostas requerem também algum trabalho individual, pelo que convém preparar fichas de trabalho individualizadas, baseadas nas questões do livro, mas adaptadas à idade e ao nível do grupo.

Pensando numa abordagem mais individualizada, a turma pode ser dividida em pequenos grupos que trabalham, ao mesmo tempo, diferentes capítulos do livro, usando este como livro de texto. Não obstante, a médio prazo, seria preferível que os professores utilizassem o livro como fonte de informação e preparassem depois fichas apropriadas para os grupos com que se está a trabalhar e também adequadas aos materiais concretos disponíveis e ao ambiente em que se desenrola a acção educativa.

O estudo da matemática dos mecanismos tem várias facetas:

- 1 Construção de modelos dos mecanismos básicos e investigação das propriedades dos mesmos.
- 2 Visitas a lugares onde seja possível observar tais mecanismos em funcionamento.
- 3 Observação de uma peça de equipamento para analisar os distintos mecanismos básicos que utiliza e de que forma se encontram inter-

ligados. Quando for apropriado, a construção de um modelo que illustre o modo de funcionamento dos mecanismos.

- 4 Estudo comparativo das diferentes soluções dadas a um problema mecânico concreto; por exemplo, esboços de diferentes macacos de automóvel ou distintos desenhos de tesouras de podar.
- 5 Estudo de mecanismos concebidos para resolver problemas particulares, como os interruptores rotativos encarregados de regular a sequência de luzes nos semáforos, ou as caixas de mudanças de relações prefixadas.

Outra abordagem possível poderia consistir em tomar como ponto de partida um tema matemático; o professor seleccionaria um mecanismo em que tal tema tivesse relevância, em lugar de estudar os mecanismos pelo seu possível interesse. Por exemplo, um exame dos quadriláteros articulados pode constituir uma forma muito rica de estudar os quadriláteros, enquanto o estudo das aplicações dos cilindros hidráulicos na maquinaria de engenharia civil se ocupa, sobretudo, das relações entre os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos de um triângulo. Nesta linha, o estudo dos autómatos está intimamente relacionado com os diferentes sistemas de coordenadas utilizados para a determinação de um ponto do espaço, assim como para a descrição de trajectos que conduzam de um ponto a outro, obedecendo a certas restrições. Grande parte das tarefas práticas implicam a medição de comprimentos e de amplitudes de ângulos, a realização de desenhos à escala, a criação de lugares geométricos e o traçado de gráficos. O trabalho com roldanas e correias, ou a transmissão por corrente entre rodas dentadas, estão repletos de aplicações de fracções e razões e do uso de números positivos e negativos. Na prática, a combinação de dois factores de transmissão proporciona um excelente exemplo do produto de dois números racionais.

Talvez uma tabela illustre melhor o que atrás foi dito.

Mecanismo

Quadrilátero articulado

Triângulo de base variável

Cilindro hidráulico
Alavancas

Tema matemático

Quadriláteros, paralelogramos, trapézios, ângulos, comprimentos, desenhos à escala, lugares geométricos, gráficos.

Desenho à escala de triângulos, teorema do co-seno.

Volumes, razões.

Razões, razões de homotetia (factores de escala), ampliações.

Roldanas e correias
Autómatos

Razões, fracções, números racionais.
Sistemas de coordenadas em duas e
três dimensões.

O ideal seria que os professores de Matemática não trabalhassem isolados, mas em cooperação com os de Tecnologia, de maneira que o seu trabalho se complementasse. Desta forma, seria fácil desenvolver projectos conjuntos inspirados em ambas as áreas.

Para dar uma ideia do leque de possíveis projectos, segue-se uma lista de exemplos. Quem estudar e realizar as tarefas deste livro concluirá da quantidade de mecanismos a que antes não havia prestado nenhuma atenção. O leitor não terá, então, qualquer dificuldade em elaborar uma lista de questões praticamente interminável.

- 1 Estudar o desenho de cadeiras que se possam dobrar.
- 2 Conceber um sofá-cama.
- 3 Analisar os mecanismos de um piano vertical. Compará-los com os de um piano de cauda.
- 4 Como funciona uma máquina de escrever mecânica?
- 5 Estudar os brinquedos de um parque infantil. Desenhar um aparato inédito adequado a crianças pequenas.
- 6 Desenhar uma cadeira que ajude os doentes de artrite a levantarem-se.
- 7 Investigar os mecanismos de uma máquina agrícola e construir modelos para demonstrar como funcionam.
- 8 Investigar o desenho de fechos de portas e construir modelos para demonstrar como funciona.
- 9 Conceber um mecanismo de rodas dentadas para uma bicicleta «todo o terreno».
- 10 Como funciona uma máquina de tricotar?
- 11 Descrever os mecanismos principais que intervêm numa máquina de costura.
- 12 Conceber um instrumento para a ampliação de desenhos nas escalas 2:1, 3:1 e 4:1.
- 13 Projectar o mecanismo dos limpa-pára-brisas, de forma que as escovas varram um ângulo de 120° em cada dois segundos quando são impulsionadas por um motor que gira a 1200 rpm.
- 14 Construção de um livro com figuras móveis a três dimensões.
- 15 Desenhar uma máquina distribuidora de chocolates que entregue uma barra de chocolate por cada moeda de valor adequado que nela se introduza.

- 16 Projectar um abre-latas adequado a um diminuído físico que só possa utilizar uma das mãos.
- 17 Estudar um autómato e explicar o seu funcionamento.
- 18 Analisar o mecanismo de um relógio de pesos.
- 19 Averiguar os factores de transmissão em diferentes tipos de carretel de canas de pesca.
- 20 Estudar algumas das atracções de uma feira e explicar o funcionamento dos mecanismos que as compõem.
- 21 Desenhar o mecanismo para abrir as janelas dos automóveis.
- 22 Como funcionam os camiões de recolha de lixo?
- 23 Qual o desenho dos carros que transportam automóveis em dois níveis?
- 24 Estudar a maquinaria de uma fábrica de tecidos e descrever detalhadamente o funcionamento de uma dessas máquinas.
- 25 Visitar um antigo moinho movido a água e averiguar como se transmite a força da roda hidráulica para as mós.

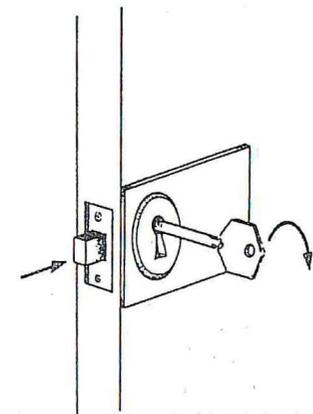
O Considerações prévias ao estudo de mecanismos

Nas nossas casas vivemos rodeados de mecanismos, que vão desde artefactos simples, concebidos para manter fechadas portas e janelas, até bicicletas, máquinas de cortar relva, máquinas de lavar e automóveis. Talvez no seu trabalho o acompanhem diariamente máquinas de escrever, tornos, tractores, gruas ou autómatos. Que têm em comum? Saberemos analisar com proveito a ampla gama de mecanismos que podemos observar?

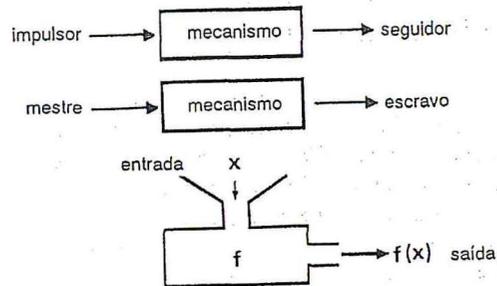
Para começar, todos os mecanismos envolvem partes móveis, peças que interagem umas com as outras para converter movimentos de certos tipos em movimentos distintos, que podem ser parecidos ou muito diferentes dos movimentos originais. A fechadura de uma porta é um bom exemplo.

Quando introduzimos uma chave na fechadura e a fazemos rodar, a lingueta move-se para fora ou para dentro, segundo o movimento de rotação imprimido à chave. O projectista, ao conceber o mecanismo, tem de decidir quanto deverá sair a lingueta, de que ângulo é razoável rodar a chave e, por fim, estabelecer o método de transformação de um movimento no outro. Até aqui os problemas são essencialmente geométricos. Outros aspectos do projecto dizem respeito aos materiais a utilizar, à facilidade de fabrico das peças, à segurança, etc., que não são objecto deste livro.

Na maioria dos mecanismos só existe uma peça com a qual se dá início ao movimento e uma outra encarregada de execu-

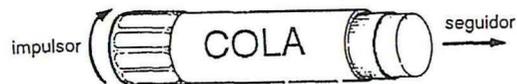


tar a tarefa desejada. Tais peças recebem, em engenharia, uma variedade de nomes, como «impulsor e seguidor», «primário e secundário», «mestre e escravo». Do ponto de vista matemático, podemos considerá-los como a variável independente e a variável dependente numa função matemática, ou, num computador, como os dados de entrada e os resultados ou saída. O leitor conhece, com certeza, o diagrama do tipo «picadora de carne», tantas vezes utilizado para representar funções e que explicita esta analogia. Um mecanismo transforma o movimento «entrada» noutro movimento, tal como um computador processa os dados que se introduzem numa matriz e define uma aplicação de pares ordenados em pares ordenados.



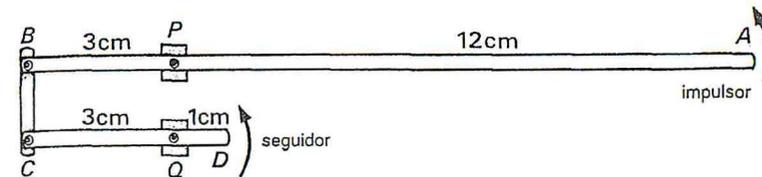
Neste livro adoptámos os termos *impulsor* e *seguidor*. No caso da fechadura da porta, a chave actua como impulsor e a lingueta ou ferrolho como seguidor.

Outros exemplos são o tubo de cola e o *bâton*. O impulsor corresponde ao extremo giratório e o seguidor é o cilindro de cola ou a barra de carmim.



Um parâmetro essencial na análise de muitos mecanismos é a razão entre a amplitude da rotação, ou a distância percorrida pelo seguidor, e o valor correspondente do movimento do impulsor; tal quociente designa-se por *factor de transmissão*. Este conceito engloba e generaliza o conceito mais conhecido por «relação de multiplicação» (ou desmultiplicação), habitualmente utilizado ao falar de trens de engrenagens ou caixas de velocidades, factor este que é um número afectado de um sinal, para ter em conta o sentido da rotação. Corresponde também à «relação de velocidades» no

caso de sistemas de roldanas. O coeficiente ou factor de transmissão constitui uma característica geométrica do mecanismo e depende da forma e do tamanho das peças que o compõem.



Para melhor compreender a noção de factor de transmissão e as suas propriedades multiplicativas, consideremos o mecanismo representado na figura acima, composto por três barras, *AB*, *BC* e *CD*, que podem girar livremente em torno de *B* e de *C*, assim como em torno de articulações fixas, *P* e *Q*.

Suponhamos que o ponto *A* sofre um deslocamento igual a *d* cm. Então, *B* deslocar-se-á $d/4$ cm, uma vez que $BP = AP/4$; assim, o factor de transmissão de *A* para *B* é $1/4$ e escreve-se $t(AB) = 1/4$. Ora *PBCQ* é um paralelogramo, pelo que *C* sofrerá o mesmo deslocamento que *B*. Assim, $t(BC) = 1$. Além disso, como CQ é igual a $3DQ$, o factor de transmissão de *C* para *B* é $t(CD) = 1/3$. Então, o factor de transmissão de *A* para *D* será dado pelo produto dos factores de transmissão individuais. Assim,

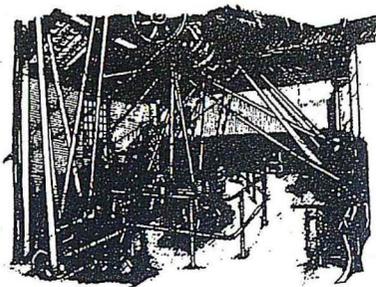
$$t(AD) = t(AB) \times t(BC) \times t(CD) = 1/4 \times 1 \times 1/3 = 1/12$$

Este tipo de análise é característico de muitos dos capítulos seguintes e é de importância crítica para a compreensão de muitos mecanismos.

1 Andar às voltas!

Transmissão do movimento de rotação mediante correias de transmissão, roldanas, rodas dentadas e correntes

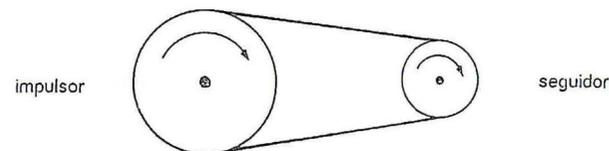
Em muitas máquinas actuais, o *impulsor* é um motor eléctrico encarregado de fazer mover um eixo a velocidade constante, enquanto o *seguidor* pode ser outra peça giratória, como o tambor de uma máquina de lavar, as lâminas de uma picadora eléctrica de carne, ou os ponteiros de um relógio, que giram também a velocidade constante, mas diferente. Esta transmissão de movimento pode ser conseguida de diferentes maneiras, mas todas elas têm características comuns.



Roldanas e correias de transmissão

Quem tenha visitado fábricas de fição antigas e observado os teares, ou tenha examinado fotografias das velhas fábricas do princípio do século, terá com certeza ficado impressionado pela quantidade de eixos e roldanas que rodavam a alta velocidade no alto das naves e estavam ligadas a todas as máquinas à vista por rangentes correias de transmissão. Nas máquinas de costura, movidas a pedal, a transmissão fazia-se por uma correia que passava num volante de inércia, que funcionava também de roldana. Actualmente, nas máquinas de costura, o pedal foi substituído por um motor

eléctrico, mas a correia de transmissão continua a desempenhar a mesma tarefa. Nas máquinas de cortar relva e nos aspiradores de tambor vertical, a transmissão processa-se também por correia, como bem sabem os seus utilizadores, pois é a peça que mais desgaste sofre e que tem de ser substituída com mais frequência. Nos motores de automóvel há também uma correia, a «correia da ventoinha», que tem uma dupla função: ligar a cambota do motor à ventoinha, para arrefecer o motor, e ao alternador, para carregar a bateria.

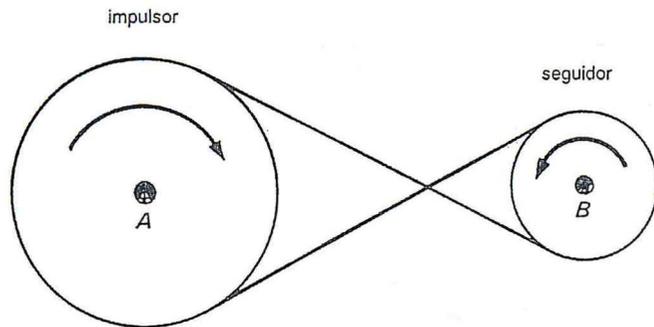


Precisamos então de conhecer, por um lado, a relação entre o ângulo de rotação do seguidor e o ângulo de rotação do impulsor e, por outro, a sua relação com o tamanho das roldanas. No caso de uma montagem simples, como a da figura, teremos:

$$\frac{\text{ângulo de rotação de } B}{\text{ângulo de rotação de } A} = \frac{\text{diâmetro de } A}{\text{diâmetro de } B}$$

Não se pode dizer que a igualdade anterior seja óbvia; constitui, contudo, um conceito fundamental que é necessário compreender bem. Para isso, nada como a experimentação com modelos simples. Não é necessário material muito sofisticado: como eixos podemos usar lápis, pedaços de varetas ou pregos grossos; as roldanas podem ser carrinhos de linhas e como correias de transmissão servem elásticos. É evidente que equipamentos comercializados das marcas *Meccano* ou *Fischertechnik* permitem construir modelos mais sofisticados e mais convincentes. Nas aulas de Trabalhos Oficiais também não será difícil construir roldanas, de madeira compensada, com, por exemplo, 4 cm, 8 cm, 12 cm e 16 cm de diâmetro.

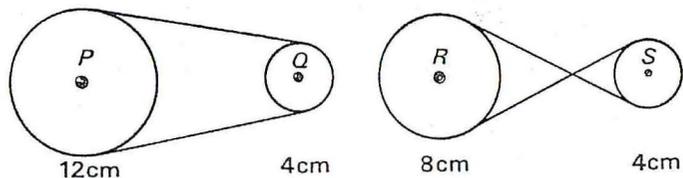
Para começar, é importante compreender que, se o diâmetro de *A* é maior que o de *B*, a roldana *B* rodará mais do que a *A* e vice-versa. A etapa seguinte consiste em determinar a razão entre as amplitudes dos ângulos rodados por uma e outra e, para isso, o mais simples é observar o ângulo de que roda *B* quando *A* efectua uma volta completa. Os raciocínios seguintes assentam no deslocamento sofrido pela correia que está em relação directa com os diâmetros das roldanas.



Se obrigarmos a correia a cruzar-se consigo própria, como se mostra na figura acima, a razão entre os ângulos rodados pelas roldanas será igual ao do caso anterior mas agora B girará em sentido contrário ao de A. Para distinguir estas duas razões torna-se necessário definir o *factor de transmissão*:

$$\text{factor de transmissão de A para B} = \frac{\text{ângulo rodado por B}}{\text{ângulo rodado por A}}$$

O factor de transmissão é um número positivo quando os eixos rodam no mesmo sentido e um número negativo quando o fazem em sentidos opostos. Para além da definição, convém dispor de uma notação cómoda, pelo que designaremos por $t(AB)$ o *factor de transmissão* de A para B.



Assim, nos exemplos acima ilustrados, em que as medidas correspondem aos diâmetros das rodas, os factores de transmissão são:

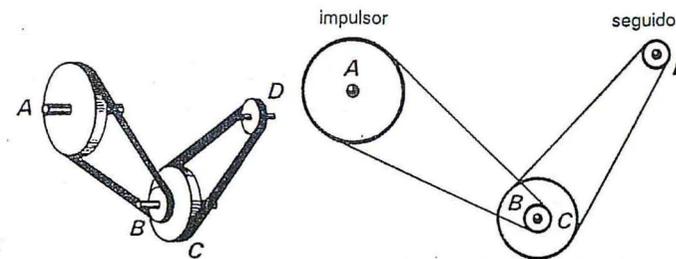
$$t(PQ) = +3 \quad \text{e} \quad t(RS) = -2$$

Quanto valem $t(QP)$ e $t(SR)$?

Em geral, é importante compreender que

$$t(BA) = 1/t(AB)$$

Usando roldanas, é teoricamente possível conseguir que o factor de transmissão seja um número real dado, tão grande ou tão pequeno quanto se queira, mas, na prática, existem limites para as dimensões de roldanas exequíveis e funcionais. Se são muito pequenas, a correia tende a patinar e, se são muito grandes, ocupam demasiado espaço. Seria possível obter um factor de transmissão igual a +15 usando uma roldana impulsora com 60 cm de diâmetro e uma roldana seguidora com 4 cm de diâmetro. Mas suponhamos que só dispomos de um lote de roldanas com diâmetros entre os 4 cm e os 20 cm, com diferenças de 4 cm entre eles. Como conseguir um factor de transmissão igual a +15?



Uma solução para este problema está ilustrada na figura anterior. Se A tem um diâmetro de 20 cm e B um diâmetro de 4 cm, então $t(AB) = +5$. Tomemos agora a roldana C, com um diâmetro de 12 cm, e montemo-la no mesmo eixo que B, de forma que ambas girem solidariamente. Por fim, tomemos a roldana D, com 4 cm de diâmetro, com o que $t(CD) = +3$. Assim, por cada volta completa de A, tanto B como C dão 5 voltas e D dará $5 \times 3 = 15$ voltas. Então, $t(AD) = +15$.

Em geral, o efeito de combinar desta forma dois sistemas de roldanas simples, em que a seguidora de um é solidária com a impulsora da etapa seguinte, é que o factor de transmissão do sistema composto é o produto dos factores de transmissão individuais. Podemos resumir este facto assim:

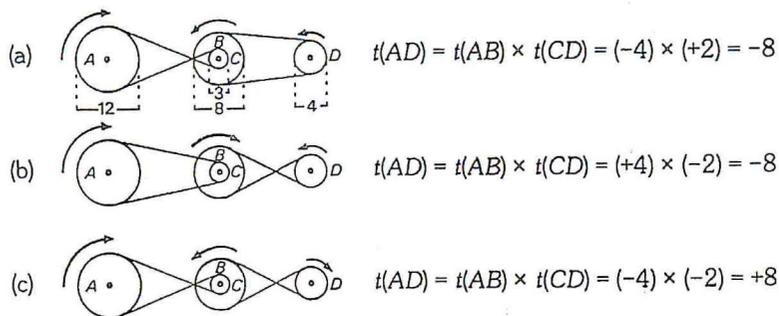
$$t(AD) = t(AB) \times t(CD)$$

mas talvez seja mais conveniente vê-lo como:

$$t(AD) = t(AB) \times t(BC) \times t(CD)$$

em que $t(BC) = +1$, pois as roldanas estão solidariamente montadas no mesmo eixo.

A álgebra dos factores de transmissão é idêntica à da multiplicação de números reais. Por este motivo, os sistemas de roldanas oferecem uma excelente ilustração do produto de números reais, como se pode concluir dos exemplos que se seguem:



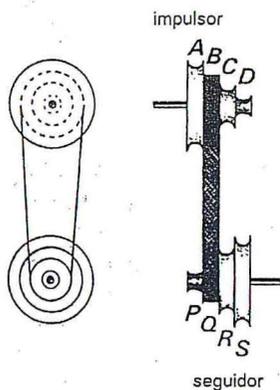
Em algumas máquinas, como tornos e berbequins, é necessário dispor de uma gama de velocidades. Isto consegue-se, na maior parte das vezes, dispondo dois blocos de roldanas como se mostra na figura da direita.

Por razões óbvias, estes sistemas de roldanas são designados por grupos cónicos escalonados. Conforme a posição da correia, assim o grupo seguidor girará mais ou menos rapidamente que o eixo impulsor.

Se os diâmetros das roldanas estiverem escalonados de 6 cm a 12 cm, com intervalos de 2 cm, os quatro factores de transmissão disponíveis são:

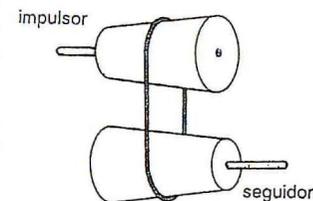
$$\begin{aligned} t(AP) &= 12/6 = +2 \\ t(BQ) &= 10/8 = +1,25 \\ t(CR) &= 8/10 = +0,8 \\ t(DS) &= 6/12 = +0,5 \end{aligned}$$

Os primeiros automóveis usavam roldanas e correias para transmitir às rodas a força motriz, mas as frequentes avarias deste sistema levaram a ser substituído por engrenagens (ver cap. 2). Contudo, actualmente, devido aos progressos na tecnologia das correias, verificou-se um ressurgimento do

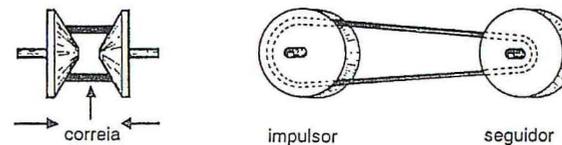


interesse pelas transmissões deste tipo em automóveis familiares. Primeiro, a Daf e, depois, a Volvo, a Ford e a Fiat substituíram as caixas de mudança de velocidade de alguns dos seus modelos por sistemas de transmissão automática com relações continuamente variáveis, baseados no desenvolvimento do grupo cónico de roldanas. Em vez de um bloco de roldanas de diferentes tamanhos, imaginemos que as roldanas são substituídas por cones (ver figura).

Quando a correia se encontra do lado esquerdo dos cones, um diâmetro pequeno impulsiona um diâmetro maior, proporcionando o menor factor de transmissão possível. À medida que a correia se desloca da esquerda para a direita, vai aumentando o diâmetro efectivo do impulsor e vai diminuindo o do seguidor, pelo que o factor de transmissão aumenta progressivamente.



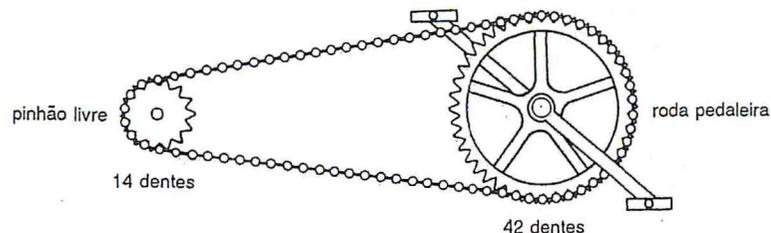
Este mecanismo permite mudar a velocidade do veículo sem que seja necessário alterar a velocidade de rotação do motor. Este sistema é mais eficiente que as caixas de velocidades tradicionais, que, para mudarem a velocidade do veículo, requerem que se mude a velocidade do motor. Os veículos da marca Volvo, com sistema de transmissão Variomatic, conseguem um conjunto de relações de transmissão equivalente ao de uma caixa de quatro velocidades, enquanto a Ford anuncia que a sua transmissão automática tem uma gama de relações que só poderia ser obtida com uma caixa manual de seis velocidades. Esta recuperação de projectos antigos conseguiu, não só um factor de transmissão que varia continuamente, como uma gama de relações muito mais ampla do que a obtida com as caixas de velocidades tradicionais. O efeito é permitir que o motor funcione à velocidade mais eficiente. Assim, por exemplo, a uma velocidade de cruzeiro de 110 km/h, o motor atinge pouco mais de 2500 rpm.



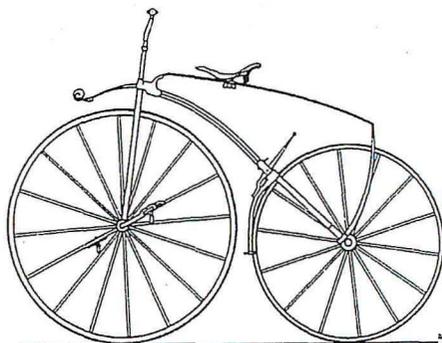
Na prática, cada «roldana» consiste em dois cones truncados que se aproximam ou afastam um do outro, obrigando, assim, a correia a afastar-se ou a aproximar-se do eixo motriz. Se a situação requer uma desmultipli-

cação, as metades da roldana motriz deslocam-se para fora, diminuindo assim o seu diâmetro efectivo, ao mesmo tempo que as metades da roldana seguidora são obrigadas a aproximar-se para aumentar o seu diâmetro. Um andamento mais rápido obtém-se pelo processo contrário.

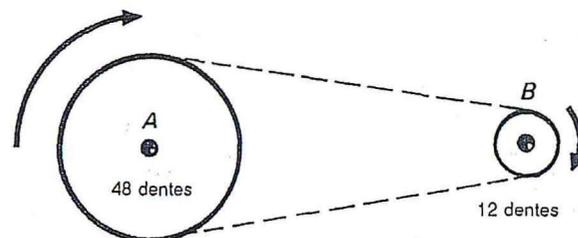
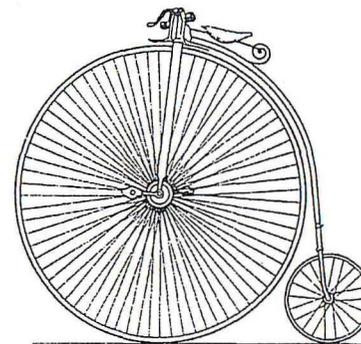
Rodas dentadas e correntes



A transmissão por correntes e rodas dentadas está muito relacionada com a transmissão por correias. É uma transmissão que toda a gente conhece, particularmente no caso da transmissão do movimento dos pedais de uma bicicleta à roda traseira. Contudo, poucas pessoas se aperceberão das consequências que este mecanismo provocou na concepção e evolução das bicicletas. Antes de 1885, altura em que Starley introduziu a transmissão por corrente na sua bicicleta *Rover Safety*, todas as bicicletas utilizavam a transmissão directa. Os pedais estavam directamente ligados à roda motriz, como nos triciclos de crianças e nos velocípedes, pelo que cada volta completa dos pedais implicava uma volta completa da roda. Como consequência, em cada volta, a bicicleta avançava uma distância igual ao comprimento da circunferência da roda e o rendimento da bicicleta dependia inteiramente do tamanho da roda motriz.



Mas, mesmo com uma roda motriz grande, como nos velocípedes, o rendimento era baixo, em comparação com o de uma bicicleta moderna. Com uma roda pedaleira de 42 dentes e um pinhão livre de 14 dentes na roda traseira, a corrente obrigaria o pinhão (e, por conseguinte, a roda) a dar três voltas por cada volta dos pedais. As rodas de uma bicicleta típica têm 69 cm de diâmetro, pelo que uma só volta dos pedais faria avançar a bicicleta tanto quanto um velocípede cuja roda motriz tivesse um diâmetro de $3 \text{ cm} \times 69 \text{ cm} = 207 \text{ cm}$. Um instante de reflexão basta para concluirmos que ninguém poderia montar um tal velocípede, pois, tendo em conta o raio da roda, precisaria de umas pernas com, pelo menos, 127 cm de comprimento.



Para calcular o factor de transmissão correspondente a dois eixos ligados por uma corrente e rodas dentadas basta calcular a razão entre o número de dentes de cada roda. No exemplo acima ilustrado (note-se que representamos as correntes por linhas a tracejado para as distinguir das correias de transmissão, representadas por linhas a cheio) temos:

$$t(A,B) = \frac{\text{número de dentes da roda dentada } A}{\text{número de dentes da roda dentada } B} = \frac{48}{12} = +4$$

Para compreender que assim é bastará observar que uma volta completa de A fará avançar 48 elos da corrente, o que fará girar a roda dentada B exactamente 4 voltas, pois esta tem 12 dentes. Para consolidar este conceito

podemos efectuar experiências com diversas bicicletas ou recorrer a estojos de construções como os das marcas *Mecano*, *Fischertechnik* ou *Legó*.

As bicicletas oferecem um vasto campo para a comparação de relações de transmissão, pensando sempre no tamanho da hipotética roda motriz que provocasse, por uma volta dos pedais, o mesmo avanço que um velocípede. É assim que procedem os ciclistas profissionais:

$$\text{rendimento da bicicleta} = \left(\frac{\text{factor de transmissão entre os pedais e a roda traseira}}{\text{diâmetro da roda traseira}} \right) \times (\text{diâmetro da})$$

Os ciclistas profissionais costumam utilizar um grupo de cinco rodas dentadas de diâmetro crescente (pinhões), solidário com a roda traseira, e duas rodas pedaleiras. A corrente liga uma das rodas pedaleiras a um dos pinhões e o ciclista dispõe de comandos de controlo que lhe permitem combinar a roda pedaleira e o pinhão mais adequados ao efeito desejado. Numa bicicleta típica de corrida, o número de dentes dos pinhões varia entre 14 e 28; as rodas pedaleiras costumam ter entre 32 e 50 dentes. Logo, os factores de transmissão, máximo e mínimo, disponíveis são, respectivamente:

$$f. t. \text{ máximo} = 50/14$$

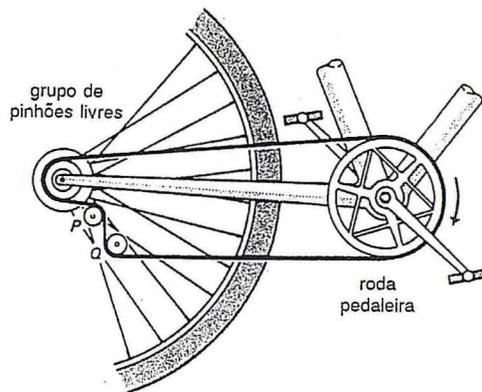
$$f. t. \text{ mínimo} = 32/28$$

Assim, com uma roda de 27 polegadas, os rendimentos correspondentes vão de:

$$50/14 \times 27 = 96,4 \text{ polegadas}$$

a um mínimo de

$$32/28 \times 27 = 30,9 \text{ polegadas}$$



Estes valores suporiam a existência de velocípedes com rodas motrizes com cerca de 2,5 m e 0,75 m de diâmetro, respectivamente. (Neste exemplo consideraram-se as medidas em polegadas por serem as mais usadas pelos ciclistas profissionais.)

Os *karts*, assim como as motocicletas, utilizam uma transmissão por corrente ao eixo traseiro. De facto, sempre que se requeira uma sincronização exacta da velocidade angular dos eixos, a transmissão por corrente é preferível à transmissão por correias, pois estas tendem a patinar sobre as roldanas. Assim, nos motores de automóvel, a ligação entre a cambota e a árvore de excêntricos que opera a abertura e o fecho das válvulas dos cilindros poderia fazer-se por uma transmissão por corrente. Não obstante, os motores modernos utilizam, para esse fim, correias e roldanas com dentes, mais leves e de funcionamento menos ruidoso.

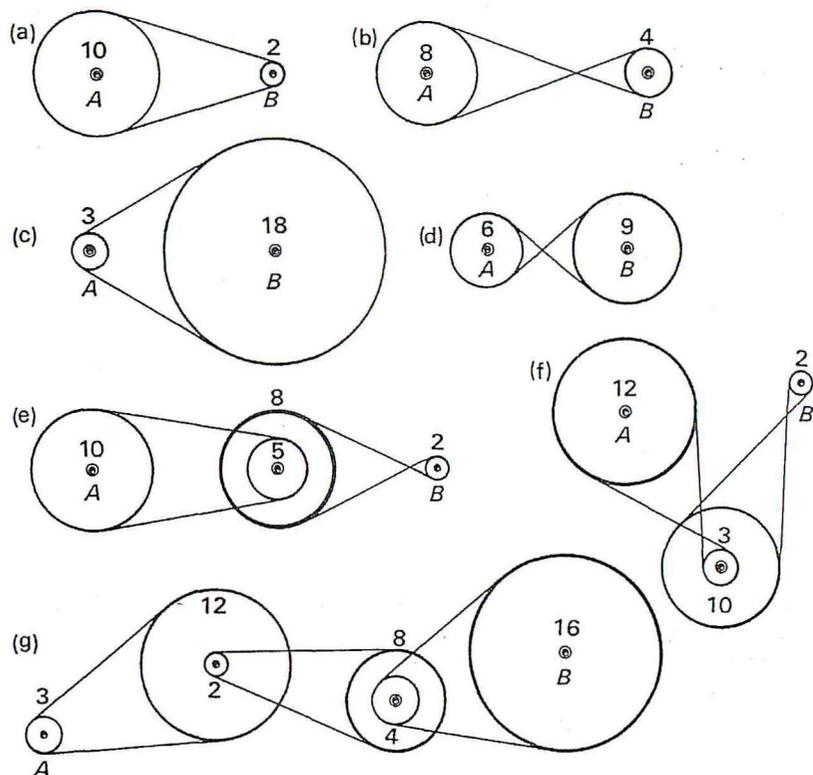
O estudo das roldanas e da transmissão por correntes não só proporciona uma melhor compreensão destes mecanismos, como envolve também noções geométricas espaciais, além de razões e proporções, factores de escala e produtos de números positivos e negativos em contextos significativos.

Observe todos os exemplos de transmissão por correntes ou correias que consiga encontrar. Procure medir ou estimar os tamanhos das roldanas ou o número de dentes das rodas dentadas e, depois, os factores de transmissão correspondentes. Tente também encontrar uma explicação para a necessidade de transmissão por engrenagens.

Deparam-se-nos com correias de transmissão nos mais variados aparelhos domésticos, como secadoras centrífugas, máquinas de lavar, limpatapetes e máquinas eléctricas de cortar relva. Carros e bicicletas são exemplos óbvios. Se visitarmos uma quinta, uma fábrica têxtil ou um museu de ciência, seguramente nos causará surpresa a frequência com que é utilizado este simples mecanismo. Em feiras agrícolas ou noutras exposições é bem provável que vejamos uma serra circular ou uma debulhadora invariavelmente movidas por correias. E que dizer das antigas rocas movidas a pedal?

Exercício 1

- 1 Determine o factor de transmissão $t(AB)$ correspondente a cada um dos sistemas de roldanas da ilustração. Os números que figuram junto das roldanas expressam, em centímetros, a medida dos respectivos diâmetros.
- 2 As roldanas da marca *Meccano* existem nos seguintes tamanhos: 12 mm, 24 mm, 36 mm, 48 mm, 72 mm e 144 mm.



Indique como utilizá-las para conseguir os seguintes factores de transmissão:

(a) + 4 (b) - 6 (c) + 1/3 (d) - 2/3 (e) + 72

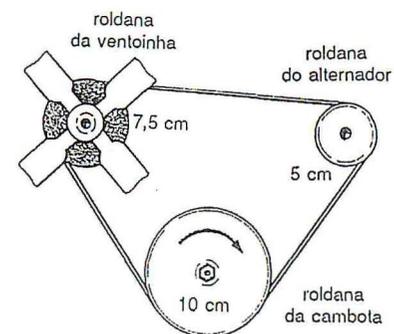
Dê outros exemplos de factores de transmissão que se possam obter com as roldanas anteriores. Dê também, pelo menos, um exemplo de factor de transmissão impossível.

De entre os factores de transmissão + 1, + 2, ..., + 36 indique os que poderiam ser obtidos com aquelas roldanas. Poder-se-iam obter os mesmos resultados com uma gama menos vasta de roldanas?

- 3 Em muitos motores de automóvel, uma roldana solidária com a cambota encarrega-se de fazer girar, por meio de transmissão por correia (a correia da ventoinha), a ventoinha e o alternador, tendo este último a

função de manter a bateria carregada. Vemos na figura uma montagem típica de um automóvel familiar.

Quando o motor trabalha a 3000 rpm, a que velocidades giram a ventoinha e o alternador?

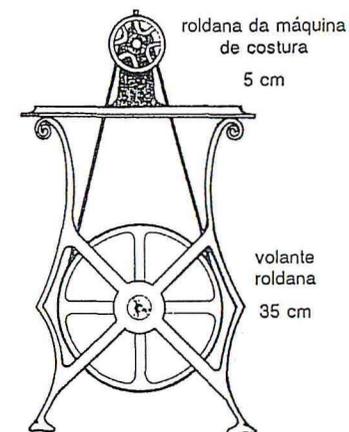


- 4 Numa máquina de costura, o grande volante com 35 cm de diâmetro, solidário com o pedal, é uma roldana que impulsiona a roldana motriz da máquina, de 5 cm de diâmetro. A máquina dá um ponto por cada volta da sua roldana.

Suponhamos que o volante dá uma volta por segundo. Num minuto, quantos pontos dará a máquina?

A máquina de costura foi modernizada, eliminando o pedal e adicionando um motor dotado de uma roldana, ligada, por uma correia, à roldana, com 5 cm de diâmetro, já anteriormente existente.

A que velocidade deverá funcionar o motor para que a máquina cosa à mesma velocidade que anteriormente?

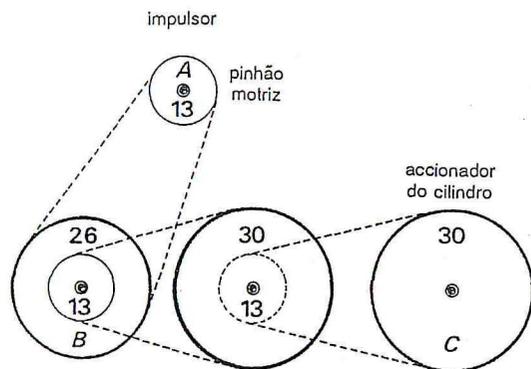


- 5 O tambor de uma máquina de lavar automática é movido por meio de uma roldana ligada a um motor eléctrico. A roldana do motor tem um diâmetro de 2 cm e a do tambor 36 cm. A que velocidade (em rotações por minuto) gira o tambor quando o motor está a fazer 3000 rpm?

- 6 A figura mostra o sistema de correntes e rodas dentadas que interligam as partes móveis de uma máquina de cortar relva com motor de gasolina. Determine o factor de transmissão $t(AB)$ do motor para as lâminas de corte e o factor de transmissão $t(AC)$ do motor para o cilindro.

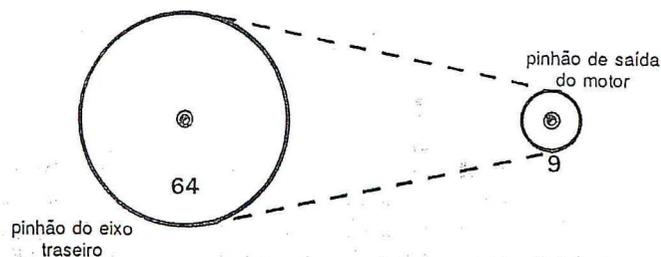
O cilindro tem um diâmetro de 20 cm.

A que velocidade rodará o motor quando a máquina avança a uma velocidade de 1 m/s? Parta da hipótese de que o cilindro não patina sobre a relva e apresente o resultado em rotações por minuto.



- 7 O eixo traseiro de um kart, onde estão montadas as rodas motrizes, está ligado ao motor por corrente e roldanas.

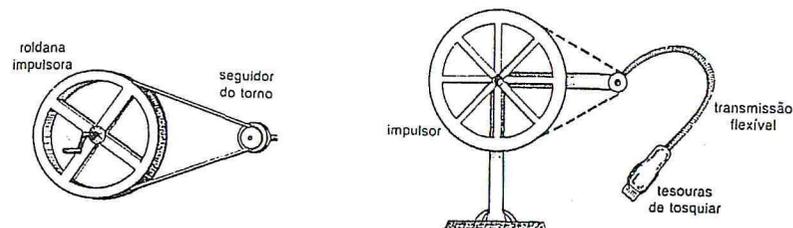
Conseguem-se diferentes factores de transmissão variando o número de dentes da roda dentada do eixo traseiro, permitindo assim uma melhor adequação às características de cada circuito. Na figura pode ver-se uma montagem possível.



Qual será a velocidade do eixo traseiro quando o motor estiver a funcionar a 5120 rpm?

Que velocidade desenvolverá o kart se as rodas motrizes tiverem um diâmetro de 30 cm?

- 8 Num museu sobre a «vida rural» pudemos observar os dois mecanismos que se seguem. O primeiro consiste numa roldana de 150 cm de diâmetro, que funcionava também de volante de inércia, accionada, no passado, por jovens aprendizes. O volante estava ligado, por meio de uma correia, ao grupo de roldanas de um torno cujos diâmetros eram de 10 cm e 25 cm. Quais eram os factores de transmissão possíveis?



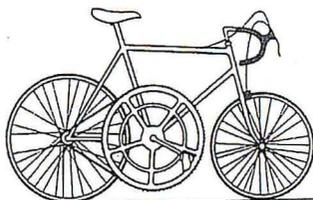
O segundo exemplo é uma peça de um equipamento usado para tosquiãr ovelhas. Neste caso, o elemento impulsor é uma roda dentada com 192 dentes, ligada por corrente a um pinhão com apenas 8 dentes, para conseguir um elevado factor de transmissão. A saída deste diminuto pinhão era transmitida, mediante uma transmissão flexível, a um conjunto de tesouras para cortar os velos de lã dos carneiros. Supondo que a roda impulsora dava 2 voltas por segundo, qual seria a velocidade de rotação do pinhão seguidor?

- 9 As diferentes relações de transmissão da bicicleta de Claude Butler Ladydale conseguem-se mediante duas rodas pedaleiras, de 32 e 50 dentes, e cinco pinhões montados no eixo traseiro, com, respectivamente, 14, 17, 20, 24 e 28 dentes.

Complete a tabela seguinte para mostrar os dez factores de transmissão possíveis. Para calcular o rendimento da bicicleta, multiplica-se, em cada caso, o factor de transmissão pelo diâmetro da roda traseira, que é, normalmente, de 27 polegadas.

	Número de dentes do pinhão livre				
	14	17	20	24	28
Número de dentes 32			1,33		
da roda pedaleira 50			2,50		

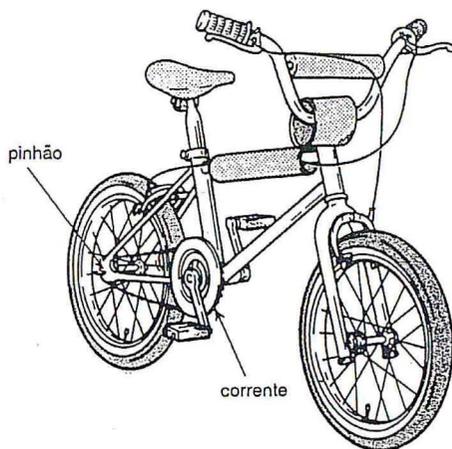
- 10 Quando José Meiffret bateu o recorde mundial de velocidade em bicicleta, superando ligeiramente os 203 km/h, utilizou um factor de transmissão igual a 10 entre a roda pedaleira e o pinhão traseiro, com o que o seu rendimento era equivalente ao de um velocípede cuja roda tivesse uns 7 m de diâmetro. Proponha possíveis números de dentes para a roda pedaleira e para o pinhão. Por que razão seria difícil conseguir, por este método, um rendimento maior?



- 11 Uma bicicleta BMX típica tem rodas de 20 polegadas, uma roda pedaleira de 36 dentes e um pinhão, na roda traseira, com 18 dentes.

Que rendimento tem?

Quantos dentes deveriam ter a roda pedaleira e o pinhão de uma bicicleta, com rodas de 27 polegadas, para conseguir o mesmo rendimento?



- 12 A «todo o terreno» Dawes Wildcat, uma bicicleta de montanha, tem rodas de 26 polegadas e dispõe de 18 regimes diferentes. Para tal dispõe de três rodas pedaleiras, com 32, 40 e 48 dentes, que impulsionam um grupo de 6 pinhões com, respectivamente, 16, 20, 24, 28, 32 e 36 dentes.

Estabeleça todos os regimes possíveis e escreva-os por ordem crescente, indicando como se conseguem.

Estabeleça depois a sequência de mudanças de roda pedaleira e pinhão que permitem obter, ordenadamente, todos os regimes, a partir do mais baixo.

- 13 As relações de transmissão da bicicleta Sturmer-Archer FM, equipada com um sistema de engrenagens instalado no interior do tambor da roda traseira, são: primeira, 0,666; segunda, 0,857; terceira, 1; quarta, 1,125.

Que significam estas relações?

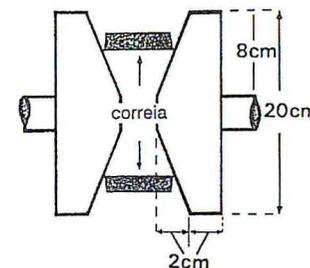
Suponha uma bicicleta equipada com este dispositivo e com rodas de 26 polegadas, uma roda pedaleira com 42 dentes e um pinhão com 14 dentes. Descubra todos os regimes possíveis¹.

- *14 Na figura da direita podemos ver a secção transversal dos cones correspondentes a uma das metades de um sistema de relações variáveis.

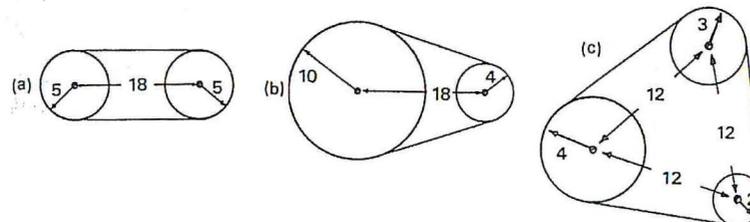
Que gama de diâmetros é possível obter para a roldana que de facto constituem, aproximando ou afastando o cone esquerdo do da direita?

Qual deverá ser o deslocamento lateral do cone para se conseguir a gama completa de diâmetros?

Que gama de factores de transmissão podemos conseguir entre dois eixos ligados por uma roldana móvel montada sobre duas destas roldanas de «diâmetro variável»?



- *15 Determine o comprimento da correia necessária para o sistema de roldanas que se pode observar na figura, onde as medidas estão expressas em centímetros.

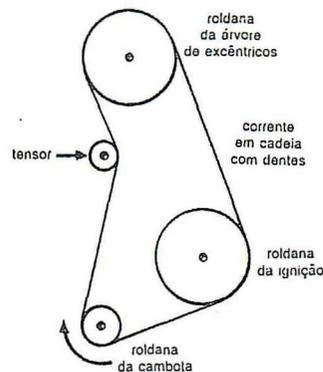


- 16 Para que os motores de combustão interna funcionem eficientemente, os instantes de abertura e de fecho das válvulas e o momento em que se provoca a ignição têm de ser determinados com precisão. Uma

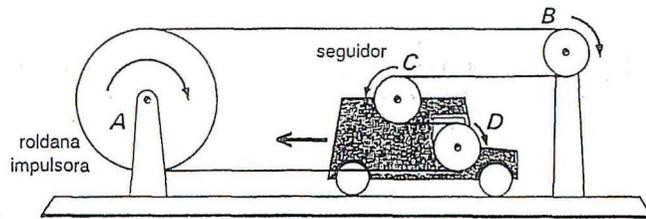
¹ Para informações mais detalhadas sobre a medição dos regimes das bicicletas veja-se *Mais Actividades Matemáticas*, de Brian Bolt, actividade 75, publicado pela Gradiva.)

correia que liga a cambota do motor à árvore de excêntricos e ao eixo do rotor, no distribuidor, encarrega-se desta função. Para impedir deslizamentos utiliza-se como tensor uma roldana que faz pressão sobre a correia para absorver as folgas produzidas pelo uso ou desgaste.

Procure descobrir a razão pela qual, em quase todos os motores de 4 cilindros, as roldanas da árvore de excêntricos e do rotor de ignição são do mesmo tamanho, mas duplas da roldana da cambota.



- 17 Que vantagens oferecem as correias trapezoidais e as correias dentadas sobre as correias planas?
- 18 Como está ligado o indicador de sintonia de um rádio ao botão de comando correspondente?
- 19 Os degraus e o corrimão de uma escada rolante não são muito diferentes de uma corrente ou de uma correia de transmissão. Indague sobre o seu funcionamento.
- 20 Muitos processos industriais usam tapetes rolantes ou correias transportadoras. Investigue exemplos da sua utilização e analise-os.
- 21 Às vezes, ao montar uma correia plana entre duas roldanas, torcemo-la de forma a constituir uma banda de Mobius. Com que objectivo?
- 22 É frequentemente necessário que uma peça de maquinaria, movida por uma correia, possa correr de um lado para o outro sem que haja perda de tensão na correia. Tal objectivo é conseguido mediante roldanas adicionais, como vemos na figura. Neste mecanismo é preciso fazer girar



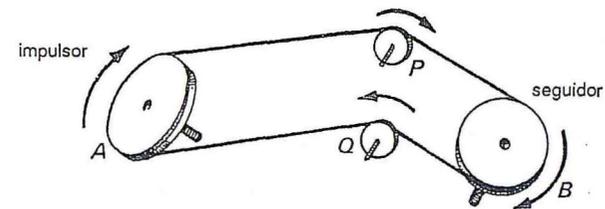
a roldana C, a partir de A, e, além disso, o eixo à volta do qual C roda tem de efectuar importantes deslocamentos, quer para a esquerda, quer para a direita. A roldana B está montada num eixo fixo, enquanto D roda em torno de um eixo que se desloca solidariamente com o eixo de C.

Explique cuidadosamente por que razão o comprimento total da correia não varia, apesar dos deslocamentos laterais do carro que transporta C e D.

A que condições devem obedecer os diâmetros das quatro roldanas e as posições relativas dos seus eixos para que seja possível o movimento da montagem?

Um bom exemplo de aplicação deste dispositivo é a fiadeira automática usada nas fábricas de artigos de lã para estirar e torcer o fio.

- 23 Até aqui, todos os exemplos de transmissão que considerámos envolviam eixos paralelos. Mas descobriram-se formas de superar esta limitação, tanto com correias e roldanas, como recorrendo a rodas de engrenagens.



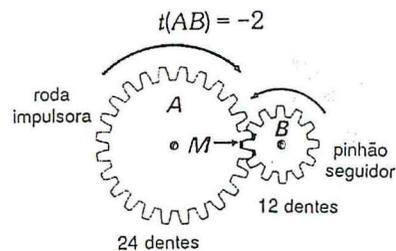
Usando roldanas condutoras, conseguimos que uma correia «dobre uma esquina» e transmita o movimento de rotação de uma roldana impulsora a um roldana seguidora, cujos eixos podem formar praticamente qualquer ângulo desejado. Se for bom observador, poderá ver aplicações deste tipo de montagem em maquinaria industrial e agrícola. Tome nota dos exemplos que encontrar.

2 Ranger de dentes

Uma análise de trens de engrenagens

Grande foi o caminho percorrido desde os primitivos sistemas de espigões e travessas, usados na era pré-cristã e que ainda podemos observar em velhos moinhos de vento, até às engrenagens precisas das máquinas modernas. Os Gregos da era clássica, como Héron, sabiam perfeitamente como usar pinhões engrenados e descreveram muitas formas de utilizar trens de engrenagens. No princípio do século XVI, o genial Leonardo da Vinci desenhou numerosos esboços que mostram que, não só conhecia os trens de engrenagens, como tinha perfeita consciência da importância da forma dos dentes nas rodas dentadas.

As rodas de engrenagens são, mais propriamente, dois cilindros com ressaltos, os dentes, que se vão inserindo uns entre os outros à medida que as rodas giram em torno dos seus eixos, transmitindo um ao outro o movimento de rotação. Quando duas rodas dentadas engrenam como se mostra na figura, a roda seguidora gira sempre em sentido contrário ao da impulsora. Então, com o número de dentes indicado,

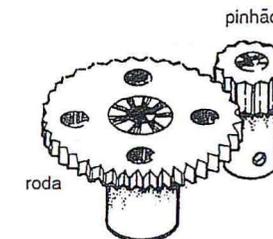


Os estojos de construções como os da *Meccano*, *Legó* e *Fischertechnik* contêm rodas dentadas que podem ajudar a adquirir experiência sobre o que acontece quando se engrenam rodas dentadas. Mas também é fácil compreender o que ocorre se nos concentrarmos no número de dentes que passam pelo ponto *M*, onde engrenam as rodas. Quando a roda impulsora *A* efectua uma volta completa no sentido dos ponteiros do relógio, pelo ponto *M*, passam, em sentido descendente, 24 dentes, que empurram, no mesmo sentido, 24 dentes da roda *B*, pelo que a roda *B* efectua duas voltas completas no sentido anti-horário. Em geral, quando duas rodas engrenam, o factor de transmissão é dado pela razão

$$t(AB) = \frac{\text{número de dentes de } A}{\text{número de dentes de } B}$$

Engrenagens cilíndricas rectas

Ao falar de engrenagens convém utilizar uma terminologia correcta. Quando duas ou mais rodas dentadas engrenam, diz-se que formam um *trem de engrenagens*. As engrenagens mais vulgares são como as da marca *Meccano*, que vemos na figura; são vulgarmente conhecidas por engrenagens cilíndricas rectas². Quando as rodas são diferentes, a mais pequena é denominada *pinhão* e a maior é designada, simplesmente, por *roda da engrenagem*.

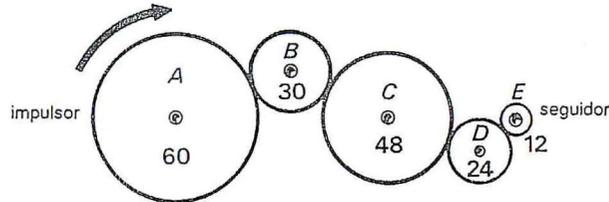


É importante saber calcular os factores de transmissão de trens completos que comportam vários pares de rodas. Relativamente à figura seguinte, em que os números se referem aos dentes das rodas respectivas,

$$\begin{aligned} t(AE) &= t(AB) \times t(BC) \times t(CD) \times t(DE) \\ &= \frac{-60}{12} \times \frac{-30}{48} = \frac{-48}{24} \times \frac{-24}{12} \\ &= \frac{+60}{12} = +5 \end{aligned}$$

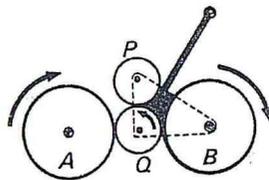
² Sistemas de rodas dentadas com os dentes talhados para o exterior e paralelos às geratrizes do cilindro que as suporta. Existem engrenagens de outros tipos, como adiante veremos. (*N. da T.*)

Note-se que é possível fazer simplificações, de tal forma que a *relação de engrenagem* depende exclusivamente do número de dentes da impulsora e da seguidora. O único papel das rodas intermédias de um trem de engrenagens deste tipo é o de determinar o sentido de rotação da roda seguidora relativamente ao da impulsora, ou seja, o *signal* do factor de transmissão.

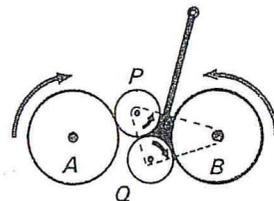


Para melhor compreender este facto observe-se que uma única volta da roda impulsora, da figura acima, provoca o avanço de 60 dentes em todas as outras rodas, uma vez que cada roda transmite o avanço do mesmo número de dentes à roda seguinte. Portanto, a última roda avança também 60 dentes, tal como se estivesse engrenada simplesmente na roda impulsora. Porém, no que diz respeito ao sentido, há que ter em conta que rodas adjacentes giram em sentidos opostos, pelo que, se o conjunto tiver rodas em número par, a seguidora gira em sentido contrário ao da impulsora e roda no mesmo sentido se o conjunto tiver um número ímpar de rodas.

Um mecanismo muito simples de inversão de marcha, utilizado em brinquedos de corda, consiste em accionar uma alavanca para introduzir mais uma roda no trem de engrenagens, como se vê na figura à direita. Quando A e B estão apenas ligadas por Q, as rodas B e A giram no mesmo sentido; ao accionar a alavanca, Q desengrena-se de A e P é introduzida entre A e Q, invertendo-se, assim, o sentido de rotação de B. Note-se que a peça triangular em que estão montadas P e Q roda em torno do centro de B. Porque terá de ser assim?

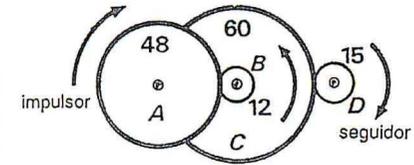


$$i(AB) = +1$$



$$i(AB) = -1$$

Para obter factores de transmissão muito altos ou muito baixos, sem utilizar nem rodas muito grandes, nem pinhões muito pequenos, é costume montar sobre um mesmo eixo duas rodas dentadas, tal como nos sistemas de roldanas. No trem de engrenagens que se vê na figura conseguiu-se um factor de transmissão de +16, já que



$$\begin{aligned} i(AD) &= i(AB) \times i(BC) \times i(CD) \\ &= (-4) \times (+1) \times (-4) \\ &= +16 \end{aligned}$$

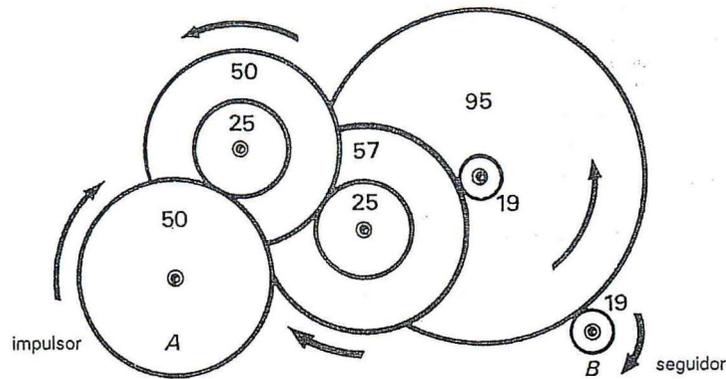
Sem o recurso a esta técnica seria preciso uma roda impulsora com um número de dentes 16 vezes maior do que o número de dentes do pinhão e, ainda, uma roda intermediária, de tamanho adequado, para conseguir que girassem no mesmo sentido.

Na prática, a escolha das rodas dentadas a utilizar para conseguir um determinado factor de transmissão depende dos tipos normalizados disponíveis e das distâncias entre os eixos a ligar. O meu estojo *Meccano*, por exemplo, dispõe de engrenagens rectas de 95, 57, 50, 25 e 19 dentes, mas só é possível ligar certos pares, por causa da distância entre os eixos. Os emparelhamentos possíveis são:

- 50 e 25, com uma razão de 2:1
- 57 e 19, com uma razão de 3:1
- 95 e 19, com uma razão de 5:1
- 95 e 25, com uma razão de 19:5
- 95 e 27, com uma razão de 5:3

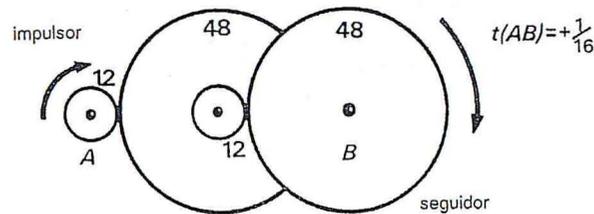
Apesar destas restrições, é possível combinar as rodas de muitas formas e obter uma gama razoável de factores de transmissão. A figura seguinte mostra a forma de conseguir um factor de transmissão de +60, necessário ao projecto de um relógio tradicional. Qual dos eixos deverá ser ligado ao ponteiro dos minutos? E ao ponteiro das horas?

São muitas as situações em que se utilizam grupos de engrenagens rectas para conseguir, no eixo de saída, uma velocidade menor do que a do eixo impulsor. Assim acontece nos cabrestantes, nas batedoras de claras e nos berbequins eléctricos. A redução consegue-se utilizando pinhões rectos, com reduzido número de dentes para impulsionar rodas com grande número de dentes.



$$t(AB) = +60$$

O trem recto de engrenagens que vemos na figura abaixo foi projectado para um cabrestante. A røda seguidora, que esta directamente ligada a um tambor de enrolamento, gira a $1/16$ da velocidade da impulsora, pelo que alguém que accione A por meio de uma manivela conseguira uma considerável vantagem mecânica.



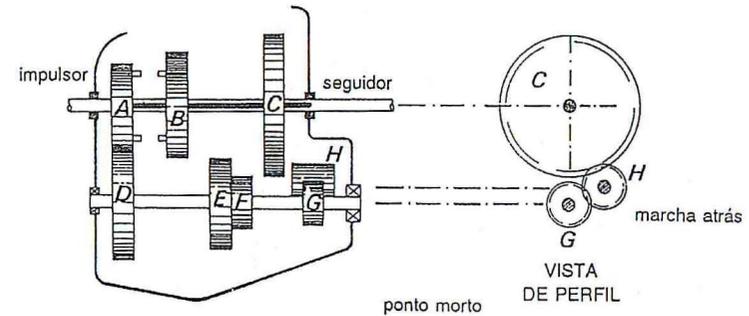
$$t(AB) = +\frac{1}{16}$$

Se o factor $t(AB)$  uma relao alta, $t(BA)$  uma relao baixa; mais precisamente

$$t(BA) = 1/t(AB)$$

A caixa de mudanças de velocidade de um automóvel utiliza engenhosos trens de engrenagens para transmitir a rotao da cambota do motor às rodas, com diferentes velocidades de saída que permitem ajustar a conduo

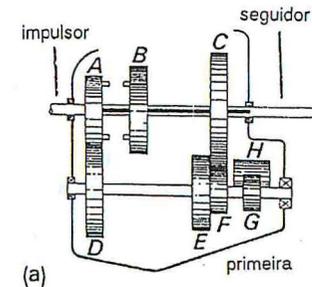
a diferentes situaes. Para compreender o funcionamento da caixa de mudanças de velocidade, concentremo-nos no projecto de uma caixa de três velocidades, como a que a figura ilustra. O eixo portador das rodas B e C e o eixo motriz a que esta ligada a roda A não são solidários, mas apenas coaxiais. Na posio mostrada na figura, a caixa esta em *ponto morto*. A roda dentada A engrena com a roda D e faz girar o eixo portador das rodas E, F e G, mas, como estas não estão engrenadas nem com B nem com C, o eixo de saída, o seguidor, não roda.



O eixo em que estão montadas as rodas B e C tem um sulco longitudinal. Por seu lado, as rodas têm uma lingueta que encaixa no sulco. Assim se consegue que as rodas girem solidariamente com o eixo e possam, apesar disso, ser deslocadas ao longo dele.

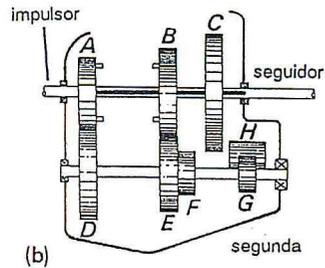
A *primeira* velocidade obtém-se deslocando a roda dentada C para a esquerda, até ficar engrenada na roda F. Obtm-se assim o factor de transmissão

$$t(AC) = t(AD) \times t(FC)$$



A *segunda* consegue-se deslocando a roda *B* para a direita, até ficar engrenada na roda *E*. Consegue-se assim o factor de transmissão

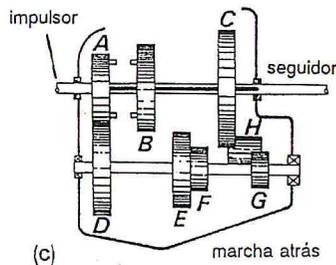
$$t(AB) = t(AD) \times t(EB)$$



A *terceira* obtém-se deslocando a roda *B* para a esquerda até que os espigões que tem lateralmente se encaixem nos espigões da roda *A*. Assim, as rodas *A* e *B* rodam solidariamente, conseguindo-se a transmissão directa entre o eixo impulsor e o seguidor, ou eixo de saída.

A *marcha atrás* consegue-se deslocando o pinhão *vadio* *H* para a esquerda até fazê-lo engrenar com a roda dentada *C*, sem desfazer a sua ligação à roda *G*. O factor de transmissão correspondente é

$$t(AC) = t(AD) \times t(DG) \times t(GH) \times t(HC)$$



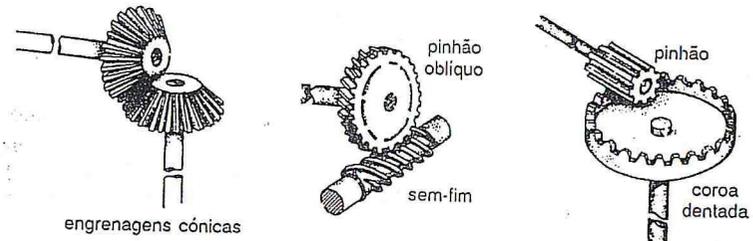
Nos carros de corrida, as relações de transmissão são adaptadas a cada circuito específico. Visto o número de dentes, de um tamanho dado, ser proporcional ao perímetro da roda e, portanto, ao seu diâmetro, numa caixa de velocidades, o número total de dentes nos pares de rodas como *A* e *D*, *B* e *E* ou *C* e *F* tem de ser o mesmo. Se as rodas *A* e *D* forem substituídas

por outras duas rodas que gerem uma relação superior, todas as velocidades, excepto a directa, serão modificadas; por outro lado, se só se substituíssem as rodas *B* e *E*, só a segunda velocidade seria alterada. Podem obter-se mais relações quer alongando a caixa, quer adicionando novos pares de engrenagens aos dois eixos.

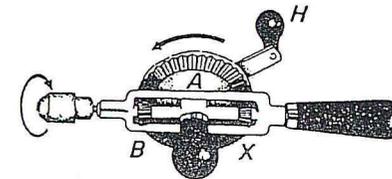
Transmissão da rotação entre eixos formando um ângulo

É frequente ter de transmitir o movimento de rotação entre eixos perpendiculares e para este propósito foram projectados sistemas de engrenagens de diversos tipos. Na figura podemos ver três tipos.

As engrenagens cónicas são uma adaptação evidente das cilíndricas. O mecanismo básico de um berbequim manual é precisamente um sistema de engrenagens cónicas.



No caso do berbequim *Stanley*, a roda motriz *A* tem 56 dentes, enquanto a seguidora *B*, directamente ligada ao porta-brocas, tem 15 dentes. A roda *X* gira livremente e serve para reduzir a pressão sobre a chumaceira principal da roda motriz durante o funcionamento do berbequim.



A eficiência do berbequim depende de muitos factores, como a velocidade a que se faz girar ou a força que se aplica à aresta cortante da broca. Esta última depende da razão entre a distância que percorre a pega *H* e a distância percorrida pela aresta exterior de corte da broca. No caso de que nos estamos a ocupar, *H* descreve uma circunferência de 14 cm de diâmetro, pelo que, se estiver a accionar uma broca com 0,5 cm de

diâmetro, por cada volta da pega, H percorre 14π cm, a aresta da broca percorre $(56/15) \times 0,5\pi$ cm, de onde resulta uma razão de $14\pi:(56/15) \times 0,5 = 7,5:1$

Por conseguinte, a mão que acciona a pega move-se 7,5 vezes mais rapidamente que a aresta cortante, o que implicaria, se não houvesse atrito, uma força disponível, na aresta cortante, 7,5 vezes maior do que a força aplicada na pega. (No cap. 11 veremos uma explicação deste facto, baseada na noção de trabalho realizado por uma força.)

O mecanismo de um batedor de claras utiliza uma coroa dentada que engrena com os pinhões que guiam os rotores, cuidadosamente sincronizados, que efectuam o batido. A observação de um batedor mostrou que a coroa tinha 52 dentes e que os pinhões tinham 11, pelo que os rotores efectuavam quase cinco voltas completas por cada volta da manivela.

Um *sem-fim* é um invento engenhoso que podemos ver, por exemplo, no mecanismo tensor das redes de ténis. Tem um só dente em forma de hélice desenvolvida ao longo de um eixo. Usa-se em conjunção com uma roda de dentes rectos ou levemente oblíquos e a sua função é fazer que a roda avance um dente por cada revolução completa do sem-fim. Um sem-fim só pode actuar como impulsor e determina sempre um factor de transmissão muito pequeno. Por exemplo, ao engrenar um sem-fim com uma roda de 60 dentes, é preciso que o sem-fim dê 60 voltas para produzir uma volta completa da roda. Já usei uma combinação deste tipo para reduzir a elevadíssima velocidade de rotação de um pequeno motor *diesel* que propulsava um carro-miniatura. Mesmo assim, o carro atingia uma velocidade de 65 km/h.

Actividades práticas

O trabalho prático de montagem e experimentação de trens de engrenagens é extremamente facilitado pelos estojos de construções do tipo *Lego Technik*, *Fischertechnik* ou *Meccano*. Os alunos podem seguir as fichas de trabalho que vêm com os estojos, ou experimentar projectos próprios. Na maioria dos casos, os alunos preferem que lhes sejam propostas tarefas fáceis até adquirirem confiança suficiente para inventarem os seus próprios trens de engrenagens. A possibilidade de lhes ligar um motor desperta ainda mais interesse e motivação³.

Além de construírem os modelos sugeridos pelas fichas de trabalho, devemos levar os alunos a observarem e descobrirem as aplicações dos

³ Experiências realizadas numa escola do segundo ciclo do ensino básico mostram que muitos alunos experimentaram já este tipo de materiais, pelo que partem rapidamente para projectos de sua iniciativa. (N. da T.)

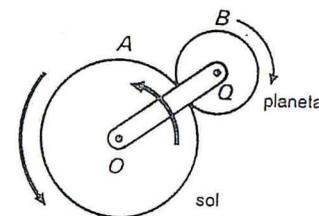
sistemas de engrenagens no mundo real. Modelos à escala, fotografias e esquemas gráficos seriam resultados excelentes dessa observação. As visitas a oficinas, fábricas de têxteis, velhos moinhos de vento e museus de diversos tipos constituem óptimas fontes de novas ideias.

A organização de concursos que premeiem o mecanismo capaz de içar maiores pesos, ou de subir encostas mais íngremes, ou não importa que outro dispositivo, pode fomentar o trabalho de equipa.

Existe à venda um jogo, *Power Game*, em que cada jogador controla um conjunto de oito rodas dentadas sobre um tabuleiro. Os jogadores, na sua vez, procuram engrenar as suas rodas com as dos seus adversários de uma forma particular. Este jogo é excelente para desenvolver a intuição e a organização espacial no que diz respeito a trens de engrenagens.

*Trens epicíclicos

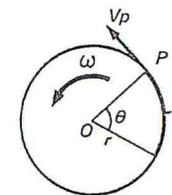
Em todos os trens de engrenagens até agora examinados, as rodas dentadas giravam em torno de eixos fixos, mas também foram desenvolvidos sistemas de engrenagens, conhecidos por *trens epicíclicos* ou *planetários*, em que certas rodas, designadas por *planetas*, descrevem círculos em torno de uma roda central de eixo fixa, chamada *sol*. De uma forma geral, são utilizados para produzir grandes mudanças de velocidade, utilizando um pequeno número de engrenagens. É o que se passa nas bicicletas de três ou quatro velocidades, que utilizam sistemas deste tipo instalados no interior do cubo da roda motriz. Também se baseiam nestes mecanismos as caixas automáticas de velocidades dos automóveis mais caros.



Para poder compreender as relações de transmissão dos trens epicíclicos é preciso entender primeiro a relação entre a velocidade tangencial de um ponto P , que descreve uma circunferência de raio r , e a sua velocidade angular ω .

Seja θ o ângulo ao centro correspondente a um arco de comprimento s . Então

$$s = r\theta$$



estando a amplitude de θ expressa em radianos.

Derivando esta equação em ordem ao tempo, vem

$$\frac{ds}{dt} = r \frac{d\theta}{dt}$$

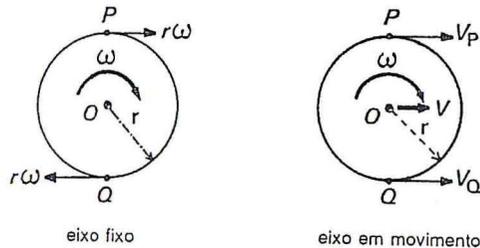
Mas ds/dt é equivalente à velocidade tangencial (ou linear) de P , que designaremos por V_p , enquanto

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega$$

pelo que

$$V_p = r\omega \quad (1)$$

Examinemos agora as velocidades de diferentes pontos da periferia de uma roda de raio r cujo eixo se desloca da esquerda para a direita com uma velocidade linear V , ao mesmo tempo que efectua uma rotação de velocidade angular ω no sentido horário.



Se o eixo fosse fixo e P fosse um ponto situado no topo da roda, a sua velocidade tangencial seria $r\omega$ no sentido da esquerda para a direita. Mas, como o eixo se move na mesma direcção com velocidade V , a verdadeira velocidade de P , V_p , é a componente da velocidade do eixo com a velocidade de P em relação ao eixo:

$$V_p = V + r\omega \text{ da esquerda para a direita} \quad (2)$$

De forma análoga, a velocidade do ponto Q , situado na parte mais baixa da roda, será a composição ou soma da velocidade do eixo com a

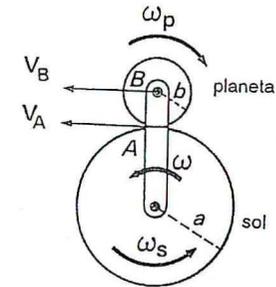
velocidade de Q relativamente ao eixo. Dado que a roda gira no sentido horário, Q move-se da direita para a esquerda em relação ao eixo, pelo que

$$V_Q = V - r\omega \text{ da esquerda para a direita} \quad (3)$$

De igual forma se podem obter as velocidades de outros pontos, mas, dado que as velocidades que se vão compor podem formar um ângulo, seria preciso recorrer à soma vectorial. Não sendo necessária para esta análise, não prosseguiremos com este assunto.

Estamos agora em condições de analisar o trem epicíclico básico.

Sejam ω_s , ω_p e ω as velocidades angulares da roda sol, da roda planeta e da barra radial OB , que determina a velocidade orbital do planeta em torno do sol. Sejam a e b , respectivamente, os raios das rodas sol e planeta e sejam V_A e V_B as velocidades de A , ponto de contacto de ambas as rodas, e de B , eixo do pinhão planeta.



Então, dado que OB gira em torno de O , com velocidade angular ω , e tendo em conta a equação (1),

$$V_B = OB \cdot \omega = (a + b)\omega \quad (4)$$

Como podemos considerar A um ponto do pinhão planeta que gira no sentido horário, com velocidade angular ω_p , deduz-se da igualdade (2) que a sua velocidade é dada por

$$V_A = V_B + b\omega_p \quad (5)$$

de onde resulta, usando (4),

$$V_A = (a + b)\omega + b\omega_p \quad (6)$$

Mas, por outro lado, A é um ponto da roda sol que gira em sentido anti-horário com velocidade angular ω_s e, aplicando novamente (1),

$$V_A = a\omega_s \quad (7)$$

Como as rodas engrenam sem deslizar, as suas velocidades são iguais. Então,

$$\begin{aligned} a\omega_s &= (a+b)\omega + b\omega_p \\ \Rightarrow a(\omega_s - \omega) &= b(\omega_p + \omega) \\ \Rightarrow \frac{\omega_p + \omega}{\omega_s - \omega} &= \frac{a}{b} \end{aligned}$$

Como o número de dentes das rodas de uma engrenagem é proporcional ao seu raio,

$$\frac{\omega_p + \omega}{\omega_s - \omega} = \frac{t_s}{t_p}$$

onde t_s e t_p são os números de dentes das rodas sol e planeta, respectivamente.

Assinalemos também que, ainda que esta relação tenha sido deduzida, medindo em radianos por segundo as velocidades angulares, podemos medi-las na unidade que mais nos convenha (voltas por minuto, por exemplo), que os resultados obtidos são ainda válidos.

A título de exemplo, examinemos o sistema em que o sol tem 24 dentes e o planeta 12. Há três casos a considerar.

Caso 1

A barra OB é fixa, de modo que o planeta não gira em torno do sol. Neste caso $\omega = 0$ e teremos

$$\frac{\omega_p + 0}{\omega_s - 0} = \frac{24}{12} \Rightarrow \omega_p = 2\omega_s$$

resultado que já conhecíamos, pois, quando OB é fixo, as rodas comportam-se como engrenagens normais.

Caso 2

A roda sol não gira. Então $\omega_s = 0$ e

$$\frac{\omega_p + \omega}{0 - \omega} = 2 \Rightarrow \omega_p = -3\omega$$

Neste caso, o sinal negativo indica que a roda planeta está a girar em sentido horário, oposto, portanto, ao da seta do desenho e no mesmo sentido em que OB está a girar.

Caso 3

A roda planeta não gira. Assim, $\omega_p = 0$ e

$$\frac{0 + \omega}{\omega_s - \omega} = 2 \Rightarrow \omega_s = \frac{3}{2}\omega$$

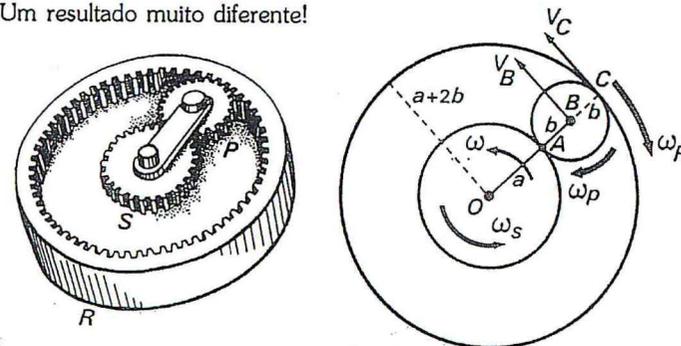
Estes dois últimos casos não são muito óbvios ou intuitivos, mas compreendem-se melhor fazendo rodar moedas de diferentes tamanhos em torno de uma moeda fixa. Melhor ainda é construir um modelo de engrenagens epicíclicas, utilizando um estojo de construções, e investigar directamente o que acontece ao fazê-lo girar. No caso da engrenagem descrita, se o sol girar a 600 rpm no sentido anti-horário e a barra radial girar a 400 rpm, também em sentido anti-horário, utilizando a fórmula para determinar a velocidade do planeta, teremos

$$\begin{aligned} \frac{\omega_p + 400}{600 - 400} &= \frac{24}{12} \\ \Rightarrow \omega_p + 400 &= 400 \\ \Rightarrow \omega_p &= 0 \end{aligned}$$

Um resultado interessante e talvez surpreendente. Significa que o pinhão planeta, ainda que girando em torno do sol, não muda de direcção. Por outro lado, se se fizesse girar a barra OB a 400 rpm, em sentido horário, ter-se-ia $\omega = -400$, o que daria

$$\frac{\omega_p + 400}{600 - 400} = 2 \Rightarrow \omega_p = 2400$$

Um resultado muito diferente!



Nas aplicações práticas das engrenagens epicíclicas, o pinhão planeta P engrena numa coroa R , dentada no interior, e o que se utiliza são as velocidades relativas do pinhão sol, da barra giratória e da coroa ou anel R . Mas que relação há entre elas? Podemos resolver esta importantíssima relação da cinemática aplicando a mesma técnica que usámos no trem epicíclico simples.

Sejam a e b , respectivamente, os raios do sol e do planeta. Então, a coroa exterior terá um raio $a + 2b$. Sejam ω_S , ω_P e ω_R as velocidades angulares do sol, do planeta e da coroa, que, suponhamos, têm o sentido indicado no diagrama. Finalmente, seja ω a velocidade angular da barra OB encarregada de guiar o planeta.

O ponto C , de contacto entre a coroa e o planeta, tanto pode ser considerado ponto do planeta, como ponto da coroa. Seja V_C a sua velocidade tangencial; então:

$$\text{Considerado como ponto da coroa, } V_C = -(a + 2b)\omega_R \quad (8)$$

$$\text{Considerado como ponto do planeta, } V_C = V_B - b\omega_P$$

$$\Rightarrow V_C = (a + b)\omega - b\omega_P \quad (9)$$

$$\text{De (8) e (9), } -(a + 2b)\omega_R = (a + b)\omega - b\omega_P \quad (10)$$

Exprimindo $(a + b)$ como $(a + 2b) - b$, para pôr em evidência os raios da coroa e do planeta, a igualdade anterior pode tomar a forma

$$(\omega_R + \omega)(a + 2b) = (\omega_P + \omega)b$$

que conduz a

$$\frac{\omega_R + \omega}{\omega_P + \omega} = \frac{b}{a + 2b}$$

Mas o número de dentes do planeta, t_P , e o número de dentes da coroa dentada, t_R , são proporcionais aos raios respectivos, pelo que podemos escrever

$$\frac{\omega_R + \omega}{\omega_P + \omega} = \frac{t_P}{t_R}$$

Além disso, pela análise anterior, sabemos que

$$\frac{\omega_P + \omega}{\omega_S - \omega} = \frac{t_S}{t_P}$$

Então,

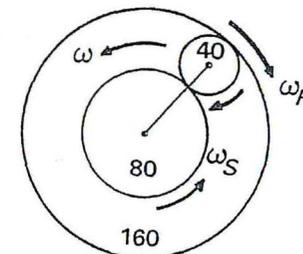
$$\frac{\omega_R + \omega}{\omega_P + \omega} = \frac{\omega_P + \omega}{\omega_S - \omega} = \frac{t_P}{t_R} = \frac{t_S}{t_P}$$

obtendo-se:

$$\frac{\omega_R + \omega}{\omega_S - \omega} = \frac{t_S}{t_R}$$

que é essencialmente igual à que diz respeito às rodas sol e planeta, mas substituindo agora o planeta pela coroa. De facto, uma mesma fórmula básica é aplicável a todos os trens de engrenagem epicíclicos.

Examinemos como se utiliza a última fórmula na análise de um trem de engrenagens cujo sol tenha 80 dentes, o planeta 40 e a coroa exterior 160. Neste trem



$$\frac{\omega_R + \omega}{\omega_S - \omega} = \frac{80}{160} = \frac{1}{2}$$

Suponhamos que se faz girar a roda sol a 2400 rpm e que a coroa exterior é fixa, pelo que $\omega_R = 0$. Então,

$$\frac{0 + \omega}{2400 - 0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega = 800 \text{ rpm}$$

Assim, o braço gira no sentido anti-horário com uma velocidade angular que é 1/3 da velocidade de entrada. Por outro lado, se, em vez de ser fixa a coroa, fosse o braço, ter-se-ia $\omega = 0$ e

$$\frac{\omega_R + 0}{2400 - 0} = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_R = 1200 \text{ rpm}$$

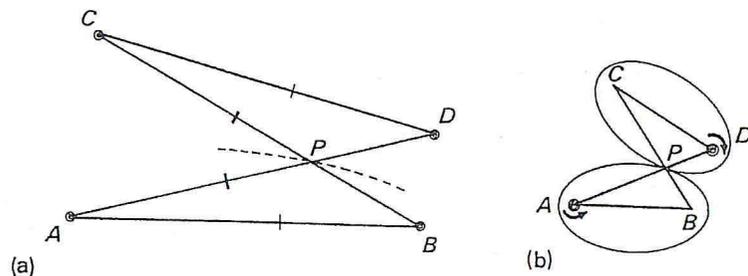
A coroa exterior giraria então a 1/2 da velocidade de entrada. Finalmente, suponhamos que o sol está fixo e que fazemos girar o braço a 2400 rpm. Que sucederá à coroa exterior?

$$\frac{\omega_R + 2400}{0 - 2400} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \omega_R + 2400 = -1200 \Rightarrow \omega_R = -3600 \text{rpm}$$

Assim, a coroa exterior gira no sentido anti-horário, com uma velocidade 1,5 vezes maior do que a do braço radial.

* Rotação com variantes



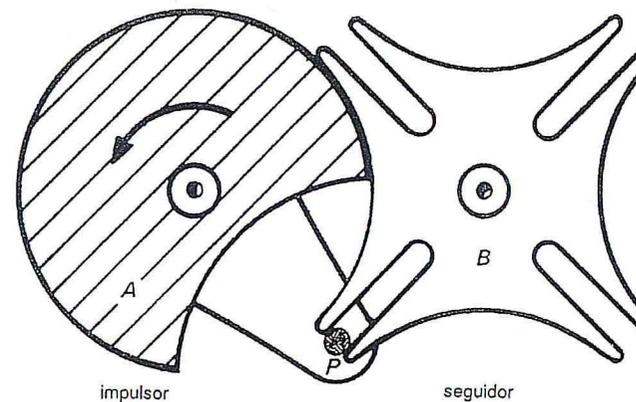
Todos os trens de engrenagens estudados até aqui tinham a função de converter uma velocidade de entrada constante numa velocidade de saída constante, mas também se inventaram mecanismos destinados a produzir factores de transmissão variáveis. Examinaremos de seguida dois exemplos deste tipo.

Consideremos o quadrilátero articulado da figura acima. Suponhamos que $AB = CD$ e $BC = AD$; então, ao deformarmos o quadrilátero, ter-se-á sempre $AP + PD = \text{constante}$, sendo P o ponto de intersecção de AD e BC . Vê-se facilmente que assim acontece devido à simetria da figura, o que garante que $BP = PD$ e, em consequência, $AP + BP = AP + PD = AD$, que é um comprimento fixo. Mantenhamos fixa a barra AB ; ao deformarmos o quadrilátero articulado, P descreverá uma elipse com focos em A e B . Analogamente, se fixarmos antes a barra CD , P descreverá uma elipse com focos em C e D . Imaginemos agora duas rodas dentadas elípticas, de tamanhos iguais às elipses descritas por P , fixadas, respectivamente, às barras AB e CD do trapézio articulado. Suponhamos que a roda elíptica fixada a AB é accionada por um eixo ligado ao foco A e que a roda elíptica

correspondente a CD está ligada a um eixo pelo seu foco D . Façamos girar os pinhões elípticos: o trapézio articulado assegura que as duas elipses se mantenham sempre em contacto, com tangente comum em P .

Na posição mostrada, se a elipse AB for a impulsora, o seu raio efectivo AP é maior que o raio da seguidora, cujo raio efectivo é DP . Contudo, a razão entre estes raios varia continuamente, no decurso de uma volta, entre os valores $e/(1 - e)$ e $(1 - e)/e$ (sendo e a excentricidade das elipses). Consegue-se, assim, uma velocidade de saída continuamente variável, a partir de uma velocidade de entrada constante. Este sistema de engrenagens permite obter movimentos de alimentação lenta e retorno rápido, úteis em muitas máquinas.

O mecanismo de Genebra proporciona uma saída intermitente a partir de uma entrada de velocidade constante. Utiliza-se em câmaras e projectores de cinema, aparelhos em que é preciso manter o fotograma imóvel em frente da lente, enquanto está a ser projectado, para depois passar rapidamente ao fotograma seguinte.



Na posição que podemos observar na figura, a espiga P , do braço ligado à roda impulsora, está prestes a entrar numa das guias da cruz de Malta, peça que constitui a seguidora. Ao girar, desde a posição que vemos, a roda impulsora provoca na seguidora uma rotação de 90° em sentido horário. Isto só é possível graças à porção recortada no disco A , que permite a passagem das guias de B engrenadas na espiga P . Depois de a cruz rodar 90° , a espiga P sai da guia em que estava engrenada e o disco A encaixa numa das porções curvas da cruz, impedindo que esta gire. O resultado é que, por cada volta de A , a cruz de Malta fica bloqueada durante $3/4$ de volta e depois avança rapidamente 90° durante o quarto de volta seguinte.

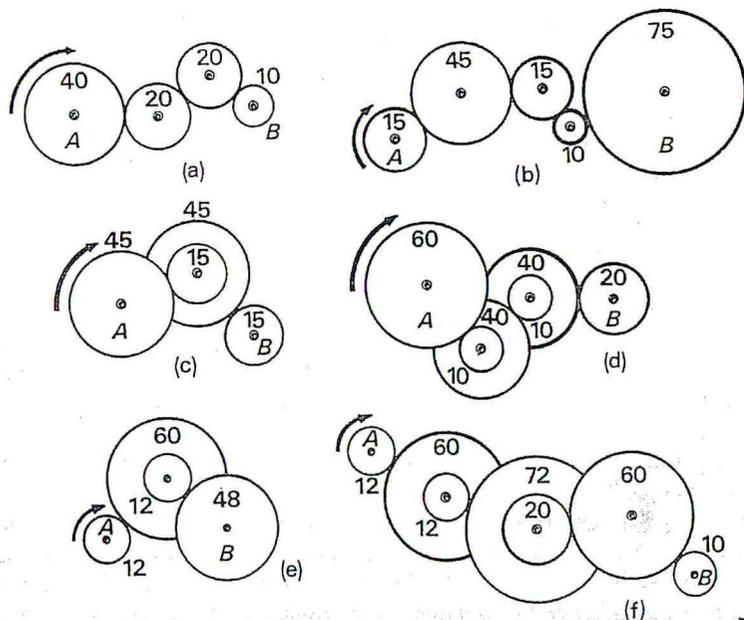
Actividades práticas

Se dispuser das ferramentas adequadas, construa modelos, quer das engrenagens elípticas, quer do mecanismo de Genebra. Pode construí-los de madeira compensada e, preferivelmente, num tamanho razoável. As engrenagens podem ser consideradas como cilindros e, para evitar que deslizem uma sobre a outra, aconselho que lhes cole lixa grossa ou tiras de borracha ou espuma adesiva, como se usa nas janelas para evitar correntes de ar.

Construir modelos é uma actividade muito gratificante e vê-los a girar é a melhor maneira de compreender o seu funcionamento. O meu modelo do mecanismo de Genebra nunca deixa de fascinar grandes e pequenos. As rodas do tipo *Spirograph* não têm abertura central e, por isso, não podem ser usadas como rodas de engrenagem, em sentido usual, mas podem servir para aprofundar a compreensão dos sistemas de mudança de velocidade internos e os sistemas de engrenagens epicíclicos.

Exercício 2

- 1 A figura mostra diversos trens de engrenagens. Os números referem-se aos dentes das rodas em que estão inscritos. Determine o factor de transmissão $t(A/B)$ correspondente a cada caso.



- 2 Os jogos de construções *Fischertechnik* contêm rodas de 10, 20, 30 e 40 dentes. Explique como deve utilizá-las para conseguir trens de engrenagens com os seguintes factores de transmissão:

- (a) -4 (b) +6 (c) +8 (d) -8 (e) +3 (f) +24
(g) -1/2 (h) -3/2 (i) -1/12 (j) +3/4

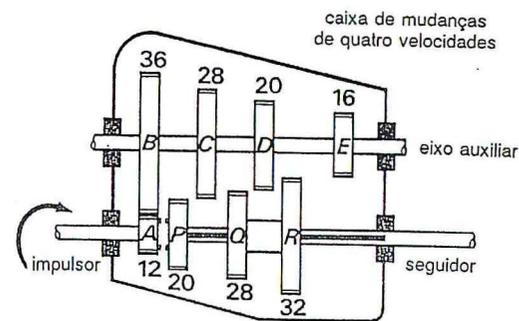
- 3 Determine os factores de transmissão correspondentes à caixa de mudanças descrita na p. ??, partindo da hipótese de que as rodas dentadas têm os seguintes números de dentes:

A, 24; B, 40; C, 56; D, 48; E, 32; F, 16; G, 12; H, 12

Que valores passariam a ter os ditos factores se A tivesse 27 dentes e D 45?

Projecte uma caixa de mudanças em que a velocidade de maior desenvolvimento não seja de transmissão directa.

- 4 Na figura em baixo pode ver-se uma caixa de mudanças de quatro velocidades. A roda A do eixo motriz está sempre engrenada com a roda B do eixo auxiliar, sobre o qual estão montadas, rigidamente, as rodas C, D e E. As rodas P, Q e R giram solidariamente com o eixo de saída, eixo este que tem um sulco longitudinal, ao longo do qual aquelas rodas se podem deslocar, permitindo o seu engrenamento com diferentes rodas do eixo secundário.

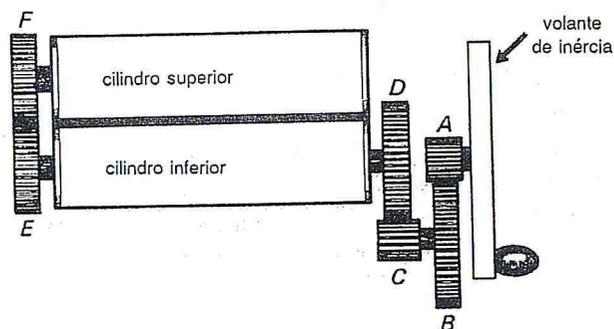


As rodas Q e R estão ligadas rigidamente, pelo que não podem ser deslocadas individualmente. No desenho, a caixa de velocidades está em ponto morto. A primeira velocidade consegue-se deslocando R para a direita até engrenar com E; a segunda velocidade obtém-se deslocando Q para a direita até engrenar com D; a terceira velocidade consegue-se

deslocando *P* para a direita até engrenar com *C*; a quarta velocidade obtém-se deslocando *P* para a esquerda até engrenar com *A*, conseguindo-se, assim, uma transmissão directa.

Determine o factor de transmissão correspondente a cada velocidade e a velocidade angular do eixo seguidor quando o impulsor gira a 4000 rpm.

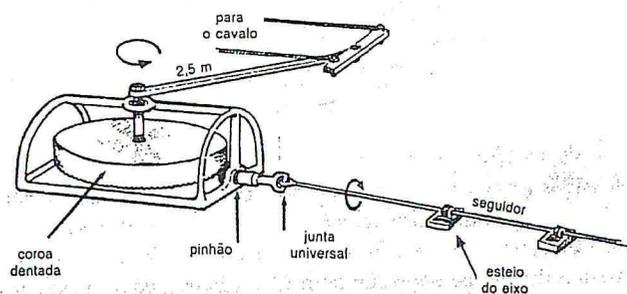
- 5 Na figura em baixo pode ver-se um sistema de engrenagens muito usado nas velhas máquinas de lavar para espremer a roupa. O volante, movido à mão, arrasta o cilindro inferior por meio de um trem de quatro rodas dentadas: *A* e *C*, com 12 dentes, *B* e *D*, com 32.



O cilindro superior está sincronizado para girar à mesma velocidade que o inferior, mas em sentido contrário. Isto consegue-se por meio das rodas *E* e *F*, ambas com 16 dentes.

Determine o factor de transmissão do volante para: a) o cilindro inferior; b) o cilindro superior.

- 6 O cavalo constituiu, no passado, a principal força motriz para muitas tarefas. O mecanismo que se vê na figura foi inventado com o objectivo

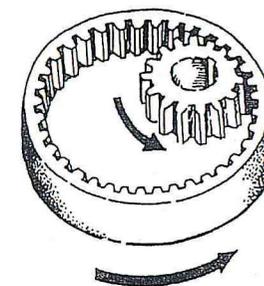


de utilizar a força do cavalo para accionar maquinaria pesada que exigisse uma entrada rotativa. O cavalo era obrigado a andar em círculo, com uns 2,5 m de raio, arrastando uma haste solidária com uma grande coroa dentada de 72 dentes. Esta coroa engrenava num pinhão de 12 dentes, ligado, por uma transmissão universal — *cardan*⁴ —, a um grande eixo de trabalho que fazia girar a peça de maquinaria desejada.

Se o cavalo marchar a um passo regular de 2 m/s^{-1} , a que velocidade rodará o seguidor?

(NB — O cavalo tem de saltar por cima do seguidor em cada volta ao circuito.)

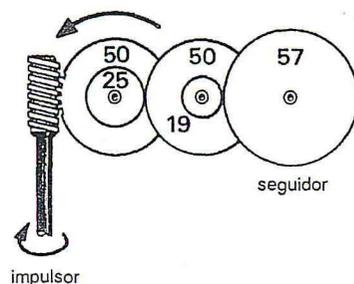
- 7 Uma modificação das engrenagens cilíndricas rectas consiste em fazer que o pinhão engrene com os dentes do interior de uma coroa, como pode ver-se à direita, formando uma *engrenagem interior*. Tal como no caso das engrenagens cilíndricas normais, a razão depende do número de dentes, mas, aqui, a coroa e o pinhão giram no mesmo sentido. Este é o tipo de engrenagens que normalmente encontramos nas máquinas de cortar relva, em que são as coroas as rodas motrizes ou impulsoras, enquanto o pinhão, ligado ao eixo das lâminas, é o seguidor. Numa marca muito conhecida, a coroa tem 65 dentes e o pinhão 13. Há 5 lâminas de corte no rotor e as rodas motrizes têm um diâmetro de 19 cm.



Quantas lâminas giratórias passam em frente da lâmina fixa por cada volta das rodas motrizes? Quanto avança o corta-relvas entre a passagem de um lâmina móvel e da seguinte em frente da lâmina fixa?

- 8 Ao projectar trens de engrenagens para um qualquer fim, é costume utilizarem-se rodas de tamanhos fixos, normalizados. Quanto menor for o número de rodas utilizadas, melhor é o rendimento. Projecte um trem de engrenagens com factor de transmissão + 315, supondo que dispõe de rodas de 12 a 88 dentes, com diferença de 4 dentes entre elas.
- 9 O trem de engrenagens que vemos a seguir pode ser construído com peças dos estojos *Meccano*. Permite reduzir consideravelmente a veloci-

⁴ O *cardan* é uma articulação que permite movimentos em todos os sentidos; daí o ser designado por transmissão universal. (N. da T.)



dade de rotação do impulsor e fazer que a rotação do eixo de saída forme um ângulo de 90° com aquela.

Supondo que o impulsor é accionado a 3000 rpm por um motor eléctrico, qual será a velocidade de rotação do eixo seguidor?

- 10 Os estojos *Lego Technic* contêm uma boa selecção de rodas dentadas, entre elas pinhões rectos de 8, 16, 24 e 40 dentes, assim como parafusos sem-fim.

Explique como os utilizaria para conseguir: a) um factor de transmissão de +60 entre eixos paralelos; b) uma razão de redução, entre eixos perpendiculares, de 1:240.

- 11 Projecte uma caixa de mudanças de cinco velocidades, de forma que os factores de transmissão variem entre $+1/8$ e $+1$.

12 Analise:

- As engrenagens de um carretel para cana de pesca;
 - O mecanismo de uma campainha de bicicleta;
 - Os trens de engrenagens de um relógio despertador;
 - As engrenagens de um batedor de claras;
 - As engrenagens de um berbequim manual;
 - As engrenagens de um berbequim eléctrico;
 - As engrenagens de um tomo;
 - As engrenagens de um cabrestante (muito usado nos barcos de pesca);
 - As engrenagens de um antigo espremedor de roupa;
 - As engrenagens de um moinho;
 - As engrenagens que governam o velocímetro de uma bicicleta ou de uma mota;
- * f) As engrenagens de cubo de certas bicicletas;
m) As engrenagens de uma máquina de cortar relva;

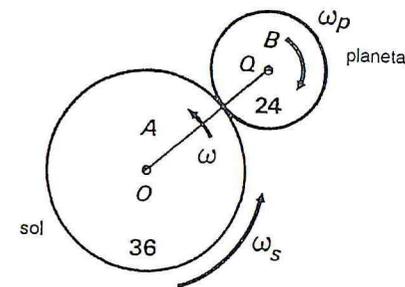
- As engrenagens de uma caixa de música;
- As engrenagens de um mecanismo de um brinquedo de corda ou de fricção.

- 13 Os brinquedos impulsionados por motores eléctricos costumam ter factores de transmissão muito pequenos, uma vez que a velocidade do motor é normalmente muito superior à que é necessária no eixo de trabalho. Veja o que consegue descobrir.

- 14 Por que razão os condutores de cilindros de compressão de vapor ou de máquinas de tracção similares têm de dar muitas voltas ao volante para poderem voltar em curvas apertadas? Examine o mecanismo de direcção de tais máquinas, se tiver oportunidade de ver essas velharias.

- 15 Investigue as engrenagens utilizadas no mecanismo tensor das redes de ténis. Que porção de cabo é recolhido por cada volta da manivela?

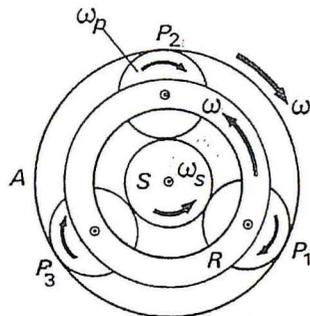
- *16 Um trem epicíclico simples é constituído por um sol de 36 dentes e um planeta de 24. Determine a velocidade de rotação do planeta quando a roda central é accionada a 3000 rpm e a) o raio OQ é estacionário e b) o raio OQ gira a 1000 rpm.



- *17 Um trem epicíclico é constituído por um sol de 40 dentes, rodeado por três planetas, P_1 , P_2 e P_3 , todos eles com 40 dentes, ligados entre si por um anel, R . Exteriormente aos planetas existe ainda uma coroa anelar, A , de 120 dentes.

- Determine a velocidade de rotação de A , 1) no caso em que S gira a 600 rpm e R é estacionário; 2) quando R gira a 600 rpm e S é estacionário.
- Qual a velocidade de rotação de R quando $\omega_p = 0$ e S gira a 600 rpm?

- c) A que velocidade gira S quando R roda a 600 rpm e A gira a 200 rpm?



- *18 O sol de um trem de engrenagens epicíclico tem 12 dentes; a coroa anelar exterior, C , é fixa. Quantos dentes devem ter o planeta B e a coroa exterior C , sabendo que A deve girar 12 vezes mais rapidamente que o braço AB ligado ao planeta?

- *19 No trem epicíclico mostrado na figura, o planeta B tem k vezes mais dentes do que o sol A .

Demonstre que as velocidades angulares do sol, do braço que o liga ao planeta e da engrenagem anelar C verificam a relação:

$$\frac{\omega_C + \omega}{\omega_A + \omega} = \frac{1}{1 + 2k}$$

Demonstre, em consequência, que:

- a) Quando o braço está fixo,

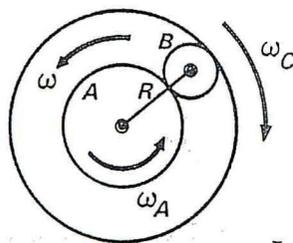
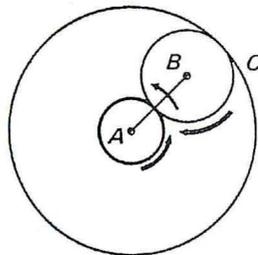
$$\omega_A = (1 + 2k)\omega_C$$

- b) Quando a coroa exterior está fixa,

$$\omega_A = (2 + 2k)\omega$$

- c) Quando a roda sol está fixa,

$$\omega_C = \frac{-(2 + 2k)\omega}{1 + 2k}$$



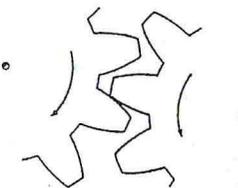
- *20 Utilize a fórmula estabelecida na questão 17 para investigar os factores de transmissão de que se dispõe com um trem de engrenagens epicíclico, nos casos em que

$$k = 1, k = 2, k = 1/2$$

Porque há, em cada caso, 6 possíveis factores de transmissão a partir de um só mecanismo?

Qual a gama de factores de transmissão entre o braço giratório e a coroa exterior?

- *21 A forma curva de um dente de engrenagem é talhada seguindo uma das chamadas *curvas envolventes* (ver figura). O que são curvas envolventes e porque são utilizadas?



- *22 Quando um carro faz uma curva, as rodas que ficam do lado exterior, relativamente à curva, fazem um percurso maior do que as rodas interiores. Por isso, as rodas não podem ser solidárias com um mesmo eixo; as rodas motrizes são accionadas individualmente por intermédio de um mecanismo especial conhecido por *diferencial*.

Investigue o funcionamento e as aplicações das engrenagens diferenciais.

- 23 É frequente a transmissão do movimento de rotação, entre eixos que formam um ângulo, efectuar-se por meio de *juntas universais*. Investigue os seguintes mecanismos:

- Juntas flexíveis;
- Junta universal de Hooke⁵;
- Junta universal de bola e encaixe;
- Juntas homocinéticas ou de velocidade constante.

Descubra onde são usadas e as suas limitações.

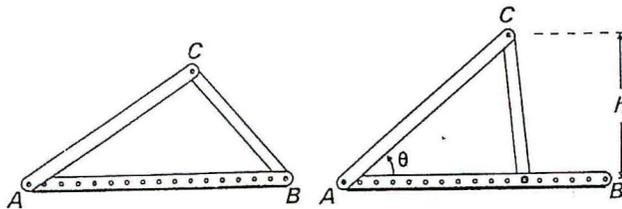
⁵ Em Portugal é conhecida por *cardan*. (N. do T.)

3 Inclinar, balançar e girar

O triângulo de base variável

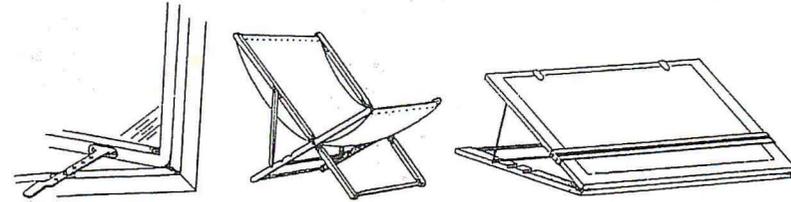
A propriedade fundamental do triângulo é a sua rigidez, propriedade de que se tira partido, repetidas vezes, para a construção de estruturas estáticas, como a armação de madeira dos telhados. Grande parte da geometria e da trigonometria tradicionais ocupa-se das propriedades dos triângulos e das relações entre os seus lados e os seus ângulos, mas sempre de um ponto de vista estático.

Contudo, qualquer indivíduo atento terá notado que os projectistas e engenheiros também utilizam, com muita frequência, estruturas triangulares em que um dos lados pode variar de comprimento. Na figura abaixo, o triângulo ABC é formado por três barras articuladas, de forma a poder variar o comprimento de AB . Um dos efeitos da variação de comprimento de AB é a modificação dos ângulos, como θ ; outro efeito é fazer variar a distância, h , entre o ponto C e a barra AB .



Em quase todas as casas existem exemplos de tal mecanismo. Um deles usa-se para manter as janelas mais ou menos abertas. A barra que mantém a janela aberta tem vários furos, permitindo fixá-la em diferentes posições a um espigão fixo na moldura da janela. Um mecanismo muito parecido

permite ajustar o ângulo de inclinação do tampo de um estirador ou graduar a abertura das janelas das estufas. Quando se deitar numa espreguiçadeira, observe bem o sistema que permite ajustá-la em diferentes posições.

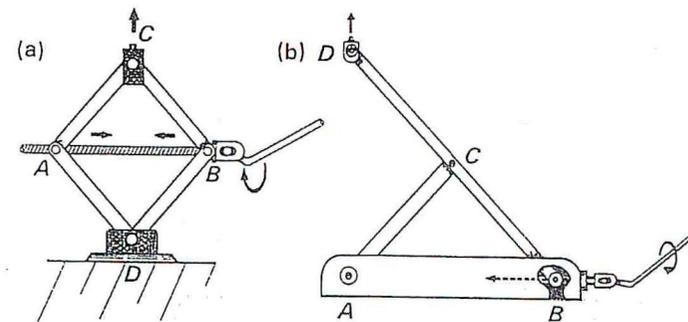


Nestes exemplos, o comprimento do lado variável do triângulo não varia continuamente, mas antes a passos discretos, habitualmente iguais. Como variará o ângulo de abertura da janela ou o ângulo de elevação do tampo do estirador? A cada acréscimo igual no comprimento do lado variável do triângulo corresponderão variações iguais na amplitude dos ângulos?

Antes de prosseguirmos convém agora fazer algumas experiências com barras do tipo *Meccano* ou tiras de cartão articuladas e tachas para papel, para investigar a dependência entre a variação do comprimento de um lado e as variações das amplitudes dos ângulos de um triângulo. Como é óbvio, a questão admite um estudo teórico, por exemplo, por meio do teorema do co-seno, mas estou convencido de que não se consegue uma compreensão do mecanismo sem que se tenha construído um modelo e visto, na prática, como variam os ângulos em função das variações do comprimento de AB .

Que influência tem a razão entre os comprimentos fixos de AC e AB ?

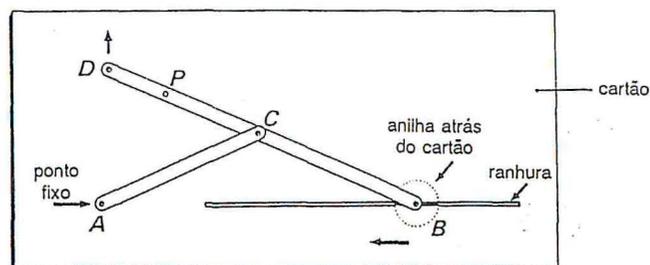
Nos exemplos deste mecanismo até agora examinados, o comprimento de AB varia por etapas; noutras aplicações, o comprimento de AB varia continuamente por meio de um grande parafuso. Assim acontece nos dois



modelos de macacos para automóveis que podemos ver na figura. Ainda que possam parecer bastante diferentes, funcionam exactamente do mesmo modo. O macaco (a) pode ser considerado um quadrilátero articulado, de forma rômbrica, cuja diagonal AB é um parafuso, em forma de rosca, que, quando obrigado a rodar, faz variar o comprimento de AB . Por serem isósceles os dois triângulos resultantes, ABC e ABD , C e D encontram-se sempre sobre a mediatriz de AB . Ao utilizar este mecanismo, o que interessa é a variação de CD provocada pela variação de AB , não importando a variação dos ângulos dos triângulos. Será bastante instrutivo construir um sistema rômbrico articulado, fazer várias medições e reunir suficientes dados para traçar um gráfico que traduza a dependência de CD em relação a AB . Melhor ainda é fazer experiências com um macaco autêntico; o gráfico poderia então mostrar a variação da altura de C em função do número de voltas do parafuso AB .

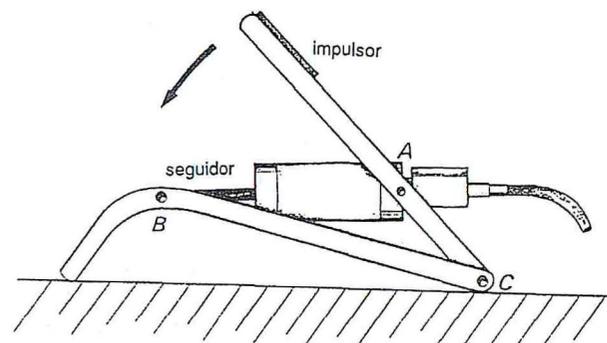
A princípio, o macaco sobe com bastante rapidez, mas a taxa de subida vai diminuindo à medida que sobe cada vez mais. Esta característica é muito útil, pois implica que o macaco vá diminuindo a sua progressão à medida que aumenta a carga.

Pode construir um modelo simples de macaco, (b), usando barras tipo *Meccano* ou simples tiras de cartão montadas sobre um cartão de suporte. No caso do macaco, $AC = BC = DC$, o que garante que o deslocamento de D se faz segundo uma recta perpendicular a AB . Por causa desta propriedade, obviamente importante, o sistema denomina-se *montagem linear de Scott-Russel* (ou *montagem isósceles*). Para ver o que acontece quando os comprimentos não são iguais, tracemos a trajectória de um ponto intermédio, como P , e prolonguemos o comprimento de DC para ver o que se passa com D quando $DC > BC$. Os bons alunos de um bacharelato em Ciências deveriam ser capazes de demonstrar que, quando $DC = BC$, a trajectória de P é parte de uma elipse.



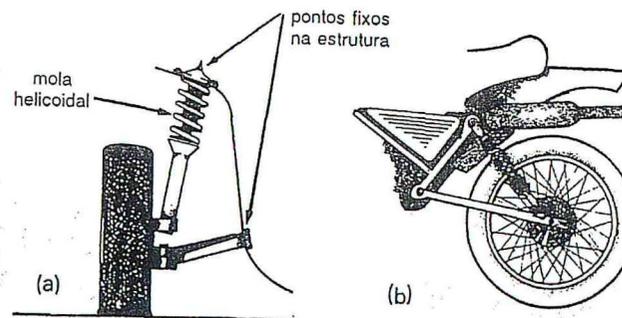
O macaco móvel, montado sobre rodas, tão corrente nas oficinas de reparação de automóveis, é deste tipo. Também o podemos ver, montado em posição invertida, no mecanismo de estabilização das caravanas-reboques.

Na maioria dos mecanismos, o triângulo de base variável possui um grau de liberdade, o que significa que, conhecido o movimento de uma parte qualquer do mecanismo, fica completamente determinado o movimento de todas as outras. E, tal como se passa noutros mecanismos, os papéis de *impulsor* e *seguidor* são desempenhados por peças diferentes. Nos exemplos até agora examinados, a entrada tem consistido em mudar o comprimento de AB ; a saída, também uma mudança, tem variado: do ângulo C , no caso da janela, do ângulo A , no caso do tempo do estirador, da distância entre C e AB , no caso dos macacos de automóveis.



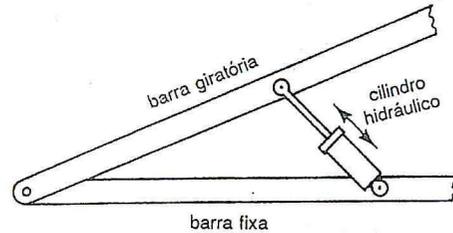
Contudo, no caso das bombas de pedal de encher pneus, o impulsor é a alavanca AC , que se pisa para reduzir o ângulo C e obrigar o êmbolo a avançar para o interior do cilindro.

A suspensão independente das rodas de automóvel, bem como a das rodas traseiras das motas, incorporam este mecanismo, cujo lado variável tem como ingrediente principal uma mola helicoidal.

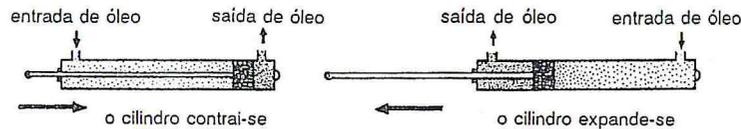


Cilindros hidráulicos

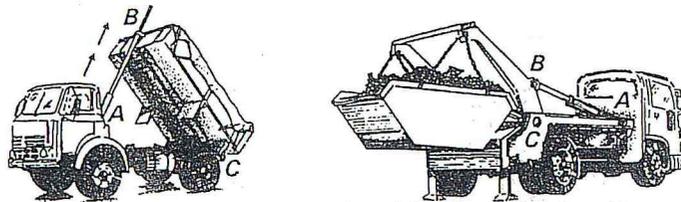
A introdução de cilindros hidráulicos provocou, nos últimos trinta anos, uma autêntica revolução no desenho de muitas máquinas. O cilindro hidráulico, que actua como lado de comprimento variável num triângulo articulado, consiste num êmbolo que se desloca para a frente ou para trás,



dentro de um cilindro cheio de óleo. Utiliza-se a força de um motor para bombear o óleo de um lado para o outro do êmbolo, cujo deslocamento provoca o encurtamento ou o alongamento do cilindro e, com ele, a variação do ângulo entre AC e BC.

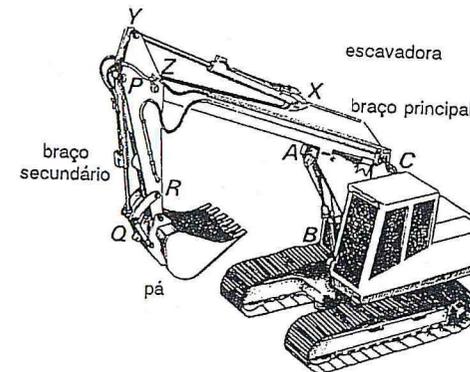


Uma das aplicações mais simples é o camião de caixa basculante, ou o de transporte de caçambas, nos quais se utilizam cilindros hidráulicos para fazer bascular a caixa ou para carregar e descarregar as caçambas. No caso do camião de caixa basculante, a caixa do camião tem de elevar-se uns 60° , mas, no transporte de caçambas, o braço elevador tem de descrever um ângulo de amplitude superior a 90° . Estas diferenças conseguem-se mediante cilindros hidráulicos telescópicos de diferentes comprimentos e variando também os comprimentos dos lados fixos do triângulo, ou seja, de AC e de BC.



A que se deve que o comprimento máximo de um accionador hidráulico seja sempre menor que o dobro do seu comprimento mínimo?

Em quase todas as obras importantes de construção ou engenharia civil, sejam novas estradas, diques, dragagem de canais ou construção de ali-cerces, é quase certo que encontraremos as modernas pás escavadoras, cujo braço, formado por vários segmentos articulados, nos faz pensar num braço humano de tamanho gigante. Estas peças de equipamento de engenharia foram inicialmente fabricadas por JCB, mas agora são construídas também por outras empresas, como a Komatsu, e demonstraram o seu grande valor em toda a espécie de escavação de trincheiras e de movimentos de terras.



Podemos ver, na escavadora da ilustração, três mecanismos do tipo triângulo de base variável, accionados todos eles por cilindros hidráulicos:

- ABC altera o ângulo do braço principal, fazendo-o girar num plano vertical em torno de C;
- XYZ altera o ângulo que o braço secundário forma com o braço principal, fazendo girar aquele em torno de Z;
- PQR altera o ângulo entre a pá e o braço secundário por meio de um quadrilátero articulado.

O operador da escavadora pode governar, independentemente, cada um destes mecanismos, o que permite à pá alcançar e escavar terra num leque de posições muito variadas. Uma vez conhecidas as dimensões dos lados fixos dos triângulos e os limites de expansão dos cilindros hidráulicos, podemos investigar toda a versatilidade da escavadora.

O mesmo mecanismo hidráulico é usado em muitos autómatos, assim como nos respiradouros automáticos das estufas para plantas. Neste último

caso é a pressão de um gás, encerrado no cilindro, que empurra o êmbolo quando a temperatura se eleva.

Os estojos de construções, como *Meccano*, *Fischertechnik* e *Legó*, facilitam a construção de modelos e a realização de experiências. A *Legó* dispõe mesmo de um equipamento que permite a simulação de mecanismos que utilizem cilindros pneumáticos. De qualquer forma, muita coisa se pode fazer com cartão e tachas para papel, sem necessidade de grandes gastos.

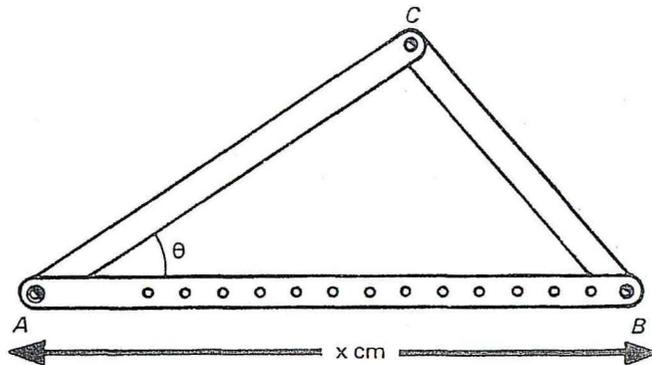
Os fabricantes de equipamento para trabalhos de engenharia civil anunciam os seus produtos em magníficos folhetos, bastante instrutivos, que constituem, tal como as revistas de engenharia, uma excelente fonte de aplicações.

Da próxima vez que vir trabalhar uma escavadora mecânica, uma grua ou um tractor, observe-os com atenção. Procure também visitar feiras e exposições.

Exercício 3

- 1 Construa um triângulo de base variável, seja com materiais sofisticados, seja com cartão e tachas para papel. Modifique x o comprimento do lado AB e meça o valor de θ correspondente a cada valor de x que haja considerado.

Construa o gráfico de θ em função de x .



Qual o valor mínimo de θ ? E o máximo?

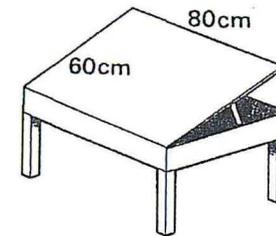
A variações iguais de x corresponderão variações iguais de θ ?

- 2 Num triângulo de base variável, $AC = 8$ cm, $CB = 6$ cm e AB pode tomar os valores 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm, 7 cm, 8 cm, 9 cm, 10 cm.

Quais são os correspondentes valores de θ ?

Quais são as correspondentes elevações de C sobre AB ?

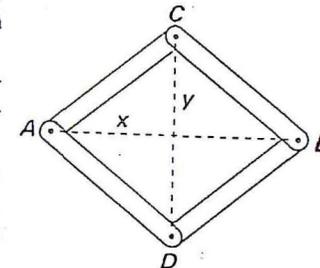
- 3 É preciso desenhar um mecanismo para fixar o tampo de uma secretária, formando ângulos de 15° , 30° , 45° e 60° com a horizontal. Proponha mecanismos para conseguir este objectivo, dando com detalhe todas as medidas necessárias.



- 4 Construa um sistema articulado rômbo ABCD e meça os comprimentos das diagonais x e y , correspondentes a distintas posições do sistema.

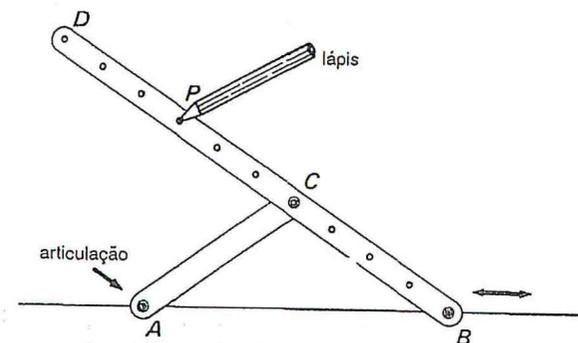
Represente graficamente y em função de x , num sistema de eixos cartesianos.

É capaz de explicar porque é o gráfico um arco de circunferência, quando se utilizam eixos igualmente graduados?



- 5 Questão idêntica a 4, usando agora um sistema articulado com a forma de um papagaio de papel. Construa um gráfico que mostre a relação entre os comprimentos das diagonais.

- 6 Construa um mecanismo com duas tiras de cartão AC e BD , de forma que $AC = BC$. Com uma tacha fixe o extremo A a uma prancheta onde já foi colocada uma folha de papel.



Desenhe no papel uma linha recta que passe por A e, deslocando ao longo desta o extremo B , trace a trajectória de distintos pontos P do braço DB .

A que se deve que a trajectória de C seja uma circunferência?

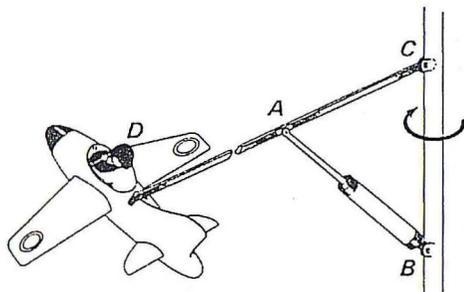
Faça que C complete a circunferência em torno de A , enquanto mantém B sobre a recta, de forma a obter as verdadeiras trajectórias de pontos como P .

- 7 Suponha que lhe pedem que construa uma tábua de engomar, de altura ajustável, cujas posições de trabalho sejam de 60 cm, 65 cm, 70 cm, 75 cm, 75 cm e 80 cm.

Supondo que as pernas têm todas 100 cm de comprimento, como poderia satisfazer o pedido?



- 8 Uma das atracções de uma feira é constituída por 8 pequenos aviões, ligados por um braço largo (como CD) a um eixo central giratório. O braço forma ângulos variáveis com o eixo central, por meio de um cilindro hidráulico. Enquanto o eixo gira, os pilotos dispõem de comandos para expandir ou contrair o cilindro hidráulico AB , fazendo, assim, que os seus aviões subam ou baixem, conforme a sua vontade.



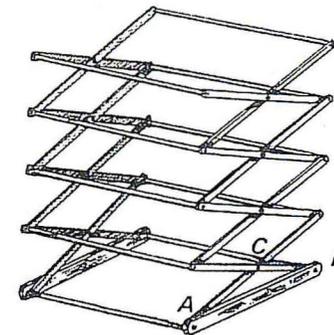
Sabendo que $CD = 4$ m, $CA = 1,5$ m e $BC = 1,5$ m e que AB pode variar entre 1,5 m e 2,5 m, determine a variação máxima do ângulo ACB por meio de um desenho à escala ou utilizando a trigonometria. Determine também a variação máxima da altura de um avião.

Que comprimento tem o braço hidráulico quando DC está na horizontal?

Se o engenho tiver sido projectado para que os aviões tenham uma velocidade de 11 m/s (cerca de 40 km/h), qual será a velocidade angular do eixo comum central em revoluções por minuto?

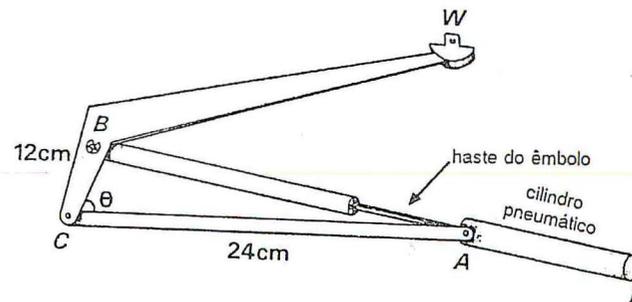
- 9 Um estendal de roupa tem a forma que vemos na figura; a armação de suporte lembra um braço articulado extensível. A altura total do secador e o espaço entre os varões para estender a roupa são determinados pelo triângulo de base variável ABC .

Encontre medidas verosímeis para os diferentes comprimentos da armação e as duas posições de B que permitem que os varões tenham uma separação vertical de 28 cm e de 36 cm.

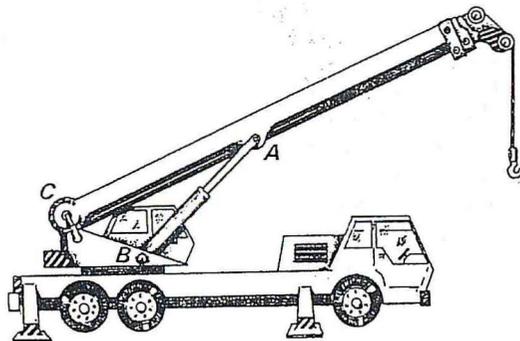


- 10 Um mecanismo de abertura automática de janelas tem a forma que vemos na figura. O braço AC está fixo à moldura da janela e W é solidário com a janela. Quando a temperatura aumenta, o aumento de pressão do gás, confinado no cilindro AD , empurra o êmbolo BA ao longo do cilindro, aumentando assim o ângulo θ . Sabendo que $AC = 24$ cm, $CB = 12$ cm e que o comprimento do cilindro pneumático AB pode variar desde 18 cm a 33 cm, determine a variação máxima do ângulo θ .

Sabendo, além disso, que $CW = 24$ cm, determine a distância entre as posições extremas de W .



- 11 Uma grande grua móvel, como a que vemos na figura, pode elevar a sua lança desde a horizontal até um ângulo de 80° , mediante um par de cilindros hidráulicos AB , situados um de cada lado da lança. Sabendo que o comprimento mínimo dos cilindros é de 2 m e que $AC = BC = 2$ m, qual o comprimento do cilindro quando em extensão máxima e que ângulo deve formar BC com a horizontal?

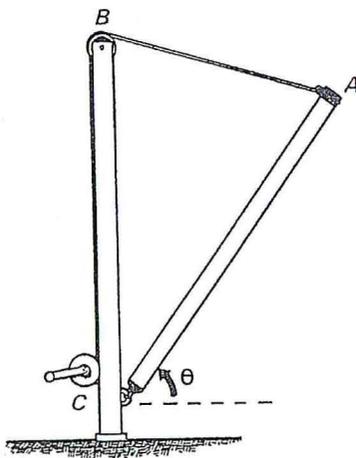


- 12 O guindaste CA de uma grua de barco eleva-se, fazendo-a girar em torno da sua extremidade C por meio de um sarilho de manivela que enrola o cabo AB à velocidade de 1 m cada 5 segundos. Se CA e CB têm 10 m de comprimento, quanto tempo demora a levantar a lança desde a horizontal até à vertical?

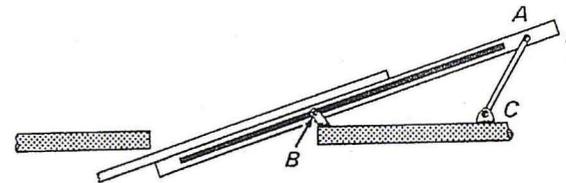
Trace um gráfico que mostre como varia θ , ângulo de elevação da lança, em função do tempo.

Como varia, com o tempo, a altura de A ?

(Pista: considere a variação do comprimento de AB a intervalos de 10 segundos.)



- 13 A escada de um sótão foi projectada de forma a descansar sobre o soalho do sótão quando não está a ser utilizada, mas também de forma a poder ser puxada através de um alçapão quando é necessário usá-la. Na figura podemos ver o mecanismo utilizado. $AC = 70$ cm, $BC = 75$ cm e $AD = 44$ cm. Os pontos B e C são fixos; a barra AC une a escada a C . Uma pequena roldana, situada em B , está encaixada num sulco que se desenvolve ao longo da escada, permitindo que esta rode e se desloque sobre ela.

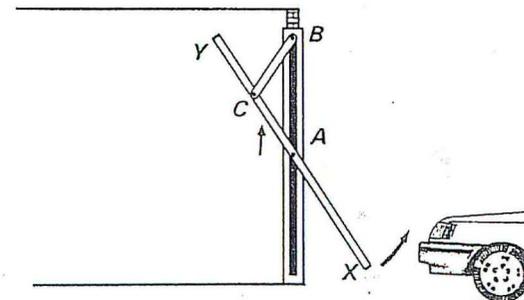


Qual a trajectória descrita pelo ponto A quando a escada é deslocada? A que distância (aproximada) se encontra D de B quando a escada repousa sobre o soalho?

Supondo que, quando a escada está a ser usada, $AB = 10$ cm, que ângulo forma a escada com a vertical? Podemos assumir que BC é horizontal. Supondo que cada secção da escada tem 2 m de comprimento e que, quando se utiliza, as duas secções se sobrepõem 26 cm, a que altura do solo fica B ?

Construa um modelo ou faça um desenho à escala para determinar a trajectória de D e, portanto, a altura do sótão necessária para que o sistema possa funcionar.

- 14 Uma porta basculante de garagem foi projectada conforme se vê na figura. Utiliza um mecanismo com um triângulo de base variável, ABC . A porta XY tem 2 m de altura e $AC = CY = BC = 0,5$ m.



Do lado de fora, a porta abre-se puxando X para fora e para cima, simultaneamente. Uma cavilha proeminente, A , pode deslizar por um canal vertical da ombreira da porta, enquanto C é forçado, pela barra BC , a girar em torno de B .

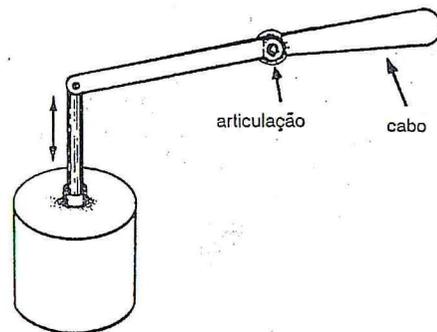
Quando a porta da garagem forma um ângulo de 30° com a horizontal, a que altura se encontrará X ? E Y ?

A que distância da porta deve o condutor parar o carro para poder abrir a porta?

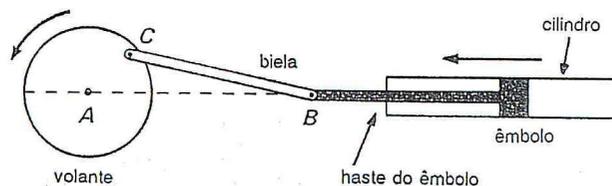
Qual a trajetória de Y ?

- 15 O mecanismo de descarga de um autoclismo, que funciona manipulando um cabo, baseia-se num triângulo em que um dos lados consiste num êmbolo que se desloca num cilindro.

Investigue a relação existente entre o ângulo de que há-de rodar o cabo e os comprimentos dos componentes do mecanismo, para que o deslocamento do êmbolo, no cilindro, seja o necessário.



- 16 A barra do êmbolo de uma máquina de vapor está ligada por uma biela BC a um volante que gira em torno de um eixo fixo que passa por A . Que relação existe entre a distância entre os dois pontos extremos (ou pontos mortos) do movimento do pistão e os comprimentos de AC e BC ?

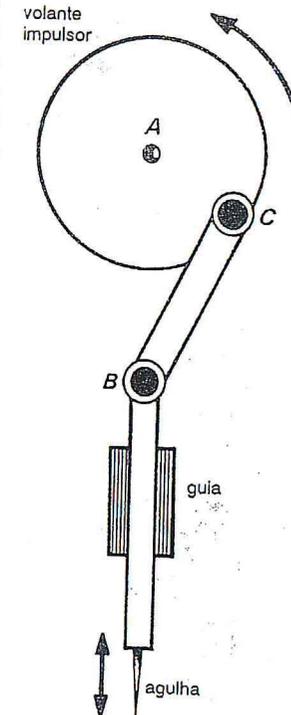


- 17 O movimento vertical de vaivém da agulha de uma máquina de costura assenta no mecanismo triangular de base variável. C efectua revoluções completas em torno de A , enquanto B é obrigado, por uma guia, a mover-se ao longo de uma linha recta.

Que influência têm os comprimentos de AC e BC na determinação do movimento da agulha?

Meça o deslocamento vertical total da agulha de uma máquina de costura e sugira para AC e BC comprimentos que produzam o mesmo efeito.

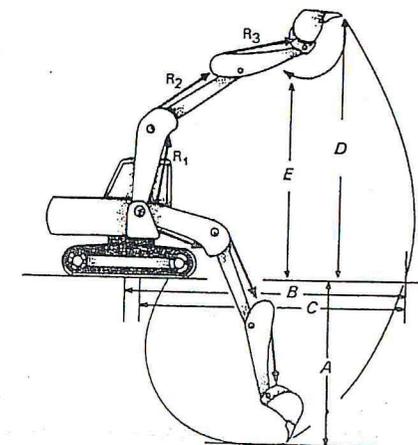
Que mecanismo adicional é necessário para imprimir à agulha, além do movimento vertical de vaivém, o movimento lateral necessário para cozer?



- 18 A figura seguinte mostra, com clareza, o campo de acção correspondente às especificações de uma escavadora JCB, na qual se utilizam como impulsores diversos cilindros hidráulicos, integrados em triângulos de base variável. As setas indicam as posições dos três cilindros que accionam os braços e a pá.

Considerando as diferentes configurações que podem tomar os braços e a pá, determine os comprimentos máximo e mínimo dos cilindros hidráulicos do mecanismo.

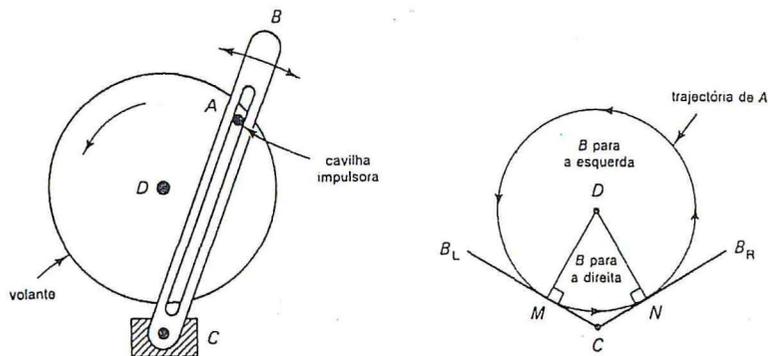
Como deveríamos manipular a pá e os braços para escavar uma trincheira horizontal com 1 m de profundidade?



Características da escavadora

A Profundidade de escavação	3,10 m
B Alcance máximo a partir do centro de rotação	4,75 m
C Alcance máximo a partir do centro de articulação	4,22 m
D Altura máxima de trabalho	3,60 m
E Altura máxima com a pá carregada	2,5 m
Oscilação total do braço	100°
Ângulo de rotação da pá	177°

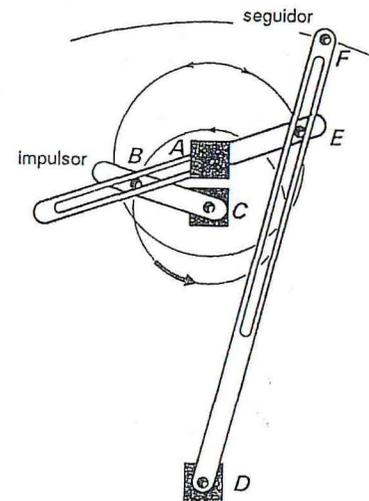
19 O mecanismo que vemos na figura, cujo nome técnico é «mecanismo de braço oscilatório», é accionado por um motor de velocidade constante que faz girar o volante em torno de um ponto fixo D . Uma cavilha A , solidária com o volante, está alojada numa ranhura da barra BC , a qual tem liberdade para rodar em torno do seu extremo fixo C . Quando o volante roda, a cavilha A imprime ao braço BC um movimento de vaivém especial tal que demora muito mais tempo no trajecto da direita para a esquerda do que na viagem de retorno. A explicação para este facto está ilustrada no diagrama da direita. Se o ângulo B_LCB_R for, por exemplo, de 120° (MDN medirá então 60°), B move-se da direita para a esquerda durante o tempo em que A se desloca desde N até M , girando 300° em torno de D . B move-se da esquerda para a direita durante o tempo em que A se desloca 60° entre M e N . Neste caso, o vaivém demoraria 5 vezes mais na viagem para a esquerda do que no retorno para a direita.



Este mecanismo é utilizado nas máquinas de marcenaria. O ponto B fica ligado a uma lâmina que trabalha num sentido, avançando lentamente, enquanto aplaina madeira, e retornando com rapidez.

- Atribua possíveis dimensões a CD e AD , quando B_LCB_R medir 120° .
- Determine a amplitude do ângulo B_LCB_R quando $CD = 20$ cm e $AD = 14$ cm. Determine também a relação aproximada entre os tempos de trabalho e de retorno;
- Sabendo que $CD = 20$ cm e que é preciso ajustar o comprimento de AD para obter uma relação de 8:1 entre o tempo de trabalho e o tempo de retorno, determine o comprimento de AD com três algarismos significativos;
- Que acontece se $AD > CD$?

20 O mecanismo que se vê na figura, instalado num banco de carpinteiro, é uma sofisticação do que vimos na questão precedente. É utilizado também para conseguir alimentação lenta e retorno rápido, mas, enquanto, no mecanismo anterior, a velocidade de trabalho oscilava entre amplas margens, esta combinação de dois triângulos de base variável, ABC e DEA , consegue impulsionar o seguidor DF a uma velocidade quase constante durante o ciclo de trabalho, quando BC é accionada a velocidade angular constante.

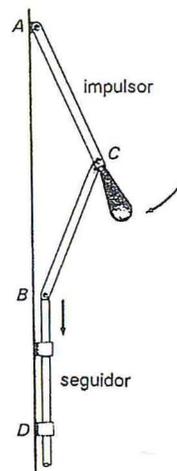


- Construa um modelo deste mecanismo usando tiras de cartão e tachas para papel. Neste caso é necessário colocar BC por cima de AE para permitir que BC efectue rotações completas.
- Averigüe qual a amplitude dos ângulos varridos por DF , no seu movimento da direita para a esquerda, que correspondem a mudanças iguais da amplitude do ângulo descrito por BC . Pode recorrer ao modelo construído ou a um desenho à escala. Pode considerar, por exemplo, as seguintes dimensões:

$AC = 5$ cm
 $BC = 8$ cm
 $AE = 10$ cm
 $CD = 25$ cm

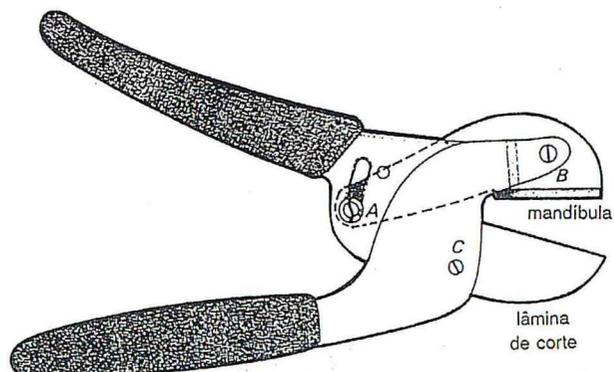
21 Industrialmente utilizam-se prensas de alavanca em forma de cotovelo para incrustar peças, com muita força, na posição requerida (por exemplo, rebites). O mecanismo da figura ilustra uma das formas de o conseguir. Quando os ângulos em A e B são muito pequenos, é preciso um grande deslocamento da articulação C da alavanca para produzir um deslocamento relativamente pequeno do seguidor BD . A força, ao longo de BD , é mais ou menos proporcional à razão das distâncias de que se deslocam C e BD , o que permite converter uma força pequena, aplicada em C , numa muito maior, aplicada em D .

Supondo que $AC = BC = 10$ cm, elabore um gráfico que evidencie a variação da distância AB em função da distância de C ao lado AB .



22 Meça as dimensões de uma vagoneta, por exemplo, daquelas que se usam para carregar materiais de construção, e projecte um mecanismo elevador que permita carregá-la e descarregá-la. Alguns destes mecanismos elevadores conseguem manipular duas vagonetas, situadas uma atrás da outra. Projecte um mecanismo adequado a este fim.

23 As boas tesouras de podar são projectadas de forma a imprimirem à lâmina um movimento de deslizamento enquanto corta. Na podadora que se vê na figura tira-se proveito do mecanismo de triângulo de base variável. Experimente construir um modelo em cartão forte para ver de que forma o mecanismo produz o efeito requerido.

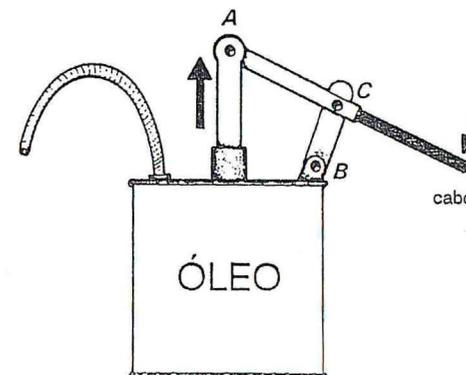


24 Mantenha os olhos bem abertos para detectar aplicações do mecanismo de lado variável. Faça um esboço ou construa um modelo do que for observando, procurando averiguar que peça desempenha o papel de impulsor e qual funciona como seguidor. Seguem alguns exemplos que pode examinar:

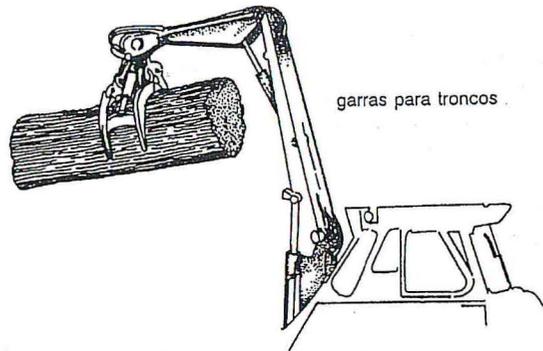
- Mecanismos dos chapéus de chuva;
- Estantes de música ou suportes de projectores de diapositivos;
- Mecanismos de toldos de lojas;
- Varais giratórios para roupas;
- Cadeiras dobradiças;
- Miras ajustáveis das carabinas;
- Mecanismos de abertura de janelas;
- Guindastes;
- Trem de aterragem dos aviões;
- Equipamentos de engenharia civil.

25 Em muitas garagens, o óleo para motor guarda-se em vasilhas de metal, providas de um mecanismo de bomba como o da figura. Este mecanismo distingue-se do tradicional sistema de corrediça e manivela, em que o êmbolo sobe e desce segundo uma linha que não passa pelas articulações A e B .

Investigue, por meio de modelos, esta modificação para ver como varia, para um dado movimento do êmbolo da bomba, a gama de ângulos que descrevem AC e BC , com a distância entre B e a linha do êmbolo.



- 26 Desenhe umas garras para pegar em troncos, como as que se vêem na figura, sabendo que o comprimento do cilindro hidráulico a utilizar pode variar entre 20 cm e 30 cm e que as unhas da garra podem abrir-se um máximo de 80 cm.

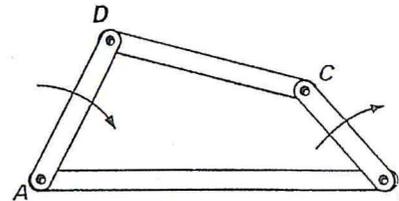


- 27 Investigue os braços hidráulicos e as pinças *Hyab*, que são utilizadas nos caminhões que transportam, com regularidade, cargas pesadas, como materiais de construção ou troncos de madeira.
- 28 Os tratores agrícolas estão normalmente equipados com mecanismos hidráulicos para manipular as alfaias agrícolas que utilizam, como, por exemplo, o arado. Se puder, analise o seu funcionamento e observe as suas aplicações. As feiras agrícolas são lugares ideais para o fazer.

4 Balouços, elevadores e balanças

Aplicações do paralelogramo articulado

Um sistema de quatro barras rígidas, articuladas entre si pelos extremos para formarem um quadrilátero, constitui o chamado *quadrilátero articulado*, sistema com inúmeras aplicações em mecanismos, embora não seja visível na maior parte dos casos. Uma das suas características assenta no facto de, ao manter fixa uma das barras e deslocar outra, o movimento das duas restantes fica inequivocamente determinado. Imaginemos que, no sistema articulado da figura abaixo, se fixa o lado *AB* e se obriga *CB* a girar em sentido horário em torno de *B*. Então, *CD* fará que *AD* gire também em sentido horário em torno de *A*. Compreende o leitor a razão pela qual *CD* se encontra, por seu lado, girando em sentido contrário ao dos ponteiros do relógio?



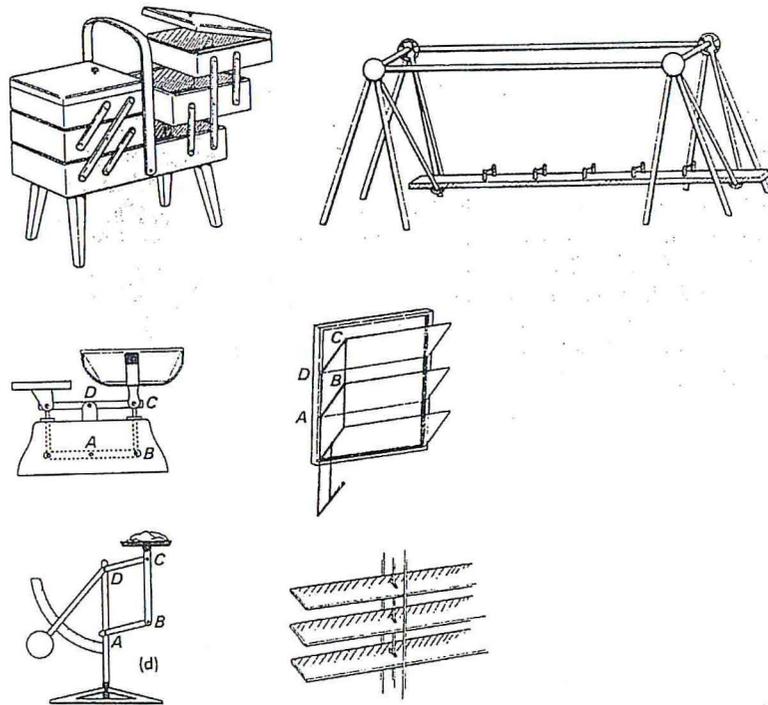
Antes de avançar convém ter à mão materiais para a construção de montagens articuladas, como barras *Meccano* ou tiras de cartão e tachas para papel.

Construa diversos sistemas articulados quadrangulares e verifique que, ao fixar um dos lados, o movimento dos três restantes fica determinado pelo movimento de qualquer deles. Esta propriedade assegura que o sistema articulado tem *um grau de liberdade* e constitui, por isso, um mecanismo

muito utilizado. Em contraste, construa uma montagem triangular, que não consente movimento algum, e uma montagem pentagonal, na qual é preciso conhecer o movimento de duas barras para poder determinar o das demais.

Montagens em forma de paralelogramo

Na forma mais simples de quadrilátero articulado, os pares de lados opostos são iguais, formando assim um paralelogramo. Veremos nas figuras seguintes exemplos desta montagem concretizados na caixa de costura, no balouço e nos limpa pára-brisas. A análise do seu funcionamento mostra que a sua função mais importante é a de garantir que certos componentes se movam, conservando sempre o seu paralelismo.

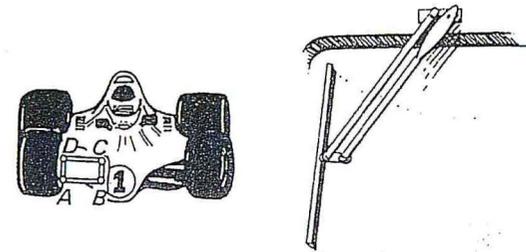


As gavetas da caixa de costura definem lados opostos de uma montagem com a forma de um paralelogramo, pelo que, ao abri-las, não se viram, permanecendo antes horizontais. A grande prancha de vaivém dos parques infantis permanece sempre paralela ao solo, ao contrário do que acontece

com as cadeiras oscilantes das feiras. Não obstante, cada ponto da tábua descreve, no seu movimento, um arco de circunferência, tal como acontece nos balouços correntes. Como se explica isto?

As balanças para pesar cartas, as de laboratório e as tradicionais de cozinha recorrem, todas elas, ao paralelogramo articulado para garantir que os pratos permaneçam horizontais quando se inclina o travessão.

A suspensão dos carros de corrida é concebida para que as rodas, apesar da grande largura dos pneus, assentem no pavimento em toda a sua largura. Consegue-se isto por meio de um paralelogramo articulado que só permite que as rodas se desloquem verticalmente.



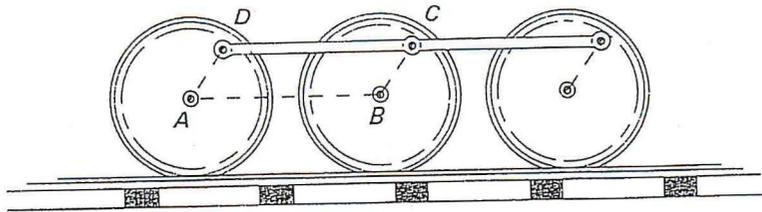
Temos outra aplicação muito conhecida no mecanismo dos limpa-pára-brisas de muitos autocarros, camiões e locomotivas, a qual mantém vertical a escova durante o movimento de vaivém sobre o vidro. É interessante comparar o mecanismo destes limpa-pára-brisas com o dos tradicionalmente utilizados nos carros.

O paralelogramo articulado utiliza-se, às vezes, sob formas muito estreitas e longas, para manipular objectos distantes, como nas podadeiras ou nos colhedores de fruta e nos papagaios acrobáticos em que os lados longos correspondem aos cabos de controlo, enquanto os curtos são definidos pelo papagaio e pelo corpo do operador.

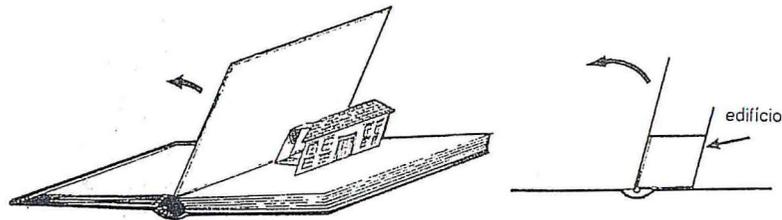


As bielas que interligam as rodas motrizes das locomotivas a vapor, com o objectivo de que elas rodem conjuntamente, formam o quarto lado de um paralelogramo cujos vértices são os cubos das rodas e os pontos de conexão da biela com a roda. Neste caso, D e C efectuem rotações completas em

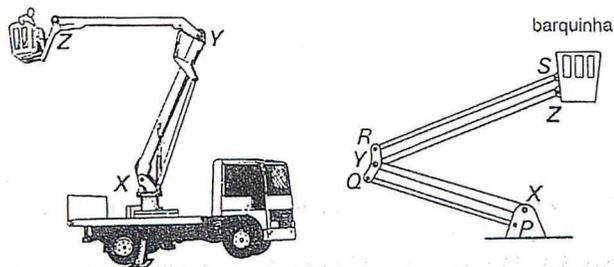
tomo de A e de B, ao contrário do que acontecia nas aplicações anteriores, em que a gama de movimentos era mais reduzida.



Os livros animados baseiam-se nas propriedades dos paralelogramos. Ao desfolhar o livro, os diferentes objectos que se erguem são içados por paralelogramos de papel ou de cartão, pelo que, ao moverem-se, o fazem sempre paralelamente à folha que se está passando, para, em seguida, assentarem completamente sobre a folha.



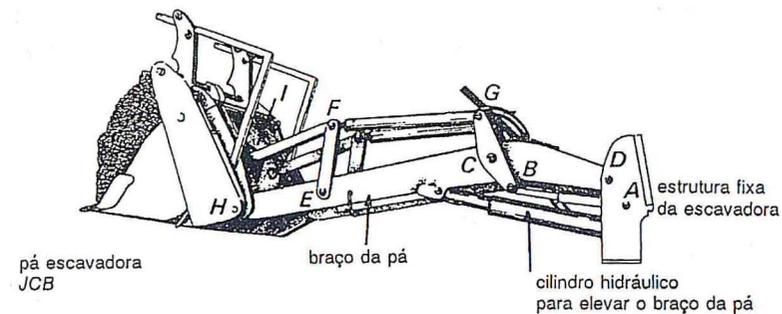
Nunca se interrogou sobre o que impede que os operários de manutenção caiam das suas barquinhas quando se inclinam para a frente para examinar as luzes dos semáforos ou dos candeeiros de iluminação pública? Os braços do elevador funcionam por meio de cilindros hidráulicos, mas o mecanismo, que mantém a barquinha fixa numa mesma posição, consiste num par de paralelogramos articulados. Seja qual for o ângulo que formam



os braços, os paralelogramos asseguram que QY seja paralelo a PX e que SZ seja paralelo a RY. Porém, RY é mantido na vertical, fixando-o a QY num ângulo apropriado e, assim, SZ permanece sempre vertical.

Utiliza-se um mecanismo idêntico para fixar um esquadro ao tampo de um estirador, de forma que o esquadro se possa deslocar de um ponto do estirador para outro, sem rodar, para traçar rectas paralelas.

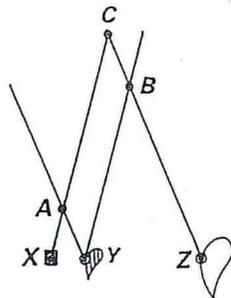
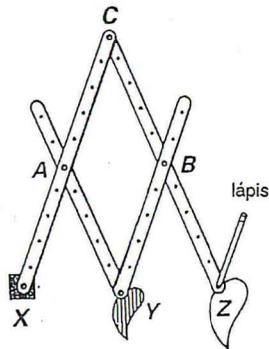
Podemos encontrar uma aplicação muito importante dos quadriláteros articulados nas modernas pás escavadoras, como os mecanismos JCB da pá mecânica que vemos na ilustração. Ao elevar o braço da pá, fazendo-o girar em torno de D, o ângulo que a pá forma com a horizontal tem de se manter constante para evitar o derrame de material. Consegue-se isso por meio do paralelogramo ABCD, que mantém a barra BCG sempre paralela a AD, peça que está fixa à estrutura da escavadora. O ângulo formado por FE com BCG é mantido então pela articulação CEF e depois é transmitido ao ângulo da pá. Usando as palavras do próprio material publicitário de JCB, «os braços do carregador, muito robustos, autonivelam-se por paralelogramo articulado».



Pantógrafo

Outra aplicação do paralelogramo articulado é um instrumento de desenho, conhecido por *pantógrafo*, que se utiliza para copiar desenhos e mapas em diferentes escalas, ou também, num outro âmbito, para guiar um instrumento de corte em processos de manufactura.

No diagrama superior esquerdo, AYBC é um losango e $AX = BZ$ são ambos iguais ao lado do losango. O resultado é que, independentemente da forma como se manipula o sistema articulado, X, Y e Z ficarão sempre alinhados com $XY = YZ$. Ao utilizar o pantógrafo na forma indicada, X é um ponto fixo, Y vai percorrendo o perfil de um objecto e o lápis, inserido

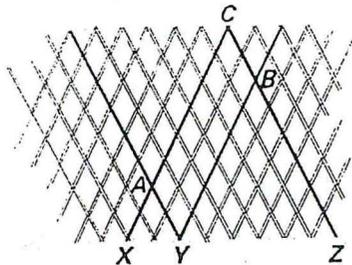


em Z, vai fazendo uma cópia do objecto, que, neste caso, é uma ampliação (por homotetia) de centro em C e razão 2. A escala 2:1 resulta do facto de Z distar sempre de X duas vezes mais do que Y dista de A. O diagrama da direita mostra o pantógrafo preparado para efectuar uma ampliação de escala 4:1. Com esse objectivo, $AC = 3AX$, $AC = BY = BZ$ e $AX = AY = CB$. Estas relações garantem que X, Y e Z se mantenham alinhados e que $YZ = 3XY$, fazendo assim que $ZX = 4YX$.

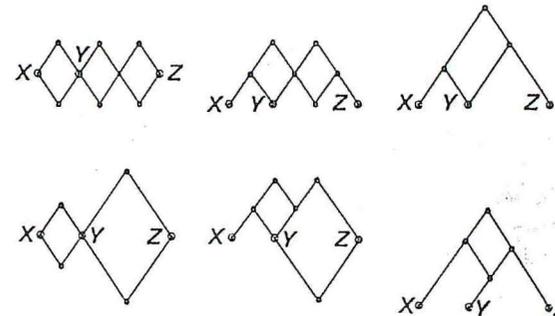
Em geral, quando X é um ponto fixo e o objecto é contornado por Y, tem-se

$$\text{escala de ampliação linear} = \frac{ZX}{YX}$$

É possível que a melhor forma de compreender o funcionamento do pantógrafo seja imaginar as suas hastes como parte de uma rede rômbrica, como as que se podem adquirir, para plantas trepadoras, nos centros de jardinagem. Com esta imagem em mente é possível identificar outras formas de construir sistemas articulados que produzam ampliações ou reduções. A figura mostra seis formas diferentes de construir sistemas articulados que garantem a colinearidade de X, Y e Z e de tal modo que $YZ = 2XY$.



Em cada um destes sistemas articulados, se X é o ponto fixo e é Y que contorna o objecto, a imagem descrita por Z é uma ampliação com factor de escala de 3:1. Se, por outro lado, é Z que percorre o perfil do objecto e o lápis que desenha a cópia está colocado em Y, a imagem é mais pequena e a transformação consiste numa redução por homotetia de centro em X e de razão 1/3. Note que o termo *homotetia* engloba tanto as ampliações como as reduções. Mas a questão não acaba aqui, pois também podemos tomar Y ou Z como ponto fixo (centro da homotetia) e, em cada caso, temos duas opções para colocar o lápis.



Quando a imagem experimenta, não só uma ampliação ou redução, mas também uma rotação de 180°, podemos considerar que a razão é negativa, situação que corresponde aos sistemas articulados anteriores, quando o ponto fixo é Y.

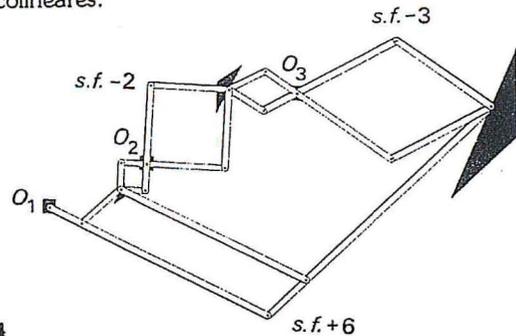
De que maneira poderíamos utilizar os sistemas articulados ilustrados para produzir ampliações ou reduções com razão igual a a) -2; b) -1/2; c) 3/2, d) 2/3?

Para investigar o que acontece quando se compõem sucessivamente duas homotetias, é bastante esclarecedor construir dois sistemas articulados tais que o seguidor de um é o impulsor do outro.

A figura que se segue mostra mais pormenorizadamente uma aplicação dos sistemas articulados para explicar o produto de números relativos. A ampliação de centro O_2 e razão -2, combinada com a ampliação de centro O_3 e razão -3, é equivalente à ampliação de centro O_1 e razão +6, provando assim que

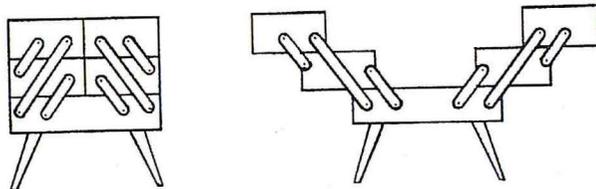
$$(-2) \times (-3) = +6$$

Note-se também que os centros de homotetia (os pontos fixos) O_1 , O_2 e O_3 são colineares.

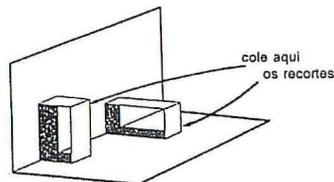


Exercício 4

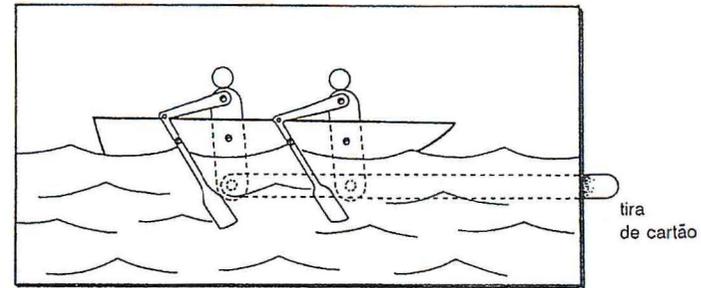
- 1 Construa um modelo bidimensional de uma caixa de costura ou de uma caixa de ferramentas para observar como se articulam entre si as gavetas móveis. Experimente examinar um jogo de ferramentas de mecânico e examine o mecanismo de montagem da asa que tem o efeito de fechar automaticamente as gavetas, quando a caixa é levantada. Acrescente esse mecanismo ao seu modelo.



- 2 Construa cartões de felicitações, para uma ocasião especial, usando paralelogramos de cartolina, como se mostra na figura. Depois recorte figuras de revistas ou postais velhos e cole-as na parte frontal dos paralelogramos, para criar uma cena tridimensional.



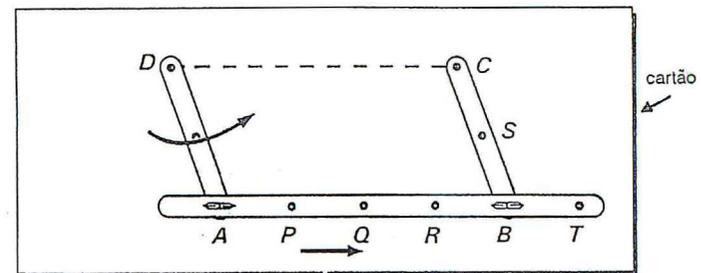
- 3 Projecte uma página de um livro na qual dois remadores remam sincronizados, ao accionar para a direita e para a esquerda uma tira de cartão colocada por detrás da folha e projectada para fora.



- 4 Construa um modelo de elevador dos que se usam para mudar lâmpadas de candeeiros de iluminação pública, ou para a manutenção de semáforos, para melhor compreender que o ângulo da barquinha permanece invariável independentemente da orientação dada aos braços.
- 5 Construa um modelo do mecanismo elevador da pá de uma escavadora JBC. Manipule-o até compreender a razão pela qual os mecanismos com a forma de paralelogramos articulados mantêm constante o ângulo que a pá forma com a horizontal, uma vez fixado o comprimento do cilindro hidráulico GF, encarregado de controlar o ângulo da pá.
- 6 Fixe, entre si, três tiras de cartão, AD, AB e BC, por meio de tachas para papel colocadas em A e B. Depois fixe as tiras AD e BC a um pedaço de cartão, de forma que $AB = DC$ e $AD = BC$, com o fim de formar um paralelogramo deslocável da direita para a esquerda e vice-versa, como um baloiço de parque infantil.

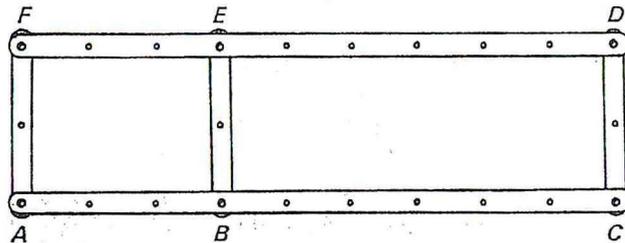
Investigue as trajectórias de alguns pontos, como P, Q, R, S e T, fazendo pequenos furos nas tiras e traçando as suas trajectórias com um lápis bem afiado.

Quando AD forma um ângulo de 60° com DC, em que direcção se move Q?



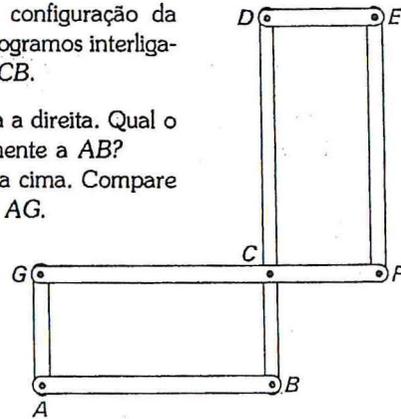
7 Construa uma montagem articulada como a da figura, em que $AF = BE = CD$, $AB = FE$ e $BC = ED = 2AB$.

- Fixe BE e mova AF . Como se move DC ?
- Fixe AF e mova BE . Compare o movimento de CD com o movimento de BE . Que diferenças encontra? Que pode dizer sobre o movimento dos pontos da montagem situados 1) entre B e C , 2) entre A e B , 3) entre C e D ?
- Qual o movimento possível se fixarmos F e B ?



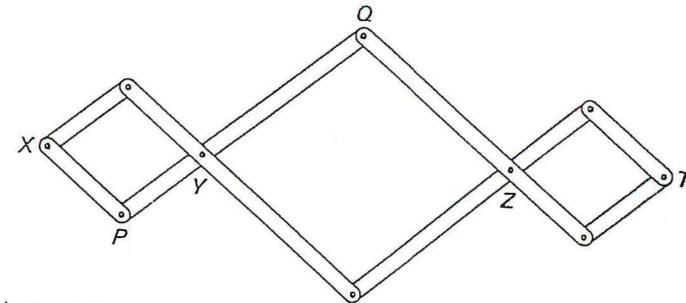
8 Um sistema articulado tem a configuração da figura e consiste em dois paralelogramos interligados, com $GC = 2CF$ e $DC = 3CB$.

- Fixe GF e empurre AB para a direita. Qual o movimento de DE relativamente a AB ?
- Fixe BD e empurre AG para cima. Compare os movimentos de EF e de AG .
- Fixe C e obrigue A a descrever uma linha recta. Descreva as trajectórias de G , B , D e F . Que outro ponto do sistema articulado descreverá uma linha recta? Investigue a trajectória de E .



d) Construa um modelo do sistema articulado para verificar a validade das suas respostas.

9 Um sistema articulado, destinado à ampliação de desenhos, é formado por três losangos interligados, como se vê na figura seguinte, em que as barras maiores, como PQ , têm um comprimento três vezes maior do que as curtas, como XP .

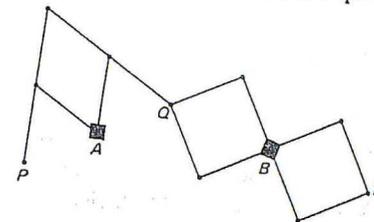


- Supondo que X está fixo e que Y vai contornando o objecto, qual será o factor de ampliação correspondente à imagem descrita 1) por Z , 2) por T ?
 - Como deveríamos utilizar o sistema para obter uma homotetia de razão 1) $1/4$, 2) $3/4$, 3) $3/2$, 4) $2/3$, 5) -2 , 6) $-1/3$?
- 10 Conceba três sistemas articulados diferentes capazes de efectuar ampliações de 4:1.

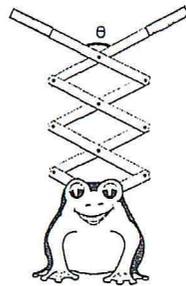
11 O sistema articulado PAQ , que se vê abaixo, quando fixo em A , é tal que a imagem produzida por Q , quando P percorre um contorno, equivale à rotação de meia volta em torno de A . Analogamente, quando o sistema articulado QRB se fixa em B , R traçará uma imagem que será equivalente à que resulta de rodar meia volta, em torno de B , a imagem descrita por Q .

- Comprove estas afirmações, construindo modelos dos sistemas articulados;
- Ligue agora os dois sistemas, de forma que a saída de um seja a entrada do outro e, ensaiando com objectos apropriados, estabeleça a relação entre o perfil percorrido por P e a imagem final descrita por R .

Estes sistemas articulados demonstram claramente um dos teoremas fundamentais da geometria das transformações sobre a composição de duas rotações de meia volta. De que teorema se trata?

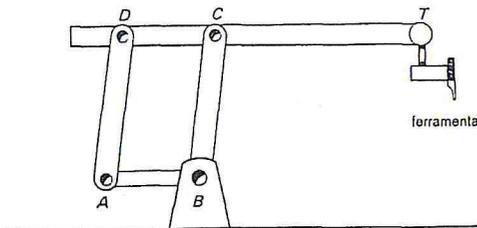


- 12 Um brinquedo (uma rã saltadora) é constituído por uma articulação de cartão e pelo recorte de uma rã, como se pode ver na figura. A distância entre as tachas, em cada barra do sistema, é de uns 4 cm. Devido à largura das tiras, o movimento do sistema está limitado a $30^\circ < \theta < 150^\circ$. Até que altura poderá saltar a rã?

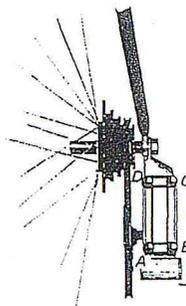


- 13 Para levar uma ferramenta à posição adequada, um autómato industrial controla os ângulos de AB e CB de um paralelogramo articulado.

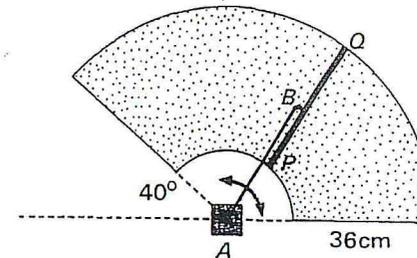
- Suponha que AB se mantém em posição horizontal e que CB gira em torno de B . Descreva o movimento de DT .
- Suponha que BC é fixo e que AB gira em torno de B . Descreva o movimento de T .
- Se AB e CB rodam em torno de B à mesma velocidade, qual é a trajetória do ponto T ?



- 14 O mecanismo encarregado do deslocamento lateral dos pinhões tensores para fazer passar a corrente de uns pinhões para os outros, nas bicicletas de corrida, consiste num paralelogramo articulado. Num mecanismo típico de mudança de velocidades, $AB = DC = 1,5$ cm, $AD = BC = 4,0$ cm e o deslocamento lateral, quando o eixo motriz tem cinco pinhões, é de 2,5 cm. Qual será o ângulo mínimo que CB deve rodar para poder passar da marcha mais lenta à mais rápida?

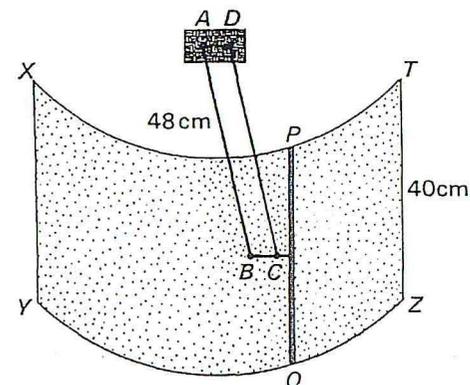


- 15 a) A escova PQ de um limpa-pára-brisas de um automóvel tem 36 cm de comprimento e está ligada a um braço de 36 cm que descreve um movimento de vaivém, circular, de amplitude igual a 140° , desde um ângulo de 40° até à horizontal e volta, como se pode ver na figura. Supondo que B é o ponto médio de PQ , calcule a área da superfície varrida pela escova, com um erro inferior a 1 cm²;



- b) Os limpa-pára-brisas de um autocarro têm escovas de 40 cm accionadas por meio de um paralelogramo articulado, $ABCD$, que mantém sempre a escova em posição vertical. Os braços AB e CD têm ambos 48 cm de comprimento; oscilam para a direita e para a esquerda, fazendo ângulos de 60° com a vertical.

Explique por que razão: 1) tanto P como Q se deslocam segundo arcos de círculo com 48 cm de raio e 2) a área varrida é igual à de um rectângulo de dimensões $96 \text{ sen } 60^\circ$ cm por 40 cm;

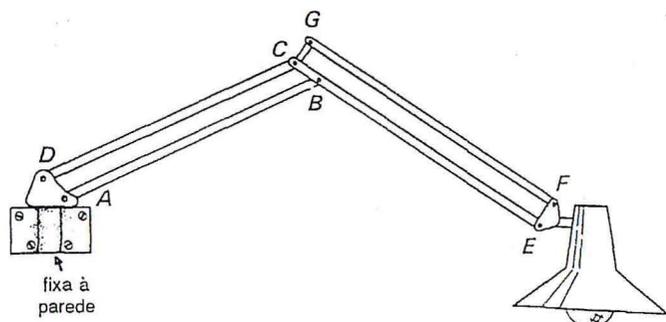


- c) Investigue que área varre o limpador pára-brisas descrito em b), supondo que descreve um ângulo com a mesma amplitude (120°), mas cujas oscilações não são simétricas relativamente à vertical.

(Veja *Even More Mathematical Activities*, comentário à actividade 132, onde se expõe um caso mais geral.)

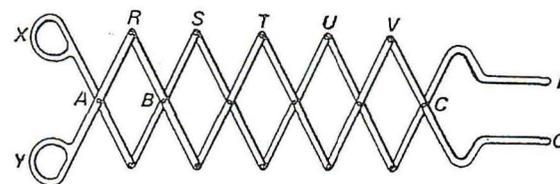
- 16 Num hospital moderno, a luz de cabeceira das camas dos pacientes está fixa à parede por meio de paralelogramos articulados, como se mostra na figura. O suporte a que está fixa a peça AD permite que a lâmpada rode em torno dum eixo vertical; os restantes movimentos da lâmpada são controlados pelos paralelogramos.

- a) Por que razão podemos afirmar que CE e GF formam sempre o mesmo ângulo relativamente à horizontal?
 b) Que efeito provocará o aumento da amplitude do ângulo de AB com a horizontal sobre 1) a posição e 2) o ângulo da lâmpada?
 c) Como se poderá mudar o ângulo da luz?

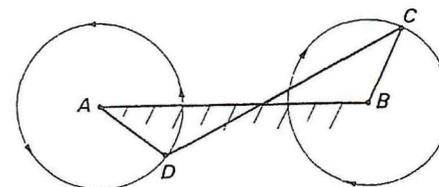


- 17 Examine um candeeiro de braço equilibrado e descreva o objectivo do seu desenho com a ajuda de um diagrama.
- 18 O desenho de uma pinça extensível consiste numa série de losangos articulados e interligados. Quando as asas X e Y são obrigadas a aproximar-se, também se aproximam os dedos P e Q da pinça, mas, ao mesmo tempo, estarão afastando-se das asas com uma rapidez surpreendente.

- a) Se o ponto A for fixo e as asas se aproximarem de maneira que B se desloque 2 cm para a direita, quanto se deslocarão para a direita os pontos R, S, T, U, V e C ?



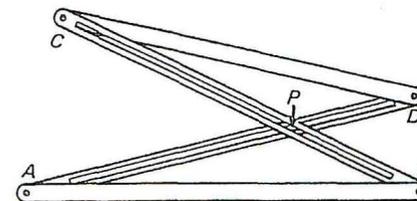
- b) A trajectória de R será parte de uma circunferência cujo centro é A . Qual será a trajectória dos pontos S, T, U e V ?
 c) Que relação existe entre o comprimento de AC e a distância entre as extremidades das asas?



- d) Supondo que X e Y se aproximam a velocidade constante, demonstre que vai aumentando a velocidade com que C se afasta de A .

- 19 Construa um paralelogramo articulado. Fixe AB e cruze CD sobre AB . Seguidamente, faça rodar D em torno de A e observe o movimento de C . Este sistema articulado é designado por articulação antiparalela.

- 20 Construa um paralelogramo articulado e disponha-o na posição cruzada que se mostra na figura. O ideal será construí-lo com tiras de cartão e tachas para papel. Nas tiras AD e BC faça uma ranhura longitudinal e central. Para ligar as tiras entre si, siga o esquema de sobreposições indicado na figura, que confere ao sistema a capacidade máxima de deslocamento. Fixe, em seguida, a barra AB a uma prancheta de desenho, sobre uma folha de papel, e trace cuidadosamente a trajectória do ponto P , definida pela intersecção das tiras BC e AC . Esta trajectória é uma elipse porque $AP + BP$ tem comprimento constante e igual a AD . (Na p. 56 pode ver-se uma aplicação desta propriedade a engrenagens elípticas.)



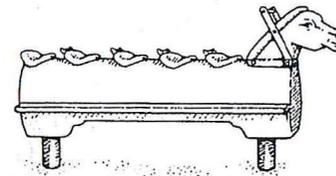
- 21 As portas desdobráveis costumam ficar suspensas de um mecanismo que garante que as portas se dobrem por igual em toda a sua largura. Procure desenhar um mecanismo adequado.

5 Dos cavalos de balanço à máquina de vapor

Aplicações do trapézio isósceles articulado

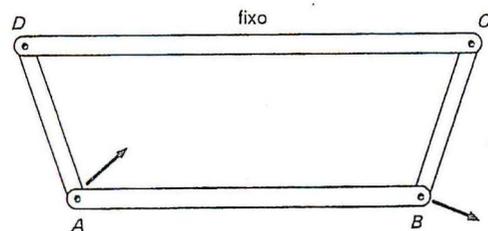
Cavalos de balanço

Os projectos de cavalos de balanço obedecem, em geral, a dois princípios cujo objectivo é simular o movimento de um cavalo. Um consiste em montar o cavalo sobre patins curvos, como os das cadeiras de balanço; o outro, num sistema de trapézio articulado.



Com tiras de cartão e tachas construa um trapézio articulado $ABCD$ como o da figura, tendo AD e BC o mesmo comprimento. Mantenha fixo o lado DC e mova o lado AB para um e outro lado. Note que, ao deslocar AB para a direita, a partir da posição mostrada, A move-se para cima sobre um arco de circunferência de centro D , enquanto B se move para baixo sobre um arco de circunferência de centro C , o que imprime a AB um movimento de balanço. Os cavalos de balanço, tipo «Tom Cobby», que se vêem nalguns parques infantis baseiam-se neste mecanismo, tal como tantos outros cavalos de brinquedo tradicionais. Os pontos D e C correspondem

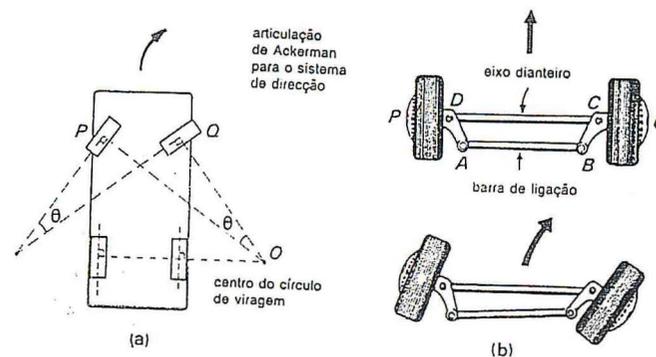
aos topos de dois fortes postes, fixos ao solo, e as duas barras DA e CB giram em torno destes pontos e sobre os pontos A e B que se encontram no corpo do cavalo, formando um trapézio.



O termo *trapézio articulado* é um tanto equívoco, pois o sistema só é um trapézio na posição simétrica que vemos na figura. Não obstante, o nome é utilizado para designar os quadriláteros articulados que têm um par de barras do mesmo comprimento. Alguns fabricantes de equipamento para parques infantis utilizam também este mecanismo em alguns balancés. Neste caso, a prancha do baloiço, que é muito mais larga que as barras da articulação, está fixa a DC , enquanto A e B estão fixos ao pilar central. Este sistema tem a vantagem de a prancha deixar de rodar quando DCB é uma linha recta, impedindo assim que o extremo da prancha bata no solo.

Se só servisse como mecanismo nos cavalos de baloiço, o trapézio isósceles articulado não teria muita importância, mas já em 1818 o engenheiro alemão Ackerman viu nele a solução para o problema da direcção de carruagens de cavalos, solução que continua a ser usada, nos nossos dias, para o mecanismo de direcção de quase todas as formas de transporte sobre rodas. O problema a ultrapassar está ilustrado na figura, onde podemos ver, em planta, a direcção de movimento das rodas de um carro ao entrar numa curva à direita. Com muito poucas excepções, as rodas traseiras dos carros apontam directamente para a frente, pelo que, se quisermos que rodem suavemente sobre o pavimento, sem sofrerem um arrastamento lateral, o centro O do arco de circunferência descrito pelo veículo tem de estar situado sobre a recta definida pelo eixo traseiro. Analogamente, para que as rodas dianteiras P e Q não sofram um arrastamento lateral, têm de rodar em direcções que formem ângulos rectos com as rectas definidas por elas e pelo ponto O . Sendo assim, as rectas PO e QO têm necessariamente de formar um ângulo θ quando o carro não se desloca em linha recta, ângulo que aumentará ao diminuir o raio do círculo de viragem.

Portanto, as rodas dianteiras têm de formar entre si um ângulo θ e Ackerman mostrou como isso podia conseguir-se por meio de um trapézio



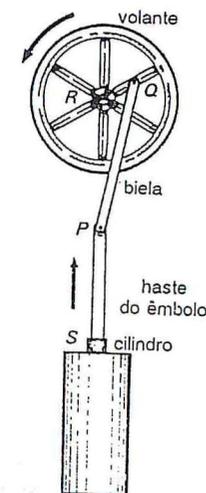
isósceles articulado $ABCD$. Os pontos D e C estão fixos à estrutura do carro, enquanto as rodas giram de modo tal que a sua orientação é controlada pelas barras AD e BC do sistema articulado. O comprimento relativo das barras do sistema tem de ser calculado cuidadosamente de forma a obter o ângulo θ adequado; o comprimento relativo das barras depende da largura do rodado e da distância entre eixos do veículo.

É preciso examinar atentamente o mecanismo de direcção dum automóvel moderno para concluirmos que é deste tipo o mecanismo utilizado, mas é muito fácil reconhecê-lo num kart ou num tractor.

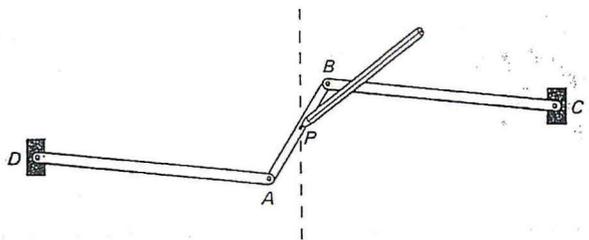
Movimento rectilíneo

Um dos problemas que ocuparam os engenheiros dos finais do século XVIII e de boa parte do século XIX consistia em descobrir um mecanismo capaz de garantir que a haste do êmbolo dos motores de vapor se movesse, sempre em linha recta, para dentro e para fora do cilindro (ver figura). Sem esse mecanismo, a biela, PQ , que liga a haste do êmbolo ao volante, empurraria a haste para os lados, provocando o desgaste rápido da chumaceira montada em S .

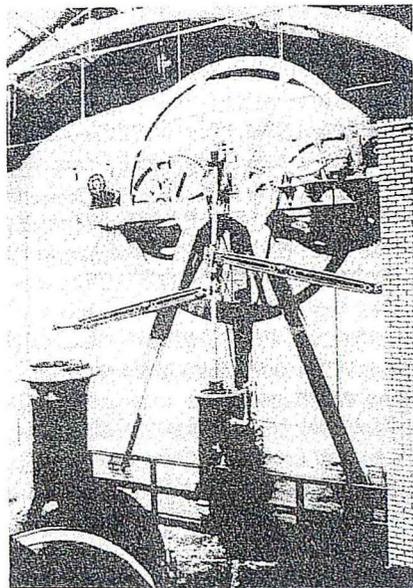
Uma das primeiras soluções práticas foi encontrada em 1784 por James Watt e baseava-se num trapézio isósceles articulado. Watt usou duas longas barras, AD e BC , e uma muito mais curta, AB . Se os pontos D e C são fixos (o que equivale a ligá-los por meio de uma quarta barra DC),



mesmo para deslocamentos significativos de AB , a partir da posição mostrada, o ponto médio P parece descrever uma linha recta. Parece é a palavra adequada, pois, quando se constrói um modelo deste sistema articulado, e ao traçarmos a trajectória de P para todas as posições que o sistema pode adoptar, depressa nos apercebemos das suas limitações! Não obstante, este sistema foi amplamente utilizado e James Watt considerou-o o seu empreendimento mais notável.

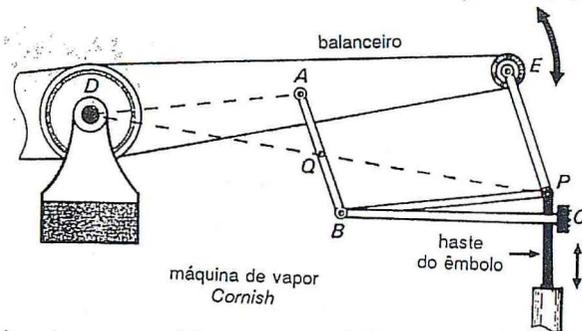


Um exemplo deste sistema pode ser admirado no Museu Nacional dos Caminhos-de-Ferro, em Iorque, instalado numa grande máquina de vapor, a máquina de tracção de Weatherhill (1833), que foi utilizada para içar pesadas vagonetas por declives íngremes.

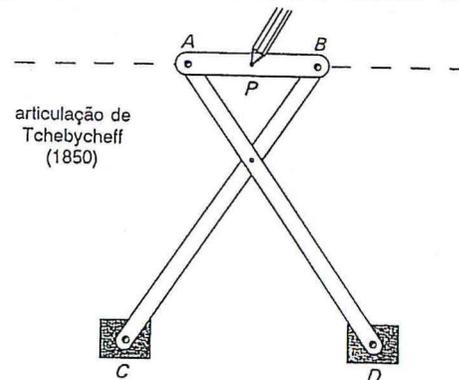


Durante mais de cem anos, uma das fontes motrizes mais utilizadas foi a máquina *Cornish*, ou máquina de balanceiro, impressionante pelo seu enorme e pesado balanceiro de ferro fundido que oscilava lentamente para cima e para baixo.

Quando o balanceiro oscilava (ver abaixo), a sua extremidade E descrevia um arco de circunferência e, por isso, não permanecia alinhada com a haste do êmbolo. Para garantir que o extremo P da haste do êmbolo se movesse em linha recta, Watt concebeu um mecanismo que acumulava as pro-



priedades de um paralelogramo articulado com as do seu sistema de deslocamento rectilíneo. No esquema da figura, $DA = AE = BP = BC$ e $AB = EP$. C é um ponto fixo, pelo que $DABC$ constitui um sistema rectilíneo de Watt, em que Q se desloca verticalmente, em linha recta. Ora, sendo

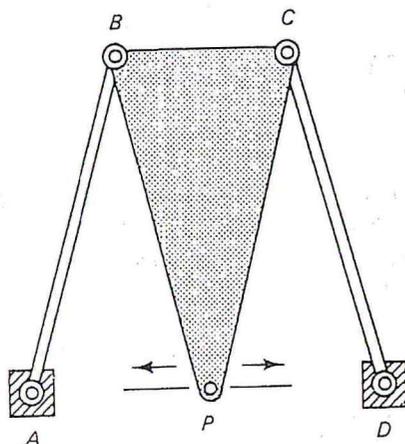


$ABPE$ um paralelogramo articulado, AB é sempre paralela a EP . Além disso, como $DA = AE$, o triângulo DEP é semelhante ao triângulo DAQ , pelo que o movimento de P é homotético do movimento de Q , com centro D e factor de ampliação igual a 2. Dado que Q se move verticalmente em linha recta, o mesmo acontece com P .

Em 1850, o matemático russo Tchebycheff descobriu uma nova solução para o problema. Utilizou um trapézio isósceles articulado cujos lados se cruzavam como vemos na figura. Nesta solução, $BC = AD$ e as distâncias são tais que

$$AD : CD : AB = 5 : 4 : 2$$

Tal como anteriormente, a trajectória de P , ponto médio de AB , parece ser uma linha recta e, por certo, a aproximação é muito boa, inclusivamente para deslocamentos consideráveis relativamente à posição simétrica que aqui se mostra. Contudo, a trajectória completa assemelha-se mais a uma semicircunferência!

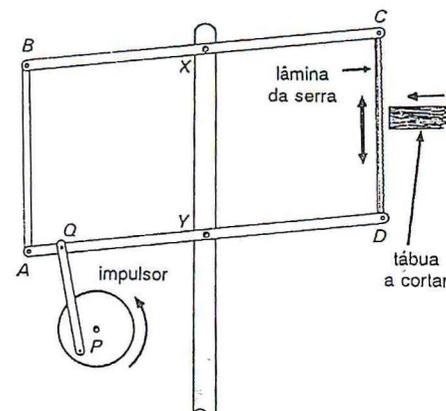


solução de Roberts (1860)

Uma terceira solução, que dá uma aproximação ao movimento rectilíneo, é a do britânico Richard Roberts, que, em 1860, propôs o mecanismo da figura, baseado também numa articulação trapezoidal. Mas, desta vez, em lugar de considerar a trajectória do ponto médio de AB , o que fez foi ligar a AB um triângulo isósceles ABP , tal que

$$CB = BP = PA = AD$$

Experimentalmente, esta solução é, entre as citadas, a que proporciona a melhor aproximação ao movimento rectilíneo, mas, paradoxalmente, a sua trajectória completa é a que mais se afasta de tal movimento.

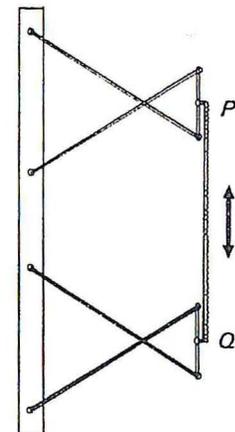


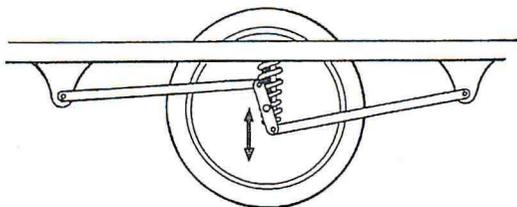
Encontramos outra aplicação do mecanismo gerador de movimento rectilíneo no desenho de uma serra de mão. Com o desenho da figura, baseado num paralelogramo, a folha da serra oscilará para cima e para baixo, mas, como C e D descrevem arcos de circunferência com centros em X e em Y , a serra move-se, não só para cima e para baixo, mas também para a esquerda e para a direita, isto é, para dentro e para fora da madeira que está a ser cortada.

Uma forma de vencer esta dificuldade consiste em fixar os extremos da lâmina da serra a articulações Tchebycheff. Um dos meus colegas construiu uma serra tico-tico que funciona exactamente assim.

Os engenheiros modernos encontraram uma solução ainda mais sofisticada. Nos anos 70, um grupo de engenheiros suecos projectou um mecanismo tal que cada extremo da folha da serra descreve um oito, de forma que a serra corta ao avançar e retira-se do corte na viagem de volta, até iniciar o movimento seguinte.

No desenho dos sistemas de suspensão de veículos pesados é necessário consentir um deslocamento vertical dos eixos e impedir todo e qualquer movimento lateral. Uma das formas de o conseguir é recorrer a um sistema articulado de Watt, com suspensão de mola helicoidal. Este sistema vem incorporado na suspensão traseira de alguns carros modernos, que, assim, se agarram bem à estrada.

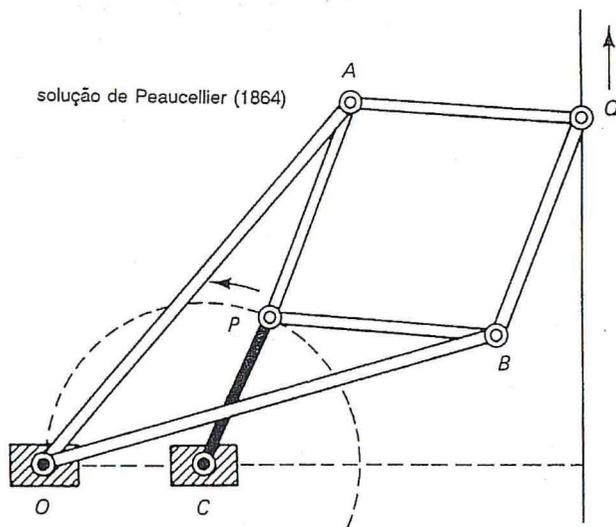




Nenhuma discussão do problema do movimento rectilíneo fica completa sem uma olhadela à solução de Peaucellier. Peaucellier era oficial do exército francês e a sua solução, publicada em 1864, agrada especialmente aos matemáticos, pois proporciona, teoricamente, uma linha recta perfeita. A sua solução consiste num losango articulado $ABPQ$ ligado por A e por B a um ponto fixo O , por meio de braços iguais.

Aplicando o teorema de Pitágoras, não é difícil demonstrar que

$$OP \times OQ = OA^2 - AP^2 = \text{constante}$$



o que implica que a relação entre P e Q é uma inversão relativamente a uma circunferência de centro em O . Por outro lado, uma propriedade da inversão é que, se P descreve uma trajectória circular em torno de O , a sua imagem Q descreverá uma linha recta. Obrigar P a descrever uma circunferência é fácil: basta fixá-lo a uma barra PC . É possível que a teoria que sustenta estas

afirmações não seja do conhecimento dos leitores, a menos que estejam familiarizados com a transformação complexa $Z \rightarrow 1/Z$, mas não há qualquer dificuldade em construir um sistema articulado de Peaucellier e convencer-se, pela via prática, das suas propriedades excepcionais.

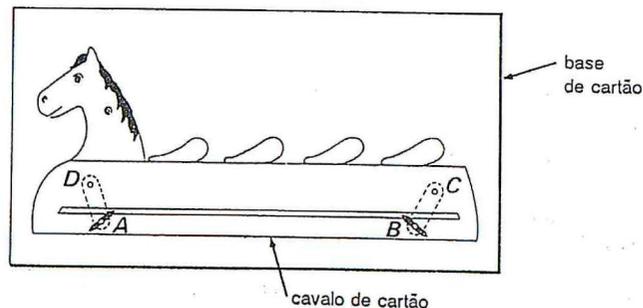
Ainda que o trabalho de Peaucellier proporcione uma solução teoricamente perfeita para a geração de um movimento rectilíneo, na prática tem demasiadas articulações, não sendo tão fiável nem tão preciso como as soluções simples, já discutidas, baseadas em sistemas articulados trapezoidais.

Todas as questões do exercício seguinte envolvem a construção de modelos. Para muitos deles, as barras *Meccano* são o material ideal, mas pode construir modelos perfeitamente satisfatórios com cartão grosso e tachas. Para demonstrações (nas aulas, por exemplo) convém dispor de modelos bastante grandes. Para construí-los pode utilizar tiras de plástico articuladas das que se usam como estacas para plantas e se vendem nos centros de jardinagem, com parafusos e porcas de tamanho adequado. Na construção de modelos convém ter presente que, dentro do razoável, os modelos grandes proporcionam melhores resultados do que os pequenos, pois os pequenos erros de medida ou as folgas nas articulações não terão tanta importância.

Exercício 5

- 1 Construa um modelo de um cavalo de baloiço do tipo Tom Cobby. Para isso recorte primeiro um cavalo de cartão e depois, utilizando tiras de cartão AD e BC e tachas, fixe o cavalo a uma folha-suporte de cartão. Note que D e C estão fixos à folha-suporte, enquanto A e B estão fixos ao cavalo.

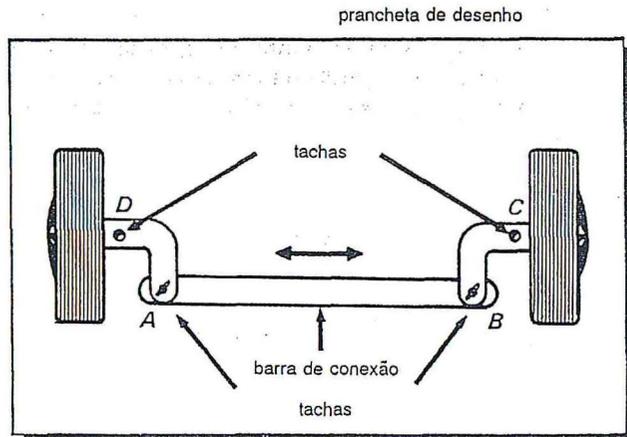
cavalo de baloiço



O movimento do cavalo seria diferente se DC fosse menor do que AB ?

Sabendo que $DC = 1$ m, $AB = 0,8$ m e $DA = CB = 0,2$ m, determine a amplitude do ângulo que AB forma com a horizontal quando

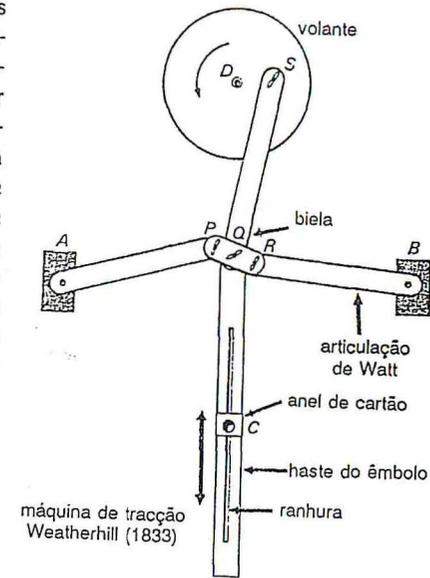
- 1) D , A e B estão alinhados;
 - 2) DA é horizontal;
 - 3) AB e DC se bissectam.
- 2) Construa um modelo para demonstrar o sistema articulado de direcção idealizado por Ackermann. Cada uma das rodas, assim como a barra que as une ao tirante de conexão, são recortadas em cartão como uma peça única. Os pontos D e C fixam-se a uma prancheta de desenho ou a uma base de cartão por meio de tachas, como no exercício 1.



- 3) Com tiras de cartão construa um sistema articulado de Watt e fixe os extremos D e C a uma prancheta. Utilize um lápis para traçar a trajectória completa de P , ponto médio de AB . Investigue o que sucede à trajectória quando se varia a distância entre C e D . Como é que a relação entre o comprimento de AB e o dos braços DA e BC influencia a trajectória? Que elemento determina a amplitude do ângulo formado pela porção rectilínea da trajectória de P e pela recta que passa por C e por D ?

- 4) Com cartão e tachas construa um modelo da máquina de tracção de Weatherhill (ver figura). Em A , B , C e D , as tachas fixam o modelo a um

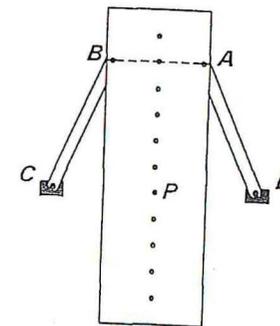
suporte de cartão. As tachas usadas em P , Q , R e S movem-se em relação ao suporte, pelo que devem ser introduzidas com a parte afiada para a frente, de modo a não arranharem a base de cartão. Para simular a haste do êmbolo, abra uma ranhura na tira de cartão que desempenhará esse papel, para que possa mover-se para a frente e para trás relativamente ao ponto C . Um anel de cartão em C impedirá que a tacha se escape da ranhura. Para maior realismo, pode acrescentar-se um «cilindro» de cartão no extremo inferior da haste do êmbolo.



- 5) Utilize peças Meccano para simular o mecanismo concebido por Watt para a máquina de balanceiro Cornish. Podemos ver exemplares destas máquinas na maior parte dos museus de tecnologia de todo o mundo.
- 6) Construa um modelo do sistema articulado de Tchebycheff e trace a trajectória completa do ponto médio de AB . Depois modifique o comprimento de AB , mantendo constantes todos os outros comprimentos, e investigue a família de curvas assim produzida.

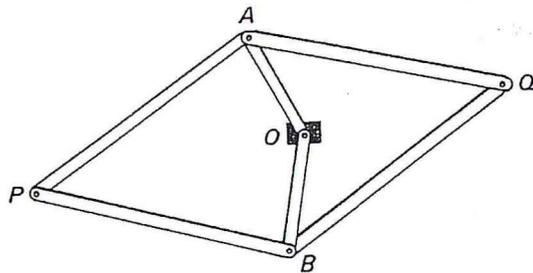
- 7) Construa um mecanismo, baseado no sistema articulado de Roberts, em que o triângulo ABP foi substituído por uma tira de cartão e $CD = 2AB$, $BC = AD$. Demonstre que a trajectória de P constitui uma boa aproximação de uma linha recta durante uma parte importante da sua trajectória, mas que se afasta amplamente dela na parte restante.

Investigue as trajectórias correspondentes a outros pontos situados na mediatriz de AB , como os indicados pelas perfurações.

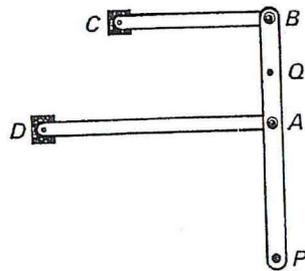


8 No sistema articulado de Peaucellier, de que já se falou anteriormente, as barras do losango eram mais curtas do que os braços que uniam os pontos A e B ao ponto fixo O . No sistema articulado de Peaucellier que se vê na figura inverteram-se as proporções relativas dos lados; não obstante, o sistema conserva basicamente as mesmas propriedades.

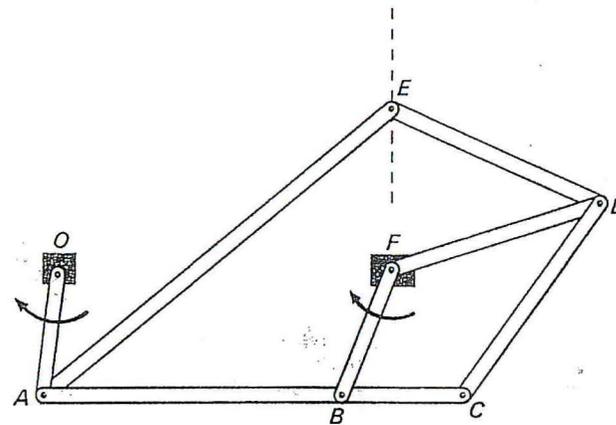
- Demonstre que $OP \times OQ$ é constante;
- Construa um modelo do sistema articulado de Peaucellier e descubra a trajetória do ponto Q quando P se move sobre uma circunferência que 1) passa por O , 2) não passa por O . Para obrigar P a descrever uma circunferência, liga-se este a uma barra cujo extremo gira em torno de um ponto fixo;
- Que sucede a Q se P se mover ao longo de uma recta?



9 Investigue, para diferentes comprimentos das barras, as trajetórias de P e de Q na montagem da ilustração seguinte.

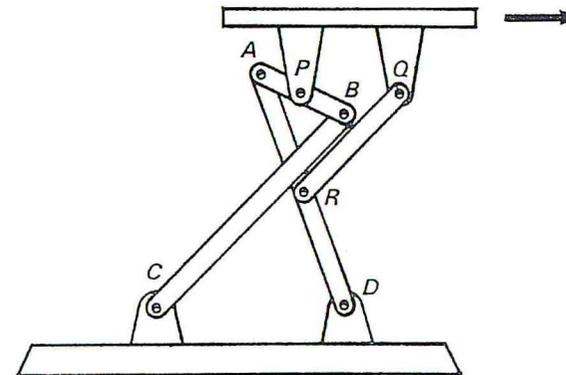


10 O matemático britânico Sylvester (1814-79) ficou tão fascinado com o sistema articulado de Peaucellier para a geração de movimento rectilíneo que se propôs descobrir um sistema de sua autoria. O sistema que se pode ver na página seguinte é um dos que idealizou. Consiste em dois



«papagaios» semelhantes, $ACDE$ e $DFBC$, um dos quais tem metade das dimensões lineares do outro. Com tais dimensões, pode demonstrar-se que EF forma sempre um ângulo recto com AC , pelo que, mantendo F fixo e acrescentando a barra OA de modo que $OABF$ seja um paralelogramo, AC se deslocará sempre paralelamente a si mesmo e, por consequência, E se moverá em linha recta. Construa um modelo e veja por si mesmo que assim é.

11 O sistema articulado da figura mostra como adaptar o mecanismo rectilíneo de Tchebycheff para conseguir que uma plataforma se mova a uma altura constante e sempre paralelamente a si mesma. O sistema de Tchebycheff é facilmente reconhecível; P , ponto médio da barra AB ,

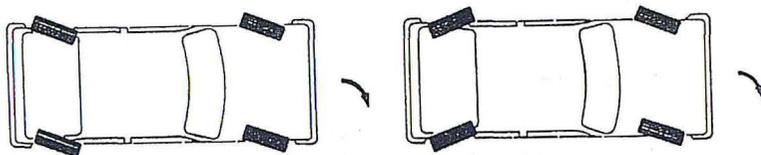


desloca-se segundo uma trajectória sensivelmente rectilínea e paralela a CD . A distância PQ é $1/2$ da distância CD , R é o ponto médio de AD e $RQ = 1/2 AD$. Construa um modelo deste sistema articulado e teste o seu funcionamento.

Sylvester e Kempe idealizaram um sistema articulado que proporcionava uma solução teórica exacta do problema de translação da plataforma, de que a solução de Tchebycheff acima ilustrada é apenas uma aproximação. Para conhecer detalhadamente o sistema pode consultar, por exemplo, a) *Squaring the Circle and other Monographs*, publicado por Chelsea Publishing Company em 1969 e que inclui o artigo «How to draw a straight line; a lecture on linkages», por A. B. Kempe, ou b) *Machines, an Illustrated History*, por Sigvard Strandh.

- 12 O sistema *Honda* de tracção às quatro rodas foi concebido de tal forma que tanto as rodas traseiras como as dianteiras mudam de direcção relativamente à estrutura do carro, para proporcionar maior capacidade de manobra nos movimentos circulares. Construa modelos para investigar o efeito se:

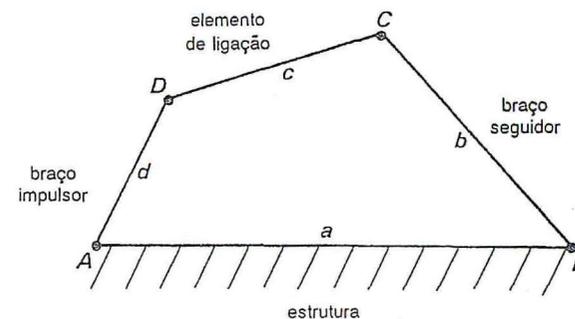
- Os dois jogos de rodas se orientam na mesma direcção;
- Os dois jogos de rodas se orientam em direcções contrárias.



6 Qual a semelhança entre um ciclista e um cubo de pedal?

Aplicações e análise do quadrilátero geral articulado

Nos capítulos precedentes só considerámos casos particulares do quadrilátero articulado em que, pelo menos, duas barras tinham o mesmo comprimento. Em alguns casos, um par de lados opostos cruzavam-se, formando um sistema com diagonais articuladas, mas, na maior parte dos casos, só se verificavam amplitudes de movimento bastante limitadas. Precisamos de estudar agora as propriedades dos sistemas articulados em que todos os lados têm comprimentos diferentes e investigar a sua gama e modalidades de movimento.

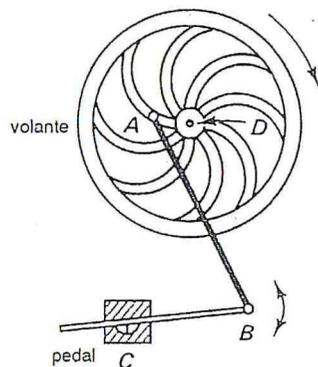


Nas aplicações do quadrilátero articulado, uma das barras é fixa; essa barra recebe o nome de *estrutura*; veja-se AB na figura acima. As duas barras que rodam em torno dos pontos fixos A e B denominam-se *braços* ou *manivelas*, enquanto a barra DC , situada frente à estrutura, é o *elemento de ligação*.

Como é óbvio, as características de um quadrilátero articulado dependem dos comprimentos relativos a , b , c e d das barras e da barra que vai desempenhar o papel de estrutura. Para que o sistema possa existir é evidente que nenhuma das barras poderá ter um comprimento maior do que a soma dos comprimentos das outras três, isto é:

$$\begin{aligned} a &< b + c + d \\ b &< a + c + d \\ c &< a + b + d \\ d &< a + b + c \end{aligned}$$

mas há outras desigualdades de interesse que não são tão óbvias.

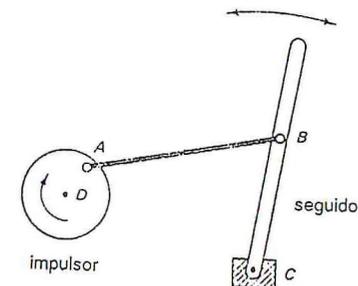
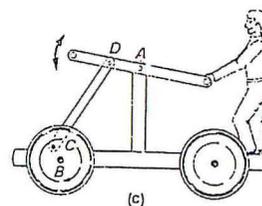
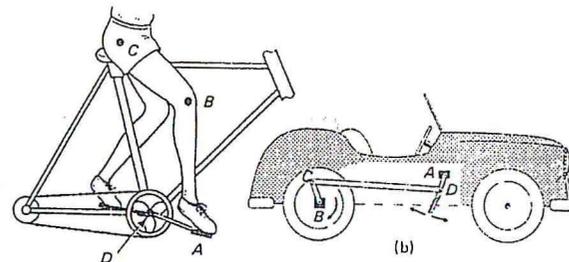


Consideremos o clássico mecanismo de pedal das máquinas de costura e das rodas de amolador. Os pontos C e D correspondem a articulações fixas da estrutura da máquina; o pedal desempenha o papel de manivela impulsora; o seguidor é o volante; a biela é o elemento de ligação. Nesta aplicação do quadrilátero articulado é importante que o movimento de vaivém de BC provoque rotações completas da manivela seguidora AD em torno de D .

A observação sugere que BC é mais comprida do que AD ; de facto, AD é a barra mais curta. Mas será necessária esta condição? E será condição suficiente?

A melhor maneira de o descobrir é construir um modelo e experimentar. Ao escrever este capítulo foi-me muito útil ter sempre à mão uma caixa com material para verificar as diferentes hipóteses e recomendo vivamente esta estratégia, que constitui uma ajuda para pensar criativamente nos sistemas articulados.

Veremos já de seguida três outras aplicações deste mecanismo. Uma das mais interessantes é o ciclista, pois, neste caso, é o músculo do ciclista que desempenha o papel de manivela impulsora; a perna faz de elemento de ligação e o sistema pedal-biela da bicicleta é o seguidor. O automóvel de pedais e a vagoneta ferroviária (que alguns filmes tomaram famosa) baseiam-se em quadriláteros articulados similares, conhecidos por mecanismos de *biela e manivela*.



É corrente utilizar o mecanismo de biela e manivela em sistemas em que o impulsor AD é accionado por um motor de alta velocidade constante e se deseja que o efeito do movimento circular de D em torno de A seja produzir um movimento de vaivém no seguidor BC (por esta razão, denominam-se também sistemas de oscilante e manivela). Este mecanismo é amplamente utilizado, como agitador, em maquinaria industrial e poderia servir para accionar o agitador de uma máquina de lavar ou para produzir o movimento de vaivém das escovas do limpa pára-brisas.

*A regra de Grashof

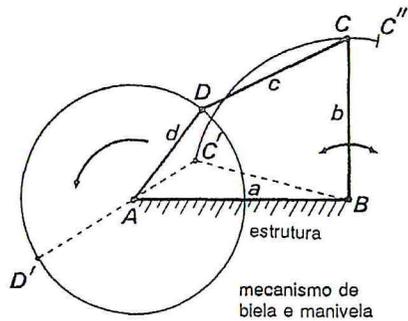
Uma das análises mais úteis dos quadriláteros articulados deve-se a Grashof, que em 1833 chegou à seguinte conclusão:

Se o comprimento total das barras mais curta e mais longa for igual ou menor do que a soma dos comprimentos das duas barras restantes, a articulação mais curta pode fazer rotações completas.

Na regra de Grashof é preciso considerar vários casos.

Caso 1

No exemplo da figura, a manivela AD efectua rotações completas em torno de A e o basculante BC oscila entre as posições BC' e BC'' . Para determinar a amplitude do ângulo de oscilação de BC , note-se que $AC' = c - d$ e que $AC'' = c + d$, pelo que todos os lados dos triângulos $AC'B$ e $AC''B$ são conhecidos, uma vez que o sejam os comprimentos a, b, c e d , o que permite o cálculo da amplitude dos ângulos ABC' e ABC'' , mediante o teorema do co-seno, ou por desenho à escala.

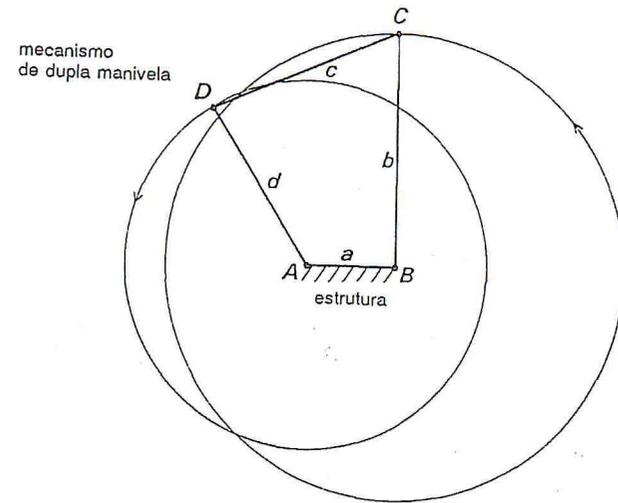


ilustrado para
 $a + d < b + c$
 mas
 $b + d < a + c$
 e
 $c + d < a + b$
 também são casos possíveis, sendo d o braço mais curto

Caso 2

Neste caso, as condições impostas para os comprimentos das barras são semelhantes às do caso 1, mas, desta vez, a barra mais curta é fixa, desempenhando o papel de estrutura e , e como consequência, as duas manivelas AD e BC podem efectuar rotações completas.

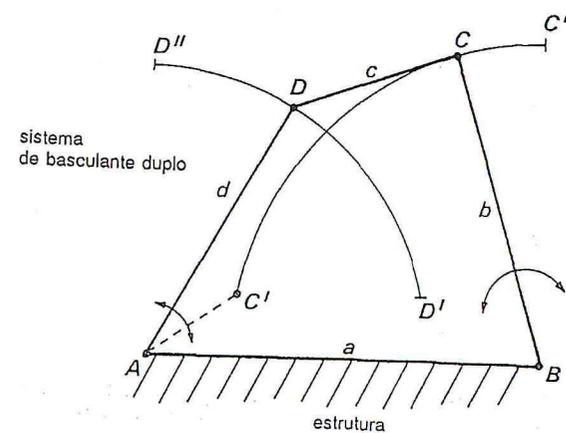
É fascinante construir um destes mecanismos e observar como variam entre si as velocidades de rotação das duas manivelas à medida que o sistema vai adoptando diferentes posições.



Caso 3

No mecanismo de basculante duplo, o elemento de ligação é o lado mais curto e pode efectuar rotações completas. Uma das barras AD e BC será a impulsora e a outra será a seguidora; estas só podem efectuar movimentos de vaivém.

AD oscila entre D' , ponto que dista $b - c$ de B , e D'' , ponto que dista $b + c$ de B .



Analogamente,

BC oscila entre C' , ponto que dista $d - c$ de A ,
e C'' , ponto que dista $d + c$ de A .

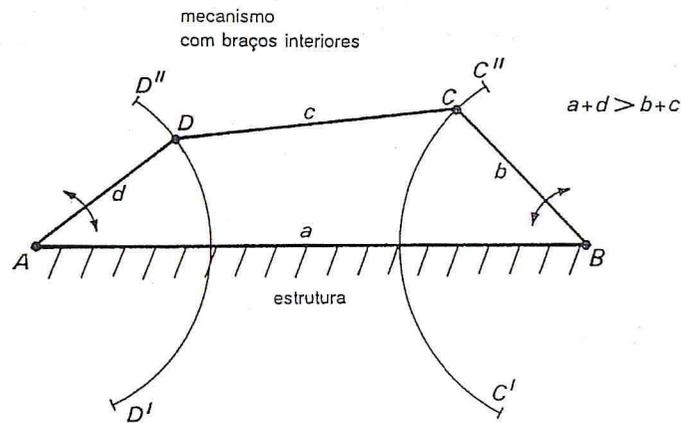
Em cada caso, o ponto extremo do movimento ocorre quando o elemento de ligação está alinhado com uma das manivelas.

Sistemas articulados não Grashof

Quando a regra de Grashof não é respeitada, isto é, quando a soma dos comprimentos das barras mais curta e mais longa é maior que a soma dos comprimentos das outras duas, podem considerar-se outros dois casos:

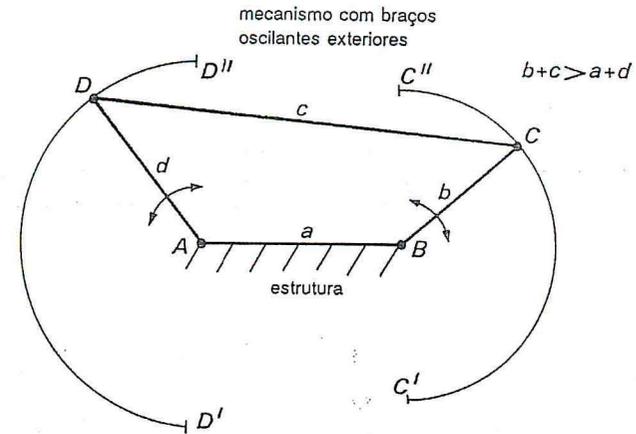
Caso 4

Neste caso, a estrutura é a barra mais longa. As manivelas oscilam simetricamente em torno da estrutura AB ; as amplitudes dos ângulos determinam-se facilmente aplicando o teorema do co-seno ou por meio de um desenho à escala.



Caso 5

Neste caso, a barra mais longa é o elemento de ligação; como consequência, as manivelas oscilam externamente, constituindo a estrutura o eixo de simetria.



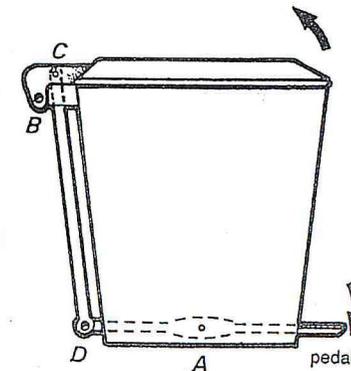
Exercício 6

- 1 Construa um modelo de um sistema articulado biela-manivela para representar o mecanismo de accionamento de uma máquina de costura antiga, de forma que o ângulo de oscilação do pedal tenha uma amplitude de 30° . Como deveria modificar o seu modelo para 1) aumentar o ângulo de oscilação, 2) reduzir o dito ângulo.

Se lhe for possível examinar um mecanismo de pedal autêntico, meça o comprimento das suas quatro barras, bem como a amplitude do ângulo de oscilação do pedal.

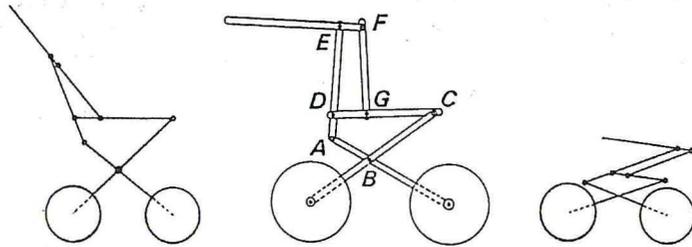
- 2 Construa, em cartão, uma «figura animada» que represente um ciclista pedalando, um automóvel de pedais, ou uma vagoneta de caminho-de-ferro com o respectivo condutor.

- 3 Algumas vezes, o quadrilátero articulado está bem disfarçado, como acontece em objectos tão familiares como o cubo de pedal. Neste caso, o corpo do cubo funciona de estrutura e mantém constante a distância que separa os pontos de revolução A e B . A barra solidária com o pedal tem o seu eixo de revolução por baixo do cubo, em A , e constitui o elemento impulsor. A tampa do cubo funciona de seguidor.



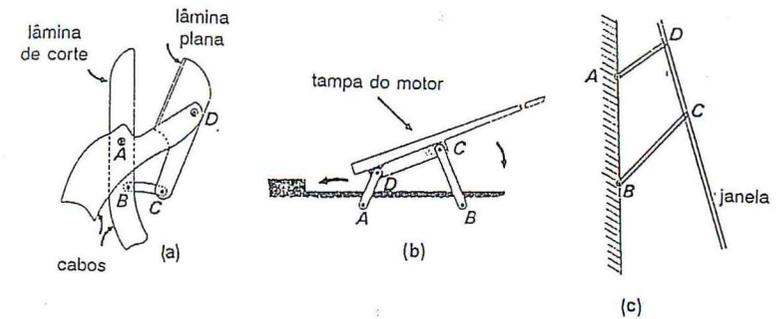
Como o ponto de revolução C está mais próximo do centro da tampa do que B , o sistema articulado opera sempre em posição transversal, uma vez que o elemento de ligação CD se cruza com a estrutura AB . Como consequência, BC gira sempre em sentido contrário ao de AD . Examine um cubo de pedal e, depois de ter analisado o seu funcionamento, construa um modelo de cartão que o simule.

- 4 Desenhe um mecanismo de manivela e oscilante capaz de accionar uma escova de pára-brisas com um ângulo de cerca de 90° .
- 5 Nas casas modernas, em que a falta de espaço é uma constante, são muito cómodos os móveis que se podem dobrar. Bons exemplos do que acabámos de afirmar são as espreguiçadeiras, as camas escamoteáveis em armários, carrinhos de bebé e cadeiras de rodas. A figura seguinte mostra o projecto utilizado no carrinho de bonecas da minha filha. O seu mecanismo baseia-se em dois quadriláteros articulados, interligados, que se dobram e ficam alinhados quando não está a ser utilizado.



- 6 Algumas tesouras de podar fazem um uso muito engenhoso do quadrilátero articulado [ver fig. (a) abaixo]. Ao apertar os cabos, a lâmina de corte aproxima-se da lâmina plana com um duplo movimento de torquês e de corte por deslizamento, que corta os troncos mais eficazmente do que um simples mecanismo de tesouras. Utiliza-se um mecanismo semelhante para conseguir o ajuste perfeito da tampa do motor ou da bagageira de alguns automóveis; também se utilizam sistemas articulados em janelas de projecto moderno para conseguir que a janela fechada se ajuste perfeitamente à moldura, permitindo, além disso, que, ao abri-la, se possa limpar dos dois lados [ver figs. (b) e (c)].

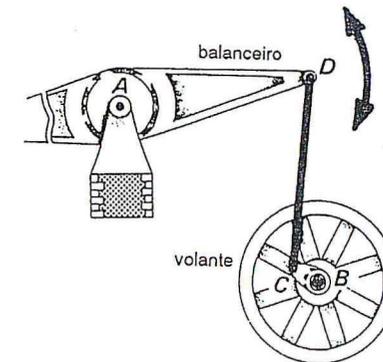
Procure encontrar exemplos de aplicações como estas e averigüe o comprimento que deverão ter as barras para conseguir o efeito desejado.



- 7 No tempo em que se utilizavam máquinas de vapor de balanceiro para accionar um cabrestante encarregado de içar o elevador de um poço de mina, o movimento de vaivém do balanceiro era convertido em movimento de rotação de um grande volante de inércia, mediante um mecanismo de biela e manivela de Grashof, como se vê na figura.

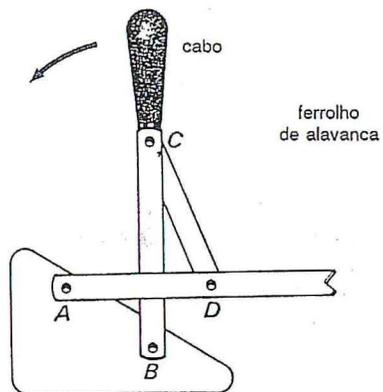
Podemos compará-lo ao mecanismo de pedal de uma máquina de costura, mas numa escala muito maior. Construa um modelo de máquina de balanceiro, incorporando um sistema articulado de Watt num dos extremos e um volante no outro.

O Kew Bridge Engines Trust, de Londres, possui um bom exemplar deste engenho em perfeito funcionamento; é posto a funcionar todos os fins-de-semana.



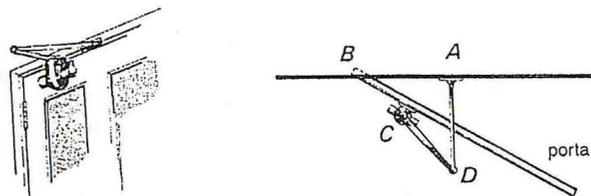
- 8 Uma aplicação sagaz do princípio do quadrilátero articulado é o ferrolho de alavanca (ver figura). Ao empurrar a alavanca para a esquerda, o elemento de ligação CD fica alinhado com BC , fazendo baixar o seguidor AD , que fica alojado numa peça, impedindo assim a abertura da porta.

Construa um modelo deste sistema articulado e verifique se é possível provocar o movimento de AD relativamente a AB quando BC e DC se encontram alinhados.

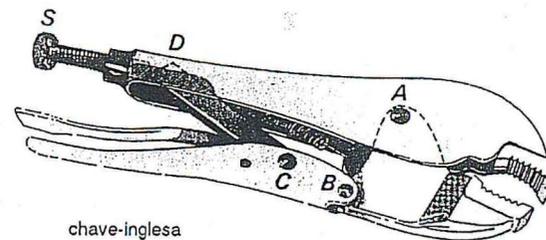


9 Muitas portas estão providas de mecanismos que as obrigam a fechar depois de se passar por elas. Um destes mecanismos baseia-se no quadrilátero articulado. A moldura da porta constitui a estrutura do quadrilátero e a própria porta uma das manivelas. O elemento de ligação CD está ligado, em C , a uma mola que obriga a porta a fechar-se. Um mecanismo amortecedor impede que o faça com demasiada rapidez. Examine um destes mecanismos, meça os comprimentos dos braços articulados e averigüe:

- O ângulo máximo de abertura da porta;
- O ângulo de rotação imprimido à mola em C (que será a variação do ângulo definido pela porta e por CD).

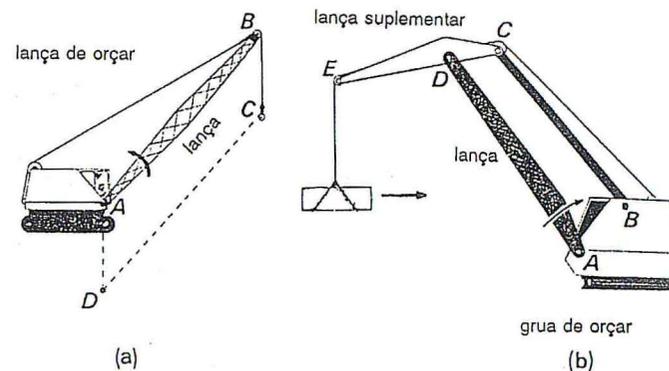


10 Uma chave-inglesa, como a da figura, assenta num quadrilátero articulado, $ABCD$. Esta chave dispõe de um mecanismo de parafuso, S , que permite ajustar o comprimento de AD , modificando, assim, as relações



entre os comprimentos das barras do sistema articulado para porcas de diferentes tamanhos. Tem a seguinte propriedade: quando BCD tende para uma linha recta, deslocamentos grandes dos braços produzem pequenos deslocamentos nas mandíbulas, o que permite agarrar a porca com muita força. Construa um modelo desta chave em cartão para examinar as suas propriedades.

11 O operador de uma grua pode mover o gancho das mais variadas formas. Um dos movimentos de que dispõe o operador é aumentar ou reduzir o ângulo que a lança forma com a horizontal, acção conhecida por «orçar»⁵ [ver fig. (a)]. Quando a lança AB gira em torno de A , o gancho C descreve um arco de circunferência de centro D e raio DC , pelo que $ABCD$ é um paralelogramo. Como consequência, o gancho move-se para cima e para baixo, ao mesmo tempo que se aproxima ou se afasta do operador. Em muitas situações, o operador da grua preferirá apenas um deslocamento horizontal, o que se consegue acrescentando uma segunda lança, mais pequena, no extremo da lança principal [ver fig. (b)]

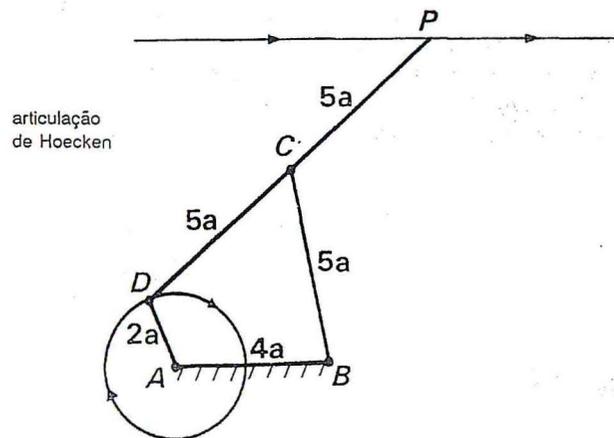


⁵ Orçar ou ir à bolina, por analogia com operação de navegação. (N. da T.)

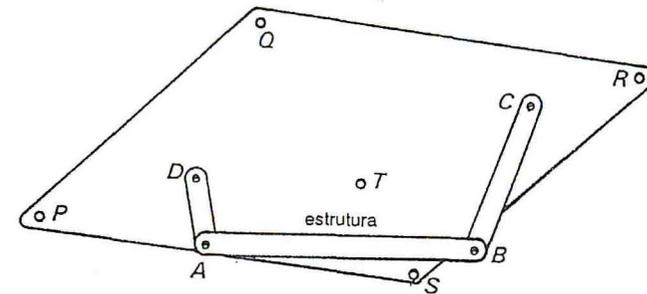
e uma barra, BC , para completar o quadrilátero articulado. Ao levantar a lança principal, a lança suplementar roda em torno de D de tal forma que a altura de E permanece quase constante.

- Construa, em cartão, um modelo de lança AB e suspenda do seu extremo B um peso C que deverá roçar uma folha de papel. Faça girar a lança em torno de A e trace a trajetória descrita por B . Varie o comprimento da suspensão de C e repita a experiência para verificar que C descreve sempre uma circunferência de raio AB , com centro abaixo de A .
- Experimente com diferentes quadriláteros articulados para simular este tipo de grua de orçar.

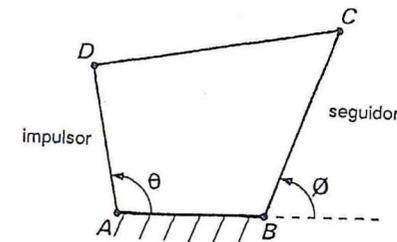
12 O sistema articulado de Hoecken proporciona outra aproximação ao movimento retilíneo. Neste caso, o elemento de ligação DC de um mecanismo de biela e manivela foi prolongado até P , de forma que $CP = DC$. As razões dos lados do quadrilátero articulado são 2:4:5:5, como vemos na figura, e obedecem ao critério de Grashof. Construa um modelo do sistema articulado e investigue as trajetórias descritas por C e P quando a manivela impulsora efectua rotações completas em torno de A .



13 Construa um quadrilátero articulado do tipo oscilante-manivela cujo elemento de ligação CD consista num losango de cartão e investigue as trajetórias de diferentes pontos do losango, como P , Q , R , S e T .

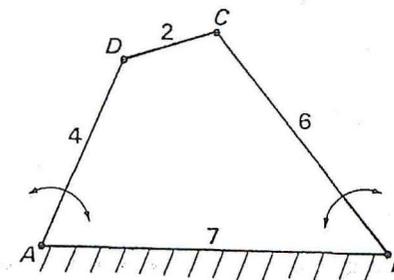


14 Investigue que dependência existe entre o ângulo φ do seguidor, num quadrilátero articulado, e o ângulo θ do lado impulsor. Construa um gráfico que evidencie esta relação em cada um dos modelos que construir.

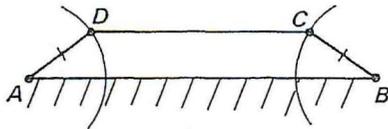


15 Os quatro lados de um mecanismo de duplo oscilante estão na relação 4:7:6:2, como se mostra.

- Determine o ângulo que formam AD e AB nas posições extremas do seu movimento (pode fazer um desenho à escala ou utilizar o teorema do co-seno). Averigüe a amplitude do ângulo de oscilação de AB ;

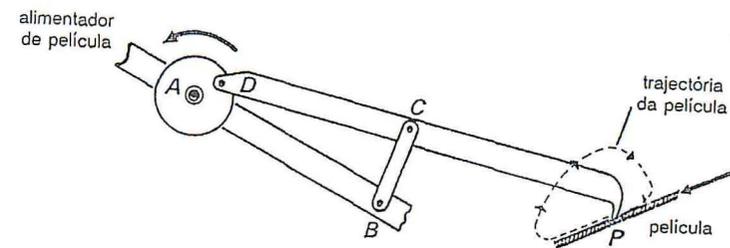


- b) Qual é o ângulo de oscilação de BC ?
 c) Que elemento determina qual dos oscilantes descreverá um ângulo maior?

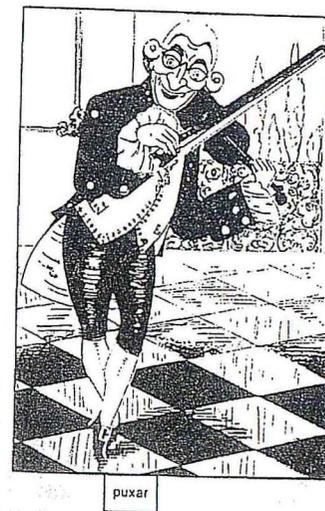


- *16 É necessário projectar um quadrilátero articulado, não Grashof, em que $AD = BC$, capaz de produzir ângulos internos de oscilação com cerca de 90° . Se AB tiver 20 cm, quais os possíveis comprimentos de AD , DC e BC ? Construa um modelo para comprovar o correcto funcionamento do projecto.
- *17 Conceba um mecanismo articulado não Grashof com braços oscilantes externos, capaz de produzir ângulos de oscilação de 120° , sabendo que a estrutura tem 10 cm de comprimento.
- 18 Utilizando modelos de quadriláteros articulados, averigúe se é possível converter algum destes sistemas num quadrilátero cíclico.
- *19 Quando se manipula um quadrilátero articulado, a área por ele definida vai variando. Dados e conhecidos os lados de um quadrilátero articulado, em que posição é máxima a área por ele definida?
- 20 Num quadrilátero articulado existem posições que permitem que 1) um, 2) dois, 3) três, 4) quatro dos seus ângulos internos aumentem de tamanho ao manipulá-lo?
- 21 Num quadrilátero articulado sem cruzamento, a soma dos ângulos internos é 360° . Haverá um resultado similar para sistemas cruzados?
- 22 Um dos mecanismos para alimentar intermitentemente, imagem a imagem, uma câmara de cinema accionada por um motor rotativo a velocidade constante consiste em utilizar um quadrilátero articulado, como se indica.

A manivela impulsora AD gira a velocidade constante e o extremo P do prolongamento do elemento de ligação DC segue uma trajectória calculada para puxar a película, imagem a imagem, mediante uma unha que se crava numa perfuração da película durante o troço «recto» da sua trajectória. Com modelos desta articulação procure descobrir as dimensões correctas que proporcionem o efeito requerido.



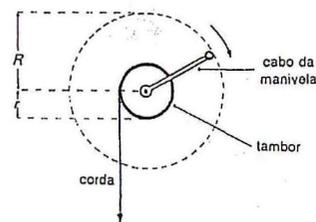
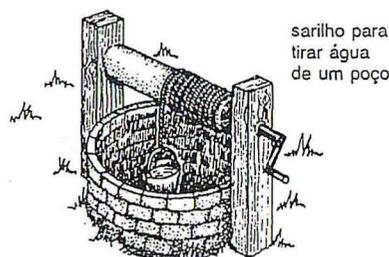
- 23 Lothar Meggendorfer tomou-se célebre pelos seus livros com cenas móveis. As ilustrações mostram um exemplo do seu trabalho. Ao puxar a lingueta de fim de página, não só se movem uma das pernas e os dois braços deste violinista e bailarino, mas também se abre a boca e se erguem as sobrançelas. Todos estes efeitos se conseguem por meio de quadriláteros articulados e triângulos de base variável, utilizados com grande originalidade e engenho. Experimente fazer também uma cena animada.



7 Içar!

Mecanismos de enrolamento

Um dos mecanismos mais simples de que se tem notícia é o sarilho, composto de um cilindro giratório, ou tambor, e de uma manivela. Utiliza-se para tirar água dos poços e já prestava este serviço há mais de 2000 anos. Como é óbvio, quanto maior for o diâmetro do tambor, maior será a quantidade de corda recolhida por cada volta da manivela. Assim, as medidas mais importantes são os raios do cilindro, r , e da manivela, R .



O tambor dá uma volta por cada volta da manivela. A distância percorrida em cada volta pelo extremo da manivela é então $2\pi R$, enquanto a distância percorrida por um ponto da superfície do tambor é $2\pi r$. Por conseguinte, o comprimento de corda içada em cada volta é $2\pi r$. A razão entre estes comprimentos constitui o factor de transmissão do mecanismo.

$$\text{factor de transmissão} = \frac{\text{comprimento da corda enrolada}}{\text{distância percorrida pela manivela}} = \frac{2\pi r}{2\pi R} = \frac{r}{R}$$

Se não houvesse atrito, a razão entre a força requerida para puxar a corda e a tensão nesta seria proporcional ao factor de transmissão. Por exemplo, se $r = 4$ cm e $R = 32$ cm, o factor de transmissão seria $1/8$ e, portanto, ignorando o atrito, a força necessária para fazer girar a manivela e içar um balde de água que pesasse 40 kg seria de 5 kg. Mas, é claro, o que se ganha por aplicar uma força pequena é compensado pelo maior número de voltas que a manivela tem de dar para içar o balde até à superfície.

Quando as cargas a içar são grandes, o sarilho simples não serve. Para solucionar o problema inventaram-se diferentes mecanismos. Hoje em dia, é frequente o eixo da manivela não coincidir com o do tambor, mas estar ligado a este por meio de um trem de engrenagens, de forma a conseguir factores de transmissão muito baixos. O cabrestante que vemos na figura é típico dos portos pesqueiros, onde se utiliza para tirar os barcos da água ou da areia, fazendo-os subir por uma rampa. Utiliza-se também para içar sacos nos moinhos. Podemos encontrar cabrestantes semelhantes nas gruas utilizadas para o reboque de automóveis. No cabrestante da figura, as rodas têm 15 e 90 dentes, respectivamente, pelo que o tambor dá apenas uma volta por cada 6 revoluções da manivela. Para obter um factor de transmissão muito baixo pode utilizar-se uma segunda redução por rodas dentadas e, em certos casos, mediante um parafuso sem-fim.

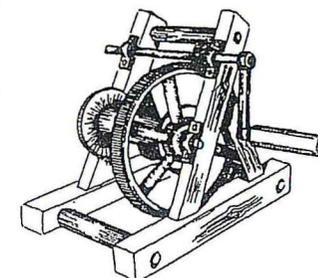
Quando se utiliza um trem de engrenagens para ligar a manivela ao tambor, o factor de transmissão global será dado por

$$\text{factor de transmissão} = \frac{r}{R} \times \text{redução do trem de engrenagens}$$

Portanto, se a manivela do diagrama tivesse um raio de 40 cm e o raio do tambor fosse de 5 cm, o factor global de transmissão seria

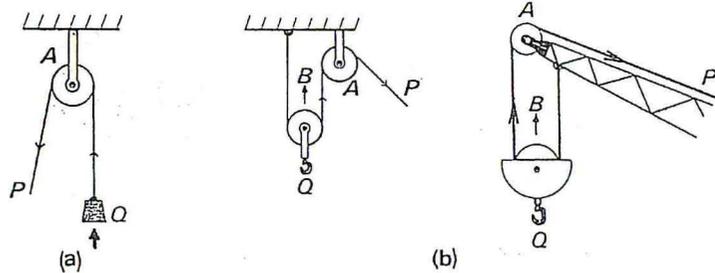
$$\frac{5}{40} \times \frac{15}{90} = \frac{1}{48}$$

Conservo recordações muito claras da minha meninice, quando, com os meus 10 anos, levantava, à base de manivela, blocos de granito com cerca de 3 t com um cabrestante bastante primitivo instalado numa grua.



Muito antes de se utilizarem as rodas dentadas em larga escala já se tinham inventado e utilizado amplamente as roldanas. Atribui-se a Arquimedes (287-212 a. C.) a invenção da roldana composta, mecanismo muito utilizado, até hoje, em barcos à vela, em cargueiros e em toda a espécie de gruas e elevadores.

Consideremos a roldana simples da figura (a). Se puxarmos a corda em P , até recolhermos d metros, o ponto Q elevar-se-á d metros, pelo que o factor de transmissão será dado por



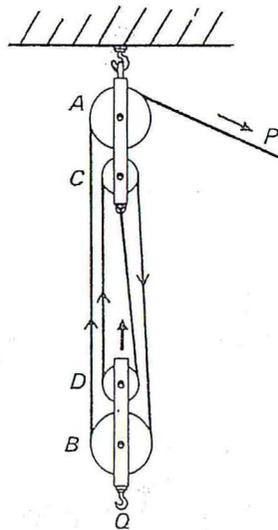
sistema de roldanas

$$\frac{\text{distância percorrida por } Q}{\text{distância percorrida por } P} = \frac{d}{d} = 1$$

Examinemos agora o sistema de roldanas utilizado na figura (b). Para que o gancho Q se eleve d metros é necessário que a corda de ambos os lados da roldana B diminua d metros, o que significa que será preciso arrastar P numa distância de $2d$ metros. Portanto, o factor de transmissão será

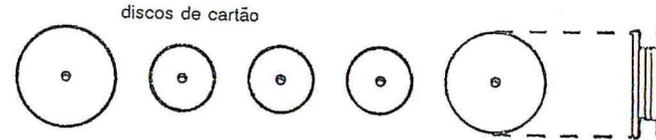
$$\frac{\text{distância percorrida por } Q}{\text{distância percorrida por } P} = \frac{d}{2d} = \frac{1}{2}$$

Aumentando até N o número de roldanas, consegue-se reduzir a $1/N$ o factor de transmissão. A figura da direita mostra um caso particular em que $N = 4$. Para vermos que, neste caso, é de $1/4$ o factor de transmissão, imaginemos que o bloco que contém as roldanas designadas por B e D

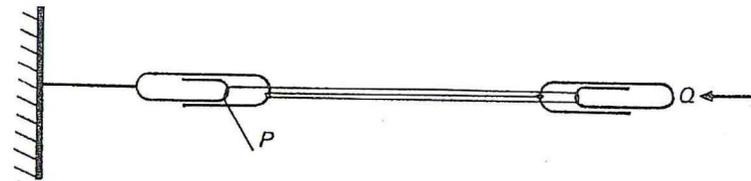


se eleva d metros. Então, as quatro secções de corda, compreendidas entre os dois blocos de roldanas, ficarão todas encurtadas d metros, o que só se pode conseguir se o ponto P for arrastado numa distância de $4d$ metros.

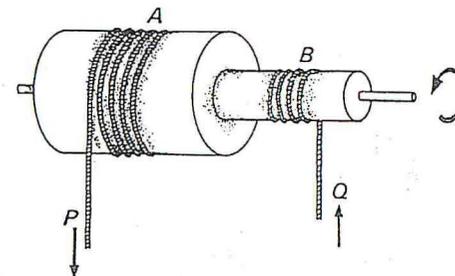
Não há qualquer dificuldade em construir, com os equipamentos clássicos, estes sistemas compostos de roldanas, mas também se conseguem modelos satisfatórios utilizando discos de cartão.



Também o simples clip pode servir para representar um bloco de roldanas. O que vemos na figura corresponderia a um sistema composto com factor de transmissão igual a $1/3$.



Na prática, os sistemas de roldanas costumam utilizar roldanas coaxiais. Na época dos grandes veleiros, quando os velozes *clippers* transportavam carregamentos para todo o mundo, um barco grande, típico, poderia requerer para cima de 1000 sistemas. Eram feitos à mão, de madeira, até que o famoso engenheiro francês Marc Isambard Brunel inventou, em 1803, máquinas que mecanizaram o processo de fabrico. O resultado foi que, em pouco tempo, os pedidos da marinha britânica, que se cifravam em 130 000 sistemas de roldanas por ano, eram produzidos por apenas 10 operários, em lugar dos 110 anteriormente necessários. Os veleiros modernos continuam a utilizar sistemas de roldanas, mas agora são feitos de plástico e metal.



Outro dispositivo simples para conseguir factores de transmissão, grandes ou pequenos, consiste em montar solidariamente, sobre um mesmo eixo, dois tambores ou cilindros giratórios, de forma que, enquanto a corda se vai enrolando num, vai-se desenrolando do outro. Se o raio de A for a e o de B for b , quando os tambores solidários tiverem completado n revoluções, o ponto P ter-se-á deslocado $2n\pi a$ e o ponto Q ter-se-á movido numa distância de $2n\pi b$. Portanto, o factor de transmissão será

$$\frac{\text{distância percorrida por } Q}{\text{distância percorrida por } P} = \frac{2n\pi b}{2n\pi a} = \frac{b}{a}$$

É muito fácil construir um modelo destes sistemas utilizando carrinhos de linha e um lápis ou uma cavilha. Ligando entre si vários destes sistemas, conseguem-se factores de transmissão, quer muito grandes, quer muito pequenos.

Podemos encontrar uma adaptação engenhosa deste sistema na roldana diferencial *Weston*, muito utilizada para elevar grandes pesos, por exemplo, para içar o motor completo de um automóvel ao efectuar uma reparação. Neste sistema, a corda é habitualmente substituída por uma corrente que forma um anel contínuo. Enquanto as roldanas A e B giram conjuntamente no sentido dos ponteiros do relógio, a corrente entre A e C enrola-se, mas a corrente que vai de B a C desenrola-se. Numa volta completa do bloco A - B, o ponto P desloca-se $2\pi a$, enquanto o anel de corrente que vai desde A até B, dando a volta por B, é encurtado $2\pi a - 2\pi b$. O efeito que se produz é a elevação de Q numa distância de $1/2(2\pi a - 2\pi b)$, isto é, uma distância de $\pi(a - b)$. O factor de transmissão de Q em relação a P é, por conseguinte,

$$\frac{\text{distância percorrida por } Q}{\text{distância percorrida por } P} = \frac{\pi(a - b)}{2\pi a} = \frac{a - b}{2a}$$

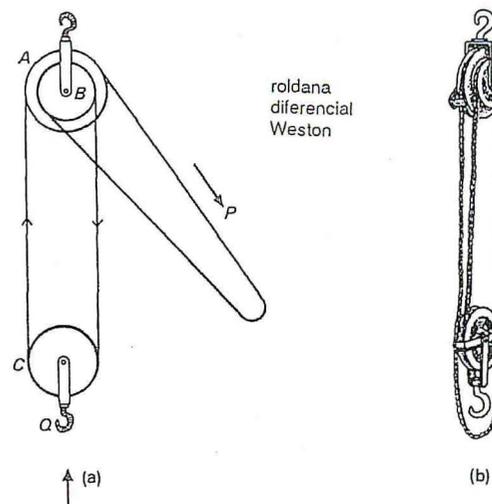
Para compreender a eficácia deste sistema, suponhamos que $a = 8$ cm e $b = 7,5$ cm. Então,

$$\frac{(a - b)}{2a} = \frac{8 - 7,5}{16} = \frac{0,5}{16} = \frac{1}{32}$$

Então, Q só se eleva 1 cm por cada 32 cm de deslocamento de P.

Quando vemos manejar uma roldana diferencial *Weston*, tem-se a impressão de que os operários puxam, em P, o que parece ser uma corrente

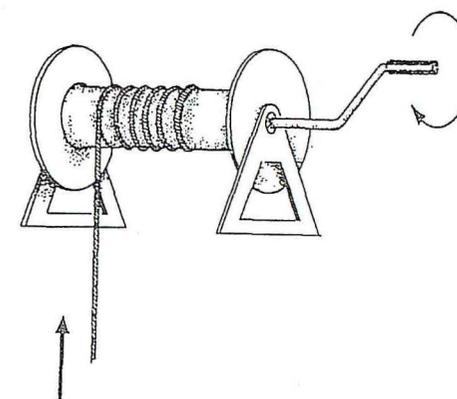
sem fim para conseguir pequenas variações na altura de Q, mas, em troca, é possível elevar grandes cargas em Q.



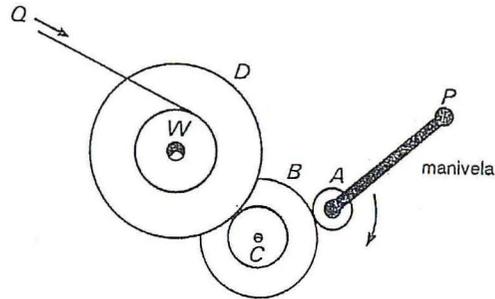
roldana diferencial Weston

Exercício 7

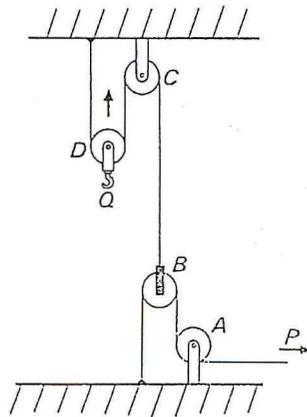
- O tambor de um sarilho tem um raio de 9 cm e o braço da manivela mede 36 cm. Determine a velocidade com que a corda se enrola no tambor, sabendo que se faz girar a manivela a uma rotação por segundo. Que relação existe entre a velocidade da mão do operador e a velocidade da corda?



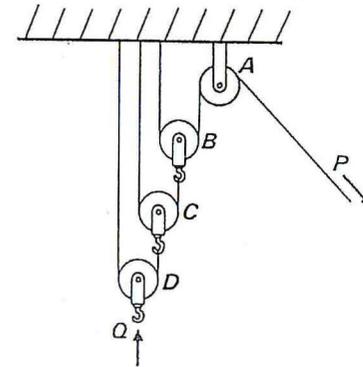
- 2 A manivela de um cabrestante está ligada a um eixo provido de um pinhão A com 12 dentes. O pinhão A engrena numa roda B, com 36 dentes, que gira coaxial e solidariamente com o pinhão C, de 16 dentes. O pinhão C engrena com a roda D, de 64 dentes. Esta é coaxial e solidária com o tambor de enrolamento W. O raio da manivela mede 40 cm e o do tambor 10 cm. Qual será o factor de transmissão da corda Q em relação ao cabo da manivela?



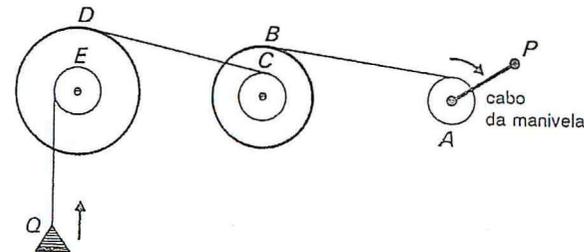
- 3 Projecte um sistema de três roldanas cujo factor de transmissão seja $1/3$.
- 4 No sistema de roldanas que se vê na figura, as roldanas A e C giram em torno de eixos fixos, enquanto as roldanas B e D podem deslocar-se. Determine o factor de transmissão de Q em relação a P. Se fosse preciso que Q içasse uma carga a uma altura de 12 m, quantos metros de corda seria necessário puxar em P?



- 5 a) Usando 6 roldanas, projecte um sistema com um factor de transmissão de $1/6$.
- b) Como se poderia construir um sistema, com apenas 5 roldanas, que tivesse o mesmo factor de transmissão?
- 6 Determine o factor de transmissão de Q relativamente a P no sistema de roldanas da figura. Qual seria o factor de transmissão se se acrescentasse uma outra roldana, mas segundo o mesmo esquema?
Será capaz de estabelecer um resultado geral para N roldanas ligadas de igual modo?



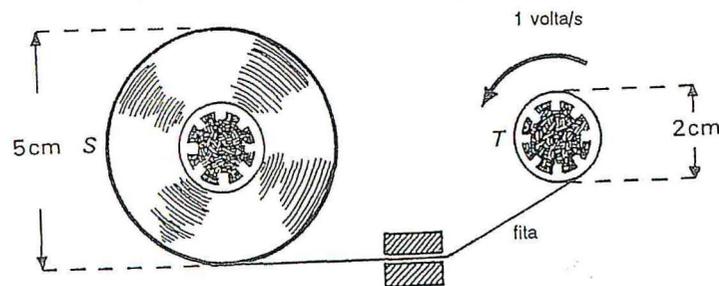
- 7 Projecte um sistema de roldanas cujo factor de transmissão seja $1/12$. Há várias soluções diferentes. Qual delas utiliza o menor número de roldanas?
- 8 Cinco tambores, A, B, C, D e E, cujos raios são 4 cm, 12 cm, 4 cm, 20 cm e 4 cm, respectivamente, estão ligados por cordas, como se vê na figura. Sabendo que o braço da manivela tem 20 cm de raio, determine o factor de transmissão de Q relativamente a P.



- 9 Uma roldana diferencial *Weston* utiliza rodas de 10 cm e 9,5 cm de raio. Qual o seu factor de transmissão? Supondo que a sua eficiência é de 50 % (isto é, metade do trabalho realizado é utilizado para vencer o atrito do sistema), que peso se poderia içar aplicando uma força de 20 kg?
- 10 Sabendo que um sistema diferencial *Weston* tem um factor de transmissão de 1:50, quanto medirá o raio da roldana maior se o da menor medir 12 cm?
- 11 Tome nota das aplicações de roldanas compostas e cabrestantes que observe em:
- Guindastes-torres, como os utilizados na construção civil;
 - Guindastes rolantes usados em trabalhos de engenharia;
 - Gruas portuárias;
 - Guindastes de barcos de carga;
 - Veleiros;
 - Comportas de canais;
 - Entradas de minas;
 - Elevadores de sacos em moinhos e armazéns;
 - Garagens e camionetas para reboques;
 - Reboques para transporte de barcos;
 - Postes de uma rede de ténis;
 - Canas de pesca.

Analise, em cada caso, os factores de transmissão correspondentes. Construa modelos para ilustrar os mecanismos.

- *12 Em muitas situações, o diâmetro efectivo do tambor de enrolamento varia notavelmente, porque o material enrolado forma camadas sobre o tambor. As bobinas que alojam a película de um projector de cinema ou as fitas magnéticas áudio ou vídeo são exemplos típicos.



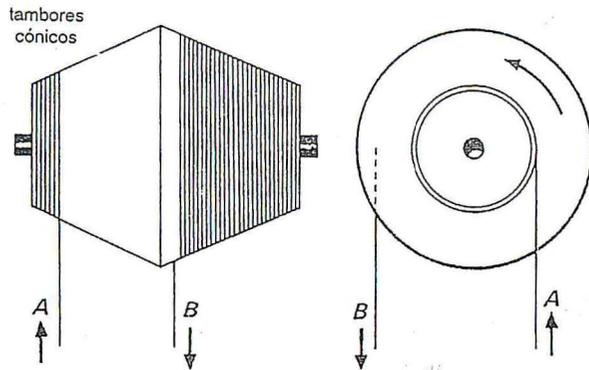
Observando um gravador de áudio, vê-se que a bobina *T*, encarregada de recolher a fita magnética, gira mais ou menos a uma rotação por segundo. O diâmetro inicial das bobinas de uma *cassette* áudio C60 é de 2 cm, mas, quando a fita está completamente enrolada, depois de meia hora de funcionamento, a bobina já tem 5 cm de diâmetro.

- Quantas voltas⁶ dá a bobina *T* em meia hora? Saberemos assim quantas camadas de fita contém a bobina cheia, o que permite deduzir 1) a espessura da fita magnética, 2) o comprimento da fita de uma *cassette* áudio C60.
- Qual a gama de factores de transmissão do impulsor *T* para o seguidor *S*?
- Determine as medidas dos raios das bobinas e da fita acumulada ao fim de *t* segundos. Deduza daqui uma expressão para o factor de transmissão em função do tempo.
- Em que momento passa a fita à velocidade de 11 cm/s? (*Pista*: o comprimento da fita contida na bobina é proporcional à área da secção transversal.)

- *13 Quando um poço de mina é muito profundo, pode acontecer o peso dos cabos que sustentam o elevador superar o da cabina carregada, pelo que a carga total a que está submetida a máquina de tracção varia consideravelmente à medida que a cabina sobe. Uma forma de uniformizar a carga consiste em utilizar um tambor de forma cónica, cujo raio efectivo varia ao subir ou baixar a cabina. Este tambor cónico tem sulcos para alojar o cabo. O enrolamento do cabo começa pelo extremo menor, quando a carga é máxima, e vai subindo gradualmente pela superfície do cone até à secção transversal maior, quando quase todo o cabo já foi recolhido. Normalmente, as cabinas dos elevadores de minas funcionam aos pares, uma contrabalançando a outra, de forma que uma cabina desce, enquanto a outra sobe.

- Sabendo que os diâmetros menor e maior do tambor cónico têm 2 m e 4 m de comprimento, respectivamente, e que o tambor dá 100 voltas para se esvaziar, ou se encher, determine o comprimento aproximado do cabo enrolado em cada metade do tambor;
- Explique a razão pela qual a distância que uma cabina sobe, na unidade de tempo, não é igual à distância que a outra cabina desce nesse mesmo tempo;

⁶ A indicação do contador dos aparelhos não é muito fiável, pois costuma não ser igual quando se usam aparelhos diferentes. (*N. da T.*)



c) Represente graficamente as distâncias percorridas pelas cabinas A e B em função do número de revoluções do tambor, a partir do ponto em que A se encontra no fundo do poço e B no cima.

14 Um ilusionista precisa de uma caixa mágica que dê a impressão de que o cordel Q sai da caixa a uma velocidade dupla da velocidade com que entra por P. Quantos mecanismos diferentes, que produzam este efeito, é capaz de inventar?

Tente agora preparar uma caixa que «produza» três vezes mais fio do que aquele que consome!

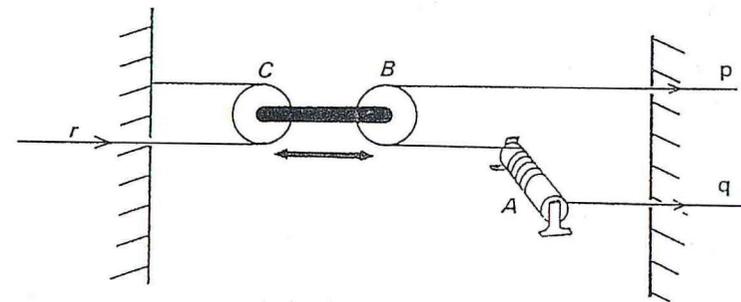


15 Antes de os computadores digitais terem alcançado a perfeição actual, muito estudo e trabalho foram dedicados ao desenho de computadores analógicos, em que uma quantidade podia ser representada por uma medida física, como o comprimento, a diferença de potencial eléctrico ou a temperatura. Um destes dispositivos utilizava arames e roldanas; um dos componentes fundamentais deste computador era um mecanismo que adicionava os deslocamentos lineares, p e q . Conceba um mecanismo para montar numa caixa, de tal forma que, ao extrair por um dos lados dela dois arames, de comprimentos p e q centímetros, respectiva-

mente, entrem na caixa, pelo lado oposto, $(p + q)$ centímetros de um terceiro arame.



16 O mecanismo da figura é formado por um tambor, A, que gira em torno de um eixo fixo, e ainda por duas roldanas, C e B, cujos eixos estão ligados a uma estrutura móvel que os constrange a moverem-se em conjunto.

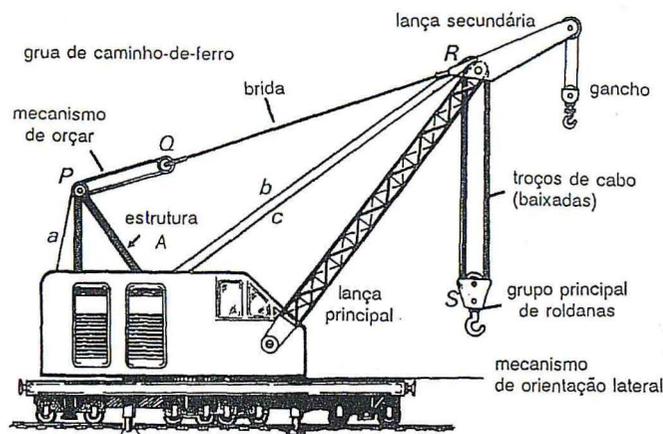


Quanto se move r quando se puxa p 12 cm para a direita e se puxa q 7 cm também para a direita?

Que operação aritmética representa este mecanismo?

17 A figura seguinte mostra uma grua de caminho de ferro cuja concepção é típica das gruas destinadas a elevar grandes pesos. Concretamente, as gruas construídas para a indústria petrolífera do mar do Norte, como a grua flutuante *Heerema*, cuja capacidade de elevação alcança a assombrosa cifra de 5000 t, baseiam-se todas neste mesmo projecto básico. A grua da p. 142 utiliza três mecanismos de enrolamento fundamentais:

a) O braço ou lança principal é subida ou baixada (operação designada vulgarmente por *orçar*) por meio de um sistema de roldanas que liga o topo da estrutura fixa, A, à extremidade da lança, R, por intermédio de duas barras ou cabos metálicos, designados por *bridas*. Os blocos de roldanas, para a operação de *orçar*, podem ter muitas roldanas,



pelo que o comprimento do cabo a , a enrolar, tem de ser muitíssimo maior que o comprimento de que deve ser encurtado PQ . Se a tensão total nas bridas for de 120 t e se cada um dos grupos de roldanas P e Q tiver seis roldanas, quantos troços de cabo (baixadas) haverá entre P e Q ?

Que quantidade de cabo será necessário recolher para que PQ diminua 1 m? Qual será o valor da tensão no cabo a ?

- b) O gancho principal é accionado pelo grupo S , dotado de 5 roldanas que trabalham em conjugação com outro grupo de 5, na extremidade da lança, R . O cabo c , procedente do sarilho principal, passa sobre as roldanas de R e em torno das roldanas de S , dando origem a 10 troços (baixadas) entre R e S antes de ficar fixo no extremo da lança.

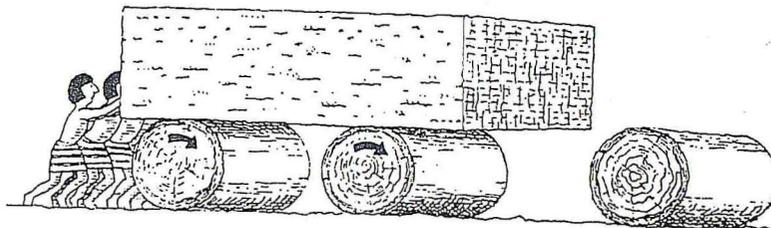
Se a grua estiver a içar uma carga de 140 t, de quanto será a tensão no cabo c ?

- c) O gancho mais pequeno, suspenso da extremidade da lança suplementar, é utilizado para içar rapidamente cargas leves. Supondo que o cabo que sustenta o gancho tem duas baixadas e que o cabo b é enrolado à razão de 4m/s, a que velocidade será içada a carga?

8 Rodar sem pressa

Cilindros e rodas

Os homens construíram monumentos megalíticos desde tempos imemoriais, como as pirâmides do Egipto, ou Stonehenge⁷, ou os monólitos da ilha de Páscoa, no Pacífico⁸. Podemos imaginar que, para o transporte daqueles grandes blocos de pedra, se serviram de troncos de árvore como cilindros.

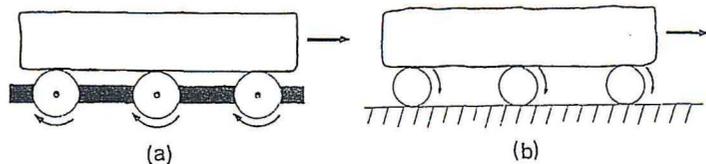


Os cilindros podem ser utilizados de duas formas. Consideremos primeiro a situação em que todos eles giram em torno de eixos fixos [ver figura (a)]. Encontramo-los, assim aplicados, nos transportadores de bagagem dos aeroportos e também, em escala muito maior, nas fábricas de aço para transportar lingotes pesados. Se os cilindros tiverem diâmetro d , ao fim de uma revolução, cada ponto da sua superfície terá percorrido uma distância πd e o objecto por eles transportado terá avançado essa mesma distância. Contudo, quando os cilindros têm liberdade para rolar sobre o solo [ver figura (b)], o objecto que está a ser transportado avança $2\pi d$ por cada

⁷ Monumento megalítico da Grã-Bretanha. (N. da T.)

⁸ Estátuas de tamanho colossal, talhadas numa pedra só, representando cabeças de uma raça de gigantes como que constituindo uma guarda avançada da ilha. (N. da T.)

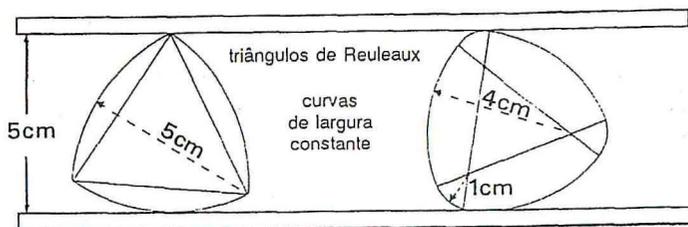
revolução dos cilindros, pois ao deslocamento sofrido pelo objecto relativamente aos cilindros temos de adicionar a distância que estes percorreram sobre o solo.



Para ficar convencido deste resultado, o melhor é fazer uma experiência, utilizando, como cilindros, lápis, tubos de cola ou outros objectos cilíndricos adequados. Faça deslocar um livro sobre eles e meça a distância percorrida pelo livro e a percorrida pelos cilindros.

A propriedade fundamental do cilindro é a de qualquer secção transversal ter o mesmo diâmetro. Mas, surpreendentemente, não é o círculo a única figura que goza desta propriedade, pois existe uma infinidade de curvas que a compartilham; são as chamadas *curvas de largura constante*⁹.

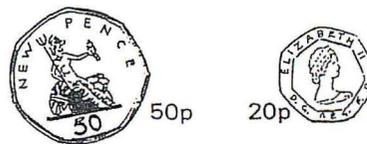
Entre as curvas não circulares desta família, as mais simples baseiam-se em triângulos equiláteros e são muitas vezes referidas como *triângulos de Reuleaux*, em homenagem ao engenheiro alemão Franz Reuleaux (1829-1905), que foi o primeiro a registar as suas propriedades. Recortando as peças em cartão e colocando-as entre duas régua paralelas separadas 5 cm, estas peças mantêm-se sempre em contacto com as duas régua, qualquer que seja a forma como as fazemos rodar.



Podemos construir figuras semelhantes com base em polígonos regulares, com qualquer número ímpar de lados. Um bom exemplo são as moedas britânicas de 20 e de 50 *pence*, cuja forma se aproxima de um heptágono regular. Apesar da sua forma poligonal, o facto de terem largura constante

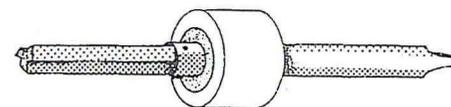
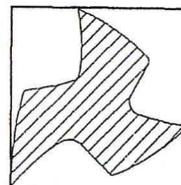
⁹ Ver também, a este propósito, o livro, do mesmo autor, *Actividades Matemáticas*, igualmente publicado pela Gradiva na mesma colecção. (N. da T.)

torna-as aptas a serem usadas nas máquinas de jogo, vulgarmente designadas por *papa-níqueis*, que são concebidas para só aceitarem moedas de diâmetro bem determinado.



Em 1914, o engenheiro inglês Harry James Watts reconheceu as possibilidades que ofereciam as brocas cuja secção transversal fosse um triângulo de Reuleaux para perfurar orifícios quadrados. Ao recortar, do triângulo, parte do contorno curvo, para definir uma aresta cortante, e ao fazer girar a broca dentro de um molde quadrado, usando um eixo impulsor flexível (porquê?), a broca toca sempre os quatro lados do quadrado, originando um orifício de forma aproximadamente quadrada, deixando apenas os ângulos ligeiramente arredondados.

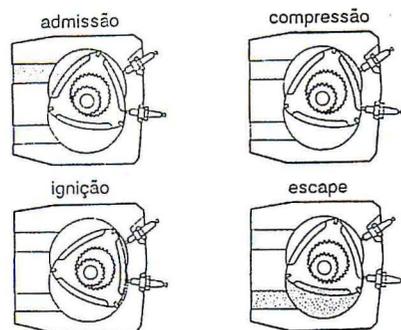
secção transversal de broca



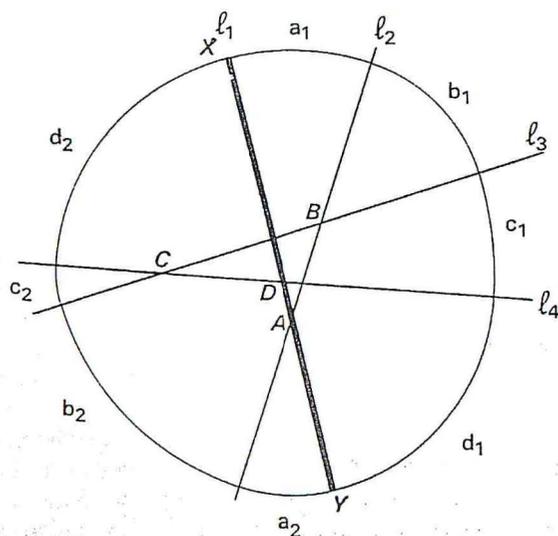
broca de Watts

O triângulo de Reuleaux também tem sido usado com sucesso no projecto do motor rotativo *NSU-Wankel*, onde constitui a secção transversal do motor. Este motor, que elimina os desgastes e as vibrações provocadas pelo movimento alternativo dos êmbolos de um motor convencional, abre grandes perspectivas. Contudo, tal como aconteceu em 1901, quando foi construído um motor de vapor que funcionava segundo princípios similares, existem dificuldades para manter uma hermeticidade satisfatória entre o rotor e as paredes do cilindro.

O que talvez seja surpreendente é saber que existem curvas de largura constante que nem sequer possuem simetria central. Um método muito eficaz para a construção destas figuras consiste em começar por traçar um número qualquer de rectas que se intersectem duas a duas. No exemplo,



utilizaram-se quatro rectas, l_1 , l_2 , l_3 e l_4 . Depois desenhamos arcos com centro no ponto de intersecção das rectas que o limitam. A figura do exemplo foi desenhada traçando, primeiro, o arco a_1 , com raio arbitrário e centro em A . A seguir traçou-se o arco b_1 , com centro em B , o arco c_1 , com centro em C , o arco d_1 , com centro em D , e assim sucessivamente, ajustando o raio em cada etapa, para assegurar a ligação dos arcos contíguos. Para vermos que esta figura possui a propriedade requerida, isto é, largura constante, consideremos XY , a porção de l_1 intersectada pela curva. Façamo-la girar em torno de A , no sentido dos ponteiros do relógio,



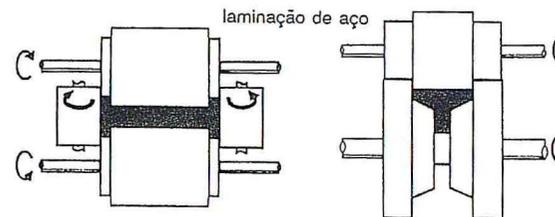
curva de largura constante construída a partir de rectas secantes

até fazê-la coincidir com l_2 ; depois, em igual sentido, em torno de B , até que coincida com l_3 e, por fim, em torno de C , até que coincida com l_4 . À medida que a rotação se processa, os pontos X e Y descrevem a curva e estabelecem a propriedade da largura constante.

É também interessante notar que o perímetro destas figuras é sempre $\pi \times$ (largura da figura), isto é, têm o mesmo perímetro que um círculo que tivesse o mesmo diâmetro.

Os eixos giratórios e os cilindros desgastam-se com o uso e acabam por apresentar secções não circulares, ainda que de largura constante.

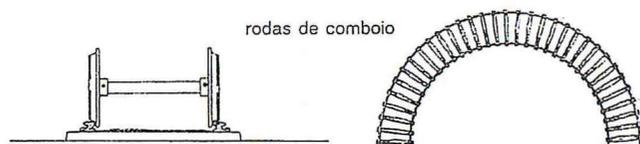
Nas fábricas de aço utilizam-se grandes cilindros para o tratamento, a elevadas temperaturas, de lingotes de aço, que são transformados em vigas, carris de caminho-de-ferro, perfis em T ou em I, ou qualquer outra secção que seja necessária. A figura abaixo mostra os pares de cilindros utilizados para produzir uma secção em I e outra em T. Dado que o processo de compressão reduz a área da secção transversal do material quando este passa entre os cilindros, a barra que sai é mais comprida do que o lingote que foi introduzido entre os cilindros. Este processo é particularmente impressionante quando um cubóide de metal incandescente se converte, ante os nossos olhos, numa lâmina de aço, fina e comprida, depois de ter passado por várias séries de cilindros que vão reduzindo cada vez mais a sua espessura. Averigúe o factor de redução correspondente a cada estágio da laminação.



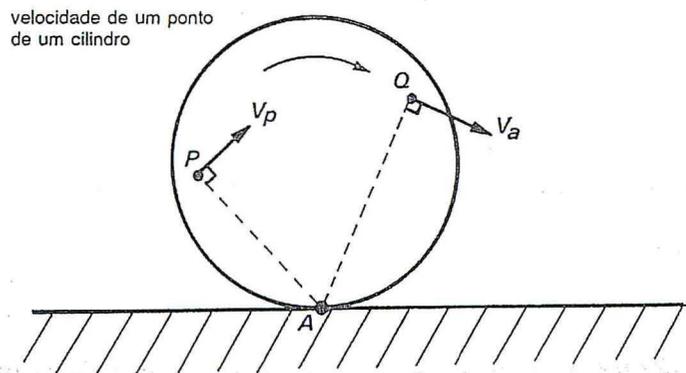
Os cilindros são muito utilizados nos processos de fiação das indústrias de lanifícios; em particular, o processo de cardagem utiliza cilindros engranados de tal forma que os cilindros adjacentes são forçados a deslizar um sobre o outro. Sugiro que visite uma fábrica de fiação, para ver em funcionamento uma máquina de cardar.

O deslizamento dos cilindros torna-se essencial numa situação muito curiosa. As rodas dos comboios e de todo o material circulante dos caminhos-de-ferro estão rigidamente ligadas aos seus eixos, pelo que as rodas, montadas nos extremos de cada eixo, giram solidariamente. Se as rodas

girassem, sem deslizamento, sobre os carris, ambas percorreriam distâncias exactamente iguais. Isto está certo quando a via é recta, mas, nas curvas, a distância correspondente ao carril exterior é maior que a do interior; portanto, para que uma locomotiva e as carruagens que reboca possam fazer uma curva, é necessário que pelo menos uma das rodas de cada eixo patine sobre o carril.

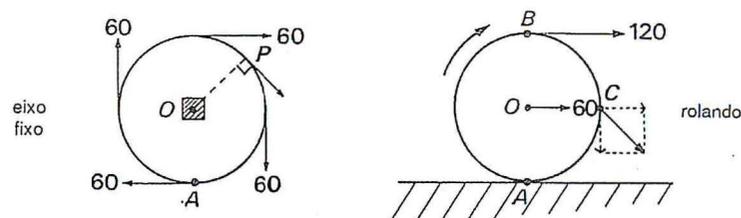


Quando uma roda ou um cilindro rodam sobre uma superfície plana, é importante conhecer a velocidade que tem cada ponto do cilindro num qualquer instante dado. Podemos deduzi-la de diversas formas, mas a mais proveitosa resulta de considerar que, se não há deslizamento, o ponto de contacto com a superfície de rodagem, A , se encontra momentaneamente em repouso, podendo considerar-se que a roda ou cilindro está, nesse instante, girando em torno de A . Por isso se diz que A é o *centro instantâneo de rotação* do cilindro. Vemos na figura as velocidades V_p e V_q de dois pontos típicos, P e Q , do cilindro. Dado que este está a girar em torno de A , a direcção das velocidades de P e Q será perpendicular a AP e a AQ , respectivamente. Além disso, se a velocidade angular do cilindro for W , teremos que $V_p = WAP$ e $V_q = WAQ$, pelo que a velocidade de qualquer ponto do cilindro é proporcional à sua distância ao ponto de contacto, A .



É muito importante apreciar a diferença entre uma roda ou cilindro em rotação em torno de um eixo fixo e a mesma roda ou cilindro girando com a mesma velocidade angular, mas rolando, sem deslizamento, sobre uma superfície plana.

Imaginemos que uma roda gira em torno de um eixo fixo e que cada ponto da sua circunferência se move a 60 km/h. A direcção da velocidade de um ponto típico P será a da tangente à circunferência, pois esta forma um ângulo recto com a recta OP que passa pelo centro de rotação.

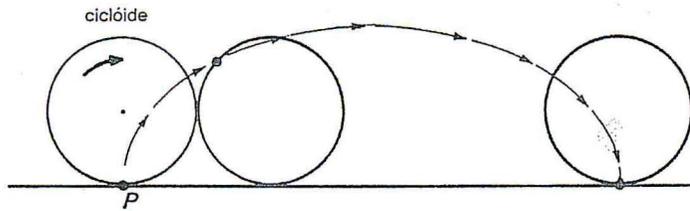


Contudo, se a roda gira sobre si mesma com igual velocidade, mas está ao mesmo tempo a rolar sobre uma superfície plana, o seu centro O move-se, agora, para a direita com uma velocidade de 60 km/h, enquanto A se encontra, momentaneamente, em repouso. A velocidade de qualquer ponto da roda pode ser determinada pela soma vectorial de uma velocidade de 60 km/h da esquerda para a direita e da velocidade correspondente ao mesmo ponto supondo que o eixo O se encontra fixo. Em consequência, B tem uma velocidade de 120 km/h para a direita, enquanto C tem uma velocidade que é a composição de uma de 60 km/h para a direita e de outra de 60 km/h dirigida para baixo, o que dá uma velocidade de $60\sqrt{2}$ km/h com um ângulo de depressão de 45° com a horizontal.

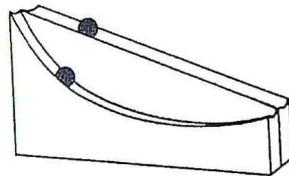
Em geral, deduz-se que, quando um automóvel viaja a uma velocidade de V km/h, o ponto de cada roda, situado a maior distância da superfície da estrada, move-se a uma velocidade de $2V$ km/h.

Suponhamos que um pedaço de cascalho fica preso ao pneumático de um automóvel que se desloca à velocidade de 100 km/h; quando atinge o topo da roda, o pedaço de cascalho estará a mover-se a 200 km/h. Se, nesse momento, fosse cuspidor da roda, poderia ser mortal para quem se encontrasse na sua trajectória.

A trajectória descrita por um ponto P , situado na superfície de uma roda em movimento, é uma curva chamada cicloide que possui muitas propriedades interessantes; uma delas é que, ao invertê-la, define a curva de tempo mínimo de descida para um corpo que caísse deslizando, sem fricção.

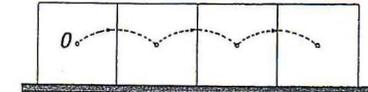
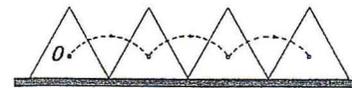


Para comprovar, na prática, que assim é, comecemos por gerar uma ciclóide, fazendo rodar um pires ou a tampa de um boião ao longo de uma régua e traçando a trajectória de um ponto do seu contorno. Construamos agora, com cartão forte ou madeira prensada, uma rampa com o perfil de uma ciclóide invertida, composta por duas peças idênticas, separadas por um espaço, que formarão um carril por onde pode rolar um berlinde. Ao lado da pista cicloidal construamos uma rampa plana (ver figura) e deixemos cair dois berlindes pelas rampas adjacentes, de forma que partam e concluam a descida nos mesmos pontos. Concluiremos que o berlinde que desce pela rampa cicloidal chega sempre antes do outro, apesar de aquela ser mais comprida e ter uma parte que sobe. A mesma técnica permite-nos comparar a pista cicloidal com rampas com outros perfis e chegar sempre à conclusão de que a pista cicloidal é a mais rápida.



Até agora nada se disse sobre a propriedade que distingue a roda do cilindro, embora, por experiência, saibamos que, ao contrário dos cilindros, as rodas têm necessariamente de ser circulares. Para focar a atenção nos requisitos a que tem de obedecer uma roda, notemos que a carga deslocada por uma roda, seja de automóvel, de camião, ou de comboio, é suportada pelo eixo e que, quando a roda rola sobre uma superfície plana, a carga tem de viajar segundo uma linha recta paralela à superfície. Para que assim aconteça, o eixo tem de se encontrar sempre à mesma distância da superfície, o que só acontecerá quando a roda for circular e o eixo passar pelo seu centro. A figura mostra as trajectórias seguidas pelo centro de um

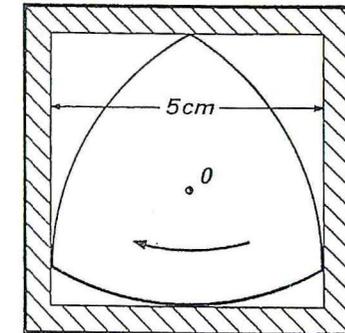
triângulo equilátero e de um quadrado, quando estes rodam, e aí se vê que o eixo e a sua carga se moveriam aos trancos, pelo que estas figuras não podem servir para perfis de rodas.



Exercício 8

1 Construa, em cartão, um *triângulo de Reuleaux* de 5 cm de diâmetro.

- Coloque o triângulo entre duas réguas fixas, separadas 5 cm. Faça rodar o triângulo sobre uma das réguas e verifique que, ao rodar, aquele toca sempre a outra régua;
- Faça um pequeno orifício no centro do triângulo e trace o lugar geométrico que este descreve quando o triângulo roda sobre o bordo de uma régua;



- Numa folha de cartolina faça um buraco quadrado com 5 cm de lado e aloje o triângulo no seu interior. Faça girar o triângulo e observe que este permanece sempre em contacto com os quatro lados do quadrado. Além disso, trace o lugar geométrico do centro O do triângulo quando este gira dentro do quadrado.

Porque faria o triângulo de Reuleaux um mau serviço como roda?

Porque é necessário que a broca de orifícios quadrados de Watts utilize um porta-brocas especial?

2 Construa curvas de largura constante com base a) num pentágono regular, b) num heptágono regular.

Estime o perímetro destas figuras, quer fazendo rolar uma peça bem recortada, quer colocando cuidadosamente um cordel sobre o seu con-

torno. Meça a largura das peças e determine, com uma calculadora, a razão

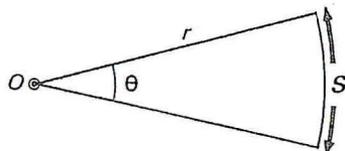
$$\frac{\text{perímetro da peça}}{\text{largura da peça}}$$

com aproximação até às centésimas. Compare o resultado com o valor de π .

- *3 Demonstre que o perímetro dos triângulos de Reuleaux, de que falámos na p. 144, é 5π cm. Note que o comprimento s do arco de circunferência de raio r , correspondente a um ângulo no centro de amplitude θ , é dado por

$$s = r\theta \text{ quando } \theta \text{ está expresso em radianos}$$

$$s = \frac{r\theta \cdot \pi}{180} \text{ quando } \theta \text{ está expresso em graus}$$



- 4 Construa uma curva irregular de largura constante, aplicando, para três rectas, o método das rectas secantes.

Que sucederá ao aplicar o método a apenas duas rectas?

- *5 Demonstre que o perímetro da curva de largura constante desenhada na p. 146, a partir de quatro rectas secantes, é πXY .

- 6 Procure encontrar exemplos de aplicação prática de cilindros, como

- Espremedor de roupa molhada;
- Transportadores de bagagem nos aeroportos;
- Plataformas de carga de camiões nos grandes armazéns;
- Fábricas de aço;
- Tambores de laminação para fabricar lâminas de aço ou vigas com diferentes perfis;
- Máquinas rotativas de imprimir jornais;
- Suportes de correias transportadoras;
- Máquinas de estampar tecidos;
- Transporte de garrafas ou boiões de conserva em fábricas de produtos alimentícios.

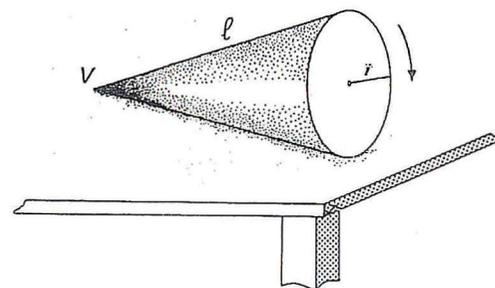
- 7 Conceba um sistema de tambores de laminação para fabricar os perfis utilizados nas vigas horizontais dos caminhos-de-ferro, cuja secção transversal é a que se mostra na figura.



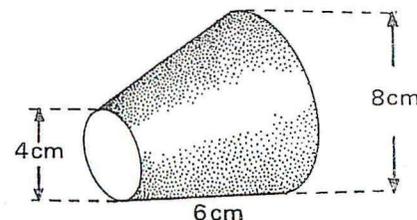
- 8 Um cone, cuja base tem raio r e cuja geratriz tem comprimento l , roda sobre uma superfície horizontal e plana.

Descreva o que acontece ao cone.

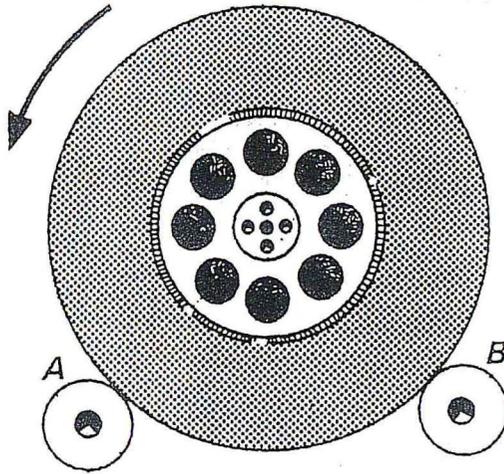
Supondo que o cone retorna ao ponto de partida, depois de ter efectuado duas revoluções completas em torno do seu eixo de simetria, que podemos dizer sobre o ângulo do cone?



- 9 Consideremos um tronco de cone cujas secções circulares máxima e mínima têm, respectivamente, diâmetros de 8 cm e 4 cm. A geratriz do tronco de cone mede 6 cm. Descreva, com detalhe, a área varrida pelo cone quando roda sobre uma superfície plana. Quantas voltas sobre si mesmo terá de dar o cone para regressar ao ponto de partida?

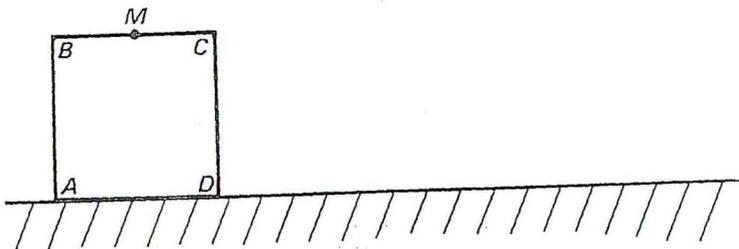


- 10 Numa garagem, para testarem um automóvel, montaram duas rodas motrizes sobre dois tambores A e B (ver figura). A roda motriz tem 50 cm de diâmetro e gira, no sentido anti-horário, a uma velocidade que equivaleria a 100 km/h na estrada. Os tambores A e B têm ambos um diâmetro de 10 cm. Calcule a velocidade angular dos tambores em revoluções por minuto.

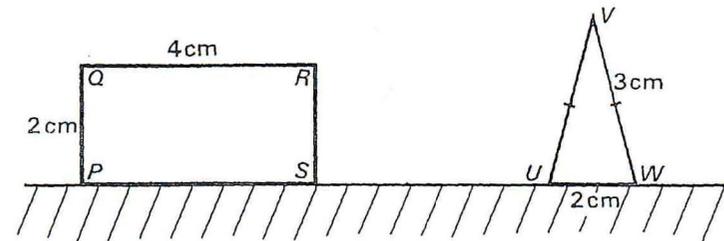


- 11 Faça rodar um quadrado ABCD sobre uma linha recta. Descubra a trajectória descrita pelo ponto A.

O quadrado começa a rodar em torno do ponto D. Nesse instante, a velocidade do ponto C é de 2 m/s no sentido da esquerda para a direita. Quais são as velocidades iniciais de A, de B e do ponto médio M do lado BC?

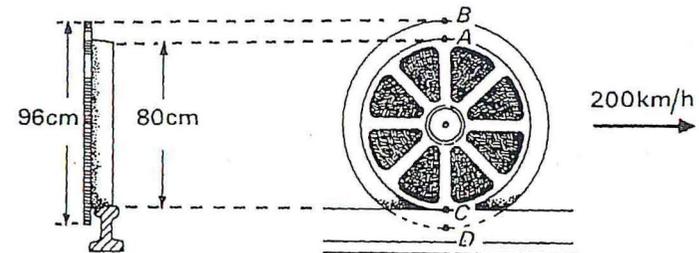


- 12 Investigue as trajectórias de diferentes pontos do rectângulo e do triângulo da figura quando estes rodam sobre uma linha recta.



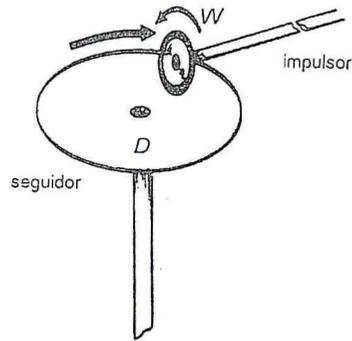
- 13 A roda de um comboio gira, sem patinar, sobre o carril, enquanto o comboio se desloca a uma velocidade de 200 km/h.

- Que ponto da roda se encontra, momentaneamente, em repouso?
- Quais são as velocidades dos pontos A, B, D?
- Haverá algum ponto cuja velocidade tenha direcção vertical?
- Que pontos têm também uma velocidade de 200 km/h?



- 14 Dois eixos perpendiculares estão ligados por uma roda de borracha de fricção, W, que gira sobre um disco, D. É muito fácil conseguir uma saída de velocidade variável a partir de uma entrada de velocidade fixa. Para isso basta deslocar a roda impulsora para o centro ou para a periferia do disco. Este método utiliza-se, por vezes, no mecanismo impulsor dos gravadores de som.

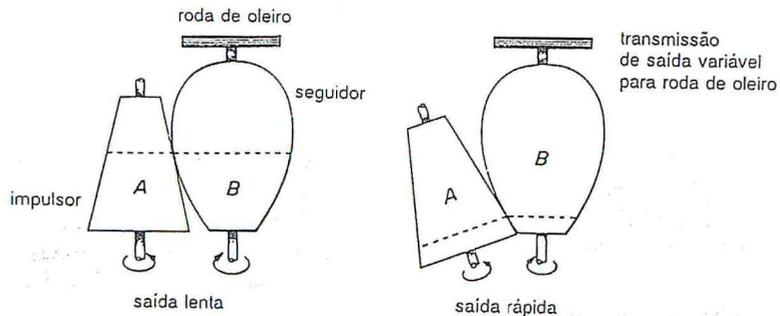
Sabendo que D tem um raio de 5 cm e que o raio de W é 0,5 cm, qual a gama de possíveis factores de transmissão de W para D ?



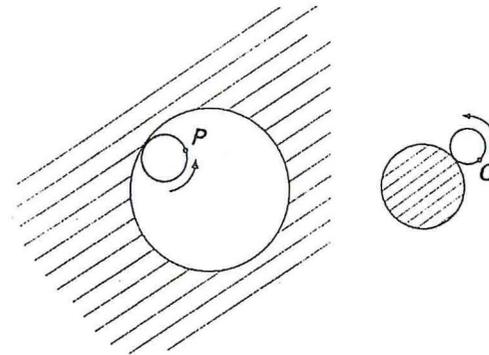
- 15 Uma transmissão de relação variável de um torno de oleiro é formada por dois tambores de fricção, A e B (ver figura). O tambor A tem a forma de um tronco de cone e gira a velocidade constante, accionado por um motor eléctrico. O tambor B tem, aproximadamente, a forma de um tonel, revestido por uma camada de borracha antiderrapante e em que um dos extremos tem um diâmetro menor do que o outro. O oleiro pode controlar a velocidade da roda accionando, com o pé, uma alavanca, o que provoca a inclinação da suspensão de A e faz que sejam outras as partes de A e B que entram em contacto.

Sabendo que A gira a 120 rpm e que o oleiro necessita que a roda possa girar a velocidades continuamente variáveis entre 60 e 360 rpm, atribua possíveis dimensões aos tambores.

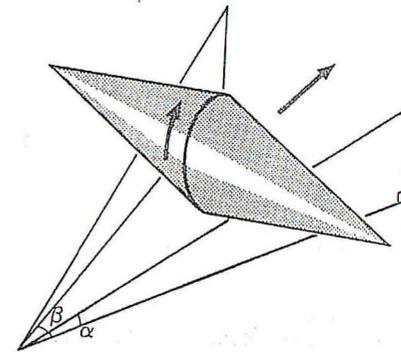
Conceba um mecanismo para mover A , de modo que esta peça permaneça sempre em contacto com B .



- 16 Investigue as trajectórias descritas por um ponto da fronteira de um círculo que roda, sem patinar a) pelo interior de um círculo fixo, b) pelo exterior de um círculo fixo. Estas trajectórias designam-se, respectivamente, por *hipociclóides* e *epiciclóides*. A melhor forma de as estudar é utilizar um brinquedo denominado *Spirograph*, mas também se podem conseguir resultados aceitáveis com peças recortadas em cartão grosso. Examine, de forma especial, os casos em que os diâmetros dos círculos têm, entre si, uma relação aritmética simples.



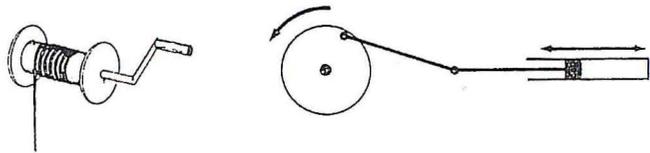
- *17 Dois cones, cujas bases têm diâmetro d e cuja altura é h , foram colados solidamente pelas bases, formando um tambor bicónico. O tambor é colocado sobre duas guias de cartão grosso. Se as guias definem, com a horizontal, um ângulo de elevação α e o ângulo diedro medir β , descubra a condição que relaciona α , β , d e h para que o tambor rode na direcção e sentido indicados. E então teremos o tambor a subir a rampa, aparentemente desafiando a lei de gravidade! Construa um modelo.



9 Para a frente, rodando!

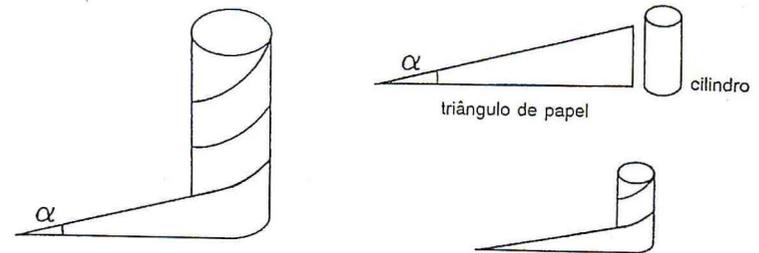
Composição dos movimentos rectilíneo e de rotação

Os mecanismos que combinam movimentos de rotação e movimentos rectilíneos são muito frequentes. Temos, por exemplo, o mecanismo que transforma a rotação da maçaneta de uma porta no retraimento da lingueta, o sarilho que enrola uma corda para içar uma carga, o movimento alternativo dos pistões do motor de um automóvel que é convertido na rotação de um volante, ou a rotação de um motor eléctrico que produz o movimento alternativo da agulha de uma máquina de costura. O elemento impulsor é, umas vezes, o movimento de rotação, outras vezes, o movimento rectilíneo.



O mecanismo do parafuso

Foi Arquimedes (287-212 a. C.) o primeiro a escrever sobre o parafuso, que ele considerava como um plano inclinado enrolado em torno de um cilindro, imagem que proporciona uma abordagem muito adequada para compreender o mecanismo. Recortemos um triângulo de papel, como se vê na figura, para representar o plano inclinado, e envolvamos com ele um cilindro (lápiz ou uma vara). A aresta oblíqua do papel vai subindo pela superfície lateral do cilindro, formando sempre um ângulo de ascensão constante, α . A linha assim definida denomina-se *hélice*. Como é óbvio,

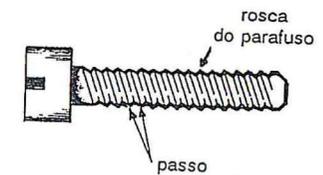


quanto menor for o ângulo α , mais voltas ao cilindro serão necessárias para atingir a mesma altura.

Que efeito tem uma variação do diâmetro do cilindro na variação da altura atingida em cada volta?

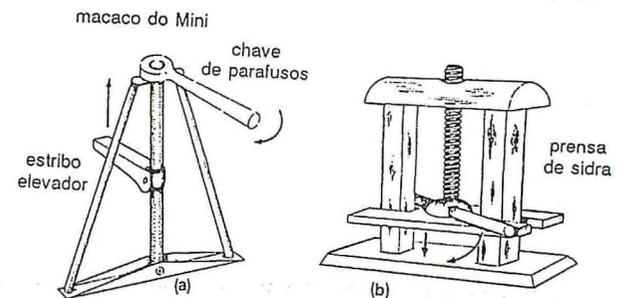
Na prática, o que importa é conhecer quanto avança, em cada volta, a rosca (ou filete) do parafuso ao longo do seu eixo principal, distância designada por *avanço*.

Quando a rosca do parafuso é formada por uma só hélice, esta distância é igual à distância entre caneluras adjacentes da rosca, distância conhecida por *passo*. Por exemplo, se o passo de um parafuso é de 1 mm, uma porca que entrasse no parafuso teria de dar 10 voltas para avançar 1 cm no sentido longitudinal.



Alguns parafusos têm *rosca múltipla*, o que significa que a sua rosca é formada por mais de uma hélice. Estes últimos são utilizados quando se deseja que o parafuso avance rapidamente no sentido do seu eixo de rotação.

A figura seguinte ilustra duas aplicações do parafuso em casos em que é preciso produzir uma força considerável. O macaco do popular *Mini*



baseia-se num grande parafuso de ferro (36 cm) que se acciona por meio de uma chave. Uma porca, enroscada no parafuso, está ligada a um estribo que encaixa na estrutura do automóvel. Quando se faz girar o parafuso, a porca vai subindo por ele e, com ela, o estribo elevador, que, assim, faz levantar o carro.

O estribo sobe 4 cm em 10 revoluções completas do parafuso, pelo que o avanço é de 0,4 cm. Se a força é aplicada à chave, a uma distância de 15 cm do parafuso, a mão que aplica essa força tem de percorrer $2\alpha \times 15$ cm em cada revolução, o que dá um factor de transmissão de

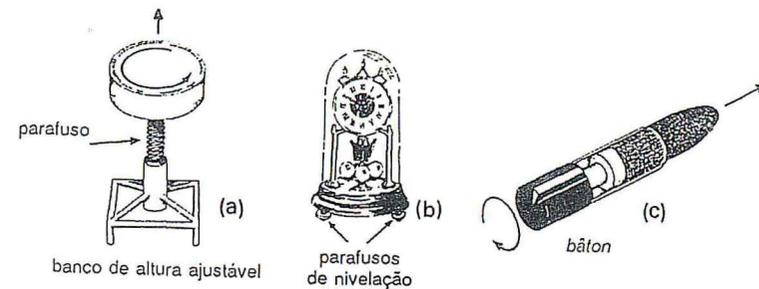
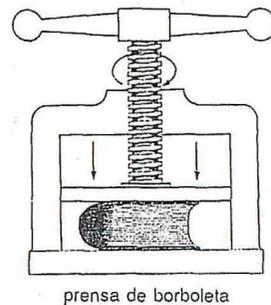
$$\frac{0,4}{30\alpha} = \frac{1}{236}$$

Se não existisse atrito, o trabalho realizado para fazer girar a chave seria igual ao trabalho realizado para elevar o automóvel, pelo que a força requerida para accionar a chave seria $1/236$ da exigida para elevar o carro. Na prática, o atrito é bastante elevado, mas, mesmo assim, o factor de transmissão (que é uma noção essencialmente geométrica) dá uma ideia bastante boa da vantagem que se ganha.

As prensas de sidra eram bastante frequentes nas zonas rurais; usavam-se para espremer maçãs e fazer sidra com o sumo fermentado. Costumavam estar instaladas sobre um grande pedestal, a 3 m do solo, e eram precisos vários homens para empurrar as alavancas e, assim, fazer girar o parafuso, para conseguir uma pressão considerável entre as duas faces da prensa.

Semelhantes às prensas de sidra, ainda que muito menores e construídas em metal, são as prensas de borboleta, utilizadas para variados fins, como encadernação, impressão, cunhagem de moedas e inserção de incrustações. A *borboleta* é uma pesada peça, em forma de cruz, que se faz girar como um volante para apertar a prensa.

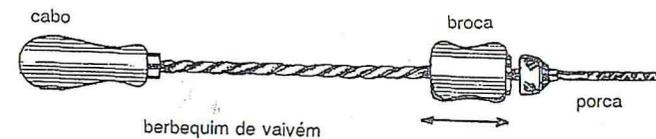
Todas as aplicações do mecanismo de parafuso mencionadas até agora envolviam métodos para incrementar a força de accionamento, aumento conseguido à custa de factores de transmissão muito pequenos. Encontramos aplicações semelhantes em tornos de bancada e parafusos de aperto. Mas o mecanismo de parafuso é também amplamente utilizado para conseguir ajustes delicados, como acontece nos parafusos de nivelamento de relógios de mesa ou de instrumentos científicos, nos tubos de cola ou nos estojos de *bâton*, no ajuste dos bancos para piano ou da



cadeira do mecanógrafo, no mecanismo de focagem das máquinas fotográficas, ou para fazer sair a mina em algumas lapiseiras.

Normalmente, roda-se o parafuso e é o seguidor que se desloca linearmente ao longo do eixo do parafuso. O atrito é tão grande que não é possível inverter os papéis de impulsor e seguidor. Contudo, fabricaram-se chaves de parafusos e pequenos berbequins em que o movimento alternado de uma porca provoca a rotação do parafuso.

Um berbequim típico desta classe (ver figura) faz 2,4 revoluções no sentido horário, quando a porca é empurrada 12 cm no sentido da broca e outras 2,4 revoluções em sentido contrário, quando a porca retrocede no sentido do cabo. O avanço do parafuso é, portanto, de $12 \text{ cm} : 2,4 = 5 \text{ cm}$. Um exame cuidadoso revelou que esta broca tinha um parafuso de quatro roscas paralelas.



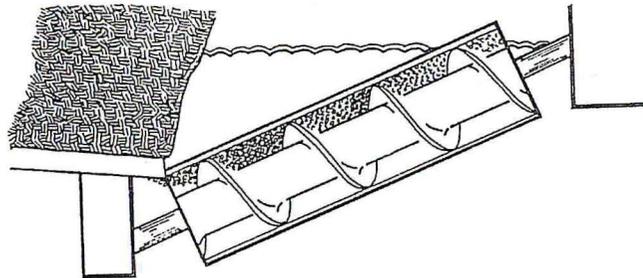
O parafuso de Arquimedes

Um dos mecanismos mais famosos que nos legaram os antigos Gregos é o parafuso de Arquimedes, que foi concebido por este para tirar água dos rios e regar as terras.

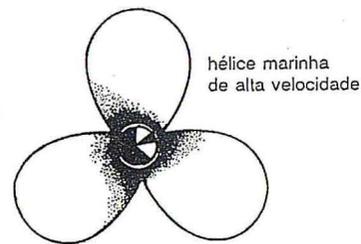
A rosca do parafuso pode comparar-se a uma lâmina continuamente curvada em forma helicoidal que encaixa à justa no interior de um tubo cilíndrico, de forma que, ao girar, arrasta a água para dentro do tubo, através da extremidade submersa. Uma variante moderna deste mecanismo pode ver-se ainda em algumas cozinhas na picadora de carne. O parafuso de

Arquimedes também é utilizado industrialmente para mover líquidos e cereais.

As brocas de madeira não são muito diferentes do parafuso de Arquimedes. Estas brocas têm, numa extremidade, um parafuso cónico de pequeno diâmetro que reboca, lentamente, a aresta cortante da broca principal através da madeira, enquanto, por detrás da aresta cortante, um parafuso de Arquimedes vai retirando sistematicamente da perfuração as aparas de madeira.



As três pás da hélice marinha que aqui vemos assemelham-se bastante aos componentes de um parafuso de tripla entrada. De facto, quando giram, as pás traçam caminhos helicoidais através da água. Nas hélices de alta velocidade, as pás formam um ângulo quase recto com o eixo da hélice, pelo que o passo da hélice é relativamente pequeno. Encontramos hélices deste tipo em motores fora de borda, ao contrário do que acontece com os grandes petroleiros, cujas pás, por girarem a velocidades relativamente lentas, formam um ângulo agudo muito mais cerrado, proporcionando um passo muito maior. Na prática, produz-se «deslizamento», porque as pás só avançam, relativamente à água, cerca de 70 % do que o seu passo indicaria.

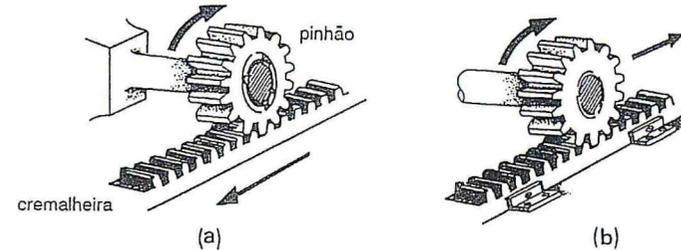


Com os anos, os engenheiros desenvolveram hélices de passo variável, aptas para diferentes situações, em barcos, aviões e helicópteros.

Pinhão e cremalheira

Uma engrenagem de pinhão e cremalheira é formada por uma roda dentada de tipo normal, chamada *pinhão*, que engrena numa barra dentada rectilínea, a *cremalheira*. Se, como sucede em (a), o pinhão gira em torno de

um eixo fixo, a cremalheira desloca-se lateralmente. Mas, se a cremalheira está fixa, como em (b), é o pinhão que se desloca para os lados enquanto roda. Existem aplicações práticas destas duas modalidades do mecanismo de pinhão e cremalheira.

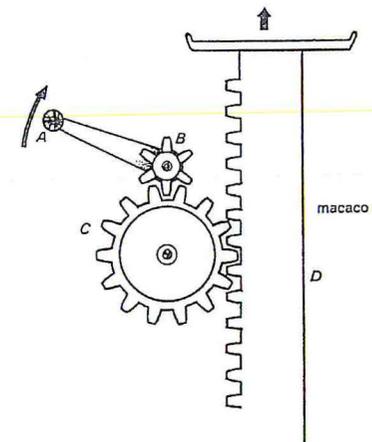


Com o pinhão montado num eixo fixo é fácil utilizá-lo para trancar uma porta: a maçaneta da porta é ligada ao pinhão e a cremalheira é uma extensão do ferrolho.

Quem alguma vez tenha passado as férias navegando por canais e gasto tempo e energia a manobrar manivelas para abrir as comportas e deixar passar a água, sem dúvida terá reconhecido este mecanismo, pois a barra de controlo da comporta acaba numa cremalheira accionada por um pinhão directamente ligado ao eixo da manivela.

Quase todos os sistemas de direcção dos automóveis utilizam o sistema de pinhão e cremalheira. A coluna da direcção termina num pequeno pinhão que engrena numa cremalheira solidária com uma das barras de um mecanismo Ackermann (ver p. 103), pelo que, girando o volante, a cremalheira se desloca e modifica os ângulos que as rodas dianteiras formam com a direcção de marcha.

No século XV, Leonardo da Vinci demonstrou que um pinhão e uma cremalheira, devidamente engrenados, podiam servir para construir um macaco capaz de levantar pesos consideráveis. No macaco da ilustração, o cabo, A, está ligado a um pinhão, B, de 6 dentes. O pinhão engrena numa roda, C, de 14 dentes, a qual, por sua vez, engrena numa cremalheira vertical, D, que eleva a carga. Assim, por cada volta da manivela, a cremalheira sobe 6 dentes. O factor de transmissão depende do braço da manivela e da



distância entre os dentes da cremalheira. Por exemplo, se a manivela tiver 20 cm e a distância entre os dentes da cremalheira for de 0,5 cm, o cabo, A, descreverá uma circunferência de $2\alpha \times 20$ cm de perímetro e a cremalheira subirá $6 \times 0,5$ cm, dando um factor de transmissão de

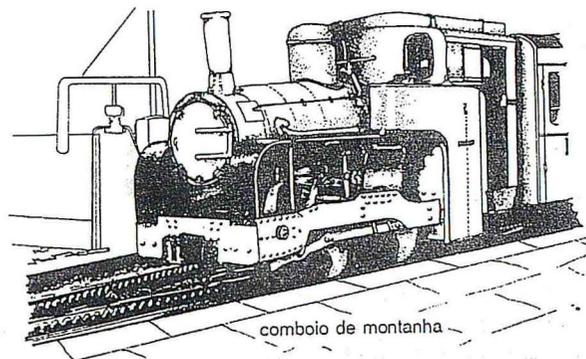
$$\frac{6 \times 0,5}{2\alpha \times 20} = \frac{1}{42}$$

pelo que, se desprezásemos o atrito, a cremalheira permitiria elevar cargas 42 vezes maiores que a força aplicada no cabo.

Macacos elevadores semelhantes a estes tiveram grande difusão na Grã-Bretanha e nos Estados Unidos nos finais do século XVIII.

Uma aplicação clássica do mecanismo de pinhão e cremalheira são os comboios de montanha, como o que sobe até ao cume de Snowdon. Por causa dos fortes declives de Snowdon, com uma subida de mais de 1000 m em menos de 8 km, as rodas de tracção de uma locomotiva normal patinariam sobre os carris. Para vencer esta dificuldade colocou-se uma cremalheira no meio dos carris e dotou-se a locomotiva de uma roda motriz dentada que engrena na cremalheira, o que permite que o comboio avance sem patinar.

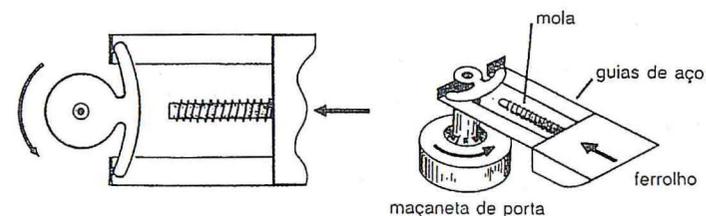
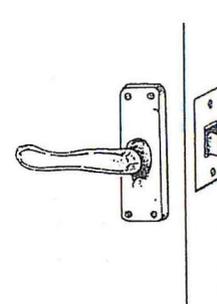
Nesta aplicação do mecanismo, a cremalheira é estacionária e o pinhão roda ao longo dela, sem deslizar. Podemos encontrar uma aplicação semelhante, ainda que numa escala muito menor, em instrumentos científicos como os microscópios ou nas máquinas de ampliar fotografias, aparelhos em que a rotação de uma maçaneta solidária com o pinhão move parte do instrumento ao longo de uma cremalheira, quer para focar cuidadosamente os aparelhos, quer para outros fins. Procure outros exemplos de aplicação deste mecanismo.



Fechaduras

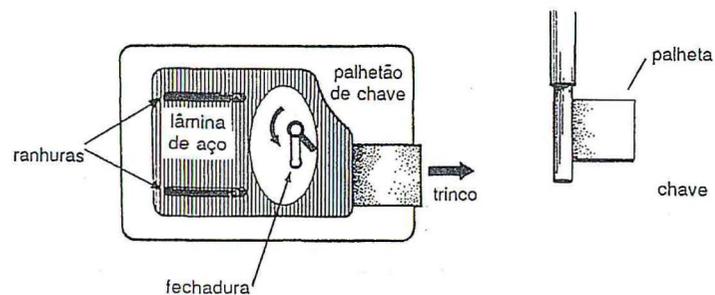
As fechaduras das portas têm muitas formas e tamanhos, mas, se não considerarmos o simples ferrolho que é deslocado para o lado para se alojar numa fenda, a maioria é accionada fazendo girar uma maçaneta e/ou uma chave que faz mover o ferrolho.

Desmontar uma fechadura pode ser muito instrutivo. Normalmente, uma mola empurra o trinco de metal para a direita. O trinco está ligado a duas guias de aço que terminam em duas patilhas voltadas para cima, em ângulo recto. A maçaneta da porta é solidária com duas alavancas salientes, uma das quais faz retroceder o trinco para o interior da fechadura quando se gira a maçaneta, pois empurra uma das patilhas e, através dela, as guias de aço. As duas alavancas garantem, assim, que o trinco se introduza na fechadura qualquer que seja o sentido de rotação da maçaneta.



ranhuras que permitem que a lâmina deslize sobre duas cavilhas instaladas na caixa da fechadura, enquanto o orifício grande tem o contorno preciso para que o palhetão da chave se apoie no seu bordo e empurre lateralmente a placa quando se faz girar a chave. A simetria do recorte aberto na placa deslizante permite o funcionamento da chave, quer seja introduzida com o palhetão para cima, quer com o palhetão para baixo. Neste caso não se utiliza nenhuma mola e, portanto, o sentido do deslocamento do ferrolho dependerá do sentido de rotação da chave.

A distância de que se desloca o ferrolho de uma fechadura, para um determinado ângulo de rotação da chave ou da maçaneta, é um parâmetro importante no projecto do mecanismo de uma fechadura. Nos exemplos que vimos depende, em grande medida, dos comprimentos das alavancas e do palhetão da chave.



Nos exercícios discutem-se outros projectos, mas muitas fechaduras interessantes podem ser vistas nos museus ou igrejas, em tampas de arcas e cofres.

Além disso, o desenho das chaves e ferrolhos das fechaduras modernas tipo Yale constitui, por si só, todo um estudo, mas não é o tema principal deste capítulo.

Exercício 9

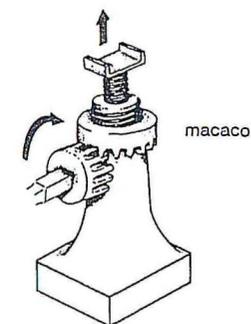
1 Investigue o *avanço* (deslocamento rectilíneo por cada volta) dos parafusos incorporados em tantos mecanismos que pode encontrar facilmente, como:

- Um tubo de cola;
- Um *bâton*;
- Uma lapiseira;
- Um macaco de parafuso;
- Um torno de bancada;
- Um parafuso de aperto;
- Uma cadeira de dactilógrafo;
- Uma tomeira de água;
- Uma broca de madeira;
- Uma picadora de carne;
- Um parafuso com porca;
- Uma chave de parafusos do tipo *Yankee*;
- Um parafuso para madeira;

- Um banco de trabalho tipo *Black & Decker* ou semelhante;
- Uma alça de arma de fogo;
- A rosca que une as duas peças de uma cafeteira;
- Um parafuso micrométrico;
- Um saca-rolhas;
- Uma prensa de sidra;
- Uma chave inglesa;
- Um quebra-nozes de parafuso.

Verifique também se os parafusos correspondentes têm filete simples ou múltiplo.

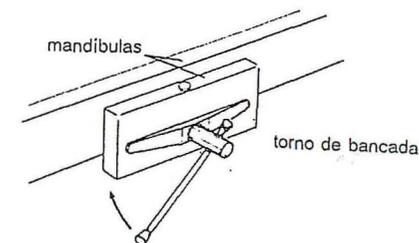
2 Existem muitos tipos de macacos de parafuso projectados para diferentes usos, desde levantar automóveis ou locomotivas até manter no seu lugar as vigas de um edifício enquanto se fazem reparações. Procure localizar diferentes tipos de macacos de parafuso e descubra os factores de transmissão respectivos. Teste os resultados a que chegar, considerando o tipo de carga para que foram projectados. De facto, quanto maior for a carga prevista, menor será o factor de transmissão.



3 Um torno de bancada é constituído por duas mandíbulas que se fecham ou se abrem por meio de um parafuso com passo de 0,4 cm, accionado mediante uma barra com 12 cm de comprimento.

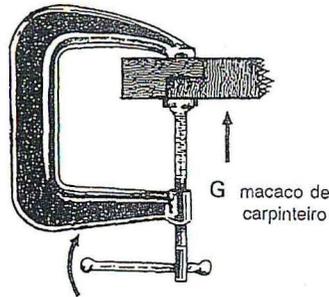
Qual o factor de transmissão?

Como reduzir ainda mais o factor de transmissão?

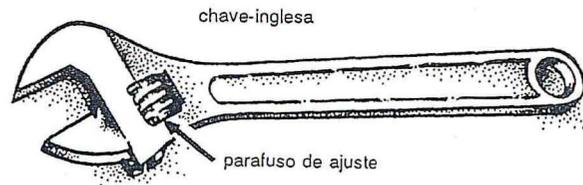


4 O cabo do parafuso de um macaco de carpinteiro tem 7 cm de comprimento. 20 revoluções do cabo afastam as mandíbulas 3,6 cm. Qual o factor de transmissão?

Se aplicarmos uma força de 5 kg no extremo do cabo, que força exercerão as mandíbulas sobre a peça, supondo que não existe atrito?



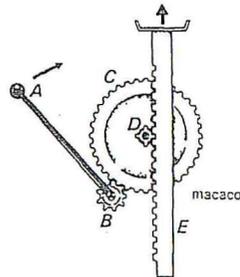
- 5 A figura seguinte mostra uma típica chave-inglesa ajustável. O parafuso de ajuste é accionado com a ponta do polegar. Numa destas chaves, o parafuso tem um diâmetro de 1,5 cm e seis revoluções do parafuso abrem ou fecham a boca da chave 3,4 cm. Determine o factor de transmissão correspondente e compare-o com o de outras chaves semelhantes de que disponha.



- 6 O componente central de um determinado macaco é um mecanismo de pinhão e cremalheira semelhante ao da figura. A manivela AB tem 16 cm de comprimento e a roda dentada B , que acciona, tem 9 dentes. O pinhão B engrena numa roda dentada C de 36 dentes. Por fim, o pinhão D , de 4 dentes e solidário com C , engrena com os dentes da cremalheira E . Os dentes da cremalheira distam, entre si, 0,6 cm.

Determine o deslocamento vertical da cremalheira por cada volta da manivela e calcule o factor de transmissão do macaco.

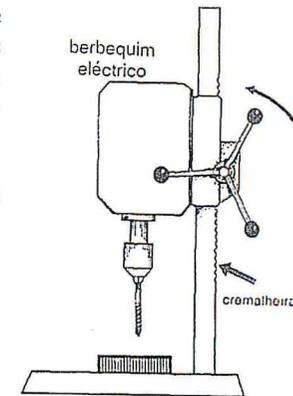
Supondo que 50 % do trabalho efectuado para elevar uma carga com este macaco se consome a vencer o atrito, que força se deve exercer em A para elevar uma carga de 500 kg?



- 7 Um berbequim eléctrico, montado sobre um pé vertical, sobe e desce por meio de um sistema de cremalheira e pinhão manejado mediante uma manivela de 3 braços.

Os braços têm 18 cm de comprimento, o pinhão tem 8 dentes e a separação entre os dentes da cremalheira é de 0,2 cm. Determine o factor de transmissão.

Sabendo que o rendimento do mecanismo é de 70 %, que força exercerá o fio da broca quando o operador rodar a manivela com uma força equivalente a 5 kg?

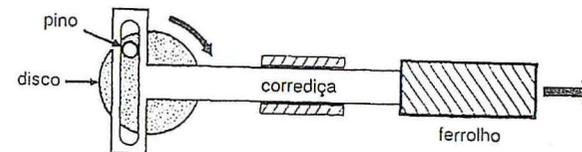


- 8 Com um estojo de construções tipo *Meccano*, ou *Lego Technic*, ou *Fischertechnik* construa um modelo que utilize um sistema de pinhão e cremalheira.

- 9 Conceba uma fechadura de porta que empregue um sistema de pinhão e cremalheira, de forma que uma rotação de 180° na maçaneta da porta provoque um deslocamento de 2 cm no ferrolho.

- 10 Um tipo de fechaduras baseia-se num mecanismo denominado *scotch yoke* (ver figura). A maçaneta da porta faz girar o disco, fazendo que uma cavilha engrene numa ranhura da corrediça do ferrolho.

Descreva o movimento do ferrolho durante uma revolução do disco. O que determina o deslocamento do ferrolho?

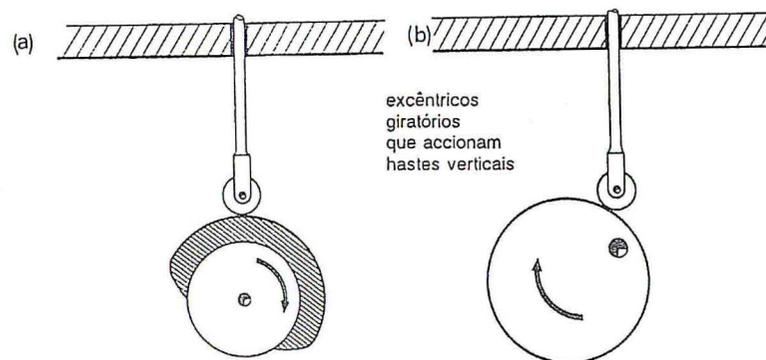


- 11 Em muitas fechaduras modernas, o mecanismo foi concebido de tal maneira que, ao girar a alavanca, se alojam três ferrolhos na moldura da porta — um na parte de cima, outro em baixo e outro lateralmente. Pense num dispositivo para este sistema.

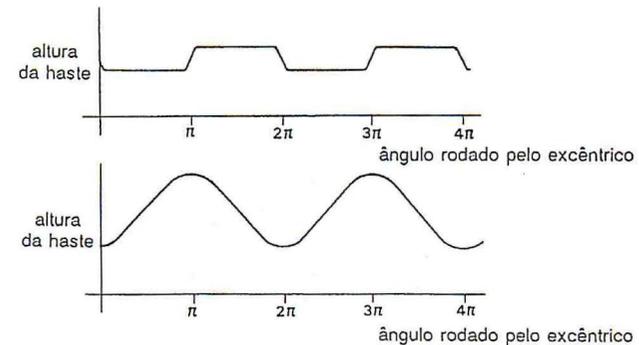
10 Um trajecto acidentado!

Excêntricos e catracas

Os excêntricos são objectos de formas especialmente concebidas para induzir no seguidor um deslocamento específico. Os dois exemplos que se vêem na figura são casos típicos de excêntricos giratórios cujo raio varia relativamente ao centro de rotação e, portanto, cada um deles transmite ao seu guia (haste vertical) um movimento alternado. Mas os movimentos das hastes diferem consideravelmente. Na figura (a), ainda que o excêntrico tenha dois raios distintos, estes são essencialmente constantes, pelo que a haste vertical permanecerá quase todo o tempo numa das duas alturas. Contudo, na figura (b), o raio varia continuamente e a haste desliza harmonicamente para cima e para baixo.



Os gráficos exibem o comportamento das duas hastes durante duas revoluções sucessivas, partindo as hastes, em ambos os casos, da posição mais baixa.



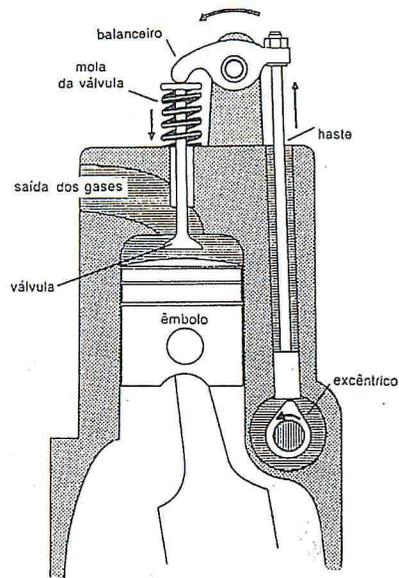
Bastam estes dois mecanismos para podermos entrever o potencial que oferecem os mecanismos com excêntricos, pelo que não é de estranhar que alguns autores os proclamem como os mais versáteis de todos.

Uma das aplicações mais comuns dos excêntricos é o mecanismo de abertura das válvulas do motor de um automóvel. Até há bem pouco tempo, os motores a gasolina tinham duas válvulas por cilindro: uma de admissão, para permitir a entrada no cilindro de uma mistura de gasolina e ar, e a outra de escape, para permitir a saída dos gases produzidos após a combustão. Um motor típico de quatro cilindros tem oito válvulas que são accionadas por oito excêntricos montados num mesmo eixo, a árvore de excêntricos, engrenado, por sua vez, na cambota do motor com o objectivo de abrir e fechar as válvulas no instante adequado do ciclo de combustão¹⁰.

A figura da página seguinte mostra uma montagem típica. Quando o excêntrico roda, a sua parte proeminente empurra para cima a haste, que, por sua vez, faz deslocar o balanceteiro. Este, por compressão da mola, empurra para baixo a válvula, deixando que os gases já queimados se escapem. Quando a válvula deixa de ser empurrada para baixo pelo balanceteiro, a mola obriga-a a retomar a sua posição de fecho.

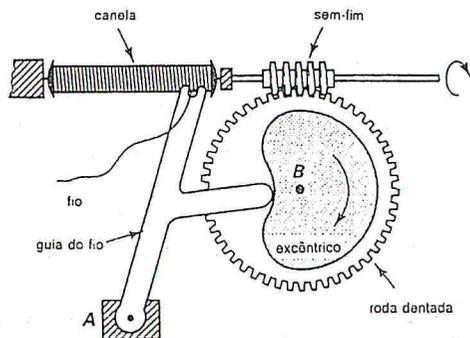
Em alguns motores providos de uma árvore de excêntricos na parte superior, os excêntricos operam directamente no topo das válvulas, enquanto noutros, como consequência da posição das válvulas no cilindro, são as válvulas de admissão que são governadas directamente pelos excêntricos, ao passo que nas de escape são precisos os balanceteiros para transmitir os movimentos dos excêntricos. Como é óbvio, a distância que a válvula percorre para se abrir e o tempo durante o qual permanece aberta dependem do desenho do excêntrico e da distância entre a haste e o eixo do balanceteiro,

¹⁰ A árvore de excêntricos é vulgarmente conhecida por *árvore de cames*, num claro aportuguesamento da palavra inglesa. (N. da T.)



parâmetros que se podem ajustar para aumentar ou reduzir o movimento induzido pelo excêntrico sobre a haste que empurra o balanceiro.

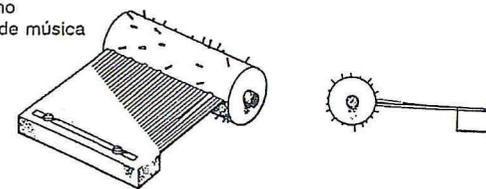
Podemos observar uma engenhosa aplicação de um excêntrico nas máquinas de costura tradicionais, mais propriamente, no mecanismo utilizado para alimentar a canela, isto é, para rebobinar uniformemente o fio dos carrinhos de linha para a canela. Enquanto a canela gira a velocidade constante, a guia do fio tem de se mover para trás e para diante, ao longo da canela e a velocidade constante. Isto consegue-se mercê de um excêntrico



B que está ligado ao eixo motriz da canela por meio de um sem-fim. A guia do fio roda em torno de *A* e uma mola encarrega-se de manter esta peça em contacto com o excêntrico. O número de dentes da roda dentada determina o número de revoluções que a canela terá de dar em cada vaivém da guia. Um dos mecanismos deste tipo que pude examinar tinha uma roda dentada com 144 dentes, pelo que cada camada de fio implicava 72 voltas da canela.

Também se utilizam excêntricos nos mecanismos das caixas de música. Trata-se, neste caso, de um tambor giratório provido de pequenos espigões proeminentes. Convenientemente situados, os espigões vão fazendo vibrar pequenas lâminas na sequência que se quiser, permitindo assim a produção

mecanismo de caixa de música



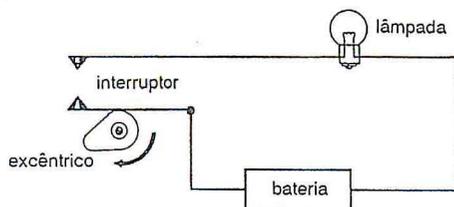
de qualquer melodia. Uma vez que o tambor tem de girar lentamente, é habitual que os responsáveis por esse movimento sejam um sem-fim e um trem de rodas dentadas.

O mecanismo impulsor do martelo de forja¹¹, que vemos na figura, é muito semelhante ao da caixa de música, mas, como é óbvio, numa escala muito maior. Um martelo muito pesado oscila em torno do centro do seu

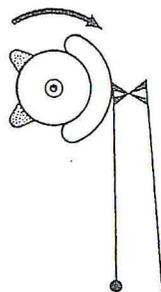


cabo (ponto fixo), de tal forma que a cabeça descansa sobre uma bigorna. O outro extremo do cabo é periodicamente empurrado para baixo e depois libertado pelas unhas de uma roda impulsora, que, na realidade, é um excêntrico. Estes martelos foram amplamente utilizados nas fundições nos começos da revolução industrial e eram habitualmente movidos por rodas hidráulicas. Um bom exemplo pode ainda ser visto nas fundições Finch, em Sticklepath, Devon.

¹¹ Este tipo de martelo também é conhecido por *martelo basculante*. (N. da T.)

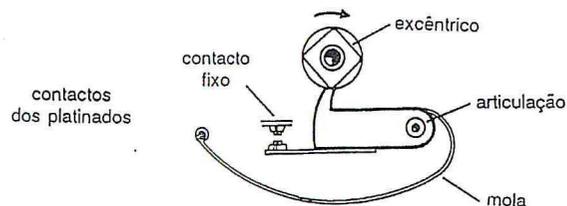


Os interruptores rotativos são normalmente projectados para serem accionados por um excêntrico. Este sistema é especialmente útil quando é preciso repetir uma sequência de *abertos e fechados*. No circuito da figura, a lâmpada acende-se quando o excêntrico, ao girar, fecha o circuito e apaga-se quando o excêntrico chega a uma posição em que o contacto já não se faz. A razão entre o tempo em que a lâmpada está acesa e o tempo em que está apagada pode ser determinado pela forma e pelo tamanho da parte saliente do excêntrico, não havendo, portanto, qualquer dificuldade em conseguir uma qualquer sequência de sinais luminosos. Por exemplo, um interruptor rotativo, cujo excêntrico tenha a forma ilustrada na figura, produziria dois jactos de luz curtos seguidos de um jacto longo.



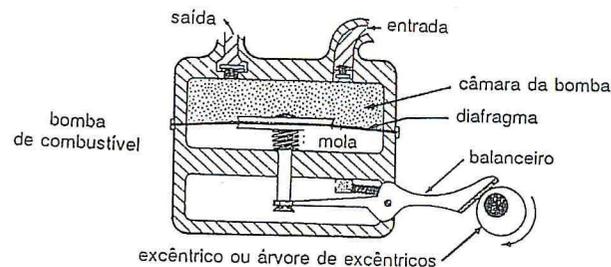
Não é difícil compreender como se poderiam projectar excêntricos que produzissem a sequência de jactos luminosos para um farol determinado, ou para um anúncio luminoso, ou para as luzes de uma feira ou de uma série de semáforos.

Alguns dos automóveis mais modernos têm sistemas de ignição electrónica, mas são em maior número os que usam um excêntrico rotativo para controlar a abertura e o fecho dos platinados, encarregados de enviar energia eléctrica às velas no momento preciso. O excêntrico tem uma secção quase quadrada e abre e fecha o circuito quatro vezes em cada revolução, ou seja, uma por cada cilindro do motor.

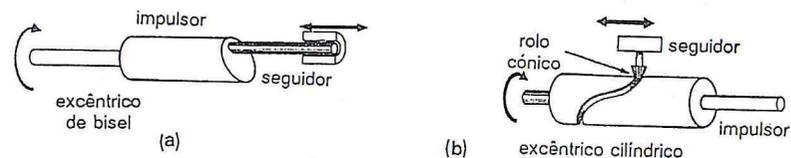


Os motores que utilizam bomba de combustível mecânica recorrem habitualmente a um excêntrico circular, cujo centro de rotação não coincide com o seu centro para a accionarem (ver figura). O excêntrico actua sobre um

balanceiro que obriga a descer uma membrana (diafragma). A diminuição de pressão assim produzida tem como efeito a aspiração de gasolina para a câmara da bomba. Depois, na sequência do movimento de rotação do excêntrico, o diafragma é empurrado para cima por uma mola, obrigando o combustível a passar pela válvula de saída e a chegar ao carburador.



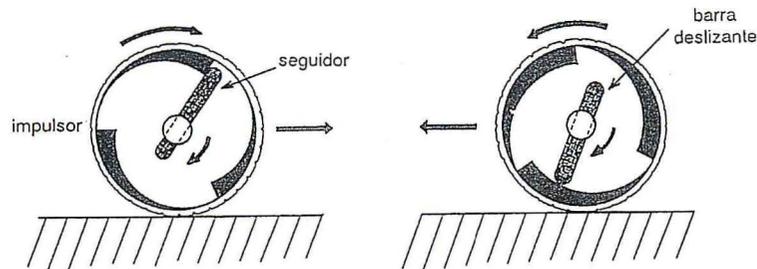
Todos os excêntricos mencionados até agora são de natureza bidimensional, mas os que se mostram na figura seguinte são essencialmente tridimensionais. No excêntrico de bisel, a secção plana, produzida num cilindro por um corte oblíquo relativamente ao eixo deste, comunica um movimento linear de vaivém a uma haste paralela ao eixo do cilindro. Usam-se mecanismos deste tipo para impulsionar as bombas dos sistemas hidráulicos que governam os aviões modernos.



No excêntrico de tambor, ou excêntrico cilíndrico, a superfície lateral tem um sulco helicoidal em que se insere um pequeno rolo cónico solidário com um seguidor, o qual tem liberdade para se mover paralelamente ao eixo do cilindro. O resultado é um deslocamento linear do seguidor quando o cilindro roda. Este excêntrico de movimento positivo, que não requer nem molas, nem a força da gravidade, para se manter em contacto com o seguidor, utiliza-se muito na indústria têxtil e no mecanismo de direcção de alguns automóveis, em lugar do habitual sistema de pinhão e cremalheira.

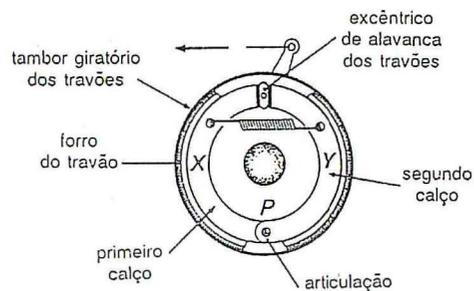
Nalgumas máquinas de cortar relva, o mecanismo, sumamente engenhoso, permite que as lâminas continuem a rodar quando as rodas motrizes deixam de o fazer. Podemos vê-lo na figura. Neste caso poder-se-ia dizer

que o excêntrico é anelar. Ao empurrar a máquina da esquerda para a direita, a roda motriz gira no sentido horário e um dos seus três ressaltos engata na barra deslizante do seguidor que está ligada às lâminas, por meio de uma engrenagem, para fazê-las girar. Mas, se a máquina pára ou retrocede, a forma do excêntrico permite-lhe empurrar a barra do seguidor de forma a não engrenar na roda motriz.



Em geral, os excêntricos são mecanismos muito utilizados, pois, com formas adequadas, permitem obter praticamente qualquer padrão de movimento, a partir de uma entrada de velocidade constante. Em particular, é possível conseguir que o movimento tenha pausas de duração arbitrária, característica difícil de conseguir com outros mecanismos; assim como produzir movimentos controlados com grande exactidão, como os requeridos ao dirigir uma fresadora.

Embora não se discuta aqui, a análise da velocidade e da aceleração do seguidor, para diferentes formas de excêntricos, é de extrema importância prática.



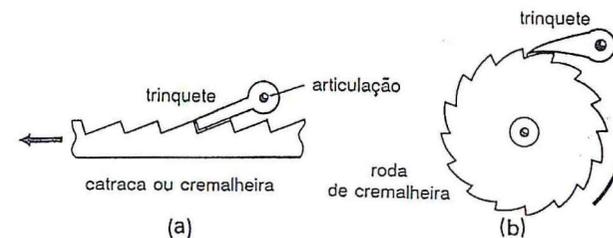
Muitos carros utilizam travões de tambor nas rodas traseiras. Dois calços metálicos X e Y, cobertos de forros especiais para resistirem ao calor, rodam em torno de um ponto P. Quando se acciona o pedal do travão, os calços afastam-se e fazem pressão sobre o tambor giratório do travão. Existem

diversas formas de fazer actuar os calços: uma delas consiste numa alavanca solidária com um excêntrico, como vemos à direita. O sistema é particularmente aplicável a travões de pedal ou de mão ligados, por cabo, aos tambores. A solução hidráulica é discutida na p. 193.

Num só sentido

Existe um certo número de mecanismos concebidos para permitirem o movimento num sentido e impedirem o movimento em sentido oposto. O mais difundido destes mecanismos é a *catraca* ou *cremalheira com trinquete*. Encontramos exemplos correntes deste mecanismo nos pinhões das bicicletas ou no mecanismo de dar corda aos relógios mecânicos.

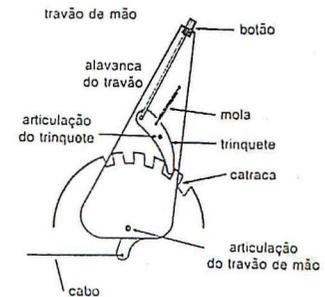
As figuras (a) e (b) mostram o mecanismo básico. Em (a), a cremalheira tem liberdade para se deslocar para a esquerda, mas, para a direita, o máximo que pode deslocar-se é a distância entre dois dentes consecutivos, antes de ser detida pelo trinquete, que é mantido em contacto com a cremalheira por meio de uma mola. De igual forma, a catraca (b) tem liberdade para girar em sentido anti-horário, mas não poderá girar muito no sentido



contrário sem ser detida pelo trinquete. Para permitir a rotação em sentido horário é preciso manter o trinquete alçado para que não tropece com os dentes da roda.

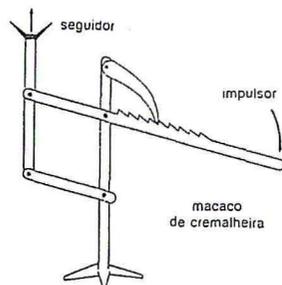
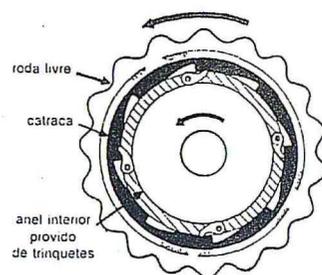
Quando um condutor de automóvel deseja soltar o travão de mão, começa por puxar um pouco mais a alavanca do travão para aliviar a força sobre o trinquete e depois carrega no botão do extremo da alavanca para, assim, libertar o trinquete do contacto com a catraca.

Quase todos os mecanismos de enrolamento são providos de um sistema de catraca para que, quando a pessoa que está



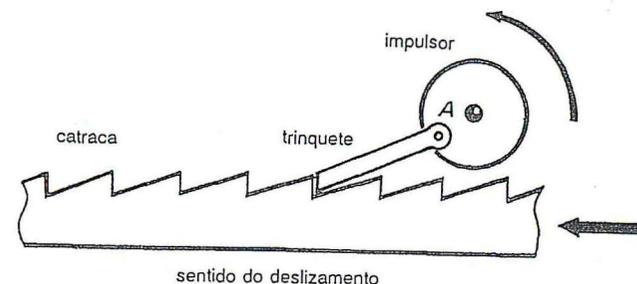
a realizar o enrolamento deixa de exercer força, a carga permaneça no ponto a que chegou e não caia por desenrolamento do cabo. Os *clics* que se ouvem quando damos corda a um relógio, ou quando recolhemos a linha num carretel de cana de pesca, ou o *tic-tic-tic* da bicicleta quando roda livremente, é o ruído dos trinquetes ao saltarem sobre os dentes da catraca quando esta roda dentada se move relativamente ao trinquete.

Na roda livre de uma bicicleta, os dentes da catraca ressaltam para o interior, enquanto os trinquetes, providos de uma mola que os obriga a engrenar naqueles, estão montados num anel interior solidário com a roda traseira. Quando o ciclista está a pedalar, os trinquetes engrenam nos dentes da roda livre, de tal forma que a roda traseira da bicicleta gira à mesma velocidade que a roda livre, mas, logo que o ciclista deixa de pedalar, a coroa da roda livre fica estacionária e o anel interior continua a girar com a roda traseira e faz que os trinquetes saltem sobre os dentes da catraca, produzindo o ruído peculiar.

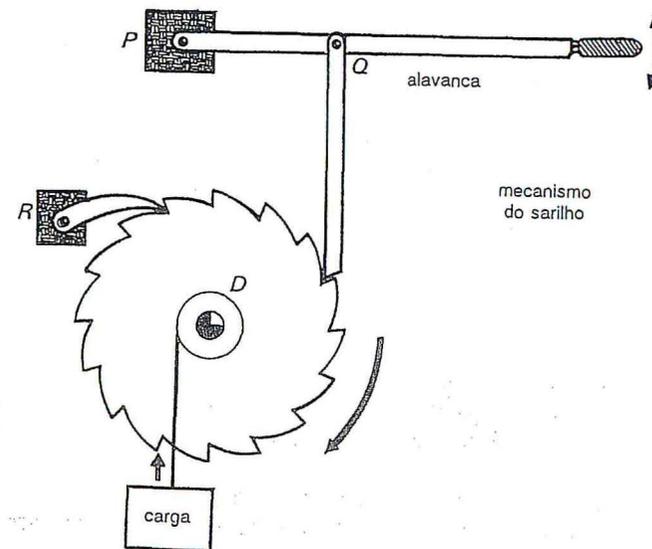


O macaco de cremalheira, um macaco de tipo tradicional que os ferreiros de aldeia costumavam construir, é uma aplicação simples do mecanismo de trinquete e cremalheira, para além de ilustrar uma aplicação da alavanca e do paralelogramo articulado. Não é raro encontrar uma versão moderna deste macaco nas oficinas de reparação de automóveis.

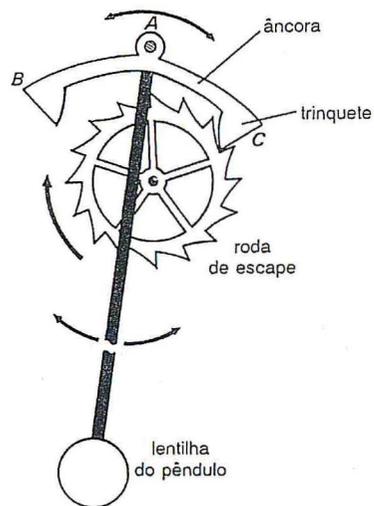
São muitos os processos de fabrico em que convém que uma correia de transporte, ou o objecto sobre o qual é preciso trabalhar, avance a pequenos passos. Uma das formas de o conseguir consiste em utilizar o trinquete para mover a cremalheira. Se o ponto em torno do qual gira o trinquete (o ponto A da figura) é guiado segundo uma trajectória circular, o trinquete impulsorará a peça corrediça de forma que esta se manterá estacionária durante metade do tempo e será empurrada uma distância equivalente a um dente da cremalheira por cada revolução do impulsor.



Polhelm, nos princípios do século XVII, descreveu uma interessante aplicação do mecanismo de catraca e trinquete para accionar uma espécie de sarilho. A figura seguinte mostra as suas características principais. O tambor, ou cilindro de enrolamento, D, é coaxial com uma catraca; o trinquete, com eixo em R, impede que o cabo se desenrole do tambor. Para enrolar o cabo de apoio em P, move-se, para cima e para baixo, uma alavanca com ponto de apoio em Q, engrena num dente da roda cada vez que a alavanca é baixada, fazendo a roda avançar exactamente um dente. O factor de transmissão é muito pequeno, mas, em troca, permite levantar grandes cargas.



O mecanismo para regular o movimento dos relógios é muito semelhante. Uma roda dentada, conhecida por *coroa*, ou *roda de escape*, é impulsionada, em sentido horário, por pesos (como nos velhos relógios de parede) ou por uma mola em espiral, mas o seu movimento é impedido pelos trinquetes *B* e *C*, conhecidos por *palhetas* e montados sobre a âncora, que oscila para um e outro lado, em torno do eixo *A*.



Na posição que a figura ilustra, a coroa está prestes a empurrar o trinquete *C* para a direita, mas, ao fazê-lo, o trinquete *B* descerá até engrenar com um dente da coroa. A seguir, a coroa empurra o trinquete *B*, fazendo oscilar a âncora para o lado direito, de forma que o trinquete *C* engrena num dente da coroa, e assim sucessivamente. É o ritmo de oscilação da âncora que controla a velocidade de rotação da coroa; tal ritmo é determinado ligando a âncora a um pêndulo, cujo período de oscilação depende da distância que separa a lentilha do pêndulo do ponto de suspensão *A*.

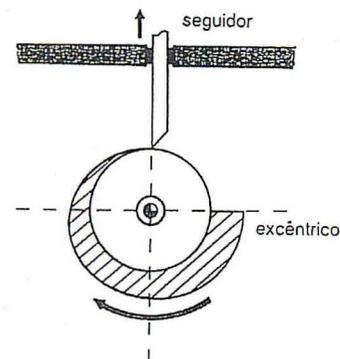
Nos relógios de parede, o pêndulo ajusta-se de forma que o período (tempo necessário para efectuar uma oscilação completa) seja exactamente igual a 2 segundos. Por conseguinte, a roda de escape avança um dente em cada 2 segundos. Ligando, por meio de rodas dentadas, os ponteiros do relógio ao eixo portador da roda de escape, consegue-se que o relógio indique a hora correcta.

Nos relógios de parede, o pêndulo ajusta-se de forma que o período (tempo necessário para efectuar uma oscilação completa) seja exactamente igual a 2 segundos. Por conseguinte, a roda de escape avança um dente em cada 2 segundos. Ligando, por meio de rodas dentadas, os ponteiros do relógio ao eixo portador da roda de escape, consegue-se que o relógio indique a hora correcta.

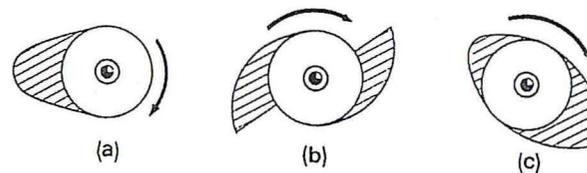
Exercício 10

1 A figura mostra um excêntrico que guia um seguidor pontiagudo, com liberdade para se mover para cima e para baixo. Utilizam-se seguidores deste tipo quando o contorno do excêntrico apresenta mudanças bruscas.

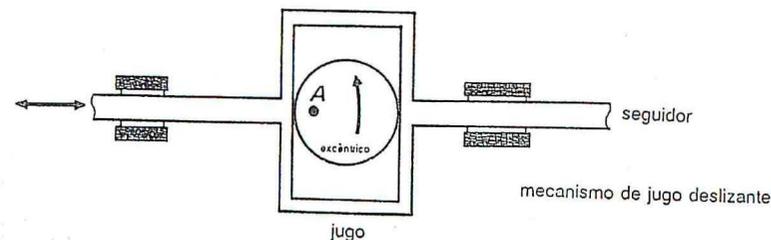
Supondo que o raio máximo do excêntrico é duplo do raio mínimo, trace um gráfico que mostre o deslocamento do seguidor correspondente a duas revoluções completas do excêntrico.



2 No mecanismo da questão 1, o excêntrico é substituído, sucessivamente, por um dos três excêntricos que vemos na figura abaixo. Trace gráficos que mostrem o deslocamento do seguidor correspondente a duas revoluções completas de cada um dos excêntricos. Seria possível utilizar estes excêntricos se girassem em sentido anti-horário?

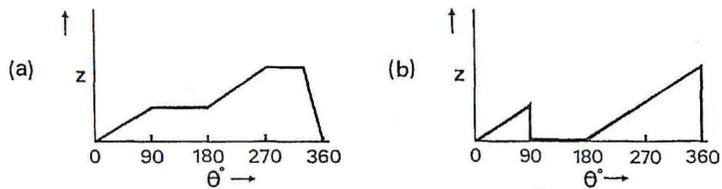


3 Um excêntrico circular gira em torno de *A*, dentro de um jugo rectangular solidário com um seguidor com liberdade de deslizamento. Se o raio mínimo do excêntrico for *p* e o raio máximo for *q*, quais serão as dimensões internas do jugo supondo que o excêntrico contacta com todos os seus lados durante uma revolução? Quais são os limites de deslizamento do seguidor?



Trace um gráfico que represente o deslocamento do seguidor em função do ângulo rodado pela excêntrico, partindo da sua posição central, com o excêntrico para cima.

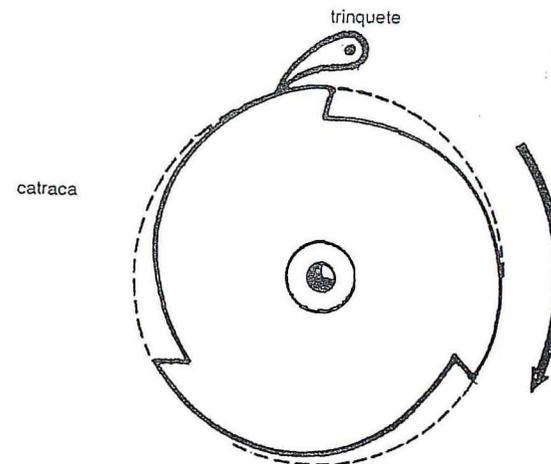
- 4 Projecte um mecanismo de jugo deslizante, de forma que a distância máxima entre os pontos extremos do movimento seja 2 cm. Dado que o motor disponível trabalha a uma velocidade de 240 rpm e que o jugo tem de efectuar 30 oscilações completas (ida e volta) por minuto, desenhe um trem de engrenagens adequado para accionar o excêntrico.
- 5 Os gráficos seguintes evidenciam ambos o deslocamento vertical z de um seguidor pontiagudo, impulsionado por um excêntrico que gira em torno de um eixo horizontal. Desenhe, em cada caso, o perfil do excêntrico correspondente.



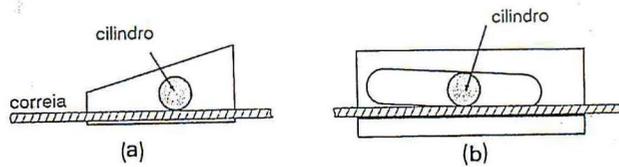
- 6 Em cada minuto, o jogo de luzes de um reclamo luminoso tem de ficar aceso durante 20 segundos, apagado durante outros 20, voltar a acender durante 10 segundos mais e ficar apagado outros 10 segundos. Projecte um interruptor rotativo accionado por um excêntrico que se encarregue do controlo das luzes.
- 7 Analise a sequência temporal das luzes vermelha, verde e amarela de um semáforo e projecte, em consequência, um sistema de interruptores accionados por excêntricos giratórios capaz de controlar o semáforo.
- 8 Como sabe um relógio de carrilhão quando deve tocar?
- 9 Um disco de longa duração é um excêntrico elevado ao máximo expoente. Explique esta afirmação.
- 10 Investigue o mecanismo de cremalheira e trinquete de:
- Um carretel de cana de pesca;
 - Um disco de telefone;
 - Um cabrestante;
 - Um travão de mão de automóvel;
 - Uma chave de parafusos de cremalheira e trinquete;

- Um berbequim de cremalheira e trinquete;
- A roda livre de uma bicicleta.

- 11 A catraca que vemos na figura tem três dentes equidistantes. O trinquete, que possui uma única unha, é mantido, à pressão, em contacto com a roda.



- Qual o ângulo máximo de que podemos fazer girar a catraca, no sentido horário, antes de o trinquete a deter?
 - Quantos dentes deveríamos acrescentar à catraca para reduzir a 60° o ângulo máximo de que ela pode rodar em sentido horário?
 - Também é possível reduzir a rotação máxima em sentido horário, acrescentando um trinquete ao mecanismo mostrado. Explique como.
- 12 Investigue o mecanismo de escape de um relógio de pêndulo. Determine o período de oscilação do pêndulo, cronometrando, por exemplo, quanto demora a completar 20 oscilações. Conte depois o número de dentes da roda de escape e determine o tempo que demorará a efectuar uma revolução. A seguir estude a desmultiplicação que têm as engrenagens dos ponteiros dos minutos e das horas para que indiquem correctamente o tempo.
- 13 A figura seguinte mostra dois mecanismos que permitiriam que uma correia se deslocasse num sentido, mas não no contrário. Descreva o seu funcionamento e em que sentido teria a correia liberdade de deslocamento em cada caso.



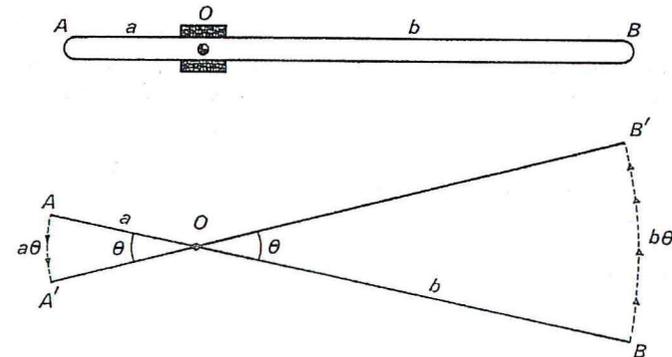
- 14 Como funcionam as bobinas de inércia dos cintos de segurança dos automóveis?
- 15 Muitos fechos de portas e cancelas permitem que a porta se feche, sem permitir depois qualquer outro movimento. Veja quantos mecanismos diferentes deste tipo pode encontrar e analise os princípios em que se baseiam.

11 O que se ganha por um lado perde-se pelo outro!

Alavancas e aríetes hidráulicos

Alavancas

Quando uma barra rígida AB tem liberdade para girar em torno de um ponto fixo O converte-se, de facto, numa alavanca. Se $AO = a$ e $BO = b$, quando a barra roda de um ângulo θ , os extremos da barra descrevem arcos de circunferência de comprimento $a\theta$ e $b\theta$, respectivamente. Por conseguinte, a razão entre as distâncias percorridas por A e B é proporcional às suas distâncias ao centro de rotação O ; concretamente, é $a:b$.



O recurso a uma alavanca simples para mover objectos pesados é uma técnica tão velha como o tempo. A figura seguinte mostra um homem empurrando para baixo um dos extremos de uma vara comprida, que roda em

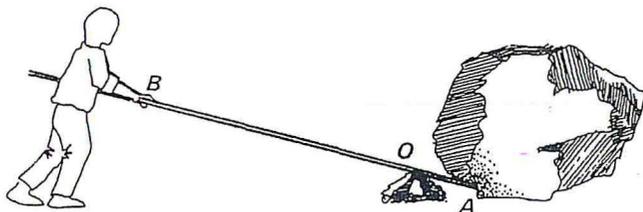
tomo do ponto O de uma pedra (fulcro), com o objectivo de levantar o grande bloco de pedra situado em A . Devido a uma das leis fundamentais da física, o trabalho mecânico realizado pelo homem, em B , ao empurrar a vara para baixo terá de ser igual ao trabalho mecânico realizado sobre a rocha em A . Ora o trabalho realizado por uma força é igual ao produto da intensidade da força pela distância percorrida pelo seu ponto de aplicação; logo,

$$\begin{aligned} \text{força em } B \times \text{distância percorrida por } B &= \\ &= \text{força em } A \times \text{distância percorrida por } A \end{aligned}$$

de onde resulta

$$\frac{\text{força em } B}{\text{força em } A} = \frac{\text{distância percorrida por } A}{\text{distância percorrida em } B} = \frac{a}{b}$$

que é, na realidade, o factor de transmissão de A relativamente a B .

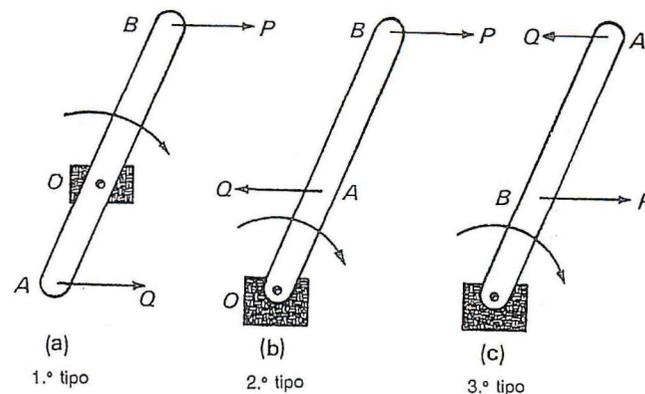


Por exemplo, se $a = 0,5$ m e $b = 3,0$ m, vem $a/b = 1/6$, e, portanto, um homem que aplicasse em B uma força de 40 kg poderia levantar uma carga de 240 kg em A . Aproximando o fulcro do bloco de pedra de forma que $a/b = 1/20$, a mesma força de 40 kg exercida em B permitiria que o homem levantasse uma carga de 800 kg em A . Mas agora seria preciso que B baixasse 20 cm para que o extremo A subisse 1 cm.

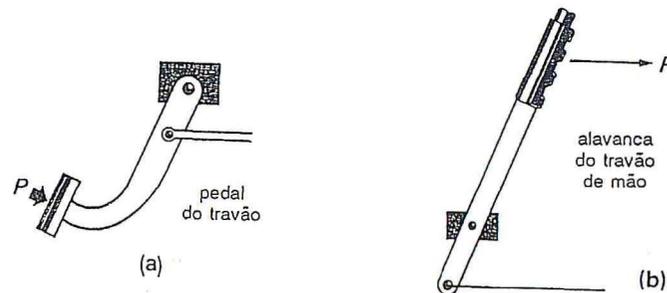
As alavancas são frequentemente classificadas em três tipos, segundo as posições relativas do ponto de apoio (ou fulcro) e dos pontos de aplicação da força e da carga ou resistência.

A figura seguinte ilustra esta classificação. Em cada caso, P é a força aplicada em B e Q corresponde à carga que poderia ser equilibrada em A se a alavanca tivesse o seu fulcro em O , do que resulta

$$\frac{P}{Q} = \frac{OA}{OB}$$



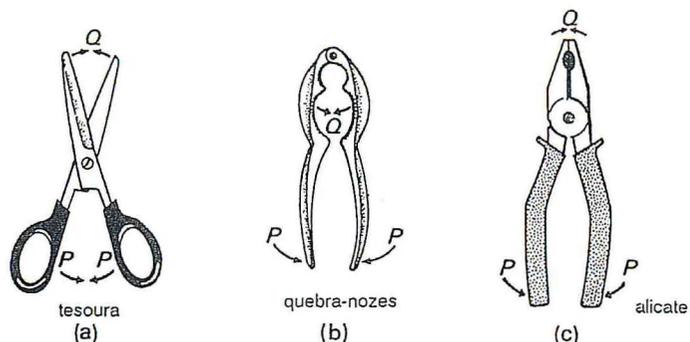
Os pedais de um automóvel constituem exemplos de alavancas do segundo tipo, enquanto o travão de mão costuma ser uma alavanca do primeiro tipo. Os pequenos movimentos de uma pessoa em cima de uma balança de casa de banho são amplificados por meio de alavancas do terceiro tipo e o mesmo acontece com as agulhas e os estiletos dos barómetros aneróides e dos barógrafos¹².



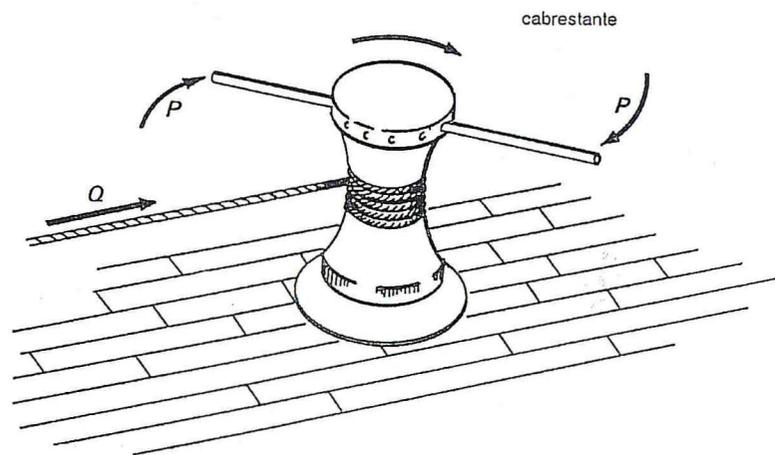
As alavancas são muitas vezes utilizadas aos pares, tal como acontece nas tesouras vulgares, nas tesouras de jardinagem, nos quebra-nozes ou nos alicates. Por que razão custa menos cortar os objectos quando estão próximos do fulcro do que quando estão perto das pontas da tesoura? De que tipo é a alavanca habitualmente usada nos quebra-nozes?

Temos um bom exemplo de alavanca do segundo tipo nos cabrestantes dos barcos. Cada braço do cabrestante é uma alavanca que gira em torno

¹² As alavancas aqui consideradas do primeiro tipo dizem-se interfulcrais, as do segundo, inter-resistentes, e as do terceiro, interpotentes. (N. da T.)

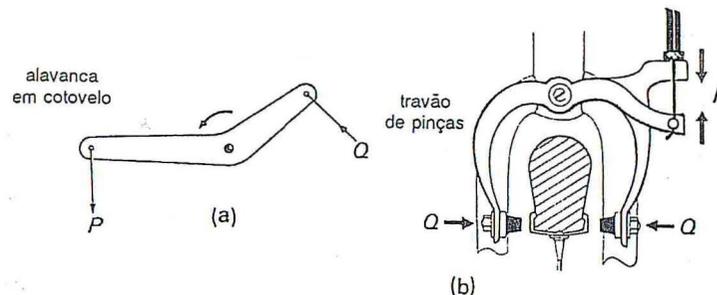


de um dos seus extremos, situado no eixo do cabrestante. Uma força é aplicada no extremo exterior de cada braço para fazer girar o cabrestante e produzir uma força Q na corda. Quanto maiores forem os braços do cabrestante relativamente ao raio do tambor de enrolamento, tanto mais se terão de deslocar as forças aplicadas em P relativamente à distância percorrida pela corda e , consequentemente, tanto maior será a carga que pode ser içada. Note o mecanismo de cremalheira e trinquete, instalado na base do cabrestante, para evitar que o tambor ceda corda involuntariamente.



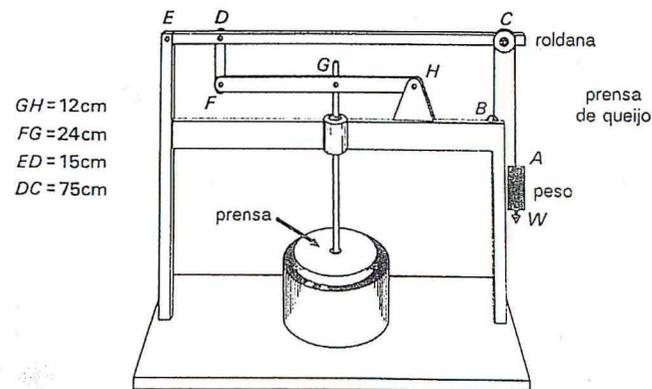
Com frequência se nos deparem situações em que a força aplicada tem de rodar de um determinado ângulo, o que se consegue por meio de uma alavanca em forma de cotovelo, vulgarmente designada por *cegonha*. Este

tipo de alavancas era utilizado no antigo sistema de sinais ferroviários que consistia numa série de cabinas cheias de alavancas com as quais se accionavam os sinais, situados em pontos distantes, graças a um sistema de fios de aço guiados por roldanas e interligados por alavancas com a forma de cotovelo. Mas, para os leitores, talvez sejam mais familiares os travões das bicicletas que utilizam alavancas em forma de cotovelo, tanto nas manilhas, como nas pinças portadoras de calços. Nas pinças, o cabo do travão opera verticalmente sobre duas alavancas curvas para que os calços



se desloquem horizontalmente. As tesouras de jardinagem, de asas largas, utilizadas para desbastar as sebes, utilizam também alavancas em forma de cotovelo.

A figura seguinte mostra uma prensa artesanal, para compactar o queijo, que utiliza uma combinação de roldana simples e alavancas. Para averiguar por que factor vem multiplicado o peso suspenso em A quando chega à prensa é necessário comparar os deslocamentos de G e de A.



Suponhamos que G desce 1 cm. Como $FH = 36$ cm e $GH = 12$ cm, resulta que $FH = 3 GH$, pelo que F desce 3 cm.

Ora $EC = 90$ cm e $ED = 15$ cm, de onde $EC = 6ED$ e, portanto, C desce 6×3 cm = 18 cm. Mas o peso A descerá o dobro do que desce a roldana C , pelo que A descerá 36 cm. Portanto, o factor de transmissão de A para G é 36.

Assim, desprezando as possíveis perdas devidas ao atrito, a força exercida sobre o queijejo devida a um peso W , suspenso em A , será de $36W$.

Hidráulica elementar

O matemático francês Blaise Pascal (1623-62) foi a primeira pessoa a formular explicitamente um princípio em que se baseiam numerosos mecanismos. Consideremos o aparelho mostrado na figura, que consiste em dois êmbolos que se deslocam em cilindros ligados por um tubo. As regiões sombreadas representam um líquido que, para os nossos propósitos, suporemos que tem volume constante. Desta forma, quando o êmbolo A é empurrado para a direita, o volume de líquido expulso do cilindro grande penetra no cilindro pequeno e desloca o êmbolo B para a direita. Se a área da secção transversal do êmbolo A for k vezes a área da secção transversal do êmbolo



B , para que o volume de líquido permaneça constante, o êmbolo B terá de se deslocar uma distância k vezes maior do que a distância que A se desloca.

Suponhamos, por exemplo, que o êmbolo A tem uma secção transversal de 20 cm² e que a secção de B tem 5 cm². Se o êmbolo A se deslocar 2 cm para a direita, injecta $2 \times 20 = 40$ cm³ de fluido no cilindro menor, pelo que o êmbolo B terá de se deslocar $40:5 = 8$ cm para a direita para dar lugar ao aumento de fluido.

Em geral, tem-se

$$\frac{\text{deslocamento de } B}{\text{deslocamento de } A} = \frac{\text{área da secção de } A}{\text{área da secção de } B}$$

Porém, se A for empurrado com uma força P e B exercer uma força Q , tal como nas alavancas, o trabalho realizado sobre A tem de ser igual ao trabalho realizado por B e, portanto,

$$P \times \text{deslocamento de } A = Q \times \text{deslocamento de } B$$

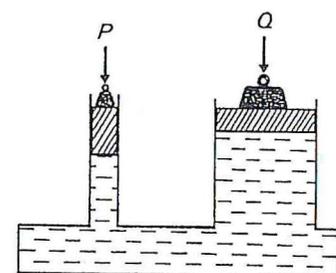
de onde

$$\frac{P}{Q} = \frac{\text{deslocamento de } B}{\text{deslocamento de } A}$$

e da equação anterior resulta

$$\frac{P}{Q} = \frac{\text{área da secção de } A}{\text{área da secção de } B}$$

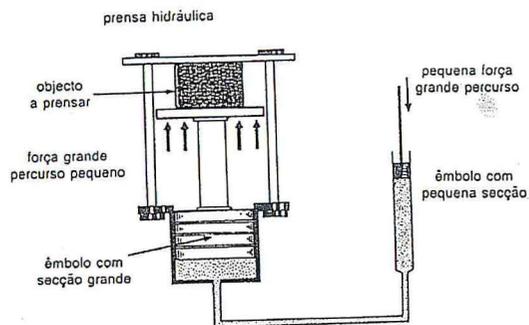
Pascal demonstrou este princípio fundamental, em 1647, utilizando um instrumento que consistia num tanque com água cuja parte superior era formada por dois cilindros de secção transversal significativamente diferente. Em cada um dos cilindros deslizava um êmbolo. Colocando sobre os êmbolos pesos proporcionais às áreas das secções respectivas, obteve uma balança hidrostática. Mas foi preciso esperar até 1795 para que o engenheiro britânico Joseph Bramah se apercebesse das possibilidades práticas do princípio e patenteasse uma *pressa hidráulica*.



aparelho experimental de Blaise Pascal (1647)

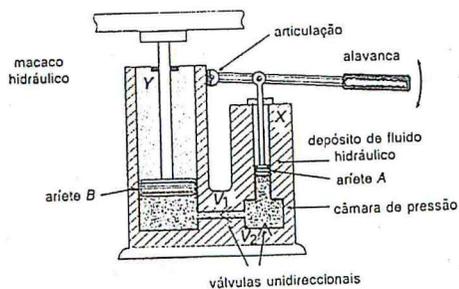
Deslocando de uma grande distância um êmbolo de pequeno diâmetro, hidráulicamente ligado a outro êmbolo de secção muito maior, pode usar-se uma força pequena para produzir uma força muito grande. Cerca de 1799, Bramah havia já projectado uma prensa que produzia uma força equivalente a 400 t e, em muito pouco tempo, estas prensas eram utilizadas profusamente numa gama de tarefas tão diversas como o empacotamento de algodão-em-rama em bolas compactas, a extracção do óleo de nozes, a estampagem de tecidos e a laminação de lingotes de aço. O leitor já terá concluído que, se a razão entre as áreas das secções transversais dos êmbolos for muito grande, o êmbolo pequeno terá de fazer um longo caminho para se obterem deslocamentos de interesse prático no êmbolo maior. Este problema foi resolvido com o recurso a várias técnicas.

O macaco hidráulico, capaz de levantar 1500 kg, combina as vantagens da alavanca com as do mecanismo hidráulico. Dois êmbolos A e B, designados como *arietes*, deslizam à justa dentro dos respectivos cilindros, os quais estão interligados e instalados dentro de um recipiente hermético cheio de fluido hidráulico. Quando a alavanca é empurrada para baixo, o pequeno ariete A expulsa o fluido do seu cilindro através de uma válvula unidireccional V_1 e injecta-o no cilindro B, cuja secção transversal é relativamente grande. O efeito é que o ariete B se eleva um pouco. Note que o ariete A, na sua descida, aspira fluido do recipiente através do orifício X para



compensar o volume que deslocou, enquanto o ariete B, ao elevar-se, expulsa idêntico volume de fluido através do orifício Y, pelo que o volume de fluido no interior do depósito permanece constante.

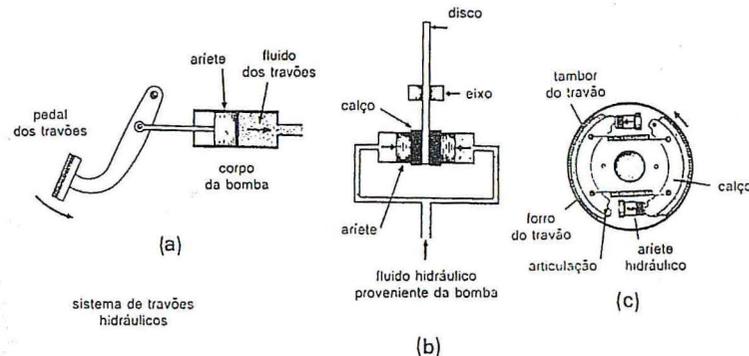
Quando a alavanca é puxada para cima, o ariete A aspira fluido do depósito através da válvula V_2 para manter sempre cheia de fluido hidráulico a câmara de pressão, de forma que, numa segunda descida da alavanca, se injecte outra pequena quantidade de fluido no cilindro B, através da válvula V_1 . Portanto, mover 20 vezes, para cima e para baixo, a alavanca equivale a deslocar o ariete A ao longo de um cilindro cuja altura fosse 20 vezes maior do que a altura do cilindro A.



Suponhamos que a secção transversal de B tem uma área 100 vezes maior do que a de A e suponhamos ainda que o cabo da alavanca dista do fulcro cinco vezes mais que o ariete. Assim, o cabo desloca-se cinco vezes mais do que o ariete A, enquanto A, por seu lado, terá de se deslocar 100 vezes mais que o ariete B, pelo que o factor de transmissão do cabo para o ariete B será 1/500. Isto significa que a força disponível no ariete B é 500 vezes maior do que a aplicada no cabo da alavanca.

Os sistemas de travões de automóveis e bicicletas recorrem, quase invariavelmente, a sistemas hidráulicos para transmitir aos calços a força aplicada no pedal dos travões, sejam estes de disco, sejam de tambor. Quando o condutor actua sobre o pedal dos travões [figura (a)], o efeito é empurrar um êmbolo ao longo e no interior de uma bomba, obrigando o fluido hidráulico a circular por condutas de metal e por tubos de pressão até aos cilindros hidráulicos encarregados de fazer actuar os calços de fricção. Actualmente, os travões dianteiros dos automóveis são quase sempre de disco [figura (b)]; consistem num par de calços montados numa pinça que são aplicados contra as duas faces de um disco de aço coaxial e solidário com a roda dianteira. Só diferem dos travões de uma bicicleta pelo facto de os calços serem accionados por um sistema hidráulico activado por fluido hidráulico proveniente da bomba.

Os travões traseiros costumam ser de tambor [figura (c)] e os seus dois calços são aplicados sobre os tambores, graças a outro par de cilindros hidráulicos activados por fluido proveniente da bomba.

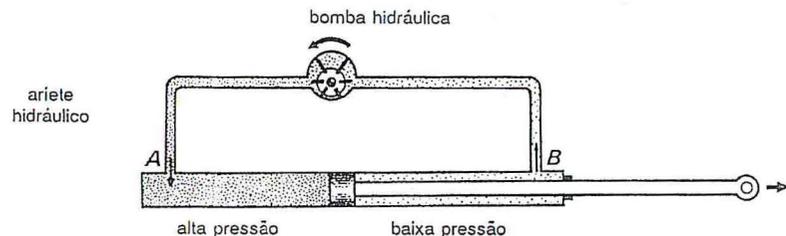


Suponhamos que a bomba dos travões e os 8 cilindros hidráulicos (2 por cada roda) têm a mesma secção. Neste caso, o volume de fluido deslocado pela bomba é repartido pelos 8 cilindros situados nas rodas. Em princípio, os êmbolos dos cilindros avançariam apenas 1/8 da distância percorrida

pelo êmbolo da bomba. Portanto, a força total produzida pelos cilindros dos travões seria 8 vezes maior que a força exercida sobre o êmbolo da bomba. Mas os travões deverão estar cuidadosamente ajustados, porque o percurso efectuado pelos arietes dos seus cilindros é pequeno em comparação com o do pedal dos travões, particularmente quando se tem também em conta o efeito da alavanca à qual o pedal está ligado.

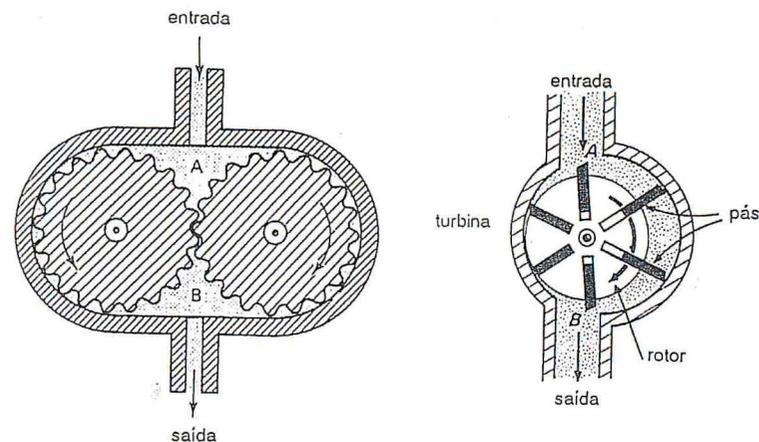
Podemos ver sistemas hidráulicos modernos, baseados em arietes com percurso longo, em escavadoras JCB, tractores, guas, ou para controlar superfícies aerodinâmicas nos aviões, ou nos autómatos industriais. Todos eles recorrem a bombas para obrigar o fluido hidráulico a passar, pelo efeito da pressão, de um lado do ariete para o outro.

Na figura abaixo, uma bomba hidráulica extrai fluido de B e injecta-o em A, o que tem como resultado o deslocamento do ariete para a direita. Quando se inverte o sentido de rotação da bomba, o ariete desloca-se em sentido contrário.



O desenho das bombas hidráulicas obedece à ideia de conseguir diferenças de pressão significativas em cada lado do ariete. Suponhamos que uma bomba pode gerar uma diferença de pressão de 12 kg por centímetro quadrado e que a secção transversal do ariete tem uma área de 60 cm². Neste caso exercer-se-á sobre o ariete uma força de 720 kg. A velocidade de deslocamento depende do volume de fluido deslocado pela bomba em cada segundo. Por exemplo, se este for de 120 cm³, o ariete avançará à razão de 2 cm/s.

A bomba de engrenagens consiste em dois pinhões engrenados um no outro e alojados num corpo de bomba cuidadosamente ajustado. O fluido hidráulico (óleo, normalmente) fica aprisionado em A, entre os dentes da engrenagem e o corpo da bomba, e é arrastado pelo exterior das rodas até B, criando um fluxo de fluido que atravessa a bomba entre A e B. As bombas deste tipo conseguem produzir diferenças de pressão de mais de 200 kg por centímetro quadrado e, assim, activar arietes hidráulicos capazes de exercer forças consideráveis.



A bomba de hélice, ou turbina, possui um rotor excêntrico provido de um certo número de pás que são comprimidas, por meio de molas, contra o corpo da bomba enquanto o rotor gira. O comportamento das pás é muito semelhante ao dos dentes da bomba de engrenagens, pois a sua função é capturar, em A, um certo volume de fluido que fica aprisionado entre elas e o corpo da bomba e levá-lo até B.

Até agora, só examinámos as aplicações da hidráulica para produzir movimento linear, mas as bombas hidráulicas podem também funcionar ao inverso, como motores hidráulicos. Assim, em lugar de activar o rotor da turbina por meio de um motor eléctrico para produzir, por exemplo, um fluxo do fluido hidráulico, se este fluxo for gerado por algum outro procedimento, o rotor girará e proporcionará um movimento de saída rotativo.

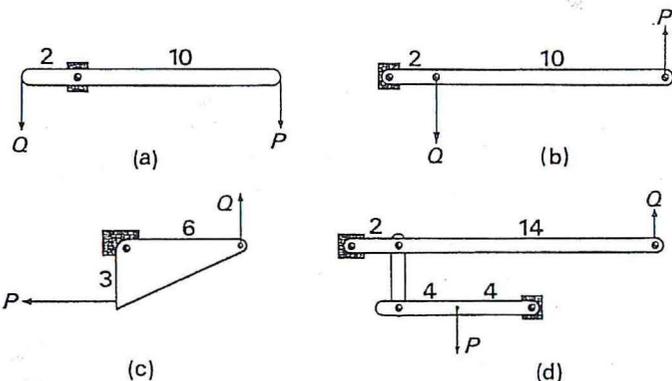
A hidráulica desenvolveu-se no século XIX, devido em grande parte à inteligência e iniciativa de William Armstrong (1810-1900), que concebeu e desenvolveu sistemas hidráulicos para guindastes de portos, cabrestantes rotativos, abertura hidráulica de comportas e muitas outras situações que exigem grandes forças. A ponte da Torre de Londres é de abertura hidráulica e uma das obras de engenharia mais interessantes do século XX, a barreira contra as cheias do Tamisa, instalada em Woolwich, também é de funcionamento hidráulico. A grande vantagem das máquinas de funcionamento hidráulico é que se pode levar até elas, por meio de tubos, a potência necessária, de forma eficiente, silenciosa e versátil, desde uma distância considerável. Se bem que o desenvolvimento da electricidade tenha provocado o abandono da hidráulica em muitas aplicações, os últimos 30 anos viram ressurgir esta tecnologia, pelo que o equipamento de engenharia civil, aero-

náutica, marinha, maquinaria agrícola e autómatos depende em grande medida de cilindros e motores hidráulicos para o seu funcionamento.

Uma breve história do papel da hidráulica no século passado foi recolhida por Adrian Jarvis num livro intitulado *Hydraulic Machines*. São só 32 páginas, mas fazem-nos ver a importância das realizações dos engenheiros neste campo.

Exercício 11

- 1 A figura seguinte mostra quatro mecanismos com alavancas. Em cada caso, a força aplicada em P equilibra exactamente a força Q . Todas as dimensões estão expressas em centímetros. Determine a) a relação entre os deslocamentos respectivos de P e de Q e b) a relação entre as forças P e Q em cada mecanismo.



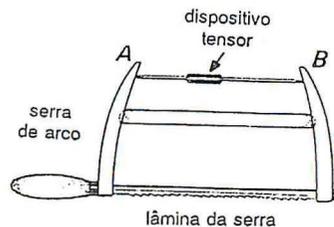
- 2 As teclas de piano são simples alavancas. De que tipo são e como activam os martelos que golpeiam as cordas?

Em que difere o mecanismo de um piano vertical do de um piano de cauda?

Como funciona o mecanismo dos pedais de um piano?

- 3 Observe e analise o mecanismo de uma máquina de escrever mecânica para ver como a tecla activa o martelo onde estão os caracteres.
- 4 Descreva o funcionamento do martelo de carpinteiro, provido de um pé-de-cabra, ao arrancar pregos.
- 5 Se uma mulher de 50 kg se dirigisse a um balancé para brincar com a filha, que pesa 25 kg, onde se sentariam?

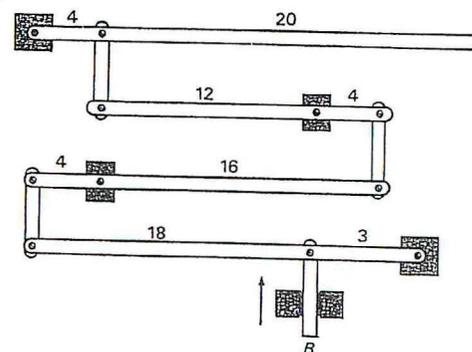
- 6 Para manter em tensão a lâmina de uma serra de arco como a da figura faz-se tracção para o interior sobre os extremos A e B da estrutura da serra. Se a tensão sobre a haste AB for T , qual será a tensão na lâmina?



- 7 Explique como se aplica o princípio da alavanca a:

- Uma chave da parafusos;
- Um carrinho de mão;
- Um berbequim;
- Uma alavanca do travão de uma bicicleta;
- Esculturas móveis¹³;
- Um remo de um barco;
- Uma cana de pesca;
- O braço de uma pessoa;
- Uma espada.

- 8 Determine o factor de transmissão de A relativamente a B no mecanismo seguinte. Se em A se exercer uma força de 20 kg, para baixo, qual será a intensidade da força disponível em B ?

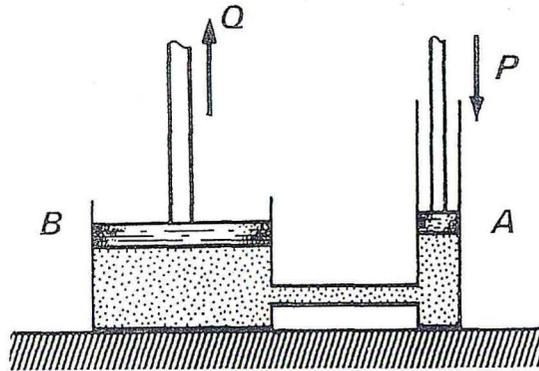


¹³ Mobiles no original. (N. da T.)

9 Atribui-se a Arquimedes a seguinte citação: «Dêem-me um ponto de apoio e moverei o mundo.» Explique esta afirmação.

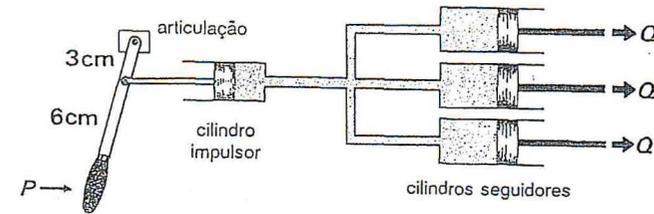
10 Dois cilindros hidráulicos, A e B, estão unidos por um tubo de alta pressão. O raio de A mede 1 cm e o de B 8 cm.

- Quanto subirá B se o êmbolo de A baixar 16 cm?
- Se A for empurrado para baixo por uma força $P = 6$ kg, que força exercerá o êmbolo B?
- Se o tubo de pressão estiver projectado para suportar uma pressão máxima de 20 kg por centímetro quadrado, qual será a carga máxima que se pode elevar com o êmbolo B?

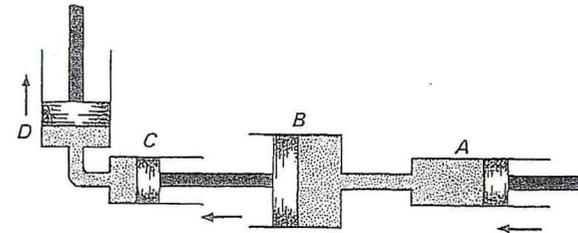


11 O êmbolo de um cilindro principal, ou impulsor, é activado por meio de uma alavanca, como vemos na figura da página seguinte. O cilindro impulsor tem uma secção transversal de 15 cm^2 e está ligado a três cilindros seguidores idênticos por meio de tubos de alta pressão. Os cilindros seguidores têm uma secção de 10 cm^2 .

- Quanto se deslocam os êmbolos dos cilindros seguidores em comparação com:
 - O êmbolo do cilindro impulsor?
 - O cabo da alavanca?
- Que relação existe entre a força de saída Q de cada cilindro secundário e a força P aplicada na alavanca?



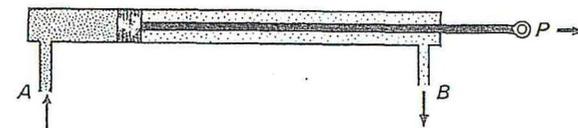
12 Quatro cilindros hidráulicos, A, B, C e D, estão interligados, como podemos ver na figura seguinte, com os êmbolos B e C, fisicamente ligados para que se movam solidariamente. A secção transversal dos cilindros tem uma área de 12 cm^2 , 120 cm^2 , 8 cm^2 e 48 cm^2 , respectivamente.



- De quanto se move o êmbolo D quando o êmbolo A se desloca 20 cm^2 ?
- Que carga poderá suportar o êmbolo D quando o êmbolo A for impulsionado com uma força equivalente a 24 kg?

Neste caso, qual seria a pressão do fluido hidráulico 1) em A e em B, 2) em C e em D?

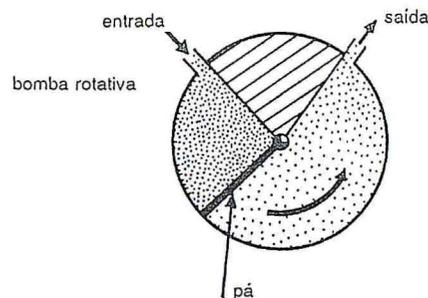
13 O fluido hidráulico procedente de uma bomba rotativa penetra, por A, no cilindro de um aríete hidráulico e é extraído através de B (ver figura abaixo). A bomba é capaz de bombear 18 cm^3 de fluido por segundo, com uma diferença de pressão de 150 kg cm^{-2} . Sabendo que a área da secção transversal do cilindro é de 6 cm^2 , 1) que força pode exercer o cilindro hidráulico, 2) a que velocidade se deslocará o êmbolo?



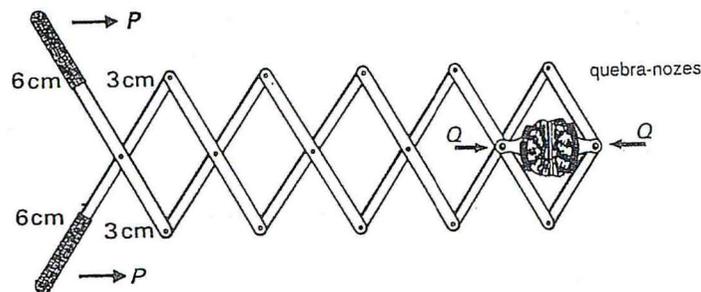
14 Desenhe um mecanismo para abrir e fechar as janelas de um automóvel.

15 Uma turbina rotativa tem uma pá que é obrigada a girar para impelir o fluido hidráulico num dos lados de uma câmara hidráulica e aspirá-lo do outro lado (ver figura). O cilindro tem um raio interior de 6 cm e 4 cm de profundidade.

- Qual o volume varrido pela pá quando roda um ângulo θ ?
- Qual terá de ser a capacidade da bomba, em $\text{cm}^3 \text{s}^{-1}$ para que a pá rode 5° por segundo?
- Se a bomba puder produzir uma diferença de pressão de 20 kg por centímetro quadrado, qual será a força que faz girar a pá?



16 Um quebra-nozes de desenho moderno tem o aspecto que podemos ver na figura. Averigüe a relação entre o deslocamento dos cabos e o deslocamento das mandíbulas do quebra-nozes e use-a para comparar a força Q com que a noz é partida e a força P utilizada para apertar os cabos.



12 Manipuladores mecânicos

Uma análise do desenho de autómatos

Há mais de cem anos que a indústria tem vindo a utilizar autómatos, isto é, máquinas capazes de realizar certas tarefas mecânicas sem intervenção humana. Contudo, os autómatos controlados por computador¹⁴, capazes de realizar uma multiplicidade de tarefas, constituem um fenómeno muito recente. É certo que, pela sua concepção, costumam possuir muitos graus de movimento, mas, na prática, foi a sua fiabilidade e a sua capacidade para repetir a mesma tarefa um sem-número de vezes, com grande exactidão, sem cansaço nem perda de concentração, que levaram a serem encarregados de muitas tarefas rotineiras nas grandes fábricas. Mas, por muito elaborado que seja um autómato, os seus movimentos são sempre composições de rotações e translações. Por isso, os autómatos são classificados segundo a natureza das suas juntas e articulações. Quando o movimento de um braço se consegue por translação ou deslizamento linear, fala-se de uma *junta prismática*. Quando o movimento de um braço se consegue por rotação, tem-se uma *junta de revolução*.

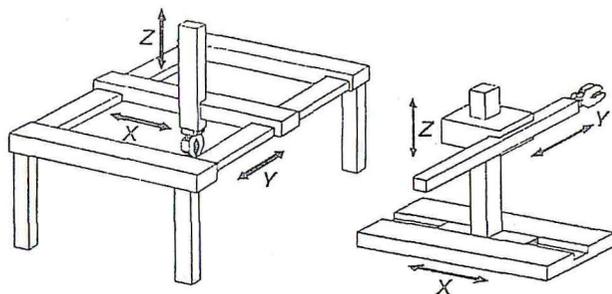
Para descrever a orientação do autómato e poder programar as suas acções, são precisos diferentes sistemas de coordenadas que dependerão da configuração das suas juntas. Por este motivo, é habitual que os autómatos recebam os nomes do sistema de coordenadas que melhor se adaptam às suas articulações.

Autómatos cartesianos

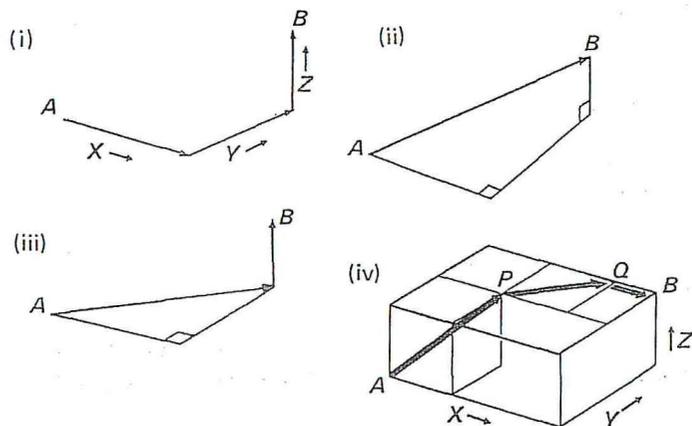
Na figura seguinte podemos ver dois exemplos de autómatos cartesianos. O primeiro funciona de maneira muito semelhante à de uma grua de ponte,

¹⁴ Vulgarmente designados por robots. (N. da T.).

enquanto o segundo lembra mais uma grua de torre. Em ambos os casos, os autómatos dispõem de três juntas prismáticas que permitem a translação em três direcções mutuamente perpendiculares. Se os movimentos possíveis nas direcções X , Y e Z são de 4 m, 3 m e 2 m, respectivamente, a do autómato pode alcançar qualquer ponto do interior de um paralelepípedo com essas dimensões. Esta região acessível denomina-se *envolvente de trabalho* do autómato e constitui, obviamente, um importante parâmetro do projecto.



Para mover a mão de um lugar para outro, o autómato precisa de conhecer as coordenadas dos dois pontos em questão. Então poderá realizar de muitas formas o movimento requerido, que dependerá significativamente da sophistication do autómato e do computador. A figura abaixo mostra quatro formas diferentes de o autómato mover a mão de A para B . A primeira das três é a menos sofisticada e presume que tanto o autómato como o com-



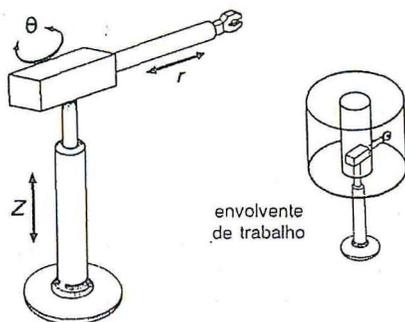
putador só podem mover, em cada momento, uma das suas juntas prismáticas, pelo que o movimento até B começa por uma translação na direcção e sentidos definidos por X , seguida por uma translação Y e, por último, por uma translação Z . A segunda solução ilustrada toma o caminho mais curto entre A e B (segmento de recta), mas isto requer uma programação muito mais elaborada e supõe que o autómato tem a capacidade de mover as suas articulações prismáticas a três velocidades diferentes em correspondência com a direcção de AB . O terceiro diagrama mostra uma solução de compromisso entre as duas primeiras soluções. Neste caso, o autómato toma o caminho mais curto no plano XY até que a mão se encontre directamente debaixo de B , e só então se move na direcção Z . O quarto trajecto é aparentemente o mais complicado, mas poderia muito bem acontecer na prática. Supõe que todas as juntas prismáticas se movem à mesma velocidade, pelo que, inicialmente, a mão se desloca ao longo da diagonal de um cubo até P , momento em que terá completado o seu movimento segundo o eixo Z . A seguir move-se no plano horizontal, ao longo da diagonal de um quadrado, desde P até Q , completando assim a componente Y do seu deslocamento. Finalmente, move-se desde Q até B para completar o movimento segundo X . Nenhuma das soluções anteriores tomou em conta os possíveis objectos que, numa situação real, poderiam interpor-se nos percursos propostos. Por exemplo, ao soldar pontos da carroçaria de um automóvel, poderia ser necessário fazer alguns desvios. A principal virtude de um autómato é que, uma vez programado o trajecto, ele o fará repetidamente.

Autómatos cilíndricos

Os autómatos cilíndricos dispõem de um braço horizontal, de comprimento variável. Por um dos seus extremos, o braço pode girar em torno de um eixo vertical; além disso, o braço pode subir ou baixar sem perder a sua horizontalidade. A posição da mão pode ser definida pela sua distância, r m, ao eixo vertical, pelo ângulo θ rodado em torno do eixo vertical, contado a partir de uma posição previamente fixada, e pela altura, z m, relativamente ao solo. Por outras palavras, temos um sistema típico de *coordenadas cilíndricas*.

O seu modo de funcionamento determina uma envolvente de trabalho que consiste numa região limitada por dois cilindros, como vemos na figura. O braço não pode inclinar-se, nem para cima, nem para baixo, pelo que não pode atingir nem o solo, nem o tecto.

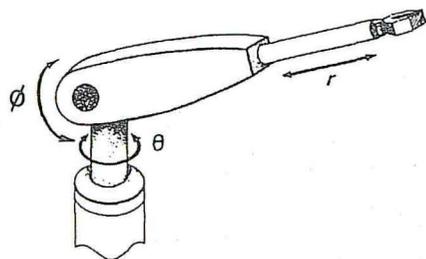
Suponhamos que, por razões da função a que se destina, é necessário mover a mão do autómato desde a posição $(r, \theta, Z) = (0,8, 30, 1,3)$ até à posição $(1,5, 80, 1,5)$. O autómato poderia consegui-lo estendendo o braço



0,7 m, rodando 50° em torno do seu eixo vertical e aumentando 0,2 m a altura do braço, em três movimentos distintos, efectuados um após o outro. Contudo, com uma programação suficientemente sofisticada e um computador adequado, o autómato poderia efectuar os três movimentos simultaneamente e descrever uma trajectória em espiral entre os dois pontos. Na prática, é verosímil supor que o computador pode ser programado para seguir o trajecto mais rápido de que é capaz. Por que razão é pouco provável que, neste tipo de autómato, a linha mais curta entre dois pontos seja a linha recta?

Autómato esférico

O autómato esférico tem duas juntas de revolução e uma junta prismática. O braço pode esticar ou encolher, pode girar em torno de um eixo vertical e, por último, pode girar em torno de um eixo horizontal para progredir para cima ou para baixo da horizontal. Assim, a posição da mão pode ser descrita pelas coordenadas esféricas (r , θ , ϕ) que designam o comprimento do braço, a direcção em que aponta e o seu ângulo de elevação.

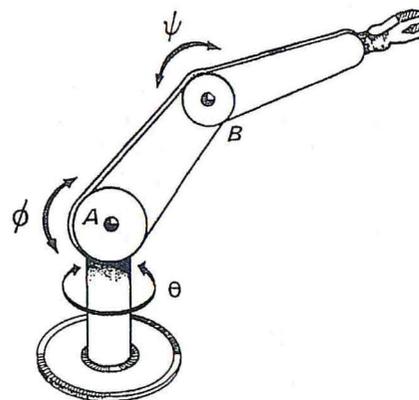


Comparemos este sistema com a determinação da posição de um papagaio de papel, dando o comprimento do fio, a direcção do papagaio e o seu ângulo de elevação enquanto o fazemos voar.

Qual será, neste caso, a envolvente de trabalho?

Autómato articulado

O autómato articulado não se diferencia muito do autómato esférico, mas, em lugar de um braço extensível, tem um braço articulado, bastante parecido com o braço humano, o que oferece a vantagem de, dobrando o braço pelo cotovelo B , poder aproximar a mão do ombro A . Assim, a sua envolvente de trabalho é muito maior do que a de um autómato esférico que tenha um braço com o mesmo comprimento. As fronteiras exteriores das suas envolturas de trabalho seriam superfícies esféricas idênticas, mas o autómato articulado poderia levar a mão muito mais próximo de A .

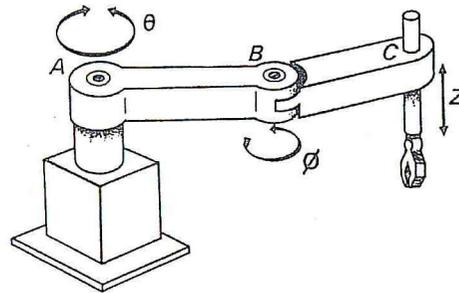


Autómato SCARA

O autómato SCARA dispõe de um braço com cotovelo, como o autómato articulado, mas, em lugar de se mover, como este, num plano vertical, gira em torno de eixos verticais que passam por A e B . Dispõe, assim, de uma envolvente de trabalho muito versátil na secção transversal horizontal, mas o seu movimento vertical é limitado pela junta prismática em C .

Suponhamos que a gama de valores de θ é de 270° e que o BC pode girar até formar um ângulo mínimo de 30° com AB . Se AB e BC tiverem

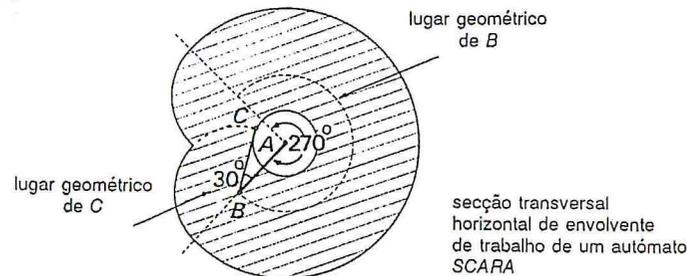
comprimentos iguais, a secção transversal horizontal da envolvente de trabalho assemelhar-se-á bastante com uma cardióide a que se tenha recortado um círculo no centro (ver figura).



O braço AB está representado numa posição extrema do seu trajecto, com o braço BC rodado também até ao limite do seu alcance. O lugar geométrico de B está confinado a um arco de circunferência de centro em A, mas o lugar geométrico de C é toda a região tracejada.

Vemos assim, com clareza, como um movimento básico origina um lugar geométrico unidimensional, enquanto dois movimentos básicos permitem que a mão se mova até um ponto qualquer de um espaço bidimensional. A posição de B pode ser descrita por uma só coordenada θ , enquanto a posição de C só fica conhecida quando são dadas ambas as coordenadas θ e φ .

Não há qualquer motivo que impeça os autómatos de terem braços múltiplamente articulados, mas, quanto maior for o seu número, menor será a precisão com que o autómato pode alcançar uma determinada posição no espaço.

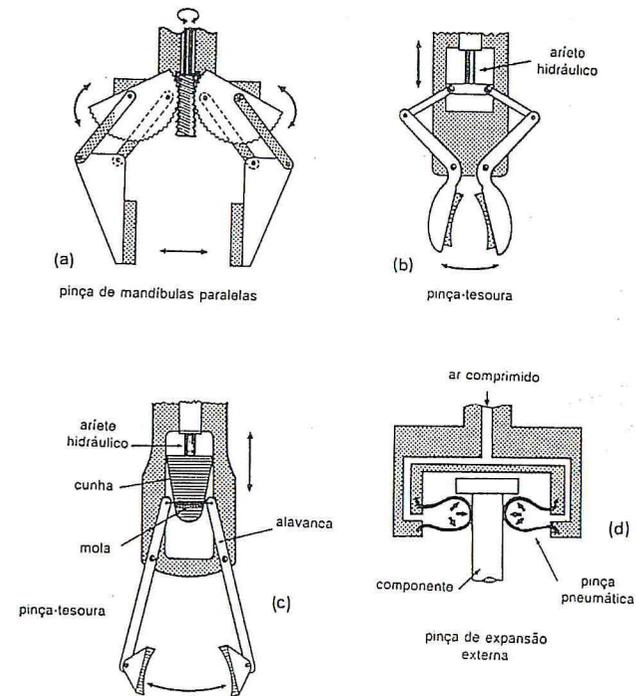


Com três movimentos básicos, como os referidos nos cinco tipos de autómatos descritos, o autómato será capaz de posicionar a mão em qualquer ponto da sua envolvente de trabalho tridimensional. A selecção de um

determinado ponto particular exige três coordenadas; quais serão é algo que depende do tipo de autómato utilizado. Existe uma concordância notável entre os diferentes autómatos e os sistemas de coordenadas que matemáticos, cientistas e engenheiros, geralmente utilizam para determinar pontos no espaço a três dimensões. Assim, o estudo da concepção de autómatos contribui para a compreensão de tais sistemas.

Terminais executores

No extremo do braço de um autómato encontra-se o que, em linguagem técnica, se chama *executor* ou *terminal executor*. Os executores podem tomar uma variedade de formas, dependendo do uso que se queira dar ao



autómato. Se pretendemos que o autómato pegue em objectos e os coloque, cuidadosamente, nos sítios devidos, teremos de o dotar de meios para o fazer. Assim, foram concebidas muitas *garras*, *pinças* e outros elementos preñseis muito interessantes. A figura acima mostra alguns deles.

As *pinças paralelas* utilizam paralelogramos articulados para conseguir que as mandíbulas conservem o paralelismo enquanto se vão cerrando sobre o objecto a pegar. Tal propriedade torna-as capazes de agarrar uma ampla gama de objectos de diferentes larguras. No exemplo aqui ilustrado, o ângulo de cada paralelogramo articulado varia, ligando uma das barras a um semi-fim activado por um motor eléctrico.

Que factores determinam a velocidade com que se cerram as pinças e a força que podem exercer?

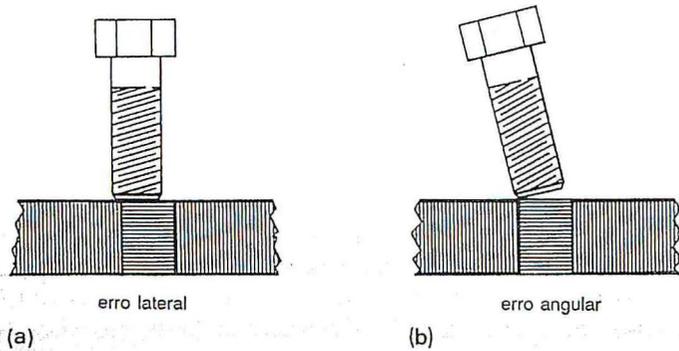
Na primeira das *pinças-tesouras* (b) aqui representadas, um cilindro hidráulico (ou pneumático) activa os mecanismos, do tipo triângulo de base variável, para abrir ou fechar as mandíbulas, enquanto no segundo exemplo (c) se usa um aríete para activar uma cunha instalada entre duas alavancas que cerram as mandíbulas; por outro lado, uma mola antagonista encarrega-se da sua abertura. Utilizam-se sistemas deste tipo na indústria alimentar para manipular garrafas.

No quarto exemplo vemos uma *pinça pneumática*, particularmente útil para pegar componentes frágeis, como, por exemplo, recipientes de cristal.

Utilizam-se também terminais executores de muitos outros tipos. Os leitores interessados poderão consultar alguma obra especializada, como *Elements of Industrial Robots*, de Barry Leatham-Jones.

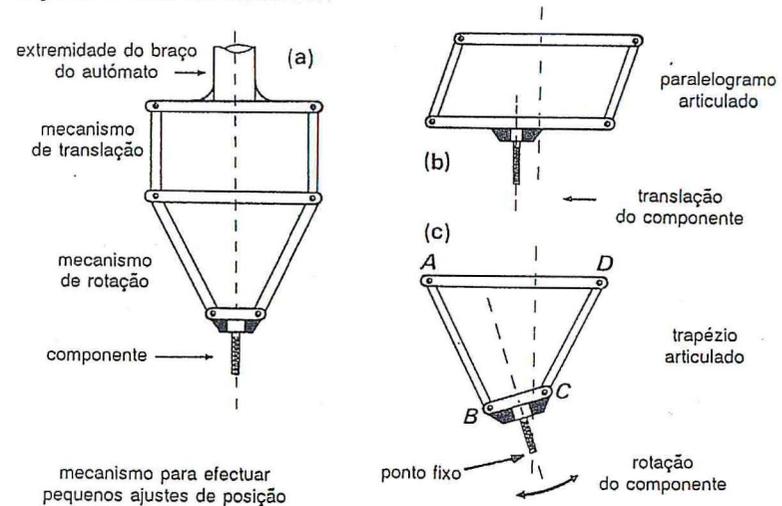
Problemas de montagem

Observando uma criança pequena a tentar inserir peças de diversas formas nas aberturas de uma dessas construções idealizadas para desenvolver a sua capacidade manipulativa, teremos uma pálida ideia dos problemas que apresenta a concepção de autómatos destinados a colocar cavilhas em orifícios de difícil encaixe. Não basta colocar a extremidade da cavilha precisamente sobre a entrada do orifício, pois o eixo da cavilha tem de estar



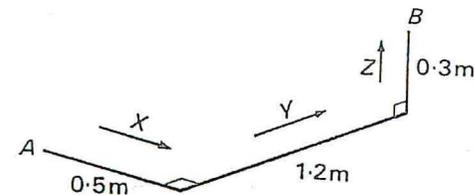
também alinhado com o eixo do orifício. A mão humana é muito destreza e capaz de efectuar pequenos ajustes até conseguir a posição correcta e alguns autómatos têm sido concebidos com dispositivos especiais, entre o extremo do braço e a pinça ou elemento preênsil, que permitem efectuar ajustes semelhantes. Tais sistemas baseiam-se nos nossos velhos amigos, os paralelogramos e os trapézios isósceles articulados.

Nesta altura, a acção do paralelogramo está, sem dúvida, perfeitamente compreendida, mas já não é assim tão óbvio que, estabelecendo adequadamente as razões entre os comprimentos das barras do sistema trapezoidal, a extremidade do componente (a cavilha, neste caso) permaneça em posição invariável ao girarem solidariamente BC e a cavilha. Esta propriedade é explorada num dos exercícios.



Exercício 12

- Um autómato cartesiano tem de mover a extremidade do seu braço 0,5 m na direcção X, 1,2 m na direcção Y e 0,3 m na direcção Z, indo desde o ponto A até ao ponto B (ver figura). O braço é capaz de se deslocar,



ao longo das direcções dos seus eixos principais, a uma velocidade de 0,1 m/s.

a) Se cada troço do deslocamento se fizer segundo um só eixo:

- 1) Quanto demorará o autómato a fazer o percurso entre A e B?
- 2) Quantos percursos alternativos se podem programar?

b) Se o autómato se puder mover simultaneamente segundo os três eixos, faça um esboço que mostre o caminho seguido pelo extremo do braço ao viajar desde A até B. Quanto demoraria neste caso?

c) Se o braço do autómato puder ser programado para se deslocar a velocidades diferentes ao longo dos seus eixos principais, como deve ser programado para seguir o caminho mais curto entre A e B? Quanto demoraria a fazer esse trajecto se a velocidade máxima, segundo cada eixo, fosse de 0,1 m/s?

2 Os deslocamentos de um autómato cartesiano têm uma imprecisão de $\pm 0,02$ mm em translações segundo X ou Y e de $\pm 0,01$ mm segundo Z. Qual seria o seu erro máximo 1) na direcção horizontal, 2) globalmente?

3 Um autómato cilíndrico pode rodar um máximo de 300° em torno do seu eixo vertical. A extremidade do braço pode afastar-se do eixo vertical desde 0,5 m até 1 m, com um percurso vertical de 0,4 m.

Faça um desenho à escala da secção transversal horizontal da envolvente de trabalho do autómato.

Qual o volume da envolvente de trabalho?

4 É preciso programar um autómato cilíndrico para que mova o extremo do braço desde a posição A (r, θ, Z) = (0,5, 34, 0,8) até à posição B (0,9, 124, 1,1), em que r e Z estão expressos em metros e θ em graus. A velocidade de rotação do autómato em torno do seu eixo vertical é de $15^\circ/\text{s}$; pode estender o braço a 0,2 m/s e deslocá-lo verticalmente a 0,1 m/s.

a) Se o autómato só puder mover uma das suas juntas de cada vez:

- 1) Calcule o tempo que demora a deslocar-se de A para B;
- 2) Faça esboços dos 6 diferentes trajectos que pode seguir.

b) Se os três movimentos se iniciarem e efectuarem simultaneamente:

- 1) Esboce a trajectória seguida pela extremidade do braço;
- 2) Calcule o tempo que demora a atingir B.

c) Qual o comprimento do segmento de recta [AB]? É completamente inverosímil que o braço do autómato siga uma tal trajectória. Porquê?

*5 Um autómato cilíndrico pode estender o braço desde 0,5 m até 1,3 m com um erro de 0,5 mm e rodar um ângulo de 270° com um erro de $0,1^\circ$. Além disso, pode deslocar-se verticalmente 0,3 m com um erro de 0,3 mm.

a) Em que região da sua envolvente vai o autómato ser: 1) menos preciso, 2) mais preciso?

b) Qual a imprecisão máxima que pode ocorrer?

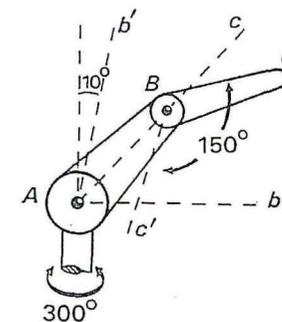
*6 Um autómato esférico pode efectuar revoluções completas em torno do eixo vertical, fazer girar o braço um ângulo de $\pm 60^\circ$ em torno de um eixo horizontal e estendê-lo desde 0,6 m até 1 m.

a) Esboce a envolvente de trabalho do autómato.

b) Se puder fazer girar o braço em torno de qualquer das suas juntas de revolução com uma velocidade angular de $20^\circ/\text{s}$ e estender o braço a 0,1 m/s, averigüe o tempo máximo que demoraria a ir de um ponto a outro da sua envolvente de trabalho se as juntas actuarem 1) uma depois da outra, 2) simultaneamente.

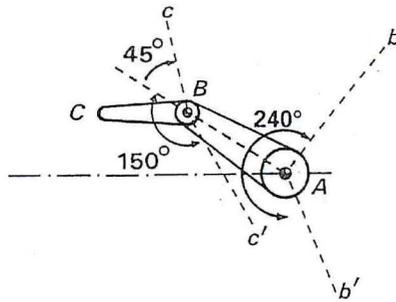
*7 Um autómato articulado pode fazer girar o seu braço AB em torno do ombro A, desde a horizontal até um ângulo de 10° com a vertical. O antebraço BC pode rodar um ângulo de 150° desde o seu alinhamento com AB, isto é, desde c até c', na figura. Pode também efectuar revoluções completas em torno do seu eixo vertical.

Sabendo que $AB = BC$, faça esboços das secções horizontal e vertical da envolvente de trabalho que passam por A.

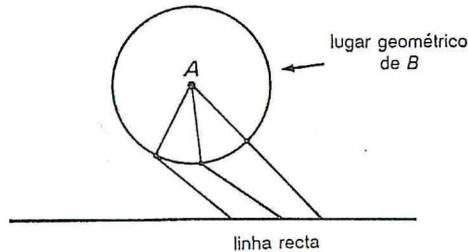


- *8 Um autômato SCARA pode rodar o braço 240° em torno de um eixo vertical que passa por A. O braço BC pode girar 45° em sentido horário e 150° em sentido anti-horário, contados a partir da recta AB, em torno de um eixo vertical que passa por B.

Faça um desenho à escala da secção transversal horizontal da envolvente de trabalho do autômato, sabendo que $AB = 1,2\text{ m}$ e $BC = 0,8\text{ m}$.



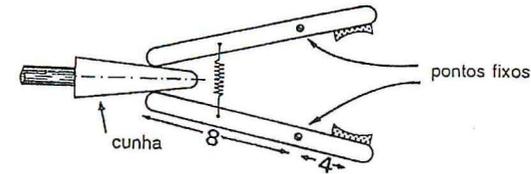
- *9 Não é fácil para um autômato de braço articulado descrever com este linhas rectas. Para investigar esta possibilidade, trace uma circunferência de 3 cm de raio que represente o lugar geométrico do B e, supondo que o antebraço mede também 3 cm, examine as posições do braço do autômato ao descrever uma linha recta cujo ponto mais próximo de A se encontra a 4,5 cm.



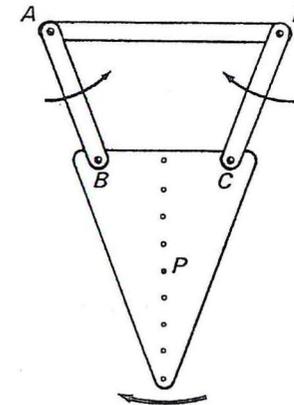
10. Utilize um estojo de construções para fazer modelos de 1) pinças paralelas e 2) pinças-tesouras.

- 11 Um sistema de pinça-tesoura consiste em duas alavancas activadas por uma cunha. Os centros de rotação distam 8 cm da cunha e 4 cm do

centro das mandíbulas. Se o ângulo da cunha medir 20° , qual a razão entre a distância percorrida pelas pinças e a percorrida pela cunha?



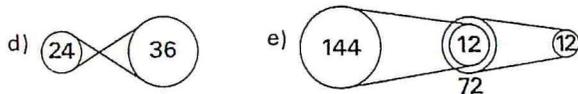
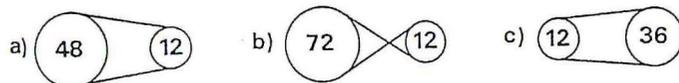
- 12 Construa um trapézio articulado, ABCD, e ligue ao lado BC um triângulo isósceles, como se vê na figura. Faça uma série de pequenos orifícios ao longo do eixo de simetria do triângulo e investigue os seus lugares geométricos ao manter fixo AD e fazer oscilar BC. Tente descobrir um mecanismo deste tipo que deixe virtualmente imóvel um certo ponto P do triângulo, enquanto BC oscila. Um mecanismo destes utiliza-se para fazer ajustes de rotação num terminal executor.



Soluções

Exercício 1

- 1 (a) + 5, (b) - 2, (c) + 1/6, (d) - 2/3, (e) + 8, (f) + 20, (g) + 1/64



- 2 Entre outros factores de transmissão possíveis contam-se:

$$+ 2, + 3, + 8, + 3/4, + 12, + 36$$

assim como os seus simétricos, os seus recíprocos e qualquer dos seus produtos ou quocientes.

Entre os factores de transmissão não possíveis figuram: + 5, + 7 e + 11.

Os possíveis factores de transmissão inteiros compreendidos entre + 1 e + 36 são:

$$1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 32, 36$$

ou seja, todos os inteiros da forma $2^p 3^q$. Daqui se deduz que os mesmos resultados poderiam conseguir-se utilizando apenas roldanas de diâmetros de 12 mm, 24 mm e 36 mm.

- 3 Velocidade da ventoinha = $10/7,5 \times 3000 = 4000$ rpm
Velocidade do alternador = $10/5 \times 3000 = 6000$ rpm

4 420 pontos por minuto. 1680 rpm

5 $2/36 \times 3000 \approx 167$ rpm

6 $t(AB) = 1/2$ $t(AC) = 1/2 \times 13/30 \times 13/30 = 169/1800 \approx 1/11$
Velocidade do motor = $100/20 \pi \times 60 \times 1800/169 \approx 1017$ rpm

7 720 rpm. $3,6\pi$ m/s

8 $150/10 = 15$ e $150/25 = 6$. $192/8 \times 2 = 48$ rps

9

	14	17	20	24	28
32	2,29	1,88	1,60	1,33	1,14
50	3,57	2,94	2,50	2,08	1,79

- 10 Roda pedaleira de 140 dentes, pinhão de 14 dentes. Se a roda pedaleira fosse maior, roçaria no solo. Se o pinhão tivesse menos dentes, a corrente saltaria sobre os dentes.

- 11 BMX: rendimento de 40 polegadas.

Para que uma roda de 27 polegadas tivesse o mesmo rendimento, o factor de transmissão entre a roda pedaleira e o pinhão teria de ser $40/27 \approx 1,48$. Uma roda pedaleira de 28 dentes ligada a um pinhão de 19 dentes produziria um rendimento de 39,8 polegadas, que é uma boa aproximação.

12

	16	20	24	28	32	36	pinhão
32	52	41,6	34,7	29,7	26	23,1	rendimento em polegadas
40	65	52	43,3	37,1	32,5	28,9	
48	78	62,4	52	44,6	39	34,7	

Rendimento	Roda pedaleira	Pinhão	Rendimento	Roda pedaleira	Pinhão
23,1	32	36	41,6	32	20
26	32	32	43,3	40	24
28,9	40	36	44,6	48	28
29,7	32	28	52	32	16
32,5	40	32	52	40	20
34,7	32	24	52	48	24

34,7	48	36	62,4	48	20
37,1	40	28	65	40	16
39	48	32	78	48	16

Uma análise como a anterior põe em evidência as limitações de tal disposição de pinhões. Nem todas as combinações produzem rendimentos sensivelmente diferentes; enquanto alguns são muito parecidos (p. ex., 28,9 e 29,7), outros originam grandes hiatos (passam, por exemplo, de 65 para 78). De facto, é muito improvável que o ciclista vá percorrendo ordenadamente todas as possibilidades, já que para isso seria necessário fazer saltar a corrente constantemente entre as 3 rodas pedaleiras e os 6 pinhões para obter todos os valores da sequência.

- 13 As relações de transmissão dão o número de voltas da roda traseira correspondentes a cada volta do pinhão.

Primeira: 52 polegadas Terceira: 78 polegadas
Segunda: 67 polegadas Quarta: 88 polegadas

- 14 $4 < d < 20$. 4 cm de deslocamento lateral. $1,5 < t < 5$

- 15 (a) 67,4 cm, (b) $2(\sqrt{288} + 4,92 + 19,11) \approx 82,0$ cm, (c) $\sqrt{143} + \sqrt{143} + \sqrt{140} + 9,38 + 6,28 + 3,69 \approx 55,1$ cm

- 17 É menos provável que patinem.

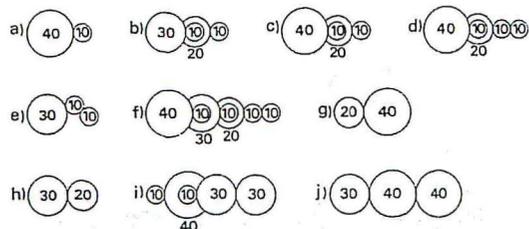
- 21 Desta forma, a correia tem apenas uma face que se desgasta por igual.

- 22 Os troços da correia entre roldanas têm de se manter paralelos entre si. Assim, o diâmetro de A tem de ser igual à soma dos diâmetros de B, C e D.

Exercício 2

- 1 (a) - 4, (b) + 1/5, (c) + 9, (d) - 48, (e) + 1/20, (f) + 1/15

2



- 3 1.ª velocidade = $t(AD) \times t(FC) = (-24/48) \times (-16/56) = +1/7$
2.ª velocidade = $t(AD) \times t(EB) = (-24/48) \times (-32/40) = +2/5$
Velocidade máxima = directa = +1
Marcha atrás = $t(AD) \times t(GH) \times t(HC) = (-24/48) \times (-12/12) \times (-12/56) = -3/28$
Quando $t(AD) = -27/45 = -3/5$, tem-se:

- 1.ª velocidade = +6/35
2.ª velocidade = +12/25
Directa = +1
Marcha atrás = -9/70

Se A, D, F, C, G e H mantivessem o número de dentes, mas B tivesse 18 dentes e E 54, a relação máxima seria obtida quando B engrenasse com E, dando

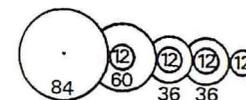
$$t(AB) = t(AD) \times t(EB) = (-24/48) \times (-54/18) = +3/2$$

- 4 1.ª velocidade = $t(AB) \times t(ER) = (-12/36) \times (-16/32) = +1/6$. 667 rpm
2.ª velocidade = $t(AB) \times t(DQ) = (-12/36) \times (-20/28) = +5/21$. 952 rpm
3.ª velocidade = $t(AB) \times t(CP) = (-12/36) \times (-28/20) = +7/15$. 1867 rpm
Directa = $t(AP) = +1$. 4000 rpm

- 5 a) Cilindro inferior = $t(AB) \times t(CD) = (-12/32) \times (-12/32) = +9/64$
b) Cilindro superior = -9/64

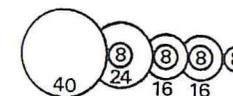
- 6 46 rpm

- 7 25 lâminas por revolução. 2,39 cm

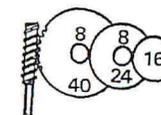


- 8 $315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7$ (ver figura)

- 9 Factor de transmissão = $1/50 \times 1/2 \times 1/3 = 1/300$
Velocidade do seguidor = 10 rpm



- 10 a) $60 = 5 \times 3 \times 2 \times 2$ (ver figura)
b) $240 = 40 \times 3 \times 2$ (ver figura)



- 16 a) 4500 rpm
b) 2000 rpm

17 a) $\omega_A + \omega/\omega_s - \omega = t_g/t_R = 1/3$

- 1) $\omega_s = 600$ e $\omega = 0$, então $\omega_A = 200$ rpm
 2) $\omega = 600$ e $\omega_s = 0$, então $\omega_A = -800$ rpm

b) $\omega_p + \omega/\omega_s - \omega = t_g/t_R = 1$

E, sabendo que $\omega_p = 0$ e que $\omega_s = 600$, tem-se $\omega = 300$ rpm.

c) $\omega = 600$ e $\omega_A = 200$, vem $\omega_s = 3000$ rpm

18 $\omega_C + \omega/\omega_A - \omega = t_A/t_C$

Assim, quando $\omega_C = 0$ e $\omega_A = 12\omega$, tem-se:

$$\omega/12\omega - \omega = 12/t_C \Rightarrow t_C = 132$$

Uma vez que $t_A + 2t_B = t_C \Rightarrow t_B = 60$

19 Sabendo que $t_B = kt_A$, tem-se $t_C = t_A + 2t_B = (1 + 2k)t_A$
 Portanto, $\omega_C + \omega/\omega_A - \omega = t_A/t_C = 1/1 + 2k$

- a) $\omega = 0$, de onde resulta $\omega_A = (1 + 2k)\omega_C$
 b) $\omega_C = 0$, de onde $(1 + 2k)\omega = \omega_A - \omega \Rightarrow \omega_A = (2 + 2k)\omega$
 c) $\omega_A = 0$, de onde $(1 + 2k)(\omega_C + \omega) = -\omega \Rightarrow \omega_C = -(2 + 2k)\omega/(1 + 2k)$

20 $k = 1 \quad k = 2 \quad k = 1/2$

$t(AC) = \omega_C/\omega_A = 1/(1 + 2k) \quad 1/3 \quad 1/5 \quad 1/2$
 $t(AR) = \omega/\omega_A = 1/(2 + 2k) \quad 1/4 \quad 1/6 \quad 1/3$
 $t(RC) = \omega_C/\omega = -[(2 + 2k)/(1 + 2k)] \quad -4/3 \quad -6/5 \quad -3/2$

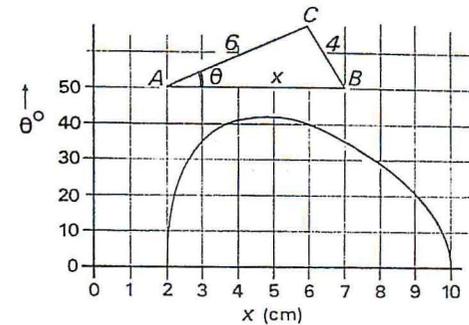
Os factores de transmissão $t(CA)$, $t(RA)$ e $t(CR)$ são os recíprocos dos anteriores.

Ora, $t(RC) = -[(2 + 2k)/(1 + 2k)] = -[1 + 1/(1 + 2k)]$ e, dado que $0 < k < \omega$, temos que $-2 < t(RC) < -1$.

Exercício 3

1 A título de exemplo, suponhamos que $AC = 6$ cm e que $BC = 4$ cm. Então,

x (centímetros)	2	2,5	3	4	5	6	7	8	9	10
θ (graus)	0	29	36	41	41	39	35	29	21	0



A partir do gráfico vemos que:

- 1) mín $\theta = 0^\circ$
 2) máx $\theta = 42^\circ$

O valor máximo de θ é atingido quando BC é perpendicular a AB , o que dá $\sin \theta = 4/6$, o que confirma que máx $\theta = 42^\circ$, determinado graficamente, com erro inferior a 1° .

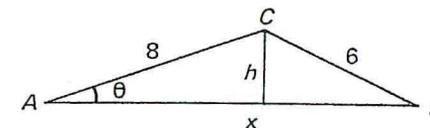
Variações iguais em x não produzem variações iguais em θ .

x (centímetros)	3	4	5	6	7	8	9	10
θ (graus)	40	47	49	48	47	44	41	37
h (centímetros)	5,1	5,8	6,0	6,0	5,8	5,6	5,2	4,8

Podemos obter as soluções 1) com o auxílio de um modelo, 2) mediante um desenho à escala, 3) recorrendo à trigonometria.

Aplicando o teorema do co-seno ao triângulo da figura, vem

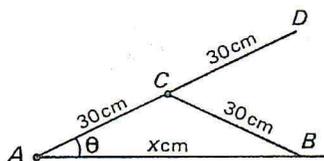
$$6^2 = 8^2 + x^2 - 16x \cos \theta$$



Então,

$$\cos \theta = \frac{28 + x^2}{16x}$$

o que permite calcular θ para diferentes valores de x . Depois calcula-se $h = 8 \sin \theta$.



3 Com a ajuda de um modelo ou usando a trigonometria, $x = 60 \cos \theta$

θ°	15	30	45	60
x cm	58	52	42,4	30

Fixa-se uma barra com 30 cm de comprimento ao centro, C, do tampo da mesa e fazem-se os entalhes de B às distâncias de A especificadas na tabela.

4 Se designarmos por d o comprimento de AC e por θ a amplitude do ângulo CAB, tem-se:

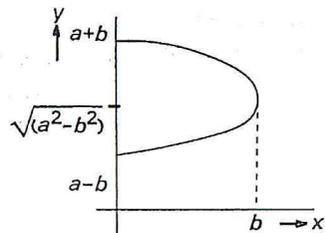
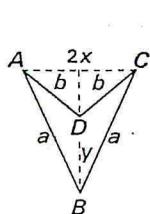
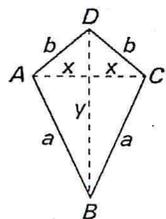
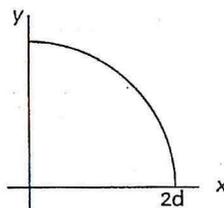
e
e assim

$$x = 2d \cos \theta$$

$$y = 2d \sin \theta$$

$$x^2 + y^2 = 4d^2$$

que é a equação de uma circunferência de raio $2d$.



5 Seja $AD = DC = b$, $AB = BC = a$, em que $a > b$, e seja $AC = 2x$. Então, $y = BD = \sqrt{a^2 - x^2} \pm \sqrt{b^2 - x^2}$.

6 O lugar geométrico de C é uma circunferência, pois C encontra-se a uma distância constante de um ponto fixo, A. Normalmente, P descreverá uma elipse, mas, quando $PC = AC = CB$, P traça uma linha recta que passa por A e é perpendicular a AB.

7 Suponhamos que as pernas giram em torno do seu ponto médio. Então, pelo teorema de Pitágoras,

$$x^2 + y^2 = 50^2$$

pelo que

$$x = \sqrt{2500 - y^2}$$

onde y é metade da altura necessária e x é metade da distância AB.

h (centímetros)	60	65	70	75	80
y	30	32,5	35	37,5	40
x	40	38	35,7	33	30
AB	80	76	71,4	66	60

Um dos pares de pernas tem de estar fixo ao tampo em A. Em B deve haver entalhes, de modo que AB tenha os comprimentos especificados.

8 $60^\circ \leq$ amplitude do ângulo $ACB \leq 113^\circ$

O avião pode elevar-se 1,56 m acima de C e baixar 2 m relativamente ao mesmo ponto.

DC fica na horizontal quando $AB = 1,5 \sqrt{2} \approx 2,12$ m.

A velocidade máxima é alcançada quando DC está na horizontal; D dista, então, 4 m do eixo BC e descreve uma circunferência de comprimento 8π m.

A velocidade angular máxima é $(11 \times 60)/8\pi \approx 26$ rpm.

9 Suponhamos que os esteios da armação têm 80 cm de comprimento. Então, pelo teorema de Pitágoras, tem-se

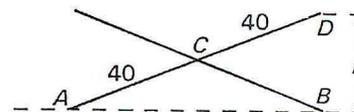
$$AB^2 = 80^2 - h^2$$

e, portanto, se

$$h = 28 \text{ vem } AB = 74,9 \text{ cm}$$

e

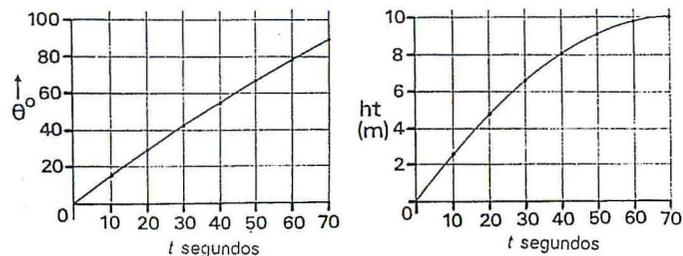
$$h = 36 \text{ vem } AB = 71,4 \text{ cm}$$



10 A amplitude do ângulo θ varia entre $46,0^\circ$ e $129,8^\circ$, ou seja, tem uma variação de $83,8^\circ$.

As posições extremas de W distam 31,9 cm.

11 Quando $AB = 2$ m, o triângulo ABC é equilátero e, uma vez que a lança deve estar na horizontal, resulta que BC tem de formar um ângulo de 60° com a horizontal. Para elevar a lança segundo um ângulo de 80° com a horizontal, a amplitude do ângulo BCA tem de ser de 140° , de onde resulta $AB \approx 3,76$ m.



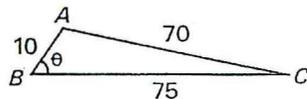
12 Quando CA está na horizontal, $AB = 10\sqrt{2}$, pelo que são necessários $50\sqrt{2} \approx 71$ segundos para que a lança fique na vertical.

Ao fim de t segundos, desde a posição $\theta = 0$, tem-se $AB = (10\sqrt{2} - t/5)$ m; assim, fazendo sucessivamente $t = 0, 10, \dots, 70$, é possível calcular os valores correspondentes do ângulo BCA e, portanto, de θ e da altura de A .

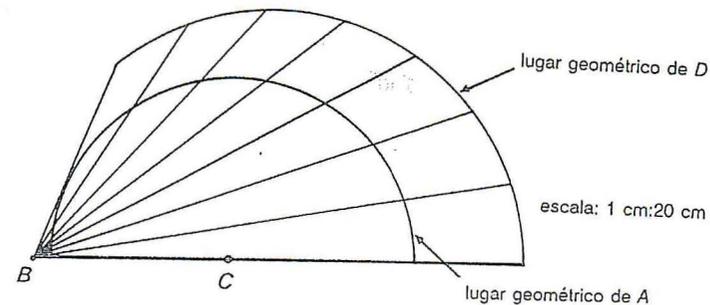
t (em segundos)	0	10	20	30	40	50	60	70
Amplitude inteira mais próxima	0	15	29	42	54	66	78	89
Altura de A (em metros)	0	2,6	4,8	6,7	8,1	9,1	9,8	10

13 A move-se sobre um arco de circunferência com centro em C . Quando a escada está deitada no chão, D dista de B aproximadamente $75 + 70 + 44 = 189$ cm.

$$\cos \theta = \frac{10^2 + 75^2 - 70^2}{2 \times 10 \times 75} \Rightarrow \theta \approx 57^\circ$$



A escada forma, pois, um ângulo de cerca de 33° com a vertical. B fica, aproximadamente, a $3,2 \cos 33^\circ = 2,7$ m do solo. A altura máxima atingida por D é 1 m.



14 X e Y encontrar-se-ão a 1 m e 2 m de altura, respectivamente.

Para total segurança, o condutor deverá parar o carro a 1 m da porta, embora, na prática, X só esteja 1 m fora da porta quando já se encontrar por cima do tecto do automóvel. Y desloca-se em linha recta paralela ao solo, a uma altura constante de 2 m.

16 O deslocamento do êmbolo é duplo do comprimento de AC e independente do comprimento de BC .

17 O deslocamento da agulha é duplo do comprimento de AC e não depende do comprimento de BC . Contudo, para que o mecanismo possa funcionar, é necessário que $BC > AC$.

Para imprimir um movimento lateral à agulha, a guia tem de ser articulada e accionada por um excêntrico ou por um outro mecanismo baseado num triângulo variável.

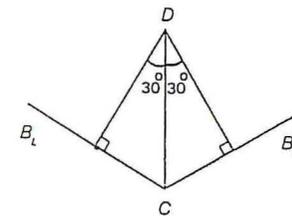
18 R_1 varia entre 0,9 m e 1,4 m
 R_2 varia entre 1,0 m e 1,75 m
 R_3 varia entre 0,8 m e 1,3 m

19 a) $AD/CD = \cos 30^\circ \approx 0,866$
 Dimensões possíveis: $CD = 15$ cm,
 $AD = 13$ cm

b) $\arccos 14/20 \approx 45,6^\circ \Rightarrow$ ângulo $B_LDB_R \approx 91^\circ$, pelo que a razão tempo de trabalho/tempo de retorno $\approx 3:1$.

c) Para conseguir uma razão de 8:1, o ângulo $B_LDB_R = 40^\circ$, o que implica $AD = 20 \cos 20^\circ$, ou seja, $AD = 18,8$ cm com três algarismos significativos.

d) Se $AD > CD$, BC não oscilará, mas dará, antes, voltas completas em torno de C . Investigue como varia a velocidade de rotação.



20 O melhor é construir um modelo.

É um bom exercício de desenho à escala. Considere intervalos de 30° para o ângulo de que gira BC .

Os resultados podem calcular-se, mas é uma tarefa entediante se não se utilizar um computador.

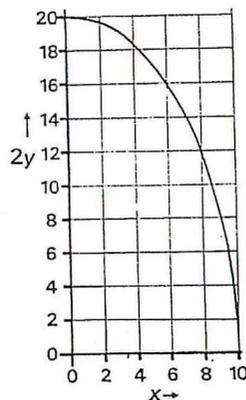
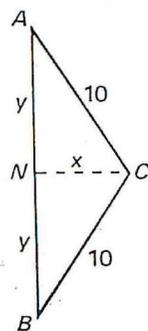
21 Seja $AB = 2y$ e $NC = 2x$.

Então,

$$x^2 + y^2 = 100$$

peço que

$$AB = 2\sqrt{100 - x^2}$$



Exercício 4

6 P, Q, R e T descrevem arcos de circunferência, de raio AD , com centros sobre a recta DC . S move-se sobre o arco de uma circunferência de centro C e raio CS .

Quando AD forma um ângulo de 60° com DC , todos os pontos de AB se movem numa direcção perpendicular a AD , isto é, formando um ângulo de 30° com DC .

7 a) DC move-se em sentido oposto ao de AF e numa distância dupla, ou seja, o factor é -2 .

b) A tripla distância na mesma direcção. Factor de escala: $+3$.

- 1) $+1 <$ factor de escala $< +3$
- 2) Factor de escala: $+3$

c) Nenhum.

8 a) 3 vezes mais para a esquerda. Factor de escala: -3 .

b) Metade para baixo. Factor de escala: $-1/2$.

c) Os pontos G, B, D e F descrevem arcos de circunferência.

O outro ponto do sistema articulado que descreve uma linha recta é o ponto de intersecção de EF com o prolongamento da recta AC .

9 a) 1) $+3$.

2) $+4$.

b) 1) X fixo, objecto em T , imagem em Y .

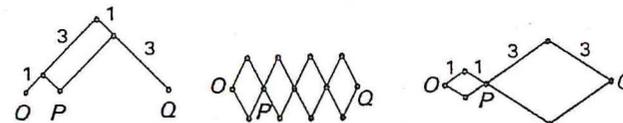
2) X fixo, objecto em T , imagem em Z .

3) Y fixo, objecto em Z , imagem em T .

4) Y fixo, objecto em T , imagem em Z .

5) Y fixo, objecto em X , imagem em Z .

6) Y fixo, objecto em T , imagem em X .



10 Na figura acima podemos ver três sistemas articulados capazes de ampliar com factor de escala (ou razão de homotetia) igual a 4. Em cada um deles, O é fixo, P contorna o objecto e Q traça a imagem. Mas também são possíveis outros sistemas articulados.

11 Meia volta em torno de A seguida de meia volta em torno de B equivalem a uma translação de $2AB$.

12 A \tilde{r} pode saltar $6(4 \cos 15^\circ - 4 \cos 75^\circ) \approx 17$ cm.

13 a) DT permanece horizontal, mas, no seu deslocamento, todos os seus pontos descrevem arcos de circunferência com centros em AB .

b) Um arco de circunferência com centro em C e raio CT .

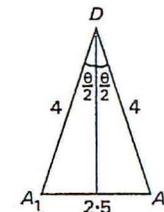
c) Um arco de circunferência com centro em B e raio BT .

14 A variação mínima do ângulo produz-se quando o movimento é simétrico.

$$\sin \theta/2 = 1,25/4 \Rightarrow \theta \approx 36,4^\circ$$

15 a) $\pi(54^2 - 18^2) \times 140/360 = 3167$ cm²

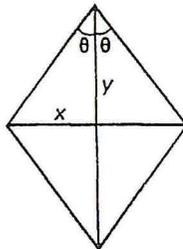
b) 1) Dado que $ABCD$ é um paralelogramo com $AB = DC = 48$ cm, todos os pontos da barra



- BC, e de qualquer outro objecto rigidamente solidário com ela, se movem sobre arcos de circunferência de raio igual a 48 cm.
- 2) Podemos imaginar que a região sombreada $XYZT$ é composta por muitas tiras verticais finas com 40 cm de comprimento, com as quais podemos formar um rectângulo de dimensões XT e XY . XT é igual ao deslocamento lateral da lâmina PQ , ou seja, $48 \sin 60^\circ$ para cada lado da sua posição central, pelo que $XY = 96 \sin 60^\circ$.

- c) A área varia, pois, se a escova vai de α até à vertical e desta até $(120^\circ - \alpha)$ e, por fim, até à vertical, a área varrida equivale à área de um rectângulo de 40 cm por $48(\sin \alpha + \sin (120^\circ - \alpha))$ cm.
- 16 a) O ângulo de DA é fixo.
 $ABCD$ é um paralelogramo e, portanto, CB é paralelo a DA .
 $CEFG$ é um paralelogramo, pelo que GF é paralelo a CE e, em consequência, a DA .
- b) 1) Aproximação e elevação da lâmpada relativamente ao suporte na parede.
 2) Nenhum efeito.
- c) Rodando CG .

- 18 a) $R: 1$ cm, $S: 3$ cm, $T: 5$ cm, $U: 7$ cm, $V: 9$ cm, $C: 10$ cm.
- b) Porções de elipses cujos eixos maiores são 3, 5 e 9 vezes mais compridos do que os seus eixos menores.
- c) Se x e y são os comprimentos das diagonais do losango básico do mecanismo quando os lados formam um ângulo θ com a vertical, tem-se



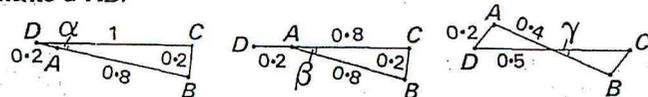
$$x = y \operatorname{tg} \theta$$

Então, $AC = 5x = 5y \operatorname{tg} \theta$ e $XY = y$, pelo que $AC = 5XY \operatorname{tg} \theta$.

- d) À medida que X e Y se aproximam, θ aumenta e, dado que $\operatorname{tg} \theta$ é função crescente de θ , a relação $AC : XY$ aumenta.

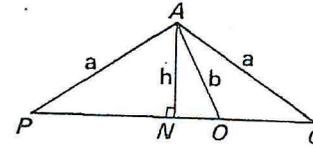
Exercício 5

- 1 O movimento de AB relativamente a DC é o movimento de DC relativamente a AB .



- 1) $\alpha \approx 11,5^\circ$ 2) $\beta \approx 14,4^\circ$ 3) $\gamma \approx 22,3^\circ$

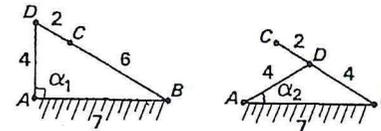
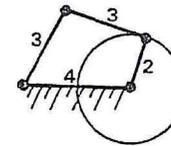
- 8 a) Seja N o ponto médio de PQ . Então $AN \perp PQ$.
 Ora, $OP \times OQ = (PN + NO)(QN - NO) = (PN + NO)(PN - NO)$,
 dado que $PN = QN = PN^2 - NO^2 = a^2 - h^2 - (b^2 - h^2) = a^2 - b^2$.
- b) 1) uma linha recta 2) uma circunferência.



- c) Q descreve parte de uma circunferência, excepto quando P se move segundo uma linha recta que passa por O , caso em que Q se moverá também sobre a mesma linha recta.

Exercício 6

- 4 Na figura pode ver-se uma possível solução.



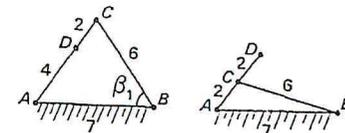
15 a) $\cos \alpha_1 = \frac{7^2 + 4^2 - 8^2}{2 \times 4 \times 7} \Rightarrow \alpha_1 \approx 89^\circ$

$\cos \alpha_2 = \frac{7^2 + 4^2 - 4^2}{2 \times 4 \times 7} \Rightarrow \alpha_2 \approx 29^\circ$

Assim, AD pode oscilar com uma amplitude de 60° .

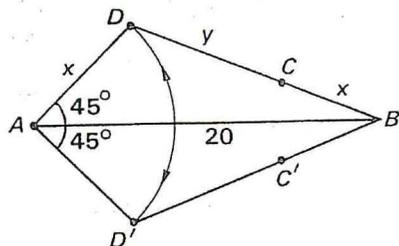
b) $\cos \beta_1 = \frac{7^2 + 6^2 - 6^2}{2 \times 7 \times 6} \Rightarrow \beta_1 \approx 54,3^\circ$

$\cos \beta_2 = \frac{7^2 + 6^2 - 2^2}{2 \times 7 \times 6} \Rightarrow \beta_2 \approx 15,4^\circ$



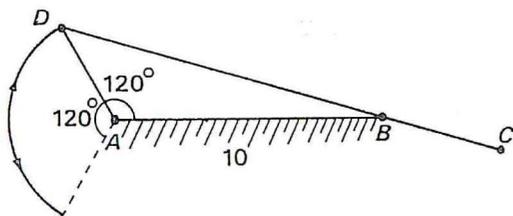
- Portanto, BC pode oscilar com uma amplitude de 39° .
- c) O braço mais curto é o que oscila com maior amplitude.

- 16 Para oscilar com uma amplitude de 90° , os braços, nas suas posições extremas, terão de formar um ângulo de 45° com AB . Atribuindo a x um valor adequado, é fácil determinar o valor de $(x + y)$ e, por conseguinte, o de y , utilizando o teorema do co-seno. Por exemplo, com $x = 4$ e $y = 13,4$, a amplitude do ângulo DAB é de $44,95^\circ$, o que constitui uma boa aproximação para ângulos interiores de oscilação de 90° . Se se preferirem soluções com valores inteiros, podemos tomar $x = 7$ e $y = 9$, o que dá um ângulo DAB com uma amplitude de $46,4^\circ$.



- 17 AD encontra-se numa extremidade quando DC passa por B . Para conseguir uma oscilação de 120° , o ângulo DAB teria de ter também uma amplitude de 120° . Podemos agora escolher o comprimento de AD e calcular seguidamente o comprimento de DB , mediante o teorema do co-seno. Se considerarmos $AD = 6$ cm, obtém-se uma solução especialmente bela, pois, neste caso, $DB = 14$ cm e, por simetria, $BC = 6$ cm, o que dá $DC = 20$ cm.

A resolução de problemas em que os ângulos de oscilação externa sejam diferentes exige uma análise cuidadosa; um modelo será de grande ajuda para focar o pensamento. Mas, no fundo, tudo o que se requer é boa intuição geométrica e a aplicação do teorema do co-seno.



- 18 Consideremos um par de ângulos opostos do quadrilátero articulado. É sempre possível manipular o sistema articulado de forma a colocá-lo, primeiro, numa posição em que a soma das amplitudes dos dois ângulos

seja superior a 180° e, depois, noutra posição em que somem menos de 180° . Com o argumento da continuidade, podemos afirmar que existe uma posição em que a soma das amplitudes dos ângulos é exactamente 180° , que é a condição para a existência de um quadrilátero cíclico.

- 19 Quando for um quadrilátero cíclico. A área de um quadrilátero é calculada pela fórmula

$$[(s - a)(s - b)(s - c)(s - d) - abcd \cos^2 (B + D)/2]^{1/2}$$

onde s é o semiperímetro. A área é máxima quando $\cos (B + D)/2 = 0$, o que sucede quando $A + B = 180^\circ$, que é a condição do quadrilátero cíclico. O leitor poderá encontrar uma demonstração da fórmula em muitos manuais de geometria.

- 20 1) Sim, quando um dos ângulos internos do quadrilátero for um ângulo côncavo. Quando a amplitude deste aumenta, diminuem as amplitudes dos outros três.
2) Sim. Ao manipular qualquer quadrilátero convexo, é forçoso que aumente a amplitude de dois ângulos interiores opostos.
3) Sim, quando um dos ângulos internos do quadrilátero for um ângulo côncavo. Quando a amplitude deste diminui, aumenta a dos outros três.
4) Não, porque a soma das amplitudes dos quatro ângulos é constante.
- 21 Não existe um resultado óbvio para a soma das amplitudes dos ângulos dum quadrilátero articulado com cruzamento, dado que

$$\angle A + \angle B + \theta = 180^\circ$$

e que

$$\angle C + \angle D + \theta = 180^\circ$$

o que conduz a

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ - 2\theta$$

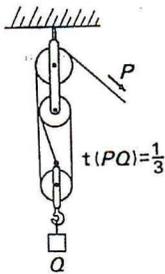
mas θ varia com a posição do sistema articulado. Não obstante,

$$\angle A + \angle B = 180^\circ - \theta = \angle C + \angle D$$

Exercício 7

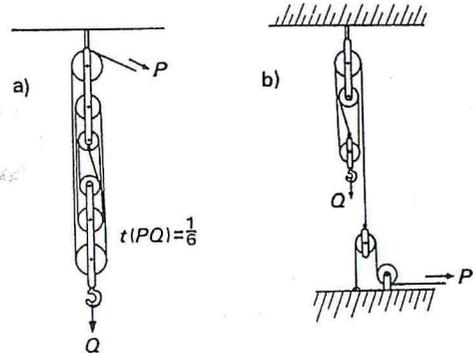
- 1 18π cm/s. É quatro vezes mais rápida.
2 $t(AW) = t(AB) \times t(CD) = 1/3 \times 1/4 = 1/12$ e, dado que o raio da manivela é $1/4$ do raio do tambor, $t(PQ) = 1/48$.

3



4 Para que D suba d m é necessário puxar, para baixo, $2d$ m da corda entre C e B . Para isso será necessário puxar $4d$ m da corda que passa por baixo de A . Será, pois, preciso arrastar P 48 m.

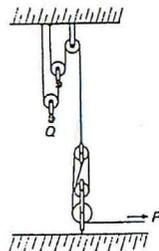
5



6 $t(QP) = 1/8$. Com uma segunda roldana $t(QP) = 1/16$. Com N roldanas assim montadas, o factor de transmissão seria 2^{1-N} .

7 Há muitas soluções. Por exemplo:

- Dois grupos com 6 roldanas cada um.
- Um sistema como o da questão 6 que utilizasse 3 roldanas para conseguir um factor de transmissão igual a 4, combinado com um sistema como o da questão 3 para obter um factor de transmissão igual a 3.



8 $t(PQ) = t(AB) \times t(CD) \times \frac{\text{raio de } E}{\text{raio de } P} = 1/3 \times 1/5 \times 1/5 = 1/75$

230

9 Factor de transmissão = $\frac{10 - 9,5}{2 \times 10} = \frac{1}{40}$

Peso içado = $20 \times 40 \times 50\% = 400$ kg.

10 $(a - 12)/2a = 1/50 \Rightarrow a = 12,5$.

12 a) Número de voltas em 30 minutos = $30 \times 60 = 1800$.

1) Espessura da fita = $1,5 \div 1800 = 1/1200$ cm.

2) Comprimento da fita = $\frac{\text{área da secção transversal da fita}}{\text{espessura da fita}} = \pi(2,5^2 - 1^2) \times 1200$ cm ≈ 198 m.

b) $2/5 < t(TS) < 5/2$.

c) Ao fim de t segundos, a bobina de recepção T terá sobre si t camadas de fita, pelo que o seu raio efectivo, nesse momento, será

$$(1 + t/1200) \text{ cm}$$

A quantidade de fita na bobina T é proporcional à área da secção transversal da fita, concretamente,

$$\pi[(1 + t/1200)^2 - 1] \text{ cm}^2$$

A quantidade de fita que permanece na bobina S é igualmente proporcional à área da sua secção transversal, isto é,

$$\pi(2,5^2 - 1) - \pi[(1 + t/1200)^2 - 1] = \pi[2,5^2 - (1 + t/1200)^2]$$

Se, neste momento, o raio de S for r , tem-se

$$\pi(r^2 - 1) = \pi[2,5^2 - (1 + t/1200)^2]$$

o que dá

$$r = [7,25 - (1 + t/1200)^2]^{1/2}$$

O factor de transmissão ao fim de t segundos é a razão entre estes raios que podemos exprimir sob a forma

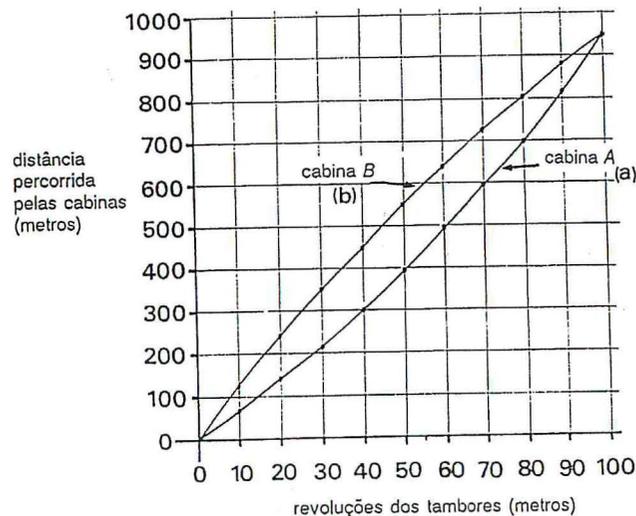
$$\left[\frac{7,25}{(1 + t/1200)^2} - 1 \right]^{-1/2}$$

231

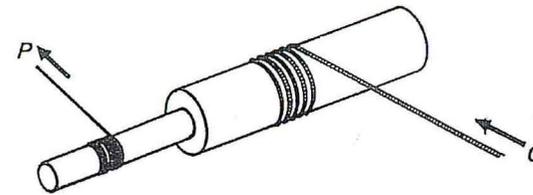
- d) A fita passará a uma velocidade de 11 cm/s quando o perímetro de T for de 11 cm. Assim será quando o raio da bobina for $11 \div 2\pi = 1,75$ cm, e isto ocorrerá quando

$$1 + t/1200 = 1,75 \Rightarrow t = 900 \text{ s} = 15 \text{ min}$$

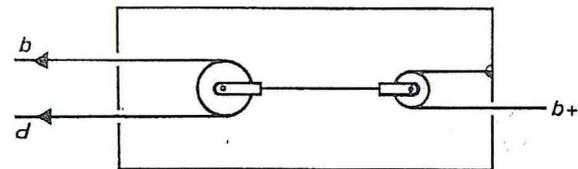
- 13 a) 942 m.
 b) O raio efectivo de cada tambor será diferente, excepto quando ambas as cabinas estiverem a meio caminho, pelo que uma revolução completa dos tambores implica diferentes deslocamentos das cabinas.
 c) Seja a o comprimento de cabo enrolado sobre o tambor A em n revoluções. Então, $a = \pi 2 + \pi(2 + 0,02) + \pi(2 + 2 \times 0,02) + \dots + \pi[2 + (n - 1) \times 0,02] \Rightarrow a = n\pi[2 + 0,01(n - 1)]$, resultado da soma de uma progressão aritmética.
 Seja b o comprimento de cabo desenrolado do tambor B em n revoluções. Então, $b = 4\pi + \pi(4 - 0,02) + \pi(4 - 2 \times 0,02) + \dots + \pi[4 - (n - 1) \times 0,02] \Rightarrow b = n\pi[4 - 0,01(n - 1)]$, também soma de uma progressão aritmética.



- 14 Uma solução consiste em utilizar tambores de diferentes diâmetros montados sobre o mesmo eixo. Uma segunda solução utiliza tambores com o mesmo diâmetro, mas de eixos distintos ligados entre si por engrenagens ou por roldanas e correias. Uma terceira solução consiste em recorrer a um sistema de roldanas. O que vem descrito no texto, usando clips, funciona bem, mas limita muito o comprimento do fio que se pode extrair.



15



- 16 r desloca-se 5 cm. Subtracção: $p - q$.
 17 1) 12 baixadas. 12 m. 10 t de peso.
 2) 14 t de peso.
 3) 2 m/s.

Exercício 8

- 1 Quando o triângulo rola, o centro não se desloca paralelamente ao centro. Quando a broca gira, o centro não permanece no mesmo lugar.
 3 Como os triângulos utilizados na construção dos triângulos de Reuleaux são equiláteros, todos os arcos correspondem a ângulos inscritos com uma amplitude de $\pi/3$ radianos. O comprimento da primeira curva, formada por três arcos, é então $3 \times 5 \times \pi/3 = 5\pi$ cm. A segunda curva é formada por três arcos com raio de 4 cm e três arcos com raio de 1 cm, pelo que o seu comprimento total é $3 \times 4 \times \pi/3 + 3 \times 1 \times \pi/3 = 5\pi$ cm.
 Nesta questão particular vê-se facilmente que os arcos constituem $1/6$ da circunferência, pelo que a fórmula $s = r\theta$ não é necessária. Con-

tudo, é particularmente útil para determinar os perímetros de contornos assimétricos.

- 4 Duas rectas dão lugar a uma circunferência.
 5 Façamos girar XY um ângulo de α radianos em torno de A e tracemos os arcos a_1 e a_2 ; seja $AX = x$ e $AY = y$. Então,

$$a_1 = \alpha x \text{ e } a_2 = \alpha y$$

pelo que

$$a_1 + a_2 = \alpha(x + y) = \alpha XY$$

Analogamente, fazendo girar sucessivamente o diâmetro:

um ângulo β , em torno de B , desde l_2 até l_3
 um ângulo γ , em torno de C , desde l_3 até l_4
 um ângulo δ , em torno de D , desde l_4 até l_1

$$b_1 + b_2 = \beta XY, c_1 + c_2 = \gamma XY, d_1 + d_2 = \delta XY$$

pelo que o perímetro é $(\alpha + \beta + \gamma + \delta)XY$.

Mas o resultado destas rotações é sobrepor XY a YX , depois de ter rodado, no total, um ângulo π . Segue-se que:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \pi$$

e, portanto, o perímetro é πXY .

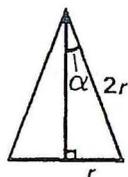
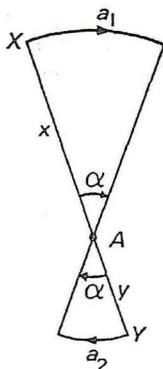
8. O vértice V permanece no mesmo lugar e o cone varre um círculo de raio l e centro V . Se o cone retorna ao ponto de partida depois de duas revoluções, então

$$\Rightarrow 2 \times 2\pi r = 2\pi l \Rightarrow l = 2r$$

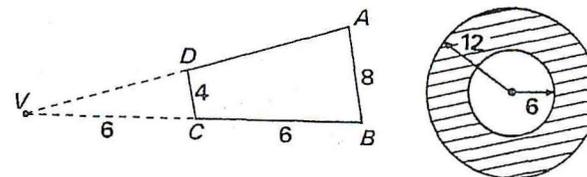
Portanto, α , o semiângulo no vértice do cone, tem uma amplitude de 30° .

- 9 Dado que o diâmetro menor é metade do diâmetro maior, conclui-se¹⁵ que o cone foi truncado pelo ponto médio das geratrizes.

Ao rolar, o cone varre uma coroa circular, cujo vértice é V e cujos raios têm 6 cm e 12 cm de comprimento. O comprimento da circun-



ferência, base do cone, é 8π cm. O comprimento da circunferência exterior da coroa circular é 24π cm. Portanto, o tronco de cone dará 3 voltas completas em torno do seu eixo até retornar ao ponto de partida.



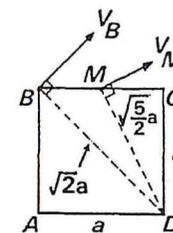
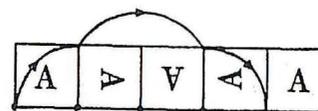
- 10 O comprimento da circunferência do tambor é 10π cm.

$$100 \text{ km/h} = 100 \times 1000 \times 100 \div 60 \text{ cm/min.}$$

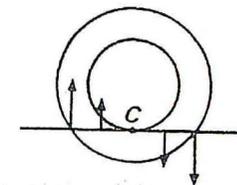
$$\text{Velocidade angular do tambor} = \frac{10\,000\,000}{60 \times 10\pi} \approx 5300 \text{ rpm}$$

no sentido horário.

- 11 A move-se com uma velocidade de 2 m/s para cima.
 B move-se com uma velocidade de $2\sqrt{2}$ m/s perpendicularmente a DB .
 M move-se com uma velocidade de 5 m/s perpendicularmente a DM .



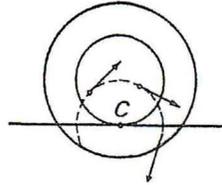
- 13 a) C é o centro instantâneo de rotação.
 b) A desloca-se a 400 km/h para a direita.
 B desloca-se a 440 km/h para a direita.
 D desloca-se a 40 km/h para a esquerda.
 c) Todos os pontos da roda situados à mesma altura que C se estão a mover verticalmente: uns para cima e outros para baixo.



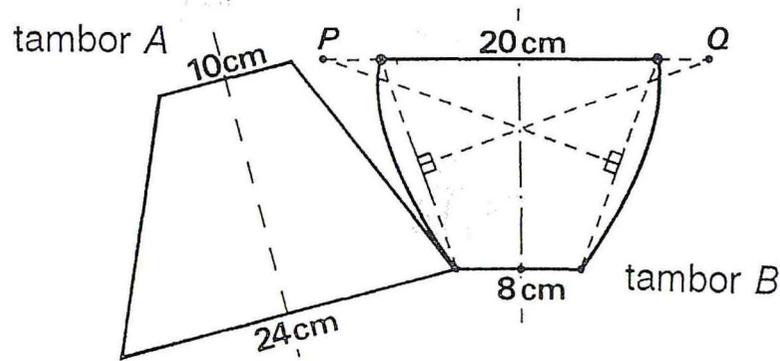
¹⁵ Aplicação do teorema de Tales. (N. da T.)

d) Todos os pontos da roda que estão situados sobre a circunferência de centro C e raio 40 cm têm uma velocidade de 200 km/h e movem-se tangencialmente a essa circunferência.

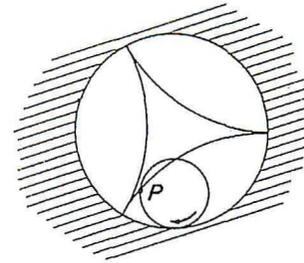
14 O factor de transmissão varia desde $1/10$, quando W está a impulsionar o exterior do disco D , até um valor teoricamente tão grande quanto se queira, quando W se aproxima do centro de D . Existe, contudo, um limite para as forças de fricção possíveis, pelo que W patinaria sobre D ao aproximar-se do centro do disco.



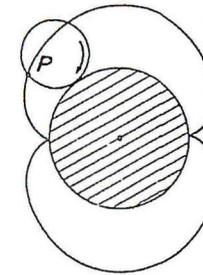
15 O factor de transmissão tem de variar entre $1/2$ e 3. Esta variação consegue-se fazendo, por exemplo, que o cone A tenha diâmetros de 10 cm a 24 cm e que o tambor B tenha diâmetros variáveis entre 20 cm e 8 cm. Se a secção transversal do tambor B estiver limitada por arcos de circunferência com centros P e Q (ver figura), é possível projectar um mecanismo para mover o tambor A de forma que a sua superfície rode sobre a superfície curva do tambor B para modificar o factor de transmissão.



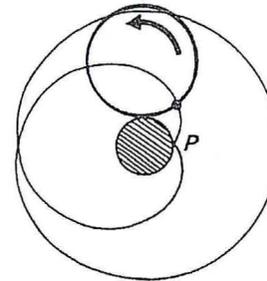
16 Vemos aqui três exemplos. Um caso interessante ocorre ao rodar um círculo pelo interior de outro com diâmetro duplo. Neste caso, P descreve uma linha recta; conceberam-se mecanismos baseados neste princípio para gerar movimento rectilíneo. Não se esqueça de examinar o que acontece quando o diâmetro do círculo móvel é maior do que o do círculo fixo, como no terceiro dos exemplos mostrados.



hipociclóide tricúspide
razão dos raios, 3:1



epiciclóide bicúspide
razão dos raios, 2:1



epiciclóide em que
o círculo que roda
tem um diâmetro
duplo do círculo fixo

$$17 \quad \text{tg } \alpha < \frac{d}{2h} \text{ sen } \frac{\beta}{2}$$

Veja também *Actividades Matemáticas*, actividade 66.

Exercício 9

$$3 \quad \text{Factor de transmissão} = \frac{0,4}{24\pi} \approx \frac{1}{188}$$

Pode reduzir-se o factor de transmissão 1) aumentando o comprimento da barra 2) reduzindo o passo do parafuso.

$$4 \quad \text{Factor de transmissão} = \frac{3,6}{20 \times 14\pi} \approx \frac{1}{244}$$

Força \approx 1220 kg.

$$5 \quad \text{Factor de transmissão} = \frac{3,4}{6 \times 1,5\pi} \approx \frac{1}{8}$$

6 Por cada volta da manivela A, D efectua apenas 1/4 de volta, pelo que E só avança 0,6 cm.

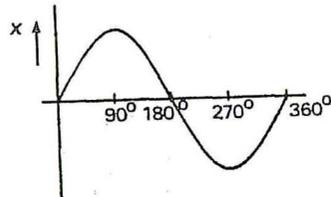
$$\text{Factor de transmissão} = \frac{0,6}{32\pi} \approx \frac{1}{168}$$

Força requerida para elevar 500 kg \approx 6 kg

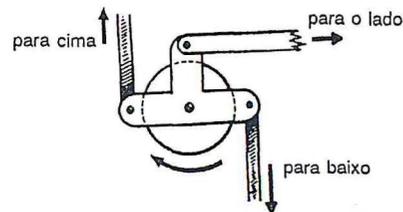
7 Factor de transmissão = $\frac{0,2 \times 8}{36\pi} \approx \frac{1}{71}$

Força na ponta da broca \approx 248 kg.

10 Designando por x o deslocamento do ferrolho, a partir da posição em que a cavilha está no cimo do disco, o deslocamento é dado pelo gráfico. O trajecto do ferrolho é o dobro da distância da cavilha ao centro do disco.

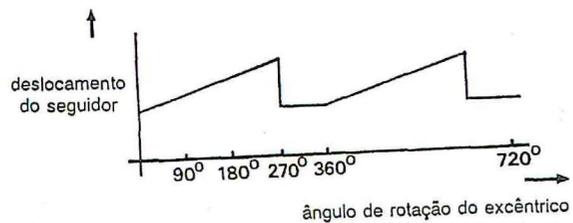


11

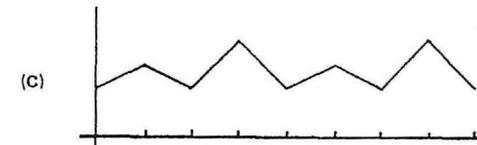
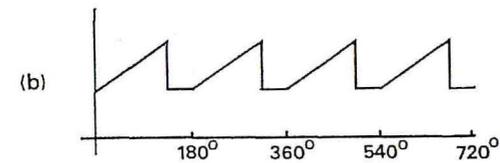
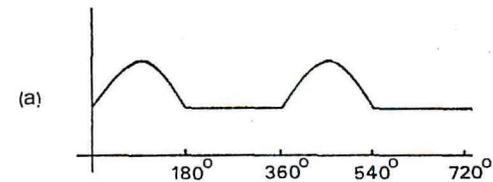


Exercício 10

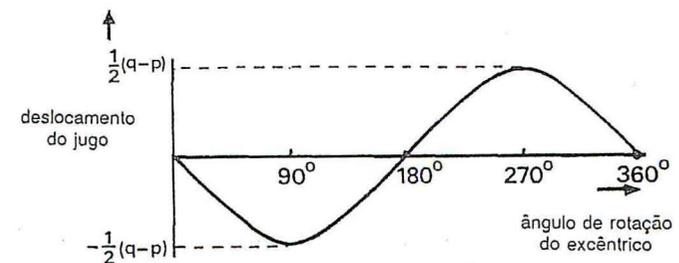
1



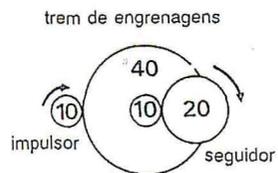
2 Os excêntricos (a) e (c) podem girar em qualquer sentido, o mesmo já não acontecendo com o excêntrico (b).



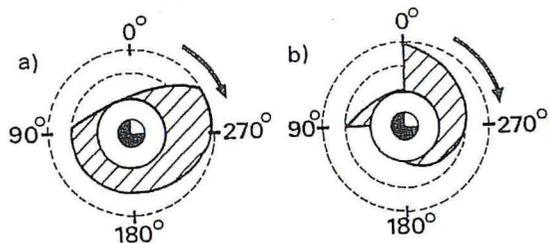
3 O jugo tem as seguintes dimensões: $p + q$ e $2q$.
O seguidor é deslocado de $q - p$.



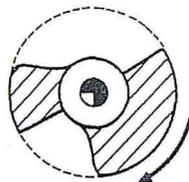
- 4 O mecanismo pode consistir num excêntrico circular com 2 cm de raio, que é obrigado a girar em torno de um ponto excêntrico, distante 1 cm do seu centro. Então, $q = 3$ cm e $p = 1$ cm. Neste caso, o jugo terá de dimensões 4 cm e 6 cm.



5



- 6 Para accionar o interruptor pode utilizar-se um excêntrico como o que mostra a figura, com saliências de 120° e 60° e reentrâncias também de 120° e 60° , de tal modo dispostas que o fariam girar à razão de uma volta por minuto.



- 11 a) 120° .
 b) 3 dentes intercalados entre os dentes já existentes.
 c) Acrescentando um segundo trinquete que forme um ângulo de 60° com o primeiro, a roda dentada nunca poderá girar mais de 60° no sentido horário.
- 13 a) A correia pode correr livremente para a direita, mas, ao mover-se para a esquerda, fica presa pelo cilindro que se encastra na parede da caixa.
 b) A correia é livre de correr para a esquerda, mas, ao deslocar-se para a direita, arrasta o cilindro ao longo da ranhura e, ao fazê-lo, fica aprisionada entre o cilindro e a caixa.

Exercício 11

- 1 (a) 5 vezes. $Q = 5P$. (b) 6 vezes. $Q = 6P$. (c) Metade da distância. $P = 2Q$.
 (d) $1/16$ da distância. $P = 16Q$.

- 5 A filha teria de se sentar a uma distância do fulcro dupla da distância deste à mãe.

- 6 Aproximadamente $1/2 T$.

- 8 A desloca-se cerca de 504 vezes o deslocamento feito por B.

Supondo que não existia atrito, a força teoricamente disponível em B seria de 10 000 kg, mas seria preciso que A efectuasse um deslocamento considerável para conseguir um pequeno deslocamento de B.

- 10 a) A razão entre as áreas dos êmbolos é 64:1. Portanto, B apenas subirá $1/4$ cm quando A for obrigado a descer 16 cm.

- b) 384 kg.
 c) $20 \times 64\pi \approx 4020$ kg.

- 11 a) 1) Metade da distância. 2) $1/6$ da distância.
 b) $Q = 6P$.

- 12 a) $1/3$ cm.
 b) 1440 kg.

- 1) A pressão em A e em B é de 2 kg cm^{-2} .
 2) A pressão em C e em D é de 30 kg cm^{-2} .

- 13 1) 900 kg. 2) 3 cm s^{-1} .

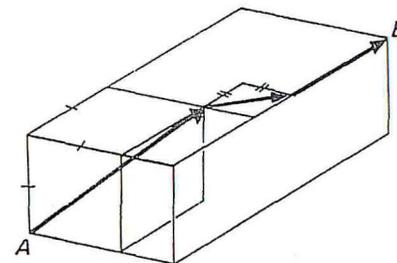
- 15 a) O volume varrido pela pá será $\theta/360$ do volume de um cilindro de raio 6 cm e altura 4 cm, isto é,

$$36\pi \times 4 \times \theta/360 = 2\pi\theta/5 \text{ cm}^3$$

- b) Um incremento de 5° no ângulo exige $2\pi \text{ cm}^3$ de líquido hidráulico, pelo que a bomba terá de bombear $2\pi \text{ cm}^3$ de fluido por segundo.
 c) $Q = 6P$.

Exercício 12

- 1 a) 1) 20 segundos. 2) 6.
 b) 12 segundos (ver figura).
 c) O trajecto mais curto, ao longo da recta AB, consegue-se se as componentes X, Y e Z da velocidade estiverem na razão 5:12:3.



Se o autómato for programado com velocidades de 0,25, 0,6 e 0,15 m/s nas direcções dos seus eixos, o movimento demorará 2 segundos.

- 2 1) $0,02\sqrt{2} \approx 0,028$ mm
- 2) $(0,02^2 + 0,02^2 + 0,01^2)^{1/2} \approx 0,03$ mm

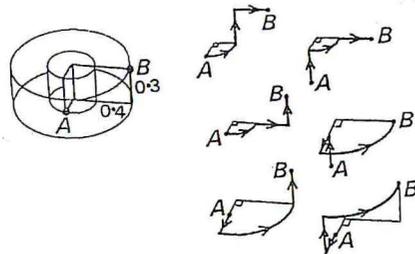
- 3 A secção transversal da envolvente é $5/6$ de uma coroa circular cujos raios medem 0,5 m e 1,0 m, pelo que a área é

$$5\pi(1^2 - 0,5^2)/6 \text{ m}^2$$

e o volume da envolvente de trabalho é o produto desta área pelo trajecto vertical (0,4 m), o que dá $\pi/4$ m³.

- 4 a) Para ir de A até B, r tem de aumentar 0,4 m, θ tem de aumentar 90° e Z tem de aumentar 0,3 m. O primeiro desenho mostra as posições relativas de A e de B no espaço e os diagramas mostram os 6 diferentes trajectos que a extremidade do braço pode seguir para ir de A a B.

- 1) 11 segundos.
- 2) Ver a figura.

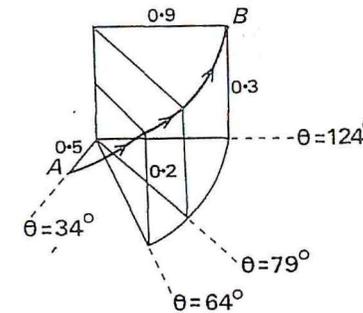


- b) 1) A trajectória consiste em três etapas. Na primeira estão activas as três juntas; dura 2 segundos e termina em P(0,9; 64; 1,0). Na segunda, apenas θ e Z sofrem incrementos; dura 1 segundo e termina em Q(0,9; 79; 1,1). Na terceira e última etapa, apenas θ é incrementado; dura 3 segundos e termina em B(0,9; 124; 1,1).
- 2) Tempo total: 6 segundos.

- c) A e B encontram-se nos vértices opostos de um ortoedro de dimensões 0,9 m, 0,5 m e 0,3 m, dado que a variação de θ é de 90° ; portanto,

$$AB = (0,9^2 + 0,5^2 + 0,3^2)^{1/2} \approx 1,07 \text{ m}$$

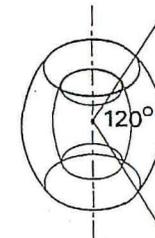
Para deslocar o braço ao longo desta trajectória seria preciso ir ajustando continuamente as velocidades relativas das três juntas; os cálculos necessários requerem um computador sofisticado.



- 5 a) 1) Quando o seu braço tiver apenas 0,5 m.
- 2) Quando o seu braço tiver apenas 1,3 m.
- b) Quase toda a imprecisão se deverá a uma mudança de $0,1^\circ$ a uma distância de 1,3 m do eixo vertical. Tem-se, assim, um erro possível de $0,1/360 \times 2\pi \times 1,3 \times 1000 \text{ mm} \approx 2,27 \text{ mm}$.

O erro anterior, juntamente com o de 0,5 mm no comprimento do braço e o de 0,3 mm no trajecto vertical, gera um erro máximo de uns 2,34 mm, aproximadamente. Vemos assim a necessidade de que as juntas de revolução sejam o mais possível precisas.

- 6 a)



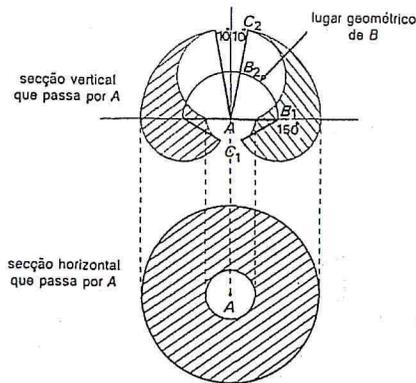
b) As variações máximas nas juntas implicadas são

$$\theta \leq 180^\circ \quad \phi \leq 120^\circ \quad r \leq 0,4 \text{ m}$$

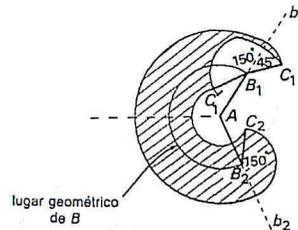
o que exige 9 segundos, 6 segundos e 4 segundos, respectivamente. Logo, 1) 19 segundos, 2) 9 segundos.

- 7 Começa-se por esboçar o braço do autómato nas suas posições extremas, como AB_1C_1 e AB_2C_2 (ver figura). Seguidamente investiga-se onde se pode mover C quando B se encontra em B_1 e, depois, onde pode mover-se C quando B está em B_2 .

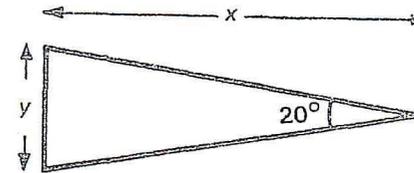
Todo o contorno da envolvente será constituído por arcos de circunferência.



- 8 Tal como na questão anterior, começa-se por desenhar o braço nas suas posições extremas. Quando B se encontra em B_1 , é importante considerar as duas posições-limite de C em relação a B_1 , isto é, C_1 e C_1' . Dado que BC só pode rodar 45° no sentido horário, a partir de b_1 , o contorno da envolvente nesta extremidade é algo inesperado, mas, tal como antes, volta a ser constituído por arcos de circunferência.



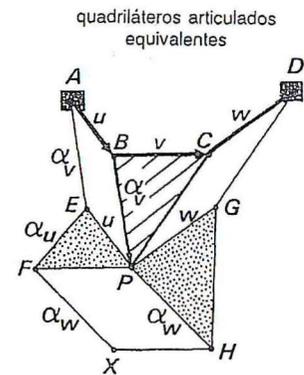
- 11 $y = 2x \operatorname{tg} 10^\circ$. Mas o efeito das alavancas implica que as mandíbulas se desloquem $(1/2)y$. Assim, a razão é $1: \operatorname{tg} 10^\circ \approx 6:1$.



Bibliografia

- C. van Amerongen, *How Things Work*, The Universal Encyclopedia of Machines, 2 vols., Paladin.
- I. I. Artobolevsky, *Mechanism in Modern Engineering Design*, 5 vols., MIR Publishers Moscow.
- C. V. Durell e A. Robson, *Advanced Trigonometry*, G. Bell and Sons, Ltd.
- M. Hiner, *Paper Engineering for pop-up books and cards*, Tarquin Publications.
- E. W. Hobson et al., *Squaring the Circle and other Monographs*, Chelsea Publishing Co.
- A. Jarvis, *Hydraulic Machines*, Shire Publications, Ltd.
- A. B. Kempe, *How to draw a straight line; a lecture on linkages*, Macmillan.
- B. Leatham-Jones, *Elements of Industrial Robotics*, Pitman.
- D. Lent, *Analysis and Design of Mechanisms*, Prentice Hall.
Life Science Library, *Machines*.
— *Wheels*.
— *Time*.
- R. Marshall e J. Bradley, *Watch it work! The train*, Viking Kestrel.
- L. Maunder, *Machines in Motion*, Cambridge University Press.
- S. Molian, *Mechanism Design, an Introduction Text*, Cambridge University Press.
- R. Pawson, *The Robot Book*, Windward.
- Schools Council: Mathematics for the Majority, *Machines, Mechanisms and Mathematics*, Chatto and Windus, Modular Courses in Technology, *Mechanisms*, Oliver and Boyd.
- M. Sendak, *The Genius of Lothar Meggendorfer. A movable toy book*, Random House.
- K. Shooter e J. Saxton, *Making things work*, Cambridge University Press.
- S. Strandh, *Machines, an Illustrated History*, Nordbok.
- J. Vince, *Power Before Steam*, John Murray.
- L. de Vries, *Victorian Inventions*, John Murray.
- C. Zammattio, A. Marinoni e A. M. Brizio, *Leonardo the Scientist*, Hutchinson.

Apêndice



$ABCD$ é um quadrilátero articulado cujos pontos fixos são A e D . BPC é um triângulo fixo a BC ; interessa descobrir o lugar geométrico de P quando se manipula o sistema articulado. O diagrama anterior completa-se construindo paralelogramos, assim como outros dois triângulos, EFP e PGH , semelhantes ao triângulo BPC .

Construindo um modelo que materialize este sistema articulado completo, descobre-se que, ao manipulá-lo, o ponto X permanece fixo.

Deduz-se que o sistema articulado $AEFX$ com o triângulo FPE e o sistema articulado $DGHX$ com o triângulo GPH geram ambos o mesmo lugar geométrico de P que o sistema articulado $ABCD$ original com o triângulo BPC .

Uma demonstração deste facto consegue-se com o recurso aos números complexos, como veremos de seguida.

Representemos AB , BC e CD por u , v e w , respectivamente, e seja BP igual a αv (o produto por um número complexo equivale a uma homotetia seguida de uma rotação). Então,

$AE = \alpha v$ lados opostos de um paralelogramo.
 $EF = \alpha u$ porque EFP é semelhante a BPC .
 $PG = w$ lados opostos de um paralelogramo.
 $PH = \alpha w$ porque PHG é semelhante a BPC .
 $FX = \alpha w$ lados opostos de um paralelogramo.

Em consequência,

$$\begin{aligned} AX &= AE + EF + FX \\ &= \alpha v + \alpha u + \alpha w \\ &= \alpha(u + v + w) \end{aligned}$$