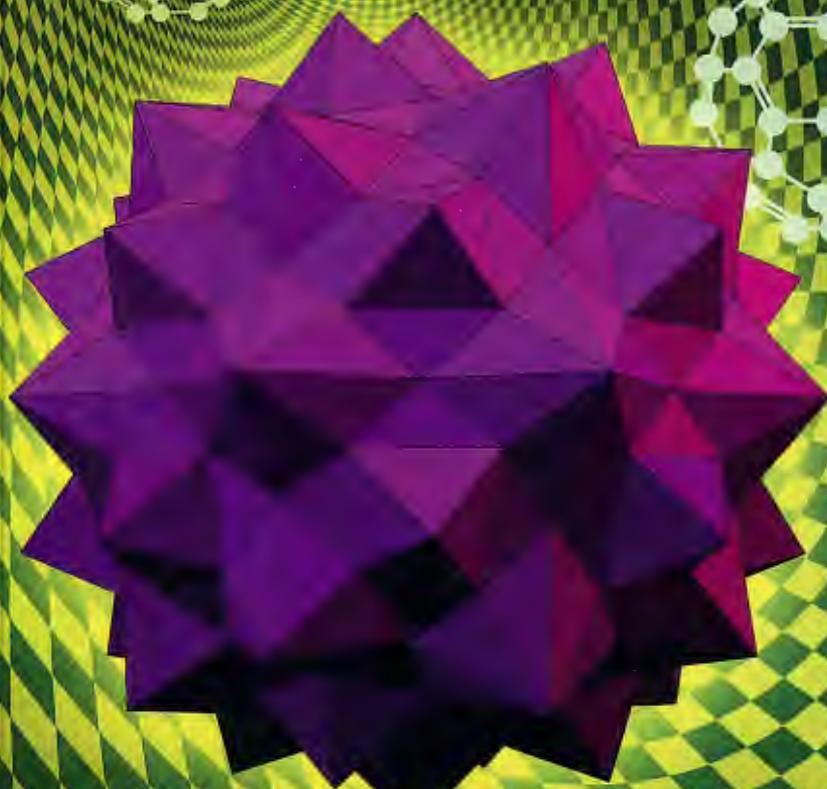
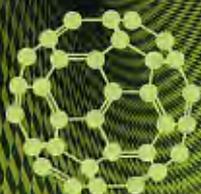


DAVID S. RICHESON

# A PÉROLA DE EULER

A FÓRMULA DOS POLIEDROS  
E O NASCIMENTO DA TOPOLOGIA



gradiva

O prazer da Matemática

Euler olhou em 1750 para onde todos tinham olhado e viu o que ninguém tinha visto. Assim nasceu a sua pérola, uma das equações mais belas da Matemática: a Fórmula de Euler para os poliedros.

A irreal Fórmula de Euler parece possuir vida e inteligência próprias, contendo muito mais do que o ser humano nela poderia ter colocado. Richeson revela-nos toda a riqueza desta pérola: observada à luz correcta, ela revela camadas sucessivas de ideias cada vez mais fascinantes, entre as quais a moderna Topologia – a «geometria das folhas de borracha».

Das pontes de Königsberg ao mundo dos nós, das bolas de futebol às cúpulas geodésicas, da Topologia à Conjectura de Poincaré, Richeson conduz-nos de forma brilhante – e quase sem equações! – por uma viagem que fascinará qualquer amante da Matemática. Contemple a pérola!

ISBN: 978-989-636-634-2



9 789896 166342

DAVID S. RICHESON

# A PÉROLA DE EULER

A FÓRMULA DOS POLIEDROS  
E O NASCIMENTO DA TOPOLOGIA

TRADUÇÃO  
CARLOS FLORENTINO

REVISÃO CIENTÍFICA  
JORGE BUESCU

gradiva



**Título original** *Euler's gem: The polyhedron formula and the birth of topology*

© Princeton University Press, 2008

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte deste livro pode ser reproduzida ou transmitida sob qualquer forma ou por quaisquer meios, electrónicos ou mecânicos, incluindo a fotocópia, a gravação ou qualquer outro sistema de armazenamento e recuperação de informação, sem a prévia autorização escrita do editor.

**Tradução** Carlos Florentino

**Revisão científica** Jorge Buescu

**Revisão de texto** Sandra Flores

**Capa** Armando Lopes (concepção gráfica)/© Thinkstock (imagens)

**Fotocomposição, impressão e acabamento** Multitipo—Artes Gráficas, L.<sup>da</sup>

**Reservados os direitos para a língua portuguesa, excepto o Brasil, por**  
Gradiva Publicações, S. A.

Rua Almeida e Sousa, 21 – r/c esq. – 1399-041 Lisboa

Telef. 21 393 37 60 — Fax 21 395 34 71

**Dep. comercial** Telef. 21 397 40 67/8 — Fax 21 397 14 11

geral@gradiva.mail.pt

**1.ª edição** Março de 2015

**Depósito legal** 388 307/2015

**ISBN** 978-989-616-634-2

**gradiva**

Editor GUILHERME VALENTE

Colecção «O Prazer da Matemática»

dirigida por

JORGE BUESCU

Criada e dirigida por Guilherme Valente, a colecção «O Prazer da Matemática»  
passou a ser dirigida a partir do n.º 39 por Jorge Buescu.

Visite-nos na internet  
[www.gradiva.pt](http://www.gradiva.pt)

*Dedicado ao Ben e à Nora  
As vossas faces  
E as vossas arestas  
Amo-vos dos vértices aos pés*

# Índice

<i>Prefácio</i> .....	9
<i>Introdução</i> .....	13
1. Leonhard Euler e os seus Três «Grandes» Amigos .....	23
2. O que é um Poliedro?.....	39
3. Os Cinco Sólidos Perfeitos.....	43
4. A Fraternidade Pitagórica e a Teoria Atómica de Platão.....	48
5. Euclides e o seu <i>Elementos</i> .....	56
6. O Universo Poliédrico de Kepler.....	63
7. A Pérola de Euler .....	75
8. Sólidos Platónicos, Bolas de Golfe, Fullerenos e Cúpulas Geodésicas...	88
9. Ultrapassado por Descartes? .....	94
10. A Demonstração de Legendre .....	100
11. Um Passeio por Königsberg .....	113
12. Os Poliedros Achatados de Cauchy .....	126
13. Grafos, Geoplanos e Couves-de-bruxelas.....	133
14. É um Mundo Colorido .....	146
15. Novos Problemas e Novas Demonstrações .....	161
16. Membranas de Borracha, <i>Donuts</i> Ocos e Garrafas Loucas .....	173
17. São Iguais, ou são Diferentes? .....	191

18. Um Problema Enredado.....	205
19. Penteando o Pêlo de um Coco.....	222
20. Quando a Topologia Condiciona a Geometria.....	240
21. A Topologia das Superfícies Curvas.....	254
22. Navegando em $n$ Dimensões .....	264
23. Henri Poincaré e o Desenvolvimento da Topologia .....	277
<i>Epílogo — O Problema que Vale um Milhão de dólares .....</i>	<i>290</i>
<i>Agradecimentos .....</i>	<i>299</i>
<i>Apêndice A — Construa os seus Próprios Poliedros e Superfícies.....</i>	<i>300</i>
<i>Apêndice B — Leituras Recomendadas .....</i>	<i>310</i>
<i>Créditos das Ilustrações.....</i>	<i>313</i>
<i>Notas.....</i>	<i>314</i>
<i>Bibliografia.....</i>	<i>322</i>
<i>Índice Remissivo .....</i>	<i>337</i>

## Prefácio

*Um matemático é uma máquina que transforma café em teoremas.*  
— Alfréd Rényi, frase frequentemente repetida por Paul Erdős<sup>1\*</sup>

Na Primavera do meu último ano de universidade, disse a um meu conhecido que tencionava inscrever-me num programa de doutoramento em matemática no Outono seguinte. Ele perguntou-me: «O que vais fazer realmente, estudar números enormes, ou calcular mais alguns dígitos de pi?»

A minha experiência é de que o grande público tem uma ideia muito vaga do que é a matemática e certamente não tem noção do que significa a investigação em matemática. As pessoas ficam estupefactas ao descobrir que há matemática nova que está ainda a ser desenvolvida. Pensam que a matemática é apenas o estudo de números ou que é uma sequência de disciplinas que termina no cálculo.

A verdade é que nunca me interessei muito por números. A aritmética mental não é o meu ponto forte. Consigo dividir a factura e calcular a gorjeta num restaurante sem ter que usar uma calculadora, mas faço isso com a mesma rapidez que qualquer outra pessoa. E o cálculo foi a disciplina matemática que menos me entusiasmou na faculdade.

Eu gosto de olhar para padrões — quanto mais visuais melhor — e analisar argumentos lógicos intrincados. As prateleiras do meu gabinete

---

<sup>1\*</sup> As notas numeradas estão agrupadas, por capítulo, no final do livro, a partir da página 314. As notas de autor e de tradutor estão assinaladas com asterisco e encontram-se em rodapé. (*N. do E.*)

estão cheias de livros de enigmas e quebra-cabeças com os meus apontamentos de infância, nas margens, a lápis. Mover três fósforos de modo a formar um certo padrão, encontrar um caminho através duma rede que satisfaz uma dada lista de regras, cortar esta forma e reorganizá-la para se tornar um quadrado, adicionar três linhas a esta imagem para criar nove triângulos, e outros quebra-cabeças. Para mim, *isto é matemática*.

Devido ao meu gosto por enigmas espaciais, visuais, e lógicos, a geometria sempre me cativou. Mas, no meu último ano da faculdade, descobri o campo fascinante da topologia, geralmente entendido como sendo o estudo das formas não rígidas. A combinação de belas teorias abstractas com manipulações espaciais concretas ajustou-se perfeitamente às minhas preferências matemáticas. A visão topológica maleável e flexível do mundo assentou-me como uma luva. Em comparação, a geometria parecia cerimoniosa e conservadora. Se a geometria se veste com um fato, a topologia veste-se de *jeans e T-shirt*.

Este livro é uma história e uma celebração da topologia. A história começa com a respectiva pré-história — a geometria dos matemáticos gregos e dos renascentistas, e o seu estudo dos poliedros. Atravessa os séculos XVIII e XIX, altura em que os estudiosos tentaram entender a ideia de forma e de como classificar objectos sem as rígidas condições impostas pela geometria. A história culmina na moderna área da topologia, que foi desenvolvida nos primeiros anos do século XX.

Enquanto alunos, aprendemos matemática através de manuais. Nestes livros, a matemática é apresentada de uma forma rigorosa e lógica: definição, teorema, demonstração, exemplo. Mas a matemática não é descoberta desta forma. Um assunto matemático demora muitos anos a ser entendido de forma que um livro coerente sobre ele possa ser escrito. A matemática é criada através de um progresso lento e incremental, às vezes com grandes saltos, passos em falso, correcções e ligações. Este livro mostra o emocionante processo da descoberta matemática em acção — mentes brilhantes pensando, questionando, refinando, desenvolvendo, e alterando o trabalho dos seus antecessores.

Em vez de apresentar uma simples história da topologia, escolhi a fórmula para poliedros de Euler como um guia turístico. Descoberta em 1750, a fórmula de Euler marca o início do período de transição da geometria para a topologia. O livro persegue a fórmula de Euler e de como ela evoluiu de uma mera curiosidade a um útil e profundo teorema.

Esta fórmula de Euler é um guia ideal, pois dá-nos acesso a maravilhosos quartos que raramente são vistos por outros visitantes. Seguindo a fórmula de Euler vemos algumas das áreas mais fascinantes da matemática, geometria, combinatória, teoria dos grafos, teoria dos nós, geometria

diferencial, sistemas dinâmicos e topologia. Estes são assuntos de grande beleza que um estudante típico, até mesmo um estudante de uma licenciatura em matemática, pode nunca encontrar.

Além disso, nesta visita eu tenho o prazer de apresentar ao leitor alguns dos maiores matemáticos da história: Pitágoras, Euclides, Kepler, Descartes, Euler, Cauchy, Gauss, Riemann, Poincaré, e muitos outros — todos eles deram importantes contribuições para este tema e para a matemática em geral.

Este livro não tem pré-requisitos formais. A matemática que um aluno aprende na sequência típica de álgebra, trigonometria e geometria dos programas dos primeiros três ciclos do ensino básico e no ensino secundário é suficiente, embora a maior parte seja irrelevante para esta discussão. O livro é auto-suficiente, e nos raros casos que serão necessários, eu recordarei o leitor dos factos relevantes dessas matérias de matemática.

No entanto, não se iluda — algumas das ideias aqui apresentadas são muito sofisticadas, abstractas e difíceis de visualizar. O leitor deve estar disposto a ler cuidadosamente através de argumentos lógicos e a pensar abstractamente. Ler matemática não é como ler um romance. O leitor deve estar preparado para parar e reflectir, por si próprio, sobre cada frase; para voltar a ler um argumento, tentar chegar a outros exemplos, examinar cuidadosamente as figuras que acompanham o texto, procurar e distinguir as ideias fundamentais, e usar o índice remissivo para perceber o significado exacto de cada termo técnico.

É claro que não existe nenhum trabalho de casa nem exame no final deste livro. Não há grande problema se saltar as partes mais difíceis. Se um argumento particularmente complicado se revela difícil de entender, salte para o próximo tópico. Se o fizer, não estará a prejudicar a leitura de outras partes do livro. O leitor pode também optar por marcar uma página mais sofisticada e voltar a ela mais tarde.

É minha convicção que o público-alvo deste livro é auto-selectivo. Qualquer pessoa que *quiser* ler, será *capaz* de lê-lo. O livro não é para todos, mas aqueles que não compreendem e não apreciam a matemática são precisamente aqueles que nunca o iriam escolher para ler.

Eu tive a preciosa vantagem de não ter escrito um manual. Claro que fiz todos os esforços para ser correcto e rigoroso nas minhas descrições da matemática, mas tive a liberdade de passar por cima de alguns detalhes técnicos que confundem mais do que iluminam. Dessa forma eu pude escrever num nível elevado e concentrar-me em ideias, intuição e na visão geral dos assuntos. Necessariamente, apenas consegui dar um tratamento superficial de muitas das ideias fascinantes deste livro. Quem estiver

interessado em ler mais sobre esses tópicos ou em ver como os detalhes não incluídos servem para completar o quadro, deve consultar a lista de livros sugeridos no Apêndice B.

Embora este livro seja acessível ao grande público, ele está também escrito para matemáticos. Apesar de partes deste livro se sobreporem a material contido noutros livros, não há nenhuma obra que contenha toda esta informação. Existe uma extensa bibliografia, no final do livro, que inclui muitos dos artigos originais. Esta será uma ajuda para os estudiosos que queiram aprofundar os temas abordados.

O livro está organizado da seguinte forma. Começa com a visão pré-Euleriana dos poliedros nos capítulos 2, 3, 4, 5 e 6. Estes capítulos centram-se na classe mais famosa de poliedros, os poliedros regulares. Os capítulos 7, 9, 10, 12 e 15 apresentam a fórmula de Euler para poliedros e as suas generalizações para outras formas rígidas análogas. Esta discussão leva-nos até meados do século XIX. Os capítulos 16, 17, 22 e 23 centram-se na versão topológica da fórmula de Euler, que surgiu no final desse século. Estes abordam as superfícies e outros objectos topológicos de dimensão superior.

O livro contém também várias aplicações da fórmula de Euler. O capítulo 8 inclui alguns usos elementares da fórmula de Euler para poliedros. Os capítulos 11, 13 e 14 focam-se na teoria dos grafos. Os capítulos 18, 19, 20 e 21 lidam com superfícies, a sua relação com a fórmula de Euler, e as suas aplicações à teoria dos nós, aos sistemas dinâmicos e à geometria.

Espero que os leitores deste livro gostem tanto de o ler quanto eu gostei de o escrever. Para mim, este projecto foi um gigante quebra-cabeças, uma autêntica «caça ao tesouro» académica. Encontrar as peças e montá-las numa história coerente foi um desafio e uma alegria para mim. Adoro o meu trabalho.

DAVE RICHESON  
Dickinson College  
6 de Julho de 2007

## Introdução

*A Filosofia [Natureza] está escrita neste grande livro — a que eu chamo Universo — que está permanentemente aberto ao nosso olhar, mas não pode ser entendido sem que primeiro se aprenda a linguagem e se interpretem os caracteres com que está escrito. Ele está escrito na linguagem da matemática, e os seus caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem os quais é humanamente impossível compreender uma única palavra; sem estes estamos perdidos num labirinto escuro.*

— Galileu Galilei<sup>1</sup>

Ninguém a descobriu. Os matemáticos gregos da antiguidade — figuras proeminentes como Pitágoras, Teeteto, Platão, Euclides e Arquimedes, que eram fascinados por poliedros — não a descobriram. O grande astrónomo Johannes Kepler, que tinha tanta admiração pela beleza dos poliedros que baseou neles o seu modelo inicial do sistema solar, não a descobriu. Na sua investigação sobre poliedros, o matemático e filósofo René Descartes esteve a poucos passos lógicos de a descobrir, mas também lhe escapou. A estes matemáticos, bem como a tantos outros, escapou uma relação que é tão simples que pode ser explicada a qualquer criança em idade escolar, e no entanto é tão fundamental que faz parte do tecido com que é feita a matemática moderna.

O grande matemático suíço Leonhard Euler (1707-1783) — cujo apelido se pronuncia «oiler» — descobriu-a. A 14 de Novembro de 1750, numa carta ao seu amigo, o especialista em teoria dos números Christian

Goldbach (1690-1764), Euler escreveu: «É surpreendente que estas propriedades gerais da estereometria [geometria sólida] não tenham, tanto quanto sei, sido notadas por ninguém<sup>2</sup>.» Nesta carta Euler descreveu a sua observação, e um ano mais tarde forneceu uma demonstração. Esta observação é tão básica e fundamental que hoje é conhecida por *fórmula de Euler para poliedros*.

Um poliedro é um objecto tridimensional, como os desenhados na figura I.1. É composto por polígonos planos chamados faces. Cada par de faces adjacentes intersecta-se ao longo de um segmento de recta, chamada uma aresta, e os extremos das arestas encontram-se nos cantos, ou vértices. Euler observou que o número de vértices, arestas e faces ( $V$ ,  $A$  e  $F$ , respectivamente) satisfazem sempre uma relação aritmética simples e elegante:

$$V - A + F = 2.$$

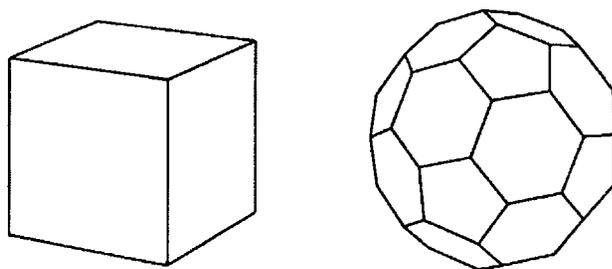


Figura I.1. Um cubo e uma bola de futebol (icosaedro truncado) satisfazem ambos a fórmula de Euler

O cubo é provavelmente o poliedro mais conhecido. Uma contagem rápida mostra que tem seis faces: um quadrado na parte superior, um quadrado na parte inferior, e quatro quadrados laterais\*. As fronteiras destes quadrados formam as arestas. Contando-as, encontramos 12 no total: quatro na face de cima, quatro na de baixo, e quatro arestas verticais nas faces verticais. Os quatro cantos superiores e os quatro cantos inferiores formam os oito vértices do cubo. Assim, para o cubo,  $V = 8$ ,  $A = 12$ ,  $F = 6$  e, naturalmente,

$$8 - 12 + 6 = 2$$

---

\* Estamos a considerar que o cubo está assente em repouso numa superfície horizontal, como por exemplo uma mesa. (N. do T.)

tal como previsto. Para a bola de futebol em forma de poliedro, ilustrada na figura I.1, a contagem é mais demorada, mas podemos ver que possui 32 faces (12 pentágonos e 20 hexágonos), 90 arestas e 60 vértices. Novamente,

$$60 - 90 + 32 = 2.$$

Para além do seu trabalho com poliedros, Euler fundou a área da *analysis situs*, hoje conhecida como topologia. A geometria é o estudo dos objectos rígidos. Os géometras estão interessados em medir quantidades, tais como áreas, ângulos, volumes e comprimentos. A topologia, que herdou a designação popular «geometria das membranas de borracha», é o estudo das formas maleáveis. O objecto de estudo de um topólogo não precisa de ser rígido ou de ter propriedades métricas. Os topólogos estão interessados em estudar propriedades como a conectividade, e investigar a existência de «buracos», ou a posição de um objecto dentro de outro. Quando um palhaço dobra um balão para lhe dar a forma de um cão, o balão permanece a mesma entidade topológica, embora seja geometricamente muito diferente. Mas quando uma criança rebenta o balão com um lápis, deixando um notável orifício na sua superfície, o balão deixa de ser topologicamente o mesmo. Na figura I.2 vemos três exemplos de superfícies topológicas — a esfera, o *donut* em forma de *toro* e a faixa de Möbius.

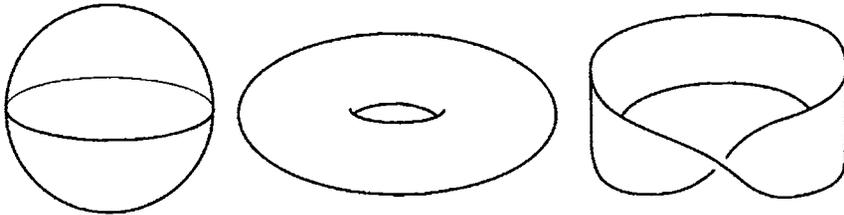


Figura I.2. Superfícies topológicas: uma esfera, um *toro* e uma faixa de Möbius

Os estudiosos da jovem área da topologia, fascinados com a fórmula de Euler, tentaram aplicá-la a estas superfícies topológicas. Surgiu então a pergunta natural: onde estão os vértices, arestas e faces numa superfície topológica? Os topólogos, ignorando as rígidas regras estabelecidas pelos géometras, permitiram que, neste caso mais geral, as faces e arestas sejam curvas. Na figura I.3 podemos ver uma decomposição de uma esfera em regiões «rectangulares» e «triangulares». A decomposição é obtida desenhando 12 linhas de longitude constante, que se encontram

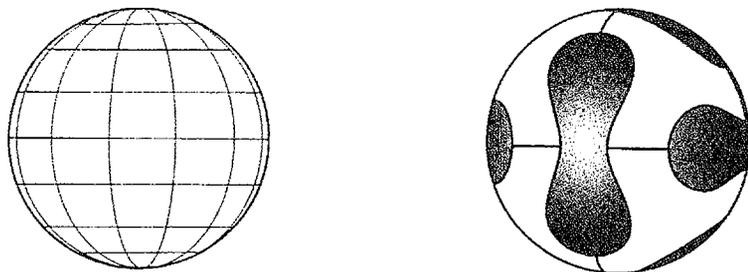


Figura I.3. Duas decomposições da esfera

nos dois pólos (norte e sul), e 7 linhas de latitude constante. Assim, este globo tem 72 faces rectangulares curvas, 24 faces triangulares curvas (localizadas junto aos pólos norte e sul), perfazendo um total de 96 faces. E tem 180 arestas e 86 vértices. Assim, tal como no caso dos poliedros, verificamos que:

$$V - A + F = 86 - 180 + 96 = 2.$$

Da mesma forma, a bola de futebol usada no Mundial de Futebol de 2006, que consiste em seis faces com a forma do número oito, cada uma com quatro arestas curvilíneas, e oito regiões hexagonais disformes (ver figura I.3), também satisfaz a fórmula de Euler (pois tem  $V = 24$ ,  $A = 36$  e  $F = 14$ ).

Chegados a este ponto, somos tentados a conjecturar que a fórmula de Euler se aplica a qualquer superfície topológica. No entanto, se decomposermos um *toro* em faces rectangulares curvadas, como na figura I.4, obtemos um resultado surpreendente. Esta decomposição é obtida colocando dois círculos em volta do orifício central do *toro* e 4 círculos em torno do

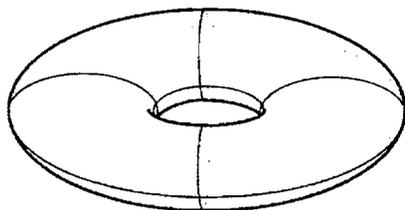


Figura I.4. Uma decomposição do *toro*

seu tubo circular. A decomposição tem 8 faces de quatro lados, 16 arestas e 8 vértices. Aplicando a fórmula de Euler obtemos:

$$V - A + F = 8 - 16 + 8 = 0$$

em vez do esperado número 2.

Se construíssemos uma decomposição diferente do *toro* iríamos descobrir que a mesma soma alternada dá novamente zero. Isso dá-nos uma nova fórmula de Euler para o *toro*:

$$V - A + F = 0.$$

Podemos mostrar que qualquer superfície topológica tem a «sua própria» fórmula de Euler. Não importa se decomposmos a superfície de uma esfera em 6 ou 1006 faces, pois quando aplicamos a fórmula de Euler obtemos sempre o número 2. Da mesma forma, se aplicarmos a fórmula de Euler a qualquer decomposição do *toro*, obteremos 0. Este número especial pode ser utilizado para distinguir as superfícies, assim como o número de rodas pode ser utilizado para distinguir os veículos que circulam nas estradas. Cada automóvel tem quatro rodas, cada camioneta tem dezoito rodas, e cada motorizada tem duas rodas. Se um veículo não tiver quatro rodas, então não é um automóvel, se não tem duas rodas, deduz-se que não é uma motorizada. Da mesma forma, se  $V - A + F$  não é 0, então topologicamente a superfície não é um *toro*.

A soma  $V - A + F$  é uma quantidade intrinsecamente associada à forma em estudo. Na terminologia usada pelos topólogos, dizemos que é um *invariante* da superfície. Devido a esta notável propriedade de invariância, chamamos ao número  $V - A + F$ , o número de Euler de superfície. Assim, o número de Euler de uma esfera é 2, e o número de Euler de um *toro* é 0.

O facto de cada superfície ter o seu próprio número de Euler pode parecer uma mera curiosidade matemática, algo para contemplar e comentar «não é fixe?», enquanto seguramos uma bola de futebol, ou olhamos para uma cúpula de uma igreja. Mas não é certamente o caso. Como veremos, o número de Euler é uma ferramenta indispensável no estudo de poliedros, bem como na topologia, geometria, teoria de grafos e sistemas dinâmicos; e tem também algumas aplicações muito elegantes e inesperadas.

Um nó matemático é como um pedaço de corda entrelaçado e sem extremidades, tal como o que aparece na figura I.5. Dois nós dizem-se equivalentes se um deles pode ser deformado no outro sem cortar ou

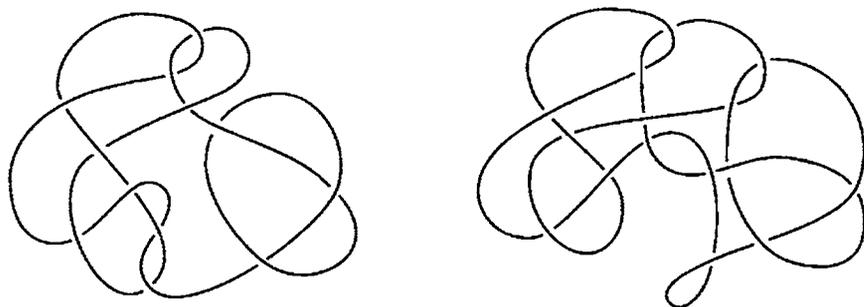


Figura I.5. Serão estes nós equivalentes?

colar a corda. Tal como usamos o número de Euler para ajudar a distinguir duas superfícies, com um pouco de criatividade, podemos também usá-lo para distinguir nós. Pode usar-se o número de Euler para provar que os dois nós na figura I.5 não são equivalentes.

Na figura I.6 podemos ver um mapa das direcções do vento, num certo instante, à superfície da Terra. Neste exemplo, há um ponto na costa do Chile onde o vento não está a soprar. Este ponto está localizado num certo local dentro do vórtice que gira no sentido horário. Podemos provar que há sempre pelo menos um ponto na superfície da Terra onde não há vento. Isto não é consequência da compreensão da meteorologia, mas sim da compreensão da topologia. A existência deste ponto de acalmia decorre de um teorema que os matemáticos designam por «teorema da bola cabeluda». Se pensarmos nas direcções do vento

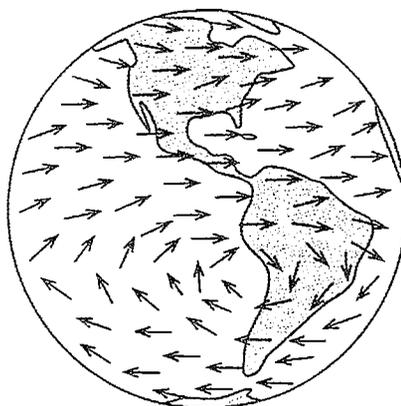


Figura I.6. Existe sempre um local na Terra sem vento?

como fios de cabelo sobre a superfície da Terra, então deve haver algum ponto onde o cabelo não está «penteado». Coloquialmente, dizemos que «não se pode pentear o pêlo de um coco». No capítulo 19 veremos como o número de Euler nos permite estabelecer esta ousada afirmação.

Na figura I.7 vemos um polígono desenhado numa malha de pontos igualmente espaçados. Os vértices do polígono estão localizados nos pontos da malha. Surpreendentemente, pode-se calcular a área exacta

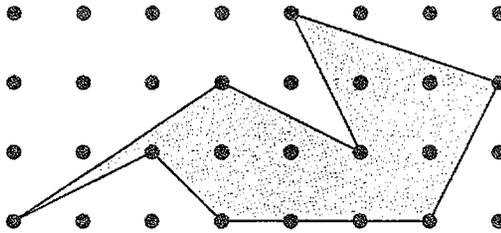


Figura I.7. É possível determinar a área do polígono sombreado por contagem de pontos?

do polígono simplesmente contando os pontos no interior e no bordo do polígono. No capítulo 13, vamos utilizar o número de Euler para obter a seguinte elegante fórmula que nos dá a área do polígono em termos do número de pontos que se encontram ao longo do bordo do polígono ( $B$ ) e o número de pontos no interior do polígono ( $I$ ):

$$\text{área} = I + B/2 - 1.$$

A partir desta fórmula, concluímos que a área do polígono da figura I.7 é exactamente igual a\*:  $5 + 10/2 - 1 = 9$ .

Há um problema antigo e interessante que pergunta quantas cores são necessárias para colorir um mapa de tal maneira que cada par de países com uma fronteira comum não sejam da mesma cor. Considere um mapa em branco dos Estados Unidos comece a colori-lo com lápis de cor de forma arbitrária. Irá rapidamente descobrir que a maior parte do país pode ser colorida usando apenas três cores, mas que uma quarta cor é necessária para completar o mapa. Por exemplo, uma vez que um número ímpar de estados rodeiam o Nevada, vão ser necessárias três

\* Estamos a supor que o comprimento mais curto entre dois pontos indicados na figura é de uma unidade. (N. do T.)



Figura I.8. Podemos colorir o mapa dos Estados Unidos usando apenas quatro cores?

cores para colori-los; assim, terá que usar um quarto lápis de cor para o estado do Nevada (figura I.8). Se formos cuidadosos, poderemos concluir a coloração sem o uso de cinco cores — quatro cores são suficientes para todo o mapa dos Estados Unidos. Foi conjecturado que qualquer mapa pode ser colorido com quatro cores ou menos. Esta conjectura surpreendentemente difícil tornou-se conhecida como o problema das quatro cores. No capítulo 14 vamos contar a sua história fascinante, que terminou com uma controversa demonstração em 1976, na qual o número de Euler desempenhou um papel fundamental.

A grafite e o diamante são dois materiais cuja constituição química é inteiramente formada por átomos de carbono. Em 1985, três cientistas — Robert Curl Jr., Richard Smalley e Harold Kroto — abalaram a comunidade científica, ao descobrir «uma nova classe de moléculas de carbono». Eles chamaram a estas moléculas *fulerenos*, em homenagem ao arquitecto

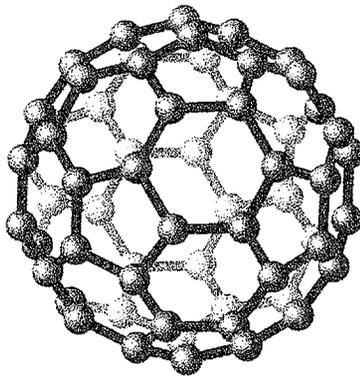


Figura I.9. A molécula do fulereno de Buckminster,  $C_{60}$

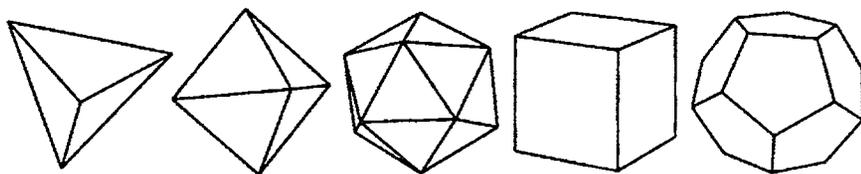


Figura I.10. Os cinco sólidos regulares

Buckminster Fuller, inventor da cúpula geodésica (figura I.9). Este nome foi escolhido porque os fulerenos são grandes moléculas poliédricas que se assemelham a estruturas arquitetónicas. Pela descoberta dos fulerenos, os três homens foram galardoados com o Prémio Nobel da Química em 1996. No fulereno, cada átomo de carbono liga-se exactamente a três vizinhos, e os menores ciclos de átomos de carbono formam pentágonos ou hexágonos. Inicialmente Curl, Smalley e Kroto descobriram fulerenos com 60 e com 70 átomos de carbono, mas outros fulerenos foram descobertos mais tarde. O fulereno mais abundante é o  $C_{60}$ , uma molécula com a forma de uma bola de futebol típica, a forma que eles apelidaram de «fulereno de Buckminster». É notável que, se esquecermos a química e soubermos apenas a fórmula de Euler, somos capazes de concluir que há certas configurações de átomos de carbono que são impossíveis num fulereno. Por exemplo, cada fulereno, independentemente do número de átomos, tem exactamente 12 ciclos pentagonais de carbono, embora o número de ciclos hexagonais não seja sempre o mesmo.

Ao longo de milhares de anos o Homem sentiu-se atraído pela beleza sedutora dos sólidos regulares — poliedros cujas faces são polígonos regulares, todas idênticas (figura I.10). Os gregos descobriram esses objectos, Platão incluiu-os na sua teoria atómica, e Kepler baseou um modelo inicial do sistema solar nestes sólidos. Parte do mistério que envolve estes cinco poliedros reside em serem poucos — nenhum outro poliedro, para além destes cinco, satisfaz os rigorosos requisitos de regularidade. Uma das aplicações mais elegantes da Fórmula de Euler é a demonstração, muito curta, de que existem apenas cinco sólidos regulares.

Apesar da importância e beleza da fórmula de Euler, esta é praticamente desconhecida pelo público geral. Ela não aparece no currículo usual que é ensinado nas escolas. Alguns alunos do ensino secundário poderão saber esta fórmula de Euler, mas a maioria dos alunos de matemática não encontram esta relação até entrarem na universidade.

A fama na matemática é uma coisa curiosa. Alguns teoremas são bem conhecidos porque são repetidamente incutidos nas cabeças dos jovens

alunos: o teorema de Pitágoras, a fórmula resolvente do segundo grau, o teorema fundamental do cálculo. Outros resultados são colocados no centro das atenções porque resolvem um famoso problema em aberto. O último teorema de Fermat manteve-se em aberto por mais de três séculos até que Andrew Wiles surpreendeu o mundo com a sua demonstração em 1993, o problema das quatro cores foi enunciado em 1853 e só foi resolvido por Kenneth Appel e Wolfgang Haken em 1976. A famosa conjectura de Poincaré foi proposta em 1904 e constitui um dos Problemas do Milénio do Clay Mathematics Institute — uma colecção de sete problemas considerados tão importantes que quem os resolver receberá 1 milhão de dólares. Este prémio será previsivelmente atribuído a Grisha Perelman, pela sua demonstração da conjectura de Poincaré em 2002\*. Outros factos matemáticos são bem conhecidos devido à sua interdisciplinaridade (por exemplo, a sequência de Fibonacci na natureza) ou pela sua importância histórica (a infinitude dos números primos, a irracionalidade do número  $\pi$ ).

A fórmula de Euler merece ser tão bem conhecida como estes grandes teoremas. A sua história é muito rica, e muitos dos maiores matemáticos do mundo contribuíram para o seu desenvolvimento. É um resultado profundo, e a nossa apreciação dessa profundidade vai aumentando com o grau de sofisticação matemática.

Esta é a história do belo teorema de Euler. Vamos percorrer esta história mostrando como se construiu uma ponte que liga os poliedros dos gregos à moderna área da topologia. Vamos apresentar muitas manifestações surpreendentes da fórmula de Euler em geometria, topologia e sistemas dinâmicos. Iremos também dar exemplos de teoremas cujas demonstrações usam a fórmula de Euler. Veremos a razão pela qual esta fórmula, que passou muito tempo despercebida de todos, se tornou um dos teoremas mais queridos da matemática.

---

\* Após a edição original deste livro, este prémio foi de facto atribuído a G. Perelman, embora ele o tenha recusado (consulte também o Epílogo). (*N. do T.*)

# Capítulo 1

## Leonhard Euler e os seus Três «Grandes» Amigos

*«Leiam Euler, leiam Euler, ele é o mestre de todos nós.»*  
— Pierre-Simon de Laplace<sup>1</sup>

Estamos habituados a hipérboles. Os anúncios de televisão, *outdoors*, os comentadores desportivos e os músicos famosos usam frequentemente expressões sensacionais, como o maior, o melhor, o mais inteligente, o mais rápido ou o mais brilhante. Sendo usados no processo normal de vender um produto ou entreter o espectador, estas expressões perderam o seu significado literal. Assim, quando afirmamos que Leonhard Euler foi um dos mais influentes e prolíficos matemáticos que o mundo alguma vez viu, o leitor poderá revirar os olhos, com enfado. Mas não estamos a exagerar a verdade. Euler é considerado, juntamente com Arquimedes (287-211 a. C), Isaac Newton (1643-1727) e Carl Friedrich Gauss (1777-1855), um dos dez — ou mesmo cinco — mais importantes matemáticos da história.

Ao longo da sua vida de 76 anos, Euler concebeu matemática suficiente para preencher 74 volumes substanciais, mais páginas do que qualquer outro matemático. Quando a totalidade do seu trabalho foi finalmente publicada (novos materiais continuaram a aparecer decorridos 79 anos depois da sua morte) verificou-se que este chegou aos 866 artigos, em que se incluem artigos científicos, livros sobre a maioria dos temas tratados

na época, livros didáticos, livros elementares para não especialistas, e manuais técnicos. Estes números não levam em conta os quinze volumes planejados, de correspondência e outros cadernos de apontamentos, que ainda estão a ser compilados.

A importância de Euler não é devida à sua produtividade volumosa, mas às contribuições fundamentais e inovadoras que fez na matemática. Euler não se especializou numa área particular. Ele foi um dos grandes generalistas: o seu conhecimento estendia-se por várias disciplinas. Publicou artigos e livros com grande influência em análise, teoria dos números, análise complexa, cálculo, cálculo de variações, equações diferenciais, teoria das probabilidades e topologia. Esta lista não inclui as suas contribuições para algumas disciplinas aplicadas tais como a óptica, electricidade e magnetismo, mecânica, hidrodinâmica e astronomia. Além disso, Euler possuía uma característica que era, e ainda é, rara entre os investigadores de topo: ele era também um divulgador de primeira categoria. Ao contrário dos matemáticos que o precederam, Euler escrevia usando uma linguagem clara e simples, tornando o seu trabalho acessível tanto a especialistas como a estudantes.

Euler era um homem gentil e desprezioso cuja vida foi centrada em torno da sua grande família e do seu trabalho. Viveu na Suíça, Rússia, Prússia, e depois novamente na Rússia, e manteve uma correspondência frequente com muitos pensadores importantes do século XVIII. A sua vida profissional ficou ligada aos três «grandes» governantes da Europa, Pedro, *o Grande*, Frederico, *o Grande*, e Catarina, *a Grande*. Os legados destes líderes incluem a criação ou revitalização das respectivas academias nacionais de ciência. Estas academias forneceram as condições materiais para que Euler dedicasse o seu tempo à investigação em ciências puras. Em troca, apenas se esperava dele o uso ocasional dos seus conhecimentos científicos para os assuntos do Estado, e o reconhecimento internacional que o seu trabalho trazia para a nação.

Leonhard Euler nasceu em Basileia, Suíça, a 15 de Abril de 1707, filho de Paul Euler e Marguerite Brucker Euler. Pouco depois, a família mudou-se para a cidade vizinha de Riehen, onde Paul foi designado pastor da igreja calvinista local.

Os primeiros ensinamentos matemáticos que Leonhard teve foram dados pelo seu pai. Apesar de Paul não ser matemático, ele havia estudado matemática com o famoso Jacob Bernoulli (1654-1705). Esta instrução teve lugar quando os jovens Paul e Johann Bernoulli (1667-1748), irmão mais novo de Jacob, ambos estudantes na Universidade de Basileia, viviam na casa de Jacob. Jacob e Johann Bernoulli foram membros do que

se viria a tornar uma das famílias de matemáticos mais respeitadas de sempre. Por mais de um século o clã Bernoulli desempenhou um importante papel no avanço da matemática, tendo pelo menos oito Bernoullis realizado contribuições duradouras.

Leonhard começou os seus estudos formais na Universidade de Basileia, aos catorze anos. Não era uma idade muito precoce para um estudante universitário naquela altura. A universidade era muito pequena — tinha apenas algumas centenas de alunos e dezanove professores. Paul esperava que o seu filho seguisse uma carreira religiosa, para a qual Leonhard tinha estudado teologia e hebraico. Mas as suas capacidades matemáticas eram inegáveis, e ele rapidamente chamou a atenção do amigo do seu pai, Johann Bernoulli. Nessa altura Johann era um dos matemáticos mais proeminentes da Europa.

Johann era um homem arrogante, brusco e as suas características competitivas tinham produzido rivalidades históricas (entre outros, com o seu irmão e com um dos filhos). Apesar disso, reconheceu o notável talento do menino e encorajou-o a continuar os estudos em matemática. Euler escreveu na sua autobiografia: «Quando me deparava com algum obstáculo ou dificuldade, foi-me dada autorização para visitá-lo todos os sábados da parte da tarde e ele gentilmente explicava-me tudo o que eu não podia entender<sup>2</sup>.» Estas lições desempenharam um papel importante na maturação das capacidades matemáticas de Euler.

Apesar de Leonhard se distinguir nos seus estudos particulares de matemática, Paul mantinha a esperança de que o seu filho entrasse no Ministério. Com dezassete anos, Euler terminou o seu mestrado em filosofia. Johann temeu a grande perda que seria para a matemática se o seu protegido se virasse para a Igreja, e interveio dizendo a Paul, em termos inequívocos, que Leonhard tinha o potencial de se tornar um grande matemático. Devido ao seu gosto pela matemática, Paul cedeu. Apesar de Euler ter abandonado os estudos religiosos, permaneceu um devoto calvinista ao longo de toda a sua vida.

O primeiro sucesso, conseguido de forma autónoma, de Euler na matemática ocorreu quando tinha dezanove anos de idade. O seu trabalho teórico sobre a colocação ideal de mastros num navio garantiu-lhe uma «menção honrosa» numa prestigiada competição patrocinada pela Academia das Ciências de França. Esta façanha seria extraordinária para qualquer matemático, mas era ainda mais especial para um jovem suíço que nunca tinha visto um navio no oceano. Euler não ganhou o primeiro prémio desta competição, o que teria sido equivalente a ganhar um Prémio Nobel nos dias de hoje, mas nos anos seguintes ser-lhe-iam atribuídas as mais altas honras em doze ocasiões.

Na época do nascimento de Euler, a mil quilómetros a nordeste de Basileia, o czar russo Pedro, *o Grande* (1672-1725) estava a construir a cidade de São Petersburgo. Esta foi fundada em 1703 no pântano onde o rio Neva corre em direcção ao mar Báltico. Pedro usou trabalho forçado para construir a cidade, estrategicamente localizada na fortaleza de Pedro e Paulo numa ilha do Neva. Ele adorava a nova cidade, chamando-a o seu «paraíso» e deu-lhe o nome do seu santo padroeiro. Apesar do facto de a maioria dos russos, especialmente os oficiais do governo, não compartilharem o mesmo gosto de Pedro por este lugar frio e húmido, ele mudou a capital russa de Moscovo para São Petersburgo. O jovem Euler não fazia ideia de que esta cidade seria a sua casa durante grande parte da sua vida.

Pedro, *o Grande*, uma figura fisicamente imponente com quase dois metros de altura, foi o líder enérgico, autodidacta e determinado da Rússia entre 1682 e 1725. Conhecido como um reformador implacável, ele começou a transformação do seu país de uma nação agrária e feudal, dominada pela Igreja, num poderoso império. O seu objectivo de modernizar — isto é, de ocidentalizar — o governo russo, a cultura, a educação, as forças armadas, e a sociedade em geral foi, em grande parte, concretizado. Como um historiador russo escreveu: «De repente, saltando por cima de várias épocas escolásticas, a Renascença e o Reformismo, a Rússia passou de uma civilização paroquial, eclesiástica e quase medieval, directamente para a Idade da Razão<sup>3</sup>.»

Como parte do processo de ocidentalização, Pedro queria reformar o sistema de educação da Rússia, inexistente antes do seu reinado, com excepção do ensino mínimo facultado pela poderosa Igreja Ortodoxa. Como resultado, a Rússia não tinha cientistas. Por causa da forte presença da Igreja, os russos tinham medo de explicações científicas do mundo, preferindo as tradicionais explicações religiosas. Pedro reconheceu a necessidade de melhorar a imagem internacional da Rússia, e de dissipar a ideia de que os russos desprezavam a ciência. Ele também sabia que um Programa para a Ciência era crucial para a criação e manutenção de um Estado poderoso.

Pedro visitou a Royal Society de Londres e a Académie des Sciences de Paris, ambas fundadas em 1660. Ficou impressionado com o que viu. Ele também admirava a nova Academia de Ciências de Berlim, fundada em 1700, segundo uma proposta de Gottfried Leibniz (1646-1716). Leibniz é o famoso matemático que, a par de Isaac Newton, é considerado o inventor do cálculo. Estas academias não eram universidades; elas «dedicavam-se à busca de novos conhecimentos e não à comunicação do conhecimento existente»<sup>4</sup>. Os membros das academias eram investigadores, não professores; o seu objectivo principal era o avanço do conhecimento.

Pedro queria fundar uma academia, como as de Paris, Londres e Berlim, e queria estabelecê-la na sua nova cidade de São Petersburgo. De modo a aconselhar-se, ele contactou Leibniz. Durante quase duas décadas, Pedro e Leibniz mantiveram longas conversas, tanto por meio de cartas como presencialmente, sobre a reforma da educação e sobre a criação de uma academia de ciências.

Em 1724, Pedro tinha finalizado os seus planos para a criação da Academia de Ciências de São Petersburgo; este foi o projecto final e o mais ambicioso na sua busca para melhorar o sistema de educação da Rússia. No entanto, ele não podia criar a sua academia de forma exactamente igual às academias europeias. Como a Rússia não tinha cientistas nativos, ele teria que persuadir talentosos cientistas estrangeiros a mudarem-se para São Petersburgo. Do mesmo modo, como a Rússia não tinha sistema universitário, a Academia de Ciências deveria funcionar também como uma universidade. Parte do mandato da Academia seria o de treinar russos nas ciências, para que a Academia não tivesse que contar sempre com estrangeiros.

Pedro nunca viu os frutos do seu trabalho, pois morreu no início de 1725. Graças à nova imperatriz, a segunda esposa de Pedro, Catarina I (1684-1727), os planos da Academia continuaram. Estudiosos estrangeiros começaram a chegar decorridos alguns meses após a morte de Pedro, e a Academia de Ciências realizou a sua primeira reunião antes do final do ano. Pedro teve a sorte de Catarina adoptar o projecto da Academia. Nos anos que se seguiram, a Academia não esteve sempre abençoada por governantes entusiastas. Durante os 37 anos entre a morte de Pedro e a coroação de Catarina, a *Grande* (1729-1796), a Rússia foi conduzida por seis governantes, e a Academia esteve sempre à mercê destes indivíduos poderosos e opinativos.

Inicialmente, a Academia contava com dezasseis cientistas: treze alemães, dois suíços, um francês — e nenhum russo. A grande presença alemã e a ausência de russos constituiria, mais tarde, um foco de tensão.

Por causa do clima frio, do local remoto, e do isolamento académico, era necessário proporcionar altos salários e alojamento confortável para atrair os cientistas para São Petersburgo. A nova academia era pequena, mas rapidamente cumpriu a sua promessa de se tornar uma importante instituição científica reconhecida internacionalmente. Com o passar do tempo, tornou-se o centro do mundo académico e científico da Rússia. Esta Academia de Ciências mudou várias vezes de nome, mas ainda hoje existe e é conhecida como a Academia Russa de Ciências.

Dois dos investigadores estrangeiros que se tornaram as estrelas desta nova instituição eram amigos de Euler: os filhos de Johann Bernoulli,

Nicolaus (1695-1726) e Daniel (1700-1782) Bernoulli. Os dois irmãos tinham conversado com Euler sobre a Academia antes de saírem da Suíça, e prometeram assegurar-lhe uma posição tão depressa quanto possível. Após a sua chegada à Rússia, começaram logo a fazer campanha, junto dos administradores da Academia, no sentido de contratar o seu jovem e brilhante amigo. Esta campanha teve rapidamente sucesso. Em 1726, ofereceram a Euler uma posição na Secção de Medicina e Fisiologia. Infelizmente, Euler não pôde desfrutar plenamente nem comemorar esta emocionante oferta de trabalho. Esta proposta seria para preencher a vaga deixada livre pela trágica e inesperada morte de Nicolaus.

Euler ficou grato por este emprego, mas não se mudou imediatamente para a Rússia. Havia duas razões que o levavam a permanecer em Basileia e deixar o seu novo trabalho em espera. Em primeiro lugar, tinha acabado de aceitar um emprego em medicina, apesar de possuir um conhecimento mínimo na área. Assim, decidiu continuar na Universidade de Basileia enquanto estudava anatomia e fisiologia. Em segundo lugar, preferiu adiar a decisão por algum tempo e esperar para saber se lhe seria oferecido um lugar no Departamento de Física na Universidade de Basileia. Na Primavera de 1727, quando soube que não tinha sido escolhido para esse cargo, partiu então rumo à Rússia. Assim começou a sua estadia em São Petersburgo, onde viveria nos 14 anos seguintes e, mais tarde, durante os seus últimos 17 anos de vida.

A viagem de Euler até São Petersburgo por barco, a pé e carruagem durou sete semanas. No dia em que ele finalmente pisou o chão da Rússia, a imperatriz Catarina I faleceu, após governar por apenas dois anos. O destino da nova Academia era incerto. Aqueles que comandavam o país em nome do czar Pedro II (1715-1730), de 11 anos de idade, neto de Pedro, o *Grande*, viam a Academia como um luxo dispensável e consideraram fechar as suas portas. Felizmente, a instituição manteve-se aberta, e, na confusão que se seguiu, Euler acabou por ficar onde naturalmente pertencia — a Secção de Física-Matemática, e não na Secção de Medicina. Este primeiro ano da carreira matemática de Euler, 1727, foi também o ano em que o gigante matemático Isaac Newton morreu.

A vida na Academia era difícil no tempo de Pedro II; desta forma, após a morte do czar aos quinze anos de idade, em 1730, os seus membros esperavam que a sorte melhorasse. A Academia estaria um pouco melhor durante o reinado de dez anos de Anna Ivanovna (1693-1740), mas as condições na Rússia tornaram-se desoladoras. Anna conduziu o seu governo com uma forte influência alemã, principalmente através do seu amante Earnst-Johann Biron (1690-1772). Biron era um tirano cruel que mandou executar vários milhares de russos, e exilar outras dezenas de

milhares para a Sibéria. Os alvos de Biron incluíram criminosos comuns, os crentes da Igreja Ortodoxa Russa e os adversários políticos de Anna. Mais tarde, em Berlim, a Rainha-mãe da Prússia perguntou a Euler por que razão era ele tão taciturno. Ele respondeu: «Cara Senhora, é porque eu acabo de vir de um país onde quem fala é enforcado<sup>5</sup>.»

Em 1733, já cansado do difícil estilo de vida russo e da política interna da Academia, Daniel Bernoulli regressou à Suíça e, com os seus 26 anos, Euler tomou a posição de Daniel como matemático principal.

Nesta altura, Euler pensava que poderia ficar na Rússia por um longo período de tempo, talvez para o resto da sua vida. Com a excepção das dificuldades impostas pelo clima político na Rússia, Euler achava a vida confortável. Ele tinha adquirido um bom domínio da língua russa, e sentia-se financeiramente seguro graças ao salário mais elevado, que resultou da sua promoção. Assim, em 1733, decidiu casar-se com Katharina Gsell, filha do pintor de origem suíça Georg Gsell, que tinha sido trazido para a Rússia por Pedro, o Grande. Leonhard e Katharina formaram uma grande família, e chegaram a ter treze filhos. Como não era raro naquela época, apenas cinco filhos sobreviveram após a infância, e apenas três viveram até mais tarde do que os seus pais.

A vida de marido e pai não abrandou o ritmo de publicações de Euler. Tanto agora como noutros períodos da sua vida profissional, ele permanecia um investigador extremamente activo. É difícil exagerar a produtividade maciça de Euler. Lendas matemáticas dizem que ele conseguia escrever artigos científicos enquanto andava com um bebé no colo, e que podia compor um tratado entre as primeiras e segundas chamadas para o jantar. Ele escreveu sobre tudo e sobre mais alguma coisa. Produziu obras-primas, notas curtas, correcções, explicações, resultados parciais, ideias de demonstrações, textos introdutórios e livros técnicos.

Não havia revés capaz de fazer Euler abrandar. Nem mesmo a cegueira foi suficiente para impedir o fluxo da sua produção matemática. Em 1738, adoeceu depois de dedicar três longos dias de trabalho a um problema de Astronomia. Embora a medicina moderna ponha em causa a seguinte afirmação, acreditou-se durante muito tempo que a doença teria sido causada pela deterioração da sua visão, que culminou na perda completa da vista do seu olho direito. Euler aceitou a perda da visão como mais um passo no seu caminho. Na sua maneira de ser, geralmente modesta, comentou: «Agora vou ter menos distrações<sup>6</sup>.» Mais tarde, perdeu a visão do seu outro olho, e viveu em escuridão quase total nos seus últimos 17 anos de vida. Apesar de não poder ver, continuou a fazer importantes contribuições matemáticas até ao dia da sua morte.

Parecia que o cérebro de Euler estava afinado para fazer matemática, de uma forma que outros cérebros não estão. Ele era capaz de manipular várias noções abstractas em simultâneo, e conseguia realizar cálculos mentais surpreendentes. Numa famosa história, dois alunos de Euler precisavam de adicionar 17 termos fraccionários, e os resultados obtidos por eles não coincidiam. Euler imediatamente efectuou a soma de cabeça e resolveu o diferendo, fornecendo a resposta correcta. Tal como o matemático François Arago (1786-1853) famosamente escreveu, «Euler calculava sem esforço aparente, tal como os homens respiram, ou as águias se sustentam com o vento<sup>7</sup>.» Modestamente, Euler afirmava que a sua capacidade de manipular símbolos substituía o raciocínio, dizendo que o seu lápis o superava em inteligência.

Euler era igualmente abençoado com uma memória incrível. Ele memorizava inúmeros poemas do início ao fim; desde criança até à sua velhice era capaz de recitar do início ao fim a *Eneida* de Virgílio, sendo capaz de recordar a primeira e a última frase de qualquer uma das suas páginas. Um exemplo mais matemático da sua memória prodigiosa era a sua capacidade de indicar rapidamente as seis primeiras potências dos primeiros cem números. Para pôr isto em perspectiva, observe-se que a sexta potência de 99 é o número 941 480 149 401.

Durante a sua permanência em São Petersburgo, Euler dedicou algum do seu tempo a projectos para o Estado. Em 1735, foi nomeado director da Secção de Geografia da Academia, tendo posteriormente feito contribuições importantes para a criação de um mapa, muito necessário, da Rússia. Escreveu também um livro de dois volumes sobre construção naval que foi tão apreciado que a Academia decidiu duplicar-lhe o seu salário nesse ano.

Enquanto Euler gozava de uma produtividade notável, uma vida familiar feliz, e um salário considerável, as condições na Rússia continuavam a piorar. A atmosfera na Academia tornou-se muito tensa, até mesmo hostil. A maioria dos membros seniores da faculdade eram alemães, e ainda havia uma reduzida presença de russos. Nos primeiros 16 anos de existência da Academia, apenas um russo foi tornado membro, sendo membro auxiliar que nunca foi promovido a professor. Os russos estavam incomodados com o poder dos alemães e algumas opiniões anti-alemãs foram expressas abertamente. Felizmente, o calmo e reservado Euler foi capaz de manter-se neutro na política interna da Academia, embora tenha tornado a sua vida de trabalho bastante tensa.

Com a presença de Biron e do grupo alemão nos governos de Anna, o medo e aversão aos alemães continuaram a aumentar no seio da população russa. No final de 1740, pouco antes da sua morte, Anna nomeou

Biron como regente do seu sucessor, Ivan VI (1740-1764) que tinha dois meses de idade. Após a morte de Anna, a animosidade dos russos para com os alemães atingiu o clímax — em apenas um mês, Biron foi derrubado, e um ano mais tarde, Ivan e todo o «grupo alemão» foram retirados do poder. Isabel I (1709-1762), filha de Pedro, *o Grande*, tornou-se a nova imperatriz.

Durante este período, a vida na Rússia tornou-se perigosa, especialmente para os que não eram Russos. Os académicos estrangeiros eram vistos com desconfiança, como possíveis espões para o Ocidente. Euler reagiu a estas condições mantendo-se quieto e dedicando todo o seu tempo ao seu trabalho e à sua família. Em 1741, Euler já não conseguia tolerar a vida na Rússia por mais tempo, e então decidiu deixar São Petersburgo e ir para Berlim.

A Academia de Ciências de Berlim foi fundada em 1700 com o nome *Societas Regia Scientiarum*. Leibniz tinha grandes projectos para esta Academia. Como a de Paris e a de Londres, a Academia de Berlim centrava-se nas ciências e na matemática, mas, ao contrário delas, tinha alargado os temas de modo a incluir também a filosofia, a história, línguas e a literatura.

Apesar das grandes expectativas de Leibniz, a Academia de Berlim tardou muito tempo a afirmar-se. As dificuldades eram em parte devidas ao invariável baixo financiamento, mas também à tensão interna franco-alemã. As condições pioraram após a ascensão de Frederico Guilherme I (1688-1740) em 1713. Com este governante adverso à cultura, a Academia foi completamente negligenciada. A Academia de Berlim não mostrava nenhum sucesso, ao contrário das de Paris e de Londres. Não foi um factor significativo para o avanço do conhecimento científico; de facto, coloquialmente era-lhe atribuída a designação de «a sociedade anónima».

Quando Frederico Guilherme I morreu em 1740, o seu filho Frederico II (1712-1786), mais tarde conhecido como Frederico, *o Grande*, subiu ao poder. Apesar de Frederico Guilherme ter convictamente preparado o seu filho para a liderança, Frederico era, em vários aspectos, o oposto do seu pai. As tensões entre os dois eram profundas. Quando Frederico tinha 18 anos, foi apanhado a tentar fugir do país. O seu pai tinha-o forçado a presenciar a execução de um seu amigo e cúmplice (e, segundo afirmam alguns, amante homossexual).

Frederico estava determinado a ampliar os territórios alemães, mas também era apreciador das artes e da filosofia. Ele aspirava a ser um governante-filósofo iluminado. O renascimento da Academia desempenhou um papel importante no seu plano de revitalização do país.

Ao contrário do seu pai, Frederico desprezava a cultura alemã e apreciava tudo o que era francês. Mudou o nome oficial da Academia de Berlim para «Académie Royale des Belles Lettres et Sciences». Insistiu para que o francês passasse a ser a língua oficial da Academia, e exigiu que todos os artigos publicados no seu jornal fossem redigidos ou traduzidos para francês. Ele preferia estar na companhia de franceses espirituosos, em vez de alemães calmos e sem emoções. Voltaire (1694-1778) foi um dos seus correspondentes favoritos, e um dos seus assessores mais próximos para os assuntos relacionados com a Academia. Foi Voltaire quem primeiro sugeriu a Frederico que ele tentasse convencer Euler a deixar a Rússia e a fazer parte da Academia de Berlim.

Frederico tinha uma grande aversão às artes matemáticas. Em 1738, escreveu a Voltaire «Quanto à matemática, confesso-lhe que não gosto; ela seca a mente. Nós, alemães, já a temos muito seca; é um campo estéril que tem que ser cultivado e regado constantemente para que produza algo<sup>8</sup>.» Ele via a matemática — bem como as ciências em geral — como servidores do Estado. Julgava o sucesso dos seus cientistas pela sua utilidade em assuntos práticos. Os cientistas da Academia tinham liberdade para conduzir os seus próprios projectos, desde que atendidas as solicitações do rei.

Nesta altura, Euler era já o investigador mais famoso em São Petersburgo, e a sua reputação espalhava-se por toda a Europa. Frederico decidiu então conquistar Euler. Apesar de Euler estar preocupado com as condições perigosas na Rússia, foram necessários repetidos contactos de Frederico para convencer o matemático suíço a abandonar São Petersburgo. Em 1741 Euler aceitou o convite, e tendo mencionado a sua saúde em declínio, e a necessidade de um clima menos frio, foi-lhe permitido deixar São Petersburgo.

A princípio Euler estava satisfeito em Berlim; ele escreveu a um amigo em 1746: «O rei trata-me por 'o seu professor', eu acho que sou o homem mais feliz do mundo<sup>9</sup>.» Infelizmente, esta satisfação não durou muito. Em vários aspectos, a vida em Berlim era melhor do que a vida na Rússia, mas a experiência de Euler foi-se tornando azeda devido ao desdém peculiar e surpreendente de Frederico para com ele. Referia-se a Euler como o seu «ciclope matemático», indelicadamente aludindo ao único olho com que Euler via bem. A frieza de Frederico era em parte devida à sua repulsa pela matemática, mas não era a única razão. O comportamento discreto e silencioso de Euler não assentava bem a Frederico, que o via como um simplório. Frederico preferia a companhia do espirituoso, sofisticado e animado Voltaire. Para além disso, Euler era um calvinista devoto. Todas as noites, lia as escrituras à sua família, muitas vezes acompanhadas de

um sermão. Frederico defendia publicamente a tolerância de religião, mas em privado era um deísta, e tinha pouco respeito pelo crente Euler e pelas suas profundas convicções religiosas.

Euler nutria também ressentimentos para com Frederico. A sua maior frustração na estadia em Berlim foi a recusa de Frederico em fazê-lo presidente da Academia. Durante vários anos, muito ocupado com a Guerra dos Sete anos, Frederico não conseguia encontrar uma pessoa adequada para preencher esta posição. Neste período, Euler desempenhou o papel não-oficial de «presidente em funções», mas o tempo passava e Frederico evitava considerá-lo como substituto permanente. Euler teve um bom desempenho como presidente interino, mas como não era um filósofo capaz de conversa perspicaz e animada, nunca chegou a ser nomeado por Frederico. O insulto final deu-se em 1763, quando Frederico admitiu que não conseguia encontrar um substituto adequado e declarou-se a si próprio presidente da Academia.

Desenvolveu-se ainda maior animosidade entre Euler e Frederico quando em 1763, o rei se recusou a permitir que uma das filhas de Euler se casasse com um soldado por causa do baixo escalão do soldado. Talvez o derradeiro conflito tenha sido a sequência de discussões acaloradas entre Frederico e Euler, nos anos de 1763 a 1765. Em questão estava a venda dos calendários estatais (almanaques). Estes eram produzidos, com grande despesa, pelos membros da Academia e eram vendidos ao público para financiar as suas actividades. Foi descoberto que o comissário-chefe tinha desviado fundos provenientes da venda dos calendários. Frederico e Euler discordaram sobre a forma de lidar com a corrupção e a má gestão desta campanha de financiamento. O conflito terminou quando Frederico enviou uma contundente repreensão a Euler.

Enquanto viveu em Berlim, Euler manteve boas relações com os seus ex-colegas em São Petersburgo. Manteve-se como editor da respectiva revista científica, tendo enviado um total de 109 artigos para serem publicados na mesma. Ele foi tutor de estudantes russos que foram enviados para Berlim. Em troca da edição da revista e tutoria, tinha um salário regular pago pelos russos. Um exemplo notável do respeito dos russos por Euler ocorreu durante a Guerra dos Sete Anos. Na marcha de Brandemburgo, em 1760, o exército russo entrou em Charlottenburg, invadindo e saqueando uma fazenda que pertencia a Euler. Quando este incidente foi investigado, os russos — primeiro o general, de seguida a imperatriz Isabel — pagaram reparações a Euler num valor que ultrapassava em muito a despesa com os danos.

Durante os 24 anos em que Euler esteve em Berlim, os russos desejaram convencê-lo a voltar para São Petersburgo. Abordaram-no em 1746,

em 1750 e em 1763, fazendo ofertas generosas de modo a atraí-lo de volta. De todas as vezes ele recusou, embora nunca tenha fechado a porta completamente. Finalmente, em 1765, desanimado com a hostilidade de Frederico e vendo melhoradas as condições políticas na Rússia, decidiu voltar para São Petersburgo.

Apesar dos seus sentimentos pessoais, Frederico reconhecia a proeminência de Euler na comunidade científica internacional. Euler tinha publicado mais de duzentos trabalhos durante a sua estadia em Berlim. Em 1749 ele tinha sido eleito Membro da Royal Society de Londres. Em 1755, tinha sido nomeado o nono membro estrangeiro da Académie des Sciences de Paris, apesar de o número de membros externos estar limitado a oito. Ele também tinha servido bem o estado alemão; para além da criação dos calendários, Euler tinha trabalhado na cunhagem para a casa da moeda nacional, na colocação de canais, no projecto de aquedutos, na criação de pensões, e em melhoramentos da artilharia.

Frederico tentou impedir a partida de Euler. Este viu-se obrigado a fazer repetidos pedidos de autorização para sair. Em 1766, finalmente Frederico cedeu, e permitiu que Euler partisse; com os seus 59 anos, Euler e os seus 18 dependentes regressaram a São Petersburgo.

Mais tarde nesse ano, por recomendação do matemático francês Jean d'Alembert (1717-1783), Frederico substituiria Euler por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), uma estrela em ascensão que veio a tornar-se um notável matemático. Na sua maneira tipicamente cáustica, o rei escreveu a d'Alembert agradecendo-lhe «por ter substituído um matemático meio cego por um matemático com ambos os olhos, que irá agradar especialmente aos membros anatómicos da academia»<sup>10</sup>. Ironicamente, apesar do desinteresse de Frederico pela matemática e da sua paixão pela filosofia, a sua Academia será sempre lembrada pela sua impressionante lista de matemáticos, e não pela lista dos seus filósofos.

No final da sua estadia em Berlim, quando Euler estava em rota de colisão com Frederico, a Rússia estava sob o domínio de Pedro III (1728-1762), um sombrio líder pró-alemão, psicologicamente instável, conhecido por «temer e desprezar a Rússia e os russos»<sup>11</sup>. Em 1762, o seu governo chegou a um fim abrupto quando foi derrubado pela sua esposa, que, em seguida, assumiu o trono como Catarina II. Pouco tempo depois, talvez sob ordens de Catarina, Pedro foi assassinado por guardas que o mantinham sob custódia.

Catarina, que mais tarde ficou conhecida como Catarina, *a Grande*, foi imperatriz até 1796. Tal como o século XVIII começou sob o domínio do poderoso e influente Pedro, *o Grande*, o final do século estaria marcado

pela liderança distinta de Catarina, *a Grande*. Ela era uma líder de temperamento forte, inteligente, ambiciosa e enérgica. Como o filósofo francês Denis Diderot (1713-1783) disse, depois de visitar a corte de Catarina, «ela tem a alma de César com todas as seduções de Cleópatra»<sup>12</sup>. Sob a sua liderança, verificou-se uma melhoria acentuada da qualidade de vida na Rússia. A educação, que tinha sido amplamente ignorada desde a época de Pedro, *o Grande*, tornou-se novamente uma prioridade para o governo russo.

Durante os primeiros dias da Academia, a instituição notabilizou-se devido ao brilho de Euler. Quando ele se mudou para Berlim, perdeu-se também o foco na matemática. Esta perda, conjugada com os anos de grande instabilidade política, tornaram difícil atrair investigadores estrangeiros de talento para a instituição. A Academia estava em terreno movediço. Um dos projectos de Catarina para a reforma educativa consistia em reavivar a Academia de São Petersburgo, e elevá-la à sua anterior glória. Como o matemático André Weil (1906-1998) escreveu: «Isto era quase sinónimo de trazer Euler de volta<sup>13</sup>.»

Catarina certificou-se de que as duras exigências de Euler seriam atendidas e até superadas. Ele passou a receber o dobro do salário que lhe era oferecido em 1763, a sua esposa recebeu uma bolsa, o seu filho mais velho foi também contratado pela Academia, e foi garantido emprego futuro aos seus filhos mais novos. Além disso, Catarina providenciou para Euler uma casa totalmente mobilada, e ofereceu-lhe um dos seus próprios cozinheiros. À sua chegada a São Petersburgo, Euler foi recebido calorosamente pela imperatriz. O seu regresso à Academia iria recentrar a atenção da comunidade matemática em São Petersburgo e garantir a continuidade do sucesso da Academia.

Existem semelhanças entre Catarina, *a Grande*, e Frederico, *o Grande*; ambos eram, afinal, exemplos típicos de «déspotas esclarecidos». No entanto, as relações de Euler com os dois líderes foram muito diferentes. A sua experiência com Catarina em São Petersburgo foi muito mais positiva que a sua experiência em Berlim, com Frederico. Catarina era uma amante da ciência, e acolheu Euler como uma celebridade. Ele era o investigador que mais poder administrativo tinha entre todos os académicos.

Durante a sua vida, Euler presenciou várias mudanças na capital de São Petersburgo. A cidade tinha apenas 24 anos quando ele chegou pela primeira vez, 63 anos quando ele regressou, e 80 anos quando morreu. Até ao final do século XVIII, a população cresceria até ultrapassar os 166 000 habitantes. São Petersburgo foi o lar de alguns dos mais ricos nobres do império e de alguns dos camponeses mais pobres. Quase um quarto da população era militar<sup>14</sup>. São Petersburgo continuaria a ser ado-

rada por alguns russos e odiada por outros (isto é verdade ainda hoje em dia). De acordo com o plano de Pedro, *o Grande*, a cidade estava cheia de bela arquitectura, ao estilo europeu. Era a mais europeia das cidades russas. Veio a ser conhecida como a «Veneza do Norte» por causa das suas muitas ilhas e canais.

A segunda estadia de Euler em São Petersburgo foi uma época de sucesso profissional, mas foi salpicada por episódios de perda pessoal. Em 1771 a sua casa ardeu completamente. A acção rápida de um criado dedicado, que o levou para fora do prédio em chamas, salvou a vida de Euler. A biblioteca inteira de Euler foi destruída pelo fogo, mas felizmente para a ciência, os seus manuscritos foram salvos. Em resposta à tragédia, Catarina ofereceu-lhe um novo alojamento e substituiu as suas perdas. Em 1776, a sua amada esposa Katharina morreu. Um ano depois, ele casou-se com a meia-irmã de Katharina, Salome Abigail Gsell.

Quase imediatamente após ter deixado Berlim, as cataratas roubaram-lhe a visão do seu olho esquerdo. Uma operação em 1771 restabeleceu-lhe a visão deste olho por um breve período, mas uma infecção causou-lhe uma recaída, tendo ficado cego de novo. Durante este tempo, Euler continuou a publicar artigos matemáticos, principalmente ditando o seu trabalho ao seu filho. Surpreendentemente, a produção matemática de Euler continuou inabalável. Durante este tempo de cegueira total, ele demonstrou alguns dos seus teoremas mais importantes, e escreveu alguns dos seus livros mais influentes.

Há uma ideia generalizada de que os anos mais produtivos de um matemático se encontram entre os anos da sua juventude; quando atinge os quarenta — ou os trinta — anos, toda a criatividade e genialidade desaparece. No seu bem conhecido livro de memórias, «A apologia de um matemático», o matemático britânico G. H. Hardy (1877-1947) escreveu, «Nenhum matemático deveria jamais permitir esquecer-se de que a matemática, mais do que qualquer outra arte ou ciência, é um jogo de jovens<sup>15</sup>.» Embora isto descreva o declínio da qualidade das realizações profissionais de muitos matemáticos (e dos profissionais de outras áreas criativas), não representa a trajectória da carreira de Euler. O seu regresso a São Petersburgo foi celebrado com pompa, e ele não decepcionou. Como um historiador escreveu, Euler «demonstrou rapidamente que não tinha voltado à Rússia para se reformar, mas estava, pelo contrário, no pico da sua produtividade»<sup>16</sup>.

Assim como Beethoven superou o obstáculo aparentemente intransponível da surdez, continuando a compor sinfonias, também Euler era capaz de criar matemática profunda, bela e muitas vezes «visual» no seu mundo escurecido. É um dos grandes triunfos do espírito humano. Além de sua

investigação em matemática pura, Euler continuou a fazer contribuições importantes para a matemática aplicada. Um dos mais importantes problemas daquele tempo era desenvolver um método preciso e fiável para navegar no mar. A navegação celeste era apenas tão precisa quanto as tabelas náuticas que davam a localização dos corpos celestes num determinado momento. A Lua é o objecto mais visível no céu nocturno, mas como o movimento da Lua é determinado pela interacção gravitacional de três corpos — ela própria, a Terra e o Sol — é uma tarefa matemática extremamente difícil determinar, com antecedência, a sua localização num momento específico.

Ainda hoje, o difícil problema dos três corpos não foi completamente entendido. A teoria da gravitação de Newton descreve o modelo do sistema solar, mas esta teoria não fornece um algoritmo computacional para prever este movimento. Em 1772, Euler desenvolveu um modelo matemático do movimento da Lua que foi calculado e que produziu uma aproximação muito precisa para o movimento da Lua. Várias tabelas lunares extremamente fiáveis foram obtidas a partir do modelo de Euler. Para exprimir os seus agradecimentos pela sua contribuição, tanto o «Conselho de Longitude» em França como o parlamento britânico recompensaram Euler generosamente.

A produção matemática de Euler continuou até o dia de sua morte, com a idade de 76 anos. O seu último dia foi descrito pelo marquês de Condorcet (1743-1794), no seu elogio fúnebre a Euler:

Ele tinha mantido toda a facilidade do seu pensamento, e, aparentemente, todo o seu vigor mental: a decadência não parecia ameaçar as ciências com a perda repentina do seu grande ornamento. No dia 7 de Setembro de 1783, após divertir-se a calcular numa ardósia as leis do movimento ascendente de balões de ar quente, a recente descoberta de que se murmurava em toda a Europa, ele jantou com o Sr. Lexell e sua família, falou do planeta de Herschel (o recentemente descoberto planeta Urano), e dos cálculos que determinam a sua órbita. Pouco depois, chamou o seu neto, e jogou com ele enquanto bebiam chá, quando, de repente, deixou cair a chávena que tinha na mão, e Euler deixou de calcular e de respirar<sup>17</sup>.

Leonhard Euler foi enterrado em São Petersburgo, Rússia.

É difícil enumerar as maiores contribuições de Euler para a área da matemática. Poderíamos citar um dos seus muitos teoremas. Podemos também apontar para os livros de sucesso que ele escreveu, como *Intro-*

*ductio in analysin infinitorum*, que o historiador Carl Boyer afirma ser o livro mais influente na era moderna da matemática. Podia ser o seu trabalho em matemática aplicada, como o seu livro *Mechanica* onde, pela primeira vez, as técnicas do cálculo são aplicadas sistematicamente à física. Podiam ser os seus escritos para não-especialistas, como as suas extremamente populares «cartas a uma princesa alemã», que consistem numa colecção de lições para a sobrinha de Frederico, o Grande, a princesa de Anhalt-Dessau. Talvez fosse a sua capacidade para organizar e enquadrar resultados isolados e ideias aparentemente sem relação, num corpo matemático coeso e organizado. Talvez fosse a elegante e útil notação que ele concebeu: Euler introduziu  $e$  como a base do logaritmo natural, ele popularizou o uso do símbolo  $\pi$ , no final da sua vida usou  $i$  para denotar a raiz de -1 (notação que mais tarde se tornou padrão, através de Gauss); usou  $a$ ,  $b$  e  $c$  para denotar os lados de um triângulo geral e usou  $A$ ,  $B$  e  $C$  para os ângulos opostos; usou o símbolo  $\Sigma$  para os somatórios, denotou as diferenças finitas por  $\Delta x$ ; e iniciou a utilização da notação  $f(x)$  para uma função  $f$  de variável  $x$ .

É difícil destacar um dos muitos, muitos teoremas e resultados de Euler como o mais importante de todos. Alguns afirmam que é a relação que coloca as cinco constantes  $0$ ,  $1$ ,  $\pi$ ,  $e$  e  $i$  numa fórmula concisa,

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Talvez seja uma das suas maravilhosas fórmulas que usam séries infinitas, e que mostraram a importância do cálculo e da análise. Pode ser um dos seus teoremas sobre teoria dos números, em particular um dos que levaram à solução de famosas conjecturas de Pierre de Fermat (1601-1665).

Nós iremos, naturalmente, focar-nos na singela fórmula que relaciona o número de vértices, arestas e faces de um poliedro através da equação:

$$V - A + F = 2.$$

Um recente inquérito efectuado a matemáticos mostrou que, na sua opinião, a fórmula de Euler para poliedros é o segundo teorema mais belo de toda a matemática. O teorema mais votado como o mais belo de sempre foi a fórmula de Euler:  $e^{\pi i} + 1 = 0$ .<sup>18</sup>

Para entender a fórmula de Euler para poliedros vamos agora analisar os poliedros um pouco mais de perto. Afinal, o que é um poliedro?

## Capítulo 2

### O que é um Poliedro?

*Madame, é uma palavra antiga; cada qual toma-a como nova e usa-a até ficar gasta. É uma palavra que se enche de significado tal como um balão, e que se esvazia de significado de forma igualmente rápida. Pode ser furada como um balão, remendada, e novamente rebentada.*

— Ernest Hemingway, *Morte pela Tarde*<sup>1</sup>

De acordo com o dicionário *Oxford English Dictionary*, a primeira vez que o termo «poliedro» apareceu em língua inglesa foi em 1570, na tradução de *Elementos* de Euclides (c. 300 a. C.), por Sir Henry Billingsley. A palavra «poliedro» tem origem nas raízes gregas *poly*, que significa muitos, e *hedra*, que significa assentar. Um poliedro tem muitos lados nos quais pode assentar. Embora o termo original *hedra* signifique assento, tem sido o termo padrão para designar os lados ou faces de um poliedro, pelo menos desde o tempo de Arquimedes<sup>2</sup>. Assim, uma tradução razoável de poliedro é «muitas faces» ou «muitos lados». No tempo de Euler, a transliteração de *hedra* para o latim já estava bem sedimentada.

Os poliedros são objectos geométricos tridimensionais familiares, formados a partir de faces poligonais. Alguns exemplos de poliedros, mostrados na figura 2.1, incluem o cubo comum, a pirâmide simples (designada também como tetraedro), o elegante icosaedro, e o «icosaedro truncado», com a forma de uma bola de futebol.

Devido à sua beleza e simetria, os poliedros ocupam um lugar proeminente na arte, na arquitectura, nas jóias e nos jogos. Quem tenha passado

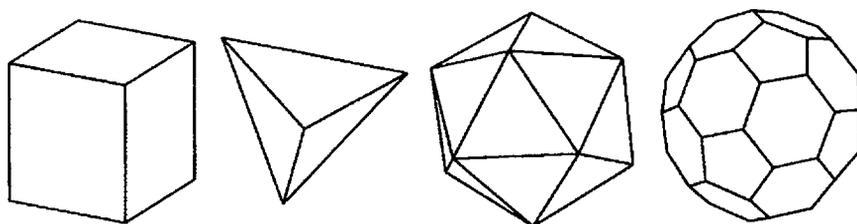


Figura 2.1. Exemplos de poliedros

por lojas de artigos *new age* sabe que algumas pessoas acreditam que os poliedros (os cristais, em particular) têm poderes místicos. Os poliedros também aparecem na natureza, na forma de pedras preciosas e de organismos unicelulares.

As propriedades dos poliedros fascinam os matemáticos desde há vários milénios. Para demonstrar teoremas sobre poliedros, é fundamental que tenhamos uma definição precisa do termo. Foi já depois de um grande desenvolvimento da teoria dos poliedros que alguém tentou fornecer uma definição. Durante muitos anos, os matemáticos trabalhavam assumindo que «sabemos o que é um poliedro quando encontramos um». Eles adoptaram a filosofia de Humpty-Dumpty, que certa vez disse a Alice: «Quando eu uso uma palavra, ela significa exactamente o que eu decidir que ela significa — nem mais nem menos.» Naturalmente, esta não é uma boa forma de proceder. Tal como disse Henri Poincaré (1854-1912):

Os objectos com que os matemáticos se ocupam estiveram durante muito tempo mal definidos; pensávamos que os conhecíamos bem porque os representávamos com os nossos sentidos ou com a imaginação, mas tínhamos deles apenas uma imagem aproximada, e não um conceito preciso sobre o qual o raciocínio se poderia basear<sup>3</sup>.

Trabalhar sem uma definição adequada pode levar, tal como neste caso levou, a imprecisões e inconsistências teóricas. Como veremos, a demonstração de Euler da sua fórmula para poliedros não é totalmente rigorosa, precisamente porque ele não chegou a definir com exactidão o que era um poliedro.

Encontrar uma definição adequada universalmente aceite é surpreendentemente difícil. Já houve muitas propostas ao longo dos séculos, algumas das quais não são equivalentes. Devido a estas inconsistências, não há uma definição única de poliedro que se aplique a todo o conjunto

dos artigos escritos sobre estes objectos matemáticos. Intuitivamente, podemos definir um poliedro como uma figura geométrica construída por faces poligonais em que cada aresta é compartilhada por exactamente duas faces, e onde a partir de cada vértice emanam pelo menos três arestas. Com efeito, esta definição parece razoável, mas através de um exame minucioso, descobrimos que alguns sólidos com estas propriedades violam a nossa noção intuitiva do que deve ser um poliedro.

Enquanto ninguém discordaria que os objectos da figura 2.1 são poliedros, podemos interrogar-nos se aqueles da figura 2.2 (três dos quais satisfazem a definição intuitiva dada) deveriam ser classificados como poliedros.

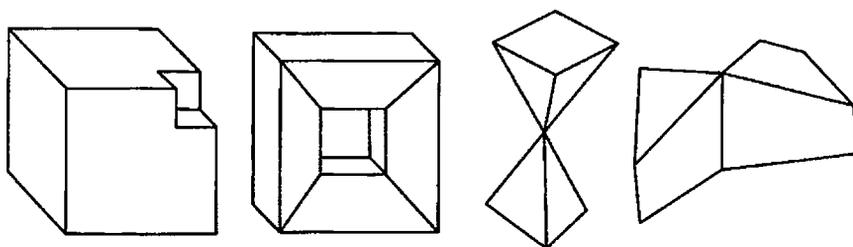


Figura 2.2. Objectos que não são poliedros convexos

Esta não é uma pergunta capciosa. De facto, não existe um consenso histórico sobre se os objectos na figura 2.2 são ou não poliedros. O objecto na extrema esquerda, um cubo com um canto removido, é um poliedro de acordo com a maioria das definições modernas; no entanto, as noções mais antigas de poliedro — aquelas assumidas implicitamente pelos gregos e por Euler, por exemplo — não permitem que um poliedro tenha tais recortes. Da mesma forma, a segunda forma satisfaz os critérios de muitos matemáticos para ser um poliedro. Mas tem um túnel que o atravessa, tem a forma de uma rosca feita de faces planas. Devemos considerar que isto é um poliedro? O terceiro objecto consiste em «dois poliedros» juntos por um vértice, e o quarto é formado pela união de «dois poliedros» ao longo de uma aresta. Estes últimos não são poliedros, de acordo com a maior parte das definições utilizadas (embora o terceiro ainda satisfaça os critérios enunciados acima). Ambas as figuras têm dois interiores; se os tivéssemos que encher com água, teríamos que preencher dois compartimentos distintos. Poderíamos ainda apresentar outros exemplos, ainda mais patológicos, que violam a nossa intuição sobre o que deve ser um poliedro.

Por agora, tomaremos o caminho mais fácil e vamos contornar esta tarefa difícil de fornecer uma definição rigorosa. Como pretendemos apresentar o desenvolvimento histórico da fórmula de Euler, podemos restringir a nossa atenção a uma classe menor, e mais fácil de definir, de poliedros. Vamos considerar uma visão muito antiquada dos poliedros, aquela com a qual tanto Euler como os gregos clássicos concordariam. Embora nunca tenha sido explicitamente escrito, o pressuposto histórico era que um poliedro deve ser convexo. Um poliedro convexo é um objecto que satisfaz a nossa definição intuitiva (enunciada acima) e, além disso, tem a propriedade de que quaisquer dois pontos desse objecto podem ser unidos por um segmento de recta que fica completamente contido no interior do poliedro. Assim, um poliedro convexo não pode ter recortes. Uma rápida inspecção mostra que todos os objectos da figura 2.1 são convexos, ao passo que nenhum dos objectos da figura 2.2 é convexo.

Podemos observar que é isso que os gregos assumiram. Eles consideravam as faces de um poliedro como lados em que o poliedro pode «descansar». Todos os poliedros da figura 2.1 podem assentar em qualquer uma das suas faces, mas cada poliedro da figura 2.2 tem pelo menos uma face em que não pode ficar assente. Mais tarde, quando tivermos mais ferramentas à nossa disposição, seremos capazes de aplicar a fórmula de Euler a uma classe mais vasta de poliedros, mas por simplicidade, e por razões históricas, vamos começar por considerar apenas poliedros convexos.

Antes de prosseguir, abordemos uma outra discrepância histórica: deve um poliedro ser sólido ou oco? Algumas definições assumem que os poliedros são objectos tridimensionais sólidos, enquanto outras requerem que sejam ocós, e compostos apenas por uma «pele» bidimensional. Quem assume a primeira definição irá construir um poliedro de barro ou plasticina, enquanto quem adoptar esta última fará um poliedro de papel. No início da história dos poliedros, a suposição era de que eles eram sólidos. Na verdade, durante muitos séculos, os poliedros foram chamados «sólidos». Mais tarde, enquanto a teoria dos poliedros fazia a transição para a topologia, a suposição de considerar poliedros ocós foi ganhando força. Esta suposição permitiu que teoremas sobre poliedros pudessem ser generalizados a resultados sobre esferas e *toros*, que são, por definição, ocós. Para a generalidade do que vamos expor, qualquer um dos dois modelos servirá. Não faremos explicitamente qualquer hipótese, a menos que seja crucial para a discussão.

## Capítulo 3

# Os Cinco Sólidos Perfeitos

*Há sempre causas anteriores. Um princípio é um artifício, e o que determina um relativamente a outro é qual o sentido que dá ao que se segue.*

— Ian McEwan, *O Fardo do Amor*<sup>1</sup>

Podemos encontrar as origens da geometria moderna, e de facto, de muita da matemática moderna, no trabalho dos gregos. Durante o período de Tales (c. 624-547 a. C.) até à morte de Apolónio (c. 262-190 a. C.), os gregos produziram um volume surpreendente de trabalhos matemáticos, e os nomes de muitos dos estudiosos desta época são bem conhecidos dos alunos, em todo o mundo: Pitágoras, Platão, Euclides, Arquimedes, Zenão, e assim por diante.

Embora a matemática do Egipto, Mesopotâmia, China e Índia possa ter influenciado os gregos, eles rapidamente tomaram esta disciplina como sua. Como Platão escreveu em *Epinomis* «De todas as vezes que os gregos usaram qualquer coisa de não-gregos, levaram-na finalmente a uma maior perfeição<sup>2</sup>.» Ao contrário das civilizações anteriores, para as quais as aplicações eram o objectivo principal, os gregos queriam entender as ideias da matemática e obter demonstrações rigorosas das afirmações que consideravam válidas. Já não se contentavam com as fórmulas utilizadas para obter aproximações. A exactidão, a lógica e a verdade eram os objectivos da sua investigação.

Os gregos eram fascinados com a geometria, e os resultados que obtiveram neste campo são demasiado numerosos para os podermos listar.

Certamente não é exagero afirmar que a maior parte da geometria que é hoje em dia ensinada nas escolas foi descoberta pelos gregos. Vamos concentrar-nos num teorema grego sobre poliedros regulares (definiremos um «poliedro regular» em breve). É um dos mais célebres e belos teoremas de toda a matemática (o quarto mais belo, de acordo com o inquérito mencionado no capítulo 1).

Existem exactamente cinco poliedros regulares.

Estes cinco poliedros estão apresentados na figura 3.1. Três destes corpos são compostos por faces triangulares — o tetraedro (a pirâmide de 4 lados), o octaedro (uma dupla pirâmide com 8 faces) e o icosaedro, de 20 lados. O cubo é composto por seis faces quadradas e o dodecaedro

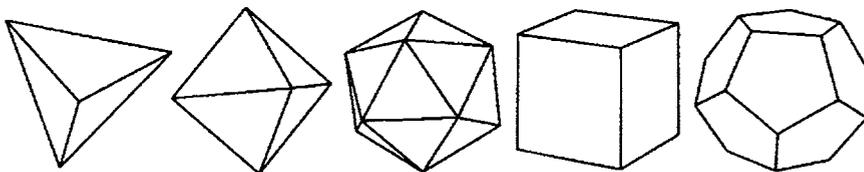


Figura 3.1. Os cinco poliedros regulares: o tetraedro, o octaedro, o icosaedro, o cubo e o dodecaedro

é o corpo composto por 12 pentágonos regulares (o Apêndice A inclui modelos para construir os seus próprios poliedros regulares em papel).

A notável história destes poliedros curiosos começa com os gregos e continua através do Renascimento até aos dias de hoje. Uma demonstração rigorosa de que existem apenas cinco poliedros regulares encontra-se no final do livro *Elementos* de Euclides. (No capítulo 8, vamos apresentar uma outra demonstração usando a fórmula de Euler para poliedros.) Platão acreditava que os poliedros regulares eram os constituintes elementares de toda a matéria. Devido ao facto de os ter incorporado na sua teoria atómica, eles são hoje conhecidos por «sólidos platónicos». O astrónomo Johannes Kepler (1571-1630) usou os sólidos regulares para conceber o seu modelo inicial para o sistema solar.

Frequentemente encontramos a beleza na regularidade, na simetria e na perfeição. Todos estamos familiarizados com os polígonos regulares em duas dimensões. Um polígono é regular se todos os seus lados têm o mesmo comprimento e todos os ângulos interiores têm a mesma medida.



Figura 3.2. Polígonos regulares com 3, 4, 5, 6, 7 e 8 lados

O triângulo equilátero é o único polígono regular de três lados, o quadrado é o único polígono regular de quatro lados, e assim por diante (veja a figura 3.2). Há um número infinito de polígonos regulares, pois temos um polígono regular de  $n$  lados para cada inteiro  $n$  superior a 2.

O análogo tridimensional de um polígono é um poliedro. O estudo da regularidade em poliedros é muito mais interessante do que para polígonos. Embora haja um número infinito de polígonos regulares, as cinco formas apresentadas na figura 3.1 são os únicos poliedros regulares.

Quais, exactamente, são os critérios para que um poliedro seja regular? Tal como com a nossa definição de poliedro, temos de ter cuidado para não incluir ou excluir qualquer coisa involuntariamente. Um poliedro regular, também chamado sólido regular ou platónico, é um poliedro que satisfaz as seguintes condições.

1. O poliedro é convexo.
2. Cada face é um polígono regular.
3. Todas as faces são congruentes (idênticas).
4. Cada vértice está rodeado pelo mesmo número de faces.

Todos estes quatro critérios são necessários para obter a classe desejada de poliedros. Na figura 3.3 indicamos exemplos de poliedros que

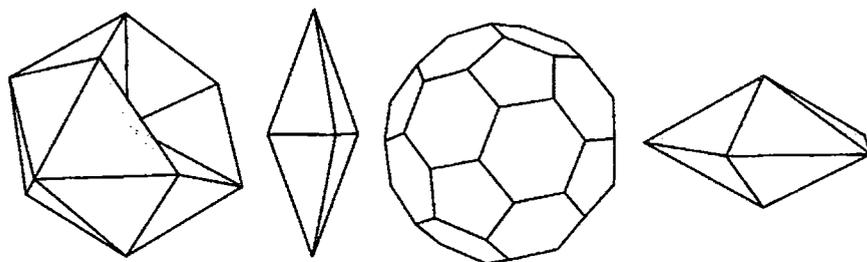


Figura 3.3. Poliedros que não são regulares. Cada um destes falha precisamente uma única das quatro condições para a regularidade

não cumprem precisamente apenas um dos quatro critérios. O primeiro poliedro satisfaz todos os critérios excepto o da convexidade. O segundo poliedro, um octaedro distorcido, seria regular se as faces fossem triângulos equiláteros. A bola de futebol não é regular, porque nas faces temos pentágonos regulares mas também hexágonos regulares. Finalmente, no último poliedro todas as faces são triângulos equiláteros, mas os «vértices equatoriais» estão rodeados por quatro faces, ao passo que nos vértices «pólo norte» e «pólo sul» se juntam cinco faces.

Podemos encontrar poliedros regulares na natureza. Os cristais são os exemplos mais óbvios de poliedros que ocorrem na natureza, e alguns cristais são regulares. Por exemplo, o cloreto de sódio pode assumir a forma de um cubo, o sulfato de sódio pode assumir a forma de um tetraedro, e o aluminato de crómio pode assumir a forma de um octaedro. A pirite, vulgarmente conhecida como o ouro dos tolos, pode formar um cristal com doze faces pentagonais; no entanto, o cristal pode não formar um dodecaedro porque a estrutura cristalina cria tipicamente faces pentagonais irregulares.

Na década de 1880, Ernst Haeckel do *HMS Challenger* descobriu e desenhou imagens de organismos unicelulares chamados radiolaria. Os esqueletos de alguns destes organismos têm uma semelhança notável com poliedros regulares (figura 3.4).

Existem alguns exemplos de sólidos regulares feitos pelo homem primitivo. O cubo e o tetraedro, sendo relativamente simples e comuns,

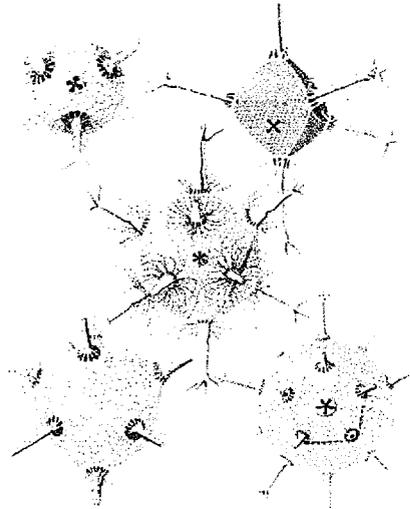


Figura 3.4. Radiolaria assemelhando-se a poliedros regulares

têm aparecido em muitas escavações efectuadas ao longo da história. Um dodecaedro construído por volta do ano 500 a. C. foi desenterrado numa escavação no Monte Loffa perto de Pádua, Itália. Um antigo dado em forma de icosaedro foi encontrado no Egipto, embora a sua origem seja desconhecida.

E o octaedro? Este foi provavelmente o último dos cinco sólidos regulares a ser feito pelo homem. Não é tão simples como o cubo ou o tetraedro, pelo que nenhum objecto quotidiano tomaria esta forma. Não é tão exótico como um icosaedro ou um dodecaedro, sendo formado apenas por duas pirâmides de base quadrada coladas ao longo das suas bases; assim, se tivesse sido descoberto, teria sido provavelmente ignorado. O historiador de matemática William Waterhouse argumentou que, até que alguém descobrisse e enunciasse a noção de regularidade, o octaedro não teria sido nenhum objecto especial. Ele escreveu: «O octaedro tornou-se um objecto de estudo matemático especializado somente quando alguém descobriu qual o papel que teria<sup>3</sup>.»

Essa discussão do octaedro é esclarecedora. Vemos que são três as etapas importantes no desenvolvimento da teoria dos poliedros regulares. A primeira é a construção dos próprios objectos. Inicialmente, esta construção pode consistir apenas em fazê-los a partir de barro; contudo, a partir de certo ponto, o assunto torna-se mais matemático — eles devem ser construídos geometricamente. A segunda fase é a descoberta da noção abstracta de regularidade. Esta ideia é simples somente em retrospectiva. Imagine-se a mostrar estes cinco sólidos regulares a um transeunte e perguntar: «Pode dizer-me o que estes cinco objectos têm em comum?» É bem provável que ele ou ela não consigam formular a noção abstracta de regularidade. Como disse Waterhouse: «A descoberta desta ou daquela forma era secundária, a descoberta crucial foi o próprio conceito de uma forma regular sólida<sup>4</sup>.» Finalmente, a terceira fase é provar que existem apenas cinco sólidos regulares. Dito de outra forma, deve ser demonstrado, usando matemática rigorosa, que existem cinco, e não mais de cinco, destes belos objectos. O desenvolvimento desta teoria, desde a descoberta, à abstracção, e finalmente à demonstração, é devido aos gregos.

## Capítulo 4

# A Fraternidade Pitagórica e a Teoria Atômica de Platão

*[Pitágoras] foi também o primeiro a abrir o duradouro abismo de incompreensão entre o espírito científico, que espera que o universo seja tendencialmente compreensível, e o espírito místico, que espera — talvez de forma inconsciente — que não o seja.*

— George Simmons<sup>1</sup>

Os primeiros tempos da história da matemática grega estão cheios de apócrifos, especulações, evidências contraditórias, relatos em segunda mão, e existe apenas um número limitado de verdades comprováveis para criar um quebra-cabeças fascinante. Há pouquíssimos registos da matemática grega que sobreviveram, e esta escassez de informação torna difícil reconstruir a verdade histórica. As fontes primárias sobreviveram por vários séculos depois da sua criação, mas praticamente todas foram destruídas ou perdidas durante a Idade das Trevas ou Idade Média. Muito do que sabemos não foi retirado a partir de fontes primárias, mas a partir de fontes secundárias escritas centenas de anos mais tarde.

Pouco sabemos com segurança sobre Pitágoras (c. 560-480 a. C.) e o seu grupo de seguidores, os pitagóricos. Como o filósofo W. Burkert escreveu: «Somos tentados a dizer que não há um único detalhe na vida de Pitágoras que se encontre livre de contradições<sup>2</sup>.» Acreditamos que os pitagóricos foram os primeiros a estudar os sólidos regulares. Diz-se que

Pitágoras conhecia o cubo e o tetraedro, mas há um prolongado desacordo acadêmico sobre se ele também conheceria o icosaedro e o octaedro. Um dos seus seguidores é creditado com a descoberta do dodecaedro e, como veremos, esta descoberta pode ter resultado na sua morte.

Pitágoras nasceu na ilha grega de Samos no Mar Egeu. De acordo com alguns relatos, ele viajou pelo Egito e pela Babilônia nos seus primeiros anos, tendo aprendendo a matemática e religião desses povos. Mais tarde, estabeleceu-se na cidade grega de Cróton, que actualmente fica no sul de Itália.

Hoje em dia, Pitágoras é associado ao famoso teorema geométrico que tem o seu nome\*, mas na sua época era conhecido como um místico e um profeta. Em Cróton, tornou-se o líder espiritual de uma sociedade secreta com base numa religião filosófica. Esta foi uma época de grande significado religioso em muitas culturas (Pitágoras foi contemporâneo de Confúcio, Buda e Lao Tzu). A fraternidade de Pitágoras teve muito sucesso e sobreviveu em Itália durante quase dois séculos após a sua morte, e as suas doutrinas continuaram a ser ensinadas até ao século VI depois de Cristo.

Conforme o tempo passou, a lenda de Pitágoras como uma figura divina foi reforçada por histórias de milagres que ele teria realizado.

Em muitos aspectos, a fraternidade de Pitágoras não era diferente da de outros cultos naquela época. Os seus membros eram escolhidos com grande cuidado — participavam em cerimónias de iniciação, sofriam rituais de purificação e faziam votos de sigilo. Viviam de acordo com um conjunto de regras rigorosas, por vezes bizarras. Segundo a lenda, eram vegetarianos, mas estavam proibidos de comer feijão, não podiam atirar fogueiras com uma faca, não podiam usar anéis, e tinham que tocar na terra quando trovejava.

Os pitagóricos acreditavam na transmigração das almas — que as almas dos mortos voltavam a viver em forma de animal, e entravam num ciclo infinito de reencarnações sendo promovidas ou despromovidas entre as categorias de animais e seres humanos. A única maneira de escapar a este ciclo era através da purificação do corpo e da mente. Como em muitos outros cultos, a purificação do corpo era conseguida através de uma vida modesta, abstinência e moderação.

O que distinguia os pitagóricos era a sua forma de purificação da mente. Eles não alcançavam a pureza através da meditação, mas atra-

---

\* O teorema de Pitágoras afirma que, se os dois catetos e a hipotenusa de um triângulo rectângulo têm comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$ , respectivamente, então  $a^2 + b^2 = c^2$ . Na realidade, esta relação já era conhecida pelos Babilónios mais de mil anos antes.

vés do estudo da matemática e das ciências. Afirmava-se que a união derradeira com o divino era conseguida pela compreensão da ordem do universo, e a chave para o entendimento do universo era o conhecimento da matemática. Pitágoras disse: «Bem-aventurança é o conhecimento da perfeição dos números da alma<sup>3</sup>.» Esta crença exprime-se de forma muito sucinta pelo próprio lema dos pitagóricos: «Tudo são números.»

Os pitagóricos acreditavam que Deus tinha organizado o universo com números, e que qualquer número podia ser expresso como uma razão de dois números naturais (que qualquer número era uma fracção, ou quociente, de dois naturais). Usando a terminologia moderna, os pitagóricos acreditavam que todos os números eram números *racionais*<sup>4</sup>.

A música e a astronomia também eram importantes para os pitagóricos. Eles descobriram que os intervalos musicais podiam ser expressos como razões e concluíram que as mais belas harmonias originavam das mais belas combinações de números. Eles defendiam que usando proporções musicais se poderiam explicar alguns fenómenos astronómicos, tais como as distâncias entre os planetas, a ordem dos planetas, e os seus períodos de revolução. Acreditavam que o movimento dos sete planetas conhecidos (onde incluíam a Terra, a Lua e o Sol), tal como as vibrações das sete cordas da lira, criavam uma harmonia. Alguns alegaram que esta «música das esferas» era audível a Pitágoras.

Os pitagóricos seguiam um estilo de vida comunitário; tomavam refeições, faziam exercícios, e estudavam juntos. Este modo de vida, a par com a sua tradição de partilhar o conhecimento por via oral, o sigilo a que estavam obrigados, e sua adoração a Pitágoras, torna difícil saber quais os pitagóricos que fizeram contribuições para a matemática, e quais foram elas. Na realidade, como a matemática fazia parte da sua religião, e Pitágoras era o seu líder espiritual, qualquer resultado matemático obtido pelos seus seguidores era «a palavra do mestre», e era atribuído a ele.

Segundo a lenda, um dos pitagóricos, Hípaso de Metaponto (c. 500 a. C.), não seguiu esta tradição de deferência, e foi severamente punido. Um relato afirma que ele terá sido afogado no mar, enquanto outro conta que ele foi expulso da fraternidade e foi-lhe erguida uma lápide, como símbolo de despedida. Mais uma vez, os relatos diferem acerca do que teria feito Hípaso para merecer tal tratamento cruel, existindo duas histórias concorrentes (ambas as quais podem ser verdadeiras).

---

<sup>3</sup> Os números naturais são 1, 2, 3, ... . Um número real diz-se racional se é da forma  $\pm p/q$ , onde  $p$  e  $q$  são números naturais, ou é zero; um número real chama-se irracional se não é racional. (N. do T.)

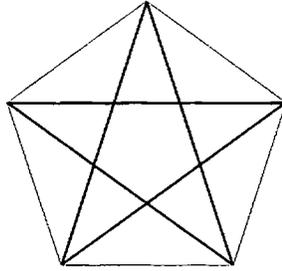


Figura 4.1. Um pentagrama, o símbolo da escola pitagórica, inscrito num pentágono regular

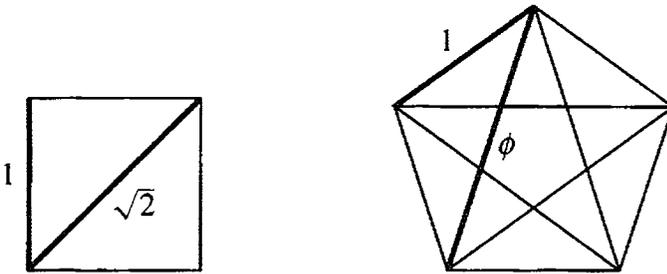


Figura 4.2. Diagonais de comprimento irracional  $\sqrt{2}$  e  $\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Um conto sugere que Hípaso descobriu o dodecaedro e mostrou como inscrevê-lo numa esfera, faltando à tradição de dar crédito a Pitágoras. Esta descoberta poderia ter sido especialmente significativa para os pitagóricos devido às faces pentagonais do dodecaedro. Eles tinham adoptado o pentagrama ou pentágono-de-estrelas (ver figura 4.1), que era o símbolo grego para a saúde, como o símbolo especial usado para identificar os outros elementos da fraternidade. Um pentagrama desenha-se ligando os vértices de um pentágono regular dois a dois, e isso forma um novo pentágono regular dentro do primeiro.

A segunda lenda afirma que Hípaso mostrou que nem todos os números são racionais, e não conseguiu manter a descoberta em segredo. Os historiadores discordam sobre qual foi o número irracional descoberto por Hípaso. Poderia ser  $\sqrt{2}$ , que é o comprimento da diagonal de um quadrado com lados de comprimento igual a 1, ou poderia ser  $(\sqrt{5} + 1)/2$ , número que é frequentemente chamado *a proporção áurea*, *número de ouro* ou simplesmente  $\phi$ . É uma teoria tentadora sustentar que foi Hípaso quem descobriu a irracionalidade da proporção áurea, pois  $\phi$  é precisamente o

comprimento do lado de um pentagrama que está inscrito num pentágono com lados de comprimento 1 (ver figura 4.2). A ideia de que todos os números seriam racionais era um dos pilares de sustentação do sistema de crenças dos pitagóricos. A existência de um número irracional tinha sido uma descoberta prejudicial e devastadora. É nesta perspectiva que podemos imaginar a indignação dos pitagóricos relativamente a Hípaso. Ironicamente, a prova da existência de um número irracional é uma das contribuições mais significativas e duradouras dos pitagóricos para a matemática.

Independentemente de ter sido Hípaso ou um dos seus companheiros pitagóricos quem descobriu o dodecaedro, parece certo que os pitagóricos conheciam pelo menos três dos sólidos regulares: o tetraedro, o cubo, e o dodecaedro. Não está claro se eles conheciam o octaedro e o icosaedro, ou se a descoberta destes poliedros deve ser atribuída a Teeteto de Atenas (c. 417-369 a. C.). Mesmo as evidências mais antigas são contraditórias. Proclus (410-485), o erudito do século v, afirma que os pitagóricos conheciam o octaedro e o icosaedro, ao passo que um escólio não datado dos *Elementos* de Euclides afirma que «três das cinco figuras referidas [são] devidas aos pitagóricos, ou seja, o cubo, a pirâmide e o dodecaedro, enquanto o octaedro e icosaedro são devidos a Teeteto»<sup>4</sup>. Hoje em dia, muitos estudiosos subscrevem a teoria de William Waterhouse sobre a descoberta tardia do octaedro, o que parece excluir os pitagóricos como os seus descobridores.

Teeteto não é tão famoso quanto outros matemáticos gregos, mas ele é indiscutivelmente um herói desta história. Sabe-se, quase com absoluta certeza, que foi responsável por demonstrar que há cinco e somente cinco poliedros regulares. Muito do que sabemos sobre Teeteto é através dos escritos do seu amigo, o influente filósofo e professor Platão (427-347 a. C.). Platão escreveu dois diálogos em que figura Teeteto: *O Sofista* e o homónimo *Teeteto*.

Teeteto nasceu durante a Guerra do Peloponeso. Morreu como um herói de guerra na sequência da batalha, em 369 a. C., entre Atenas e Corinto. Estudou matemática com Teodoro (465-398 a. C.), e segundo todos os relatos era um matemático especialmente dotado. Platão tinha por Teeteto a maior consideração, apenas superada pelo seu mestre, Sócrates (470-399 a. C.). No *Teeteto* de Platão, Teodoro diz acerca do jovem Teeteto: «Este rapaz avança em direcção à aprendizagem e investigação de modo suave, seguro e com sucesso, numa brandura perfeita, como um fluxo de óleo que flui sem fazer ruído, de forma que ficamos maravilhados como ele consegue tudo isto com a sua idade.»<sup>5</sup>

Nesta época, a descoberta dos números irracionais era um acontecimento relativamente recente, e não se sabia muito acerca das suas propriedades. Teeteto fez contribuições importantes para a classificação e organização dos números irracionais. Mais tarde, esta classificação constituiria a maior parte do livro X dos *Elementos* de Euclides.

Apesar da discordância sobre quem teria sido o primeiro a descobrir cada um dos cinco sólidos regulares, não há dúvida de que Teeteto foi o primeiro a elevar o estudo dos sólidos a uma teoria completa e rigorosa. Graças a Teeteto, as três fases de desenvolvimento que discutimos no capítulo 3 foram completadas. Em primeiro lugar, todos os cinco sólidos foram descobertos e Teeteto conseguia construí-los geometricamente. Em segundo lugar, ele compreendeu a característica comum que liga estes cinco poliedros, a sua regularidade. Finalmente, provou que estes cinco sólidos são os únicos poliedros regulares. As demonstrações e construções de Teeteto apareceram mais tarde no livro XIII dos *Elementos* de Euclides. Na verdade, muitos historiadores argumentam que toda a matemática contida nos livros X e XIII dos *Elementos* é devida a Teeteto.

Hoje em dia, Platão é mais famoso como filósofo e escritor, mas uma das suas contribuições mais importantes foi a criação da sua escola, a Academia. A Academia de Platão foi construída nos arredores de Atenas, por volta de 288 a. C., uma década após a execução de Sócrates. Platão fundou a Academia para preparar os jovens para a vida pública, através do estudo da ciência e, principalmente, da matemática. Ele acreditava que, através do estudo da matemática, aprendemos a separar o nosso intelecto dos nossos sentidos e opiniões. A Academia manteve-se em funcionamento por mais de 900 anos. A sua fundação foi considerada «em alguns aspectos, o acontecimento mais notável na história da Ciência da Europa Ocidental»<sup>6</sup>.

Platão não é conhecido por contribuições para as áreas da matemática, mas foi uma figura importante no avanço desta disciplina. Era um amante da matemática, e tinha grande respeito pelos matemáticos. A matemática constituía a espinha dorsal do currículo na Academia. Isto é claramente ilustrado pela inscrição que se encontra acima da sua entrada: «Que ninguém ignorante em geometria aqui entre.» Como muitos matemáticos foram treinados e formados na sua Academia, diz-se que Platão não era um criador de matemática, mas «um criador de matemáticos»<sup>7</sup>.

Como director da Academia, Platão deixou grande parte da instrução específica para outros. Teeteto era um desses formadores, e acredita-se que tenha leccionado na Academia durante quinze anos<sup>8</sup>.

Foi através de Teeteto que Platão tomou conhecimento dos cinco sólidos regulares. Platão reconheceu a sua importância matemática e a sua beleza. Como muitos pensadores futuros, ele acreditava que tinha que haver um significado cósmico para esta magnífica coleção de cinco objectos. Platão estava familiarizado com a visão do universo concebida por Empédocles (c. 492-432 a. C.), que afirmava que toda a matéria é criada a partir de quatro elementos primordiais: terra, ar, fogo e água. Estes quatro elementos básicos têm um lugar de destaque no *Timeu* de Platão, um relato ficcional de uma discussão entre Sócrates, Hermócrates, Crítias, e Timeu. Através de um longo monólogo do pitagórico Timeu de Locri, Platão desenvolve um elaborado modelo atómico, no qual cada um dos quatro elementos, a que Platão chama corpos ou corpúsculos, está associado a um dos sólidos regulares:

À terra vamos dar o cubo, pois dos quatro tipos de corpos a terra é o mais imóvel e o mais maleável, pelo que deve necessariamente vir a ser, mais do que os outros, o sólido cujas faces são as mais seguras... E das figuras sólidas que restam, faremos em seguida corresponder à água a menos móvel, ao fogo a mais móvel, e ao ar aquela que fica no meio. Isto significa que o corpo menor pertence ao fogo, o corpo à água, e o intermédio ao ar — e também que o corpo com os cantos mais afiados pertence ao fogo, o seguinte ao ar, e o que tem as pontas menos afiadas à água.

Usando este raciocínio, Timeu concluiu que o fogo é um tetraedro, o ar um octaedro, e a água é um icosaedro. O quinto sólido regular, o dodecaedro, não poderia ser um dos elementos. Timeu sustentou que: «Este, Deus usou para todo o universo, bordando números sobre ele<sup>9</sup>.»

Timeu continua com a descrição das interações entre os elementos. As interações são baseadas no corte e esmagamento; quanto mais afiado for o elemento, mais ele tende a cortar, quanto menos afiado, mais ele tende a esmagar. Isto permite o que poderíamos descrever como reacções químicas entre fogo, ar e água (mas não com a terra, uma vez que tem as faces quadradas, e não triangulares). Os elementos podiam dividir-se e as suas faces triangulares reorganizar-se para criar outros elementos. Por exemplo, um elemento de água (constituído por 20 triângulos equiláteros) podia ser dividido e reorganizado para fazer três elementos de fogo ( $3 \times 4 = 12$  triângulos) e um elemento de ar (8 triângulos). Timeu observou que as diferentes variedades de matéria podiam ser explicadas pelos diferentes tamanhos dos elementos. Ele também abordou os fenómenos de mudança de fase: derretimento e congelamento. Por exemplo,

sustentava que o metal era água sólida (em oposição à água líquida) sendo composto por grandes icosaedros uniformes que o faziam parecer sólido. Quando os afiados tetraedros do fogo eram aplicados ao metal, os icosaedros separavam-se uns dos outros, o metal fundia, e era capaz de fluir como um líquido.

A crença de que terra, ar, fogo e água são os quatro elementos primordiais foi adoptado e ampliado por Aristóteles (384-322 a. C.), um aluno de Platão. Aristóteles elevaria o éter à condição de quinto elemento, ou quinta-essência, e argumentou que era a substância de que eram feitos os corpos celestes.

O modelo atómico grego foi tão influente que foi universalmente aceite até ao nascimento da química moderna, dois mil anos mais tarde. Foi apenas quando o cientista irlandês Robert Boyle (1627-1691) publicou o seu livro *O Químico Céptico* em 1661, que este modelo químico começou a desmoronar.

Embora a teoria grega da química seja agora uma distante recordação, o legado permanece. Continuamos a falar de ser «expostos aos elementos» quando saímos e sentimos o vento (ar) ou a chuva (água). Os elementos aparecem implicitamente e explicitamente em muitas obras de literatura, peças de arte, religiões místicas, jogos de fantasia, entre outras situações. Algumas pessoas chegam a argumentar que os membros do grupo dos *famosos quatro* podem ser precisamente emparelhados com os elementos (fogo: John Lennon; água: Paul McCartney; ar: George Harrison; terra: Ringo Starr).

Desde o tratamento de Platão dos sólidos regulares em *Timeu*, os cinco poliedros regulares ficaram conhecidos como *sólidos platónicos*.

## Capítulo 5

### Euclides e o seu *Elementos*

*Aos onze anos, comecei a ler Euclides, tendo o meu irmão como tutor. Este foi um dos grandes acontecimentos da minha vida, tão deslumbrante como um primeiro amor. Eu não imaginava que existia algo tão delicioso no mundo.*

— Bertrand Russell<sup>1</sup>

Quando se fala da geometria grega, pensa-se logo em Euclides e na sua obra-prima, *Elementos*. Na Antiguidade, Euclides era muitas vezes referido simplesmente como «o Geómetra.» É decepcionante o quão pouco se sabe sobre a sua vida. Não sabemos identificar o local do seu nascimento, nem mesmo uma data razoavelmente precisa para o seu nascimento ou morte. A maioria dos livros de história da matemática não se aventura a adivinhar nenhuma destas datas, afirmando apenas que ele estava vivo durante o ano 300 a. C..

Euclides aprendeu matemática e descobriu as grandes obras de Teeteto e os outros platónicos na Academia de Platão, em Atenas. Posteriormente, mudou-se para Alexandria. Isto passou-se durante o tempo em que a grande Biblioteca e o Museu estavam a ser construídos. Euclides fundou aí uma Escola de Matemática que gozou de grande sucesso e influência.

Euclides escreveu vários livros, mas a sua fama eterna é devida a um único deles. Por volta de 300 a. C. escreveu a sua obra-prima: *Elementos*. Foi escrito como um manual para a geometria elementar, teoria dos números e álgebra. Euclides não é conhecido por contribuições originais

para a matemática; grande parte, ou mesmo praticamente todo o material que encontramos nos *Elementos*, foi demonstrado, pela primeira vez, por outrem. Proclo escreveu que Euclides «foi desenvolvendo os elementos a partir da organização e ordenação de muitos dos teoremas de Eudoxo, do aperfeiçoamento de muitos de Teeteto, e levando a uma demonstração irrefutável os argumentos que tinham sido apenas vagamente utilizados pelos seus antecessores»<sup>2</sup>.

Os *Elementos* são muito lacônicos na sua apresentação; não se coloca a matemática no seu contexto histórico, a motivação está ausente, e as aplicações não são apresentadas. No entanto, a exposição e o tratamento lógico e organizado da matéria foram superiores a tudo o que tinha aparecido anteriormente. Euclides começou com cinco premissas aparentemente «auto-evidentes», e com base apenas nesses postulados simples, desenvolveu uma grandiosa teoria geométrica. Proclo elogiou *Elementos* da seguinte forma:

[Euclides] não incluiu tudo o que poderia ter escrito, mas apenas o material adequado para a construção dos elementos. Usou todas as formas de argumentos dedutivos, alguns tornaram-se plausíveis a partir dos primeiros princípios, outros a partir de demonstrações, mas todos irrefutáveis e exactos, e em harmonia com a ciência ... Além disso, devemos mencionar a continuidade das provas, a disposição e a ordenação das matérias que precedem e daquelas que se seguem, e a competência com que trata cada detalhe<sup>3</sup>.

Este tratamento lógico teria realizado os sonhos de Pitágoras, idealizados vários séculos antes. O impacto para futuros cientistas seria profundo. Partindo de verdades fundamentais, auto-evidentes, tentava-se deduzir todas as leis da ciência. Esta abordagem ideal para a ciência mostrou ser demasiado simplista; existem poucas leis da ciência que se podem comparar aos cinco postulados de Euclides. No entanto, a abordagem euclidiana dedutiva permanece importante, nos dias de hoje, na matemática e nas ciências.

Os *Elementos* constituem a mais antiga obra matemática fundamental criada pelos Gregos que sobreviveu até hoje. Estes volumes foram copiados e recopiados à mão múltiplas vezes até à primeira versão impressa, que surgiu em Veneza em 1482. Desde então, houve um número estimado de mil edições diferentes.

A maior parte do Livro XIII, o último livro dos *Elementos*, é dedicado aos sólidos platónicos. Alguns historiadores argumentam que os outros doze livros foram escritos apenas para preparar o leitor para o

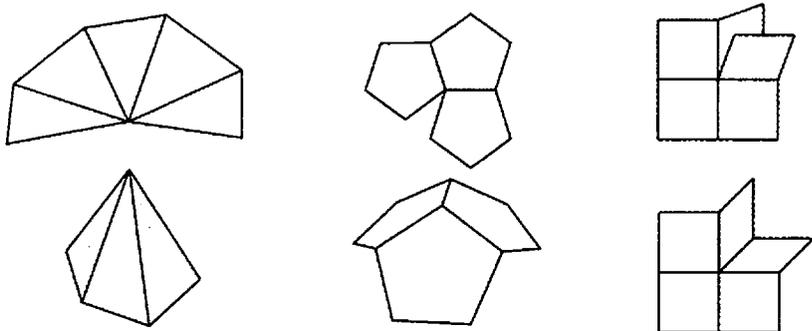


Figura 5.1. Vértices espalmados de poliedros convexos (esquerda e centro); o caso de um poliedro não convexo (à direita)

livro final. Como já escrevemos, provavelmente as provas encontradas no Livro XIII não são devidas a Euclides, mas a Teeteto. Alguns investigadores afirmam mesmo que Euclides terá seguido textualmente o trabalho de Teeteto — sem sequer o editar<sup>4</sup>.

A contribuição mais importante do Livro XIII é a demonstração de que existem cinco e apenas cinco sólidos platónicos. Em primeiro lugar, Euclides mostra que há pelo menos cinco sólidos platónicos — isto é, que o tetraedro, o octaedro, o icosaedro, o cubo e o dodecaedro, são efectivamente sólidos regulares. Em seguida, ele prova que não há mais do que estes cinco. Para detalhar o primeiro passo, Euclides dá instruções explícitas sobre como construir cada um dos cinco sólidos platónicos — mais precisamente, constrói estes sólidos platónicos dentro de esferas. Não vamos aqui detalhar estas construções de Euclides. Vamos, no entanto, apresentar o seu argumento de que não existem mais do que estes cinco sólidos. Mais tarde daremos uma prova diferente do mesmo teorema, usando a fórmula de Euler.

Na sua demonstração, Euclides usa um facto sobre ângulos planos. Numa face de um poliedro, o ângulo em cada um dos vértices dessa face é um ângulo plano (um cubo tem 24 ângulos planos, cada um medindo  $90^\circ$ ). No Livro XI, Euclides mostra que, num poliedro convexo, a soma de todos os ângulos planos que se unem no mesmo vértice será sempre um valor menor do que  $360^\circ$ . Omitiremos a prova, embora seja fácil de perceber, com ajuda de modelos em cartolina, a razão pela qual este teorema é verdadeiro. Se considerarmos todas as faces que se encontram num dado vértice de um poliedro convexo e tentarmos formar com

<sup>4</sup>  $360^\circ$  é o ângulo de uma volta completa no plano. (N. do T.)

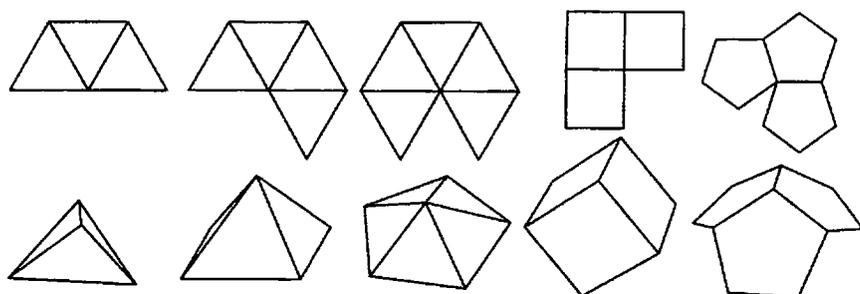


Figura 5.2. Os cinco possíveis vértices de um sólido platônico, espalmados (acima) e no espaço (em baixo)

elas uma superfície plana teremos forçosamente que cortar ao longo de uma das arestas. Assim, na figura plana que obtemos, duas das faces que estavam unidas no sólido, ficaram separadas pelo corte (ver a figura 5.1). Isto acontece precisamente porque a soma dos ângulos planos no sólido era estritamente inferior a  $360^\circ$ .

Agora, consideremos um poliedro regular. Cada face é um polígono regular com  $n$  lados (que são arestas no poliedro), e  $m$  arestas do poliedro encontram-se em cada vértice. Uma vez que cada face deve ter pelo menos três lados,  $n \geq 3$ , e dado que pelo menos três arestas se encontram em cada vértice,  $m \geq 3$ . Todos os ângulos de cada face têm a mesma medida; designemos este ângulo por  $\theta$ . Em cada vértice, juntam-se  $m$  faces, cada uma contribuindo com um ângulo plano que mede  $\theta$ . Do Teorema do parágrafo anterior, segue-se que  $m\theta$  deve ser inferior a  $360^\circ$ . Para que valores de  $m$  e  $n$  é isto possível?

Quando  $n = 3$ , as faces são triângulos equiláteros, de modo que  $\theta = 60^\circ$  (a medida dos ângulos interiores de um polígono regular de  $n$  lados é precisamente  $180^\circ(n-2)/n$ ). Uma vez que  $m\theta < 360^\circ$ , temos  $m(60^\circ) < 360^\circ$ , ou seja  $m < 6$ . Assim,  $m = 3, 4$  ou  $5$  são as únicas possibilidades (ver a figura 5.2). Estes valores de  $m$  dão origem ao tetraedro, ao octaedro e ao icosaedro, respectivamente.

Quando  $n = 4$ , as faces são quadrados, logo  $\theta = 90^\circ$ , o ângulo recto. Isto implica que  $m(90^\circ) < 360^\circ$ , ou seja  $m < 4$ . Logo, apenas podemos ter  $m = 3$ , e obtemos o cubo. Quando  $m = 5$ , as faces são pentágonos regulares e  $\theta = 180^\circ(5-2)/5 = 108^\circ$ . Assim  $m(108^\circ) < 360^\circ$ , ou seja  $m < 10/3$ . Portanto, apenas podemos considerar  $m = 3$ , e obtemos o dodecaedro.

Supondo agora que  $n = 6$ , isto é que as faces são hexágonos regulares temos  $\theta = 120^\circ$ . Neste caso, teríamos  $m(120^\circ) < 360^\circ$ , ou seja  $m < 3$ , o que é impossível. Assim, não há poliedros regulares com faces hexagonais.

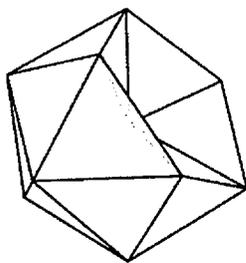


Figura 5.3. Um sólido platónico não convexo?

Encontramos o mesmo problema para todos os outros valores de  $n$  superiores a 6. Portanto, não há outros sólidos platónicos.

Examinando esta demonstração, vemos que Euclides ignorou alguns detalhes subtis. Em particular, ele não eliminou a possibilidade de poderem existir dois poliedros diferentes, ambos formados com faces regulares de  $n$  lados e ambos com  $m$  faces unidas em cada vértice. Por exemplo, poderíamos admitir que existisse outro poliedro, para além do icosaedro, formado a partir de triângulos equiláteros, cinco dos quais se unem em cada vértice. Euclides supõe, sem o explicitar, que isto não pode acontecer. De facto, Euclides está correcto, se supusermos que os nossos poliedros são convexos; mas este facto precisa de ser demonstrado. Se não supuséssemos a convexidade, porém, Euclides estaria errado. Na figura 5.3 podemos ver um poliedro, não convexo, com as mesmas propriedades que o icosaedro — é composto por vinte triângulos equiláteros, cinco dos quais se encontram em cada vértice. A única diferença é que um dos vértices foi empurrado para o interior, pelo que deixou de ser convexo.

Pares de poliedros, como o icosaedro e o icosaedro não convexo mostrado na figura 5.3, são denominados *estereoisómeros* (um termo que provém da química). Estes são construídos a partir de colecções de faces idênticas, unidas ao longo das mesmas extremidades.

Devemos também eliminar a possibilidade de deformação dos poliedros, mantendo a forma das faces. Imagine um poliedro cujas faces são feitas de metal indeformável, mas cujas arestas são dobradiças. Uma conjectura que remonta pelo menos à época de Euler é que tal poliedro, embora todas as arestas sejam articuladas, não é flexível. A sua forma não pode ser alterada puxando, empurrando, ou espremendo. Em 1766 Euler escreveu que «[figuras sólidas] podem sofrer alterações apenas na medida em que não se danifiquem ou fiquem fechadas em todos os lados»<sup>5</sup>. Provar esta conjectura é importante, porque se um dos poliedros regulares fosse flexível, então teríamos uma família inteira de estereoisó-

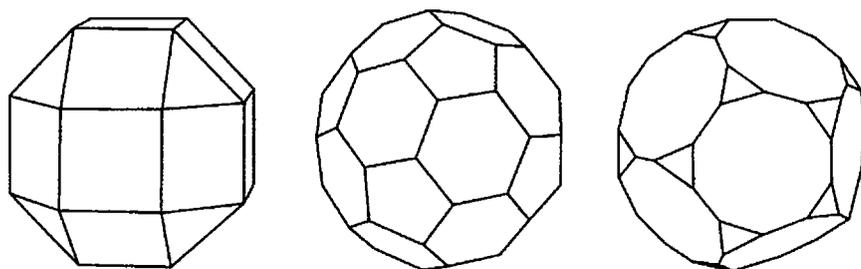


Figura 5.4. Três dos treze sólidos arquimedianos

meros, e assim um número infinito de poliedros regulares ligeiramente diferentes. Este facto destruiria a demonstração de Euclides.

Acontece que Euclides estava correcto, mas a justificação rigorosa veio apenas dois mil anos depois, pela mão do prolífico matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789-1857). Em 1811, Cauchy mostrou que quaisquer pares de estereoisómeros convexos têm que ser idênticos<sup>6</sup>. Por outras palavras, se soubermos as faces de um poliedro convexo e os pares de faces que são vizinhas, então sabemos com exactidão toda a geometria do poliedro. Uma consequência deste célebre teorema é que os cinco sólidos platónicos são realmente os únicos. Um outro é que cada poliedro convexo articulado é inflexível. Este último facto tornou-se conhecido como o teorema de rigidez para poliedros convexos. Surpreendentemente, a conjectura de rigidez não é válida para poliedros articulados não convexos, e este facto só foi descoberto em 1977. O matemático norte-americano Robert Connelly construiu o primeiro poliedro flexível não convexo<sup>7</sup>.

A grande contribuição final dos gregos para a teoria dos sólidos regulares é devida a Arquimedes de Siracusa. Arquimedes introduziu a noção de *sólidos semi-regulares*. Tal como um sólido regular, um sólido semi-regular é um poliedro convexo cujas faces são polígonos regulares, em que agora é permitido mais de um tipo de polígono regular como face. Além disso, impõe-se que todas as faces com o mesmo número de lados sejam congruentes e que todos os vértices sejam idênticos (ou seja, cada um dos vértices tem a mesma ordem de polígonos que o rodeiam e qualquer vértice pode ser rodado para a posição de qualquer outro vértice, com o resto do poliedro a alinhar perfeitamente com a posição anterior). Três poliedros semi-regulares estão apresentados na figura 5.4. O trabalho de Arquimedes perdeu-se, mas de acordo com a seguinte passagem por Pappus (c. 290-350 d. C.), sabemos que Arquimedes descobriu treze poliedros semi-regulares:

Embora muitas figuras sólidas com todos os tipos de faces possam ser concebidas, aquelas que são obtidas pela regularidade são as mais merecedoras de atenção. Estas incluem, não apenas as cinco formas encontradas no divino Platão... mas também os sólidos, em número de treze, que foram descobertos por Arquimedes e são formados por polígonos equiláteros e equiangulares, mas não semelhantes<sup>8</sup>.

O conjunto completo destes treze poliedros foi reconstruído em 1619 por Kepler, que não tinha conhecimento do trabalho de Arquimedes. Tal como Teeteto provou que os cinco sólidos platónicos são os únicos poliedros regulares, Kepler mostrou que há apenas treze poliedros semi-regulares. Devemos também mencionar que existe um conjunto infinito de poliedros chamados prismas e anti-prismas que satisfazem os critérios de semi-regularidade, mas, historicamente, estes não foram chamados sólidos semi-regulares. Hoje os poliedros semi-regulares são conhecidos como *sólidos arquimedeanos*.

Após o declínio da civilização grega, o centro da actividade matemática mudou-se para o império islâmico. Sob patrocínio real, matemáticos árabes traduziram muitos dos matemáticos clássicos gregos, incluindo obras de Euclides, Arquimedes, Apolónio, Diofanto, Pappus, e Ptolomeu. No entanto, foram mais do que meros cuidadores dos textos dos gregos. Estes matemáticos são responsáveis pela criação da área da álgebra e por fazer contribuições substanciais para a teoria dos números, sistemas numéricos, e para a trigonometria. O período de dominação árabe matemática durou aproximadamente até ao século xv.

Os matemáticos árabes desenvolveram o estudo da geometria, mas não fizeram avanços substanciais na teoria de poliedros. Para que voltasse a existir um interesse renovado nos poliedros, a matemática teria que esperar que a Europa emergisse da época medieval.

## Capítulo 6

# O Universo Poliédrico de Kepler

*Johannes Kepler é uma das grandes figuras da fase de viragem da história da Ciência: metade de sua mente agitava-se com fantasias medievais e a outra metade estava grávida com o início da ciência matematizada que formou o mundo moderno.*

— George Simmons<sup>1</sup>

Durante o período da matemática árabe, a Europa atravessava as trevas da Idade Média. Havia poucos europeus que recebessem uma instrução formal; as grandes obras da antiguidade clássica haviam sido praticamente esquecidas; o estudo da matemática era quase inexistente. Apenas se manteve um ensino rudimentar de geometria e aritmética nas escolas monásticas. Durante centenas de anos, não se registaram contribuições significativas feitas nas várias áreas da matemática.

Foi apenas com o Renascimento europeu no século xv que a actividade matemática começou a ressurgir. A ascensão do movimento humanista trouxe um renovado interesse nos clássicos gregos — primeiro a literatura grega, e mais tarde a matemática grega. O romance da vida intelectual grega está maravilhosamente representado no fresco de Rafael *Escola de Atenas* (1510-1511), que apresenta um encontro imaginário entre Pitágoras, Euclides, Sócrates, Aristóteles, Platão e outros sábios gregos (figura 6.1).

A perspectiva era uma característica proeminente na arte renascentista. Os poliedros e as suas estruturas tridimensionais constituíam temas de excelência para demonstrar como os artistas dominavam a noção de pers-

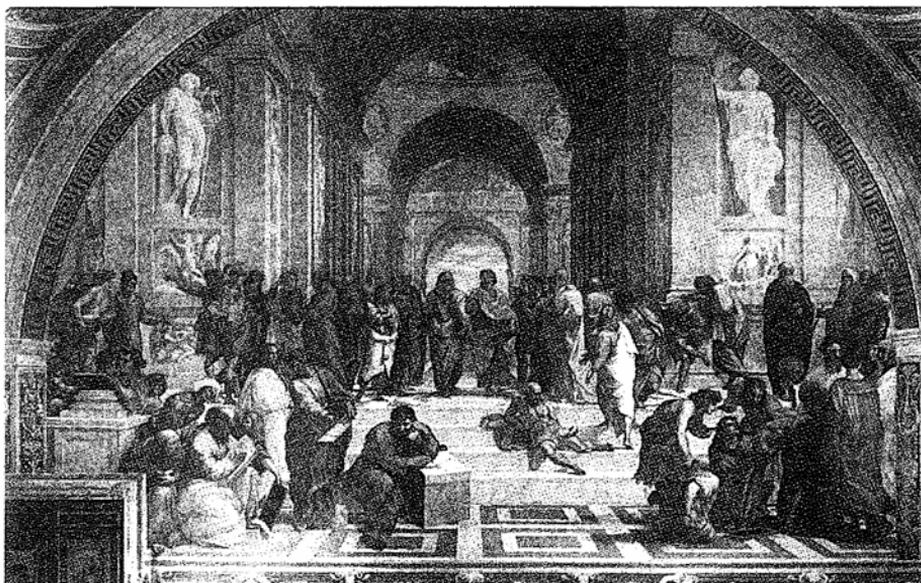


Figura 6.1. *A Escola de Atenas* de Rafael (fresco no Palácio Apostólico do Vaticano)

pectiva. Artistas como Piero della Francesca, Albrecht Dürer e Daniele Barbaro contribuíram tanto para a matemática como para a arte nos seus escritos sobre a perspectiva nos poliedros. Entre os muitos artistas que destacaram os poliedros nas suas obras (ver figuras 6.2 e 6.3) estão Leonardo da Vinci, que ilustrou o livro de Fra Luca Pacioli *De Divina Proportione* (1509); Wentzel Jamnitzer, que criou detalhadas e elaboradas gravuras de poliedros reais e impossíveis, Jacopo de Barbari, que pintou um retrato de Luca Pacioli com poliedros; Paolo Uccello, que incluiu poliedros nas suas pinturas e nos mosaicos que colocou no piso da Basílica de São Marcos, em Veneza; Fra Giovanni da Verona, que criou belas marchetarias (mosaicos embutidos de madeira); e, como veremos adiante (figuras 6.7 até 6.4), Johannes Kepler, o físico e matemático.

Como os estudiosos do Renascimento e os artistas que o precederam dois séculos, Kepler tinha um fascínio por poliedros. Hoje em dia Kepler é mais conhecido como astrónomo, e ficou famoso pelas suas três leis do movimento planetário (que descrevem o movimento elíptico dos planetas em torno do Sol), embora tenha feito muitas outras contribuições para a ciência e a matemática. Usou os conceitos de infinito e de infinitamente pequeno de uma forma que antecipou a introdução do cálculo. Tem tra-

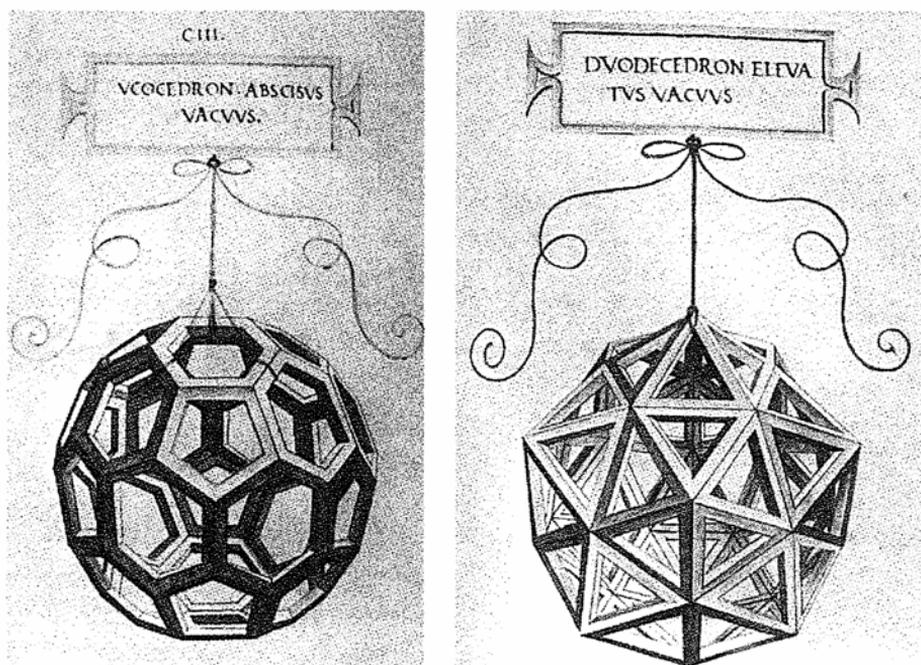


Figura 6.2. Icosaedro truncado de Leonardo da Vinci e o dodecaedro *pentakis* de *De Divina Proportione*

balho publicado na área da óptica. Foi um dos primeiros utilizadores dos logaritmos. E Kepler fez contribuições, algumas reais outras fantasiosas para a teoria dos poliedros.

Kepler nasceu a 27 de Dezembro de 1571, na pequena cidade de Weil der Stadt, Württemberg, no Sacro Império Romano, hoje parte da Alemanha. Teve uma vida extraordinariamente difícil: era uma criança adoentada criada numa família conturbada, foi vítima de perseguição religiosa, a sua primeira mulher e o seu filho predilecto morreram de varíola, a sua mãe foi acusada de bruxaria, e morreu com a idade de 58 anos, numa viagem para recuperar o seu salário. Apesar destas dificuldades, Kepler era um homem profundamente religioso. Estava a seguir uma carreira como pastor luterano até que, com vinte e três anos, deixou o Seminário para ocupar uma posição de ensino em matemática e astronomia. As suas crenças religiosas eram muito importantes e, como pode ser observado nos seus escritos, elas serviram, muitas vezes, de inspiração para o seu trabalho científico. Como Arthur Koestler, um dos biógrafos de Kepler, escreveu: «Esta coexistência da mística e do empírico, dos voos selvagens de pensamento e

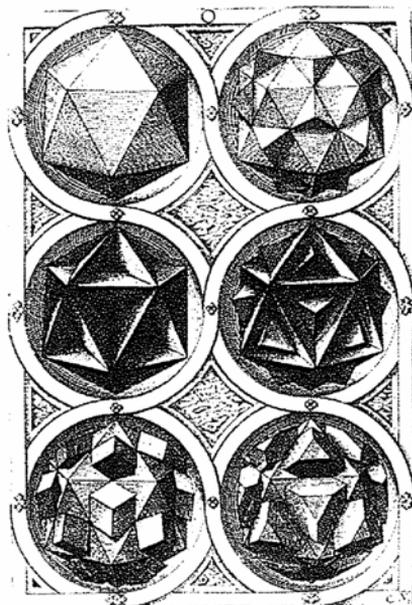
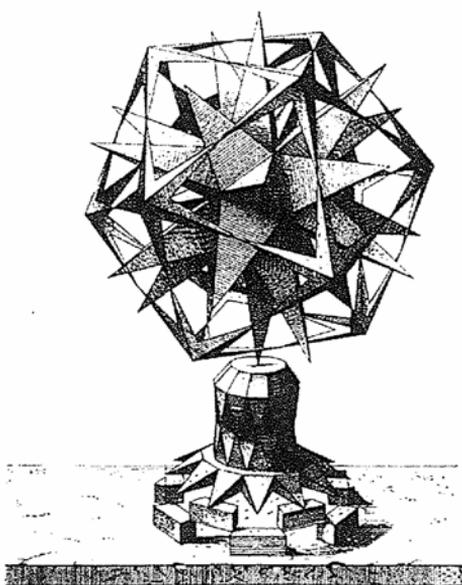
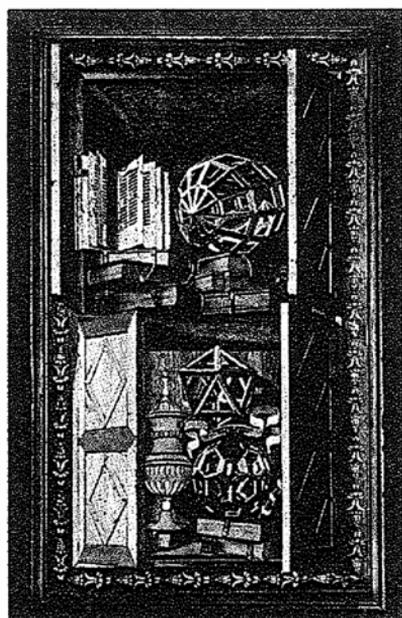
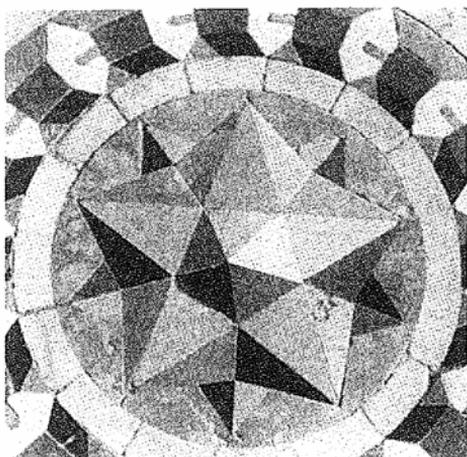


Figura 6.3 Um embutimento em mármore de Uccello (canto superior esquerdo), uma das marchetarias de Fra Giovanni (canto superior direito), e as amostras de Wentzel Jamnitzer *Perspectiva corporum regularium* (1568)

do meticuloso trabalho de investigação, permaneceram... a principal característica de Kepler desde a sua juventude até à sua velhice<sup>2</sup>.»

Kepler acreditava que Deus tinha criado um mundo com beleza matemática. Seguramente, Kepler pensava, a existência de apenas cinco poliedros regulares deveria ter um importante significado; certamente este facto deveria reflectir-se na composição do universo. Koestler escreveu: «A crença equivocada de Kepler nos cinco corpos perfeitos não representou uma moda passageira, mas permaneceu com ele, ainda que numa versão modificada, até ao final da sua vida, evidenciando todos os sintomas de uma alucinação paranóica; no entanto, ela funcionou como a força motriz, o impulso para as suas imortais realizações<sup>3</sup>.»

A inspiração para o primeiro modelo que Kepler propôs para o sistema solar deu-se a 9 de Julho de 1595, enquanto dava uma aula numa sala cheia de alunos. Nesta época, a visão ptolemaica geocêntrica (centrada na Terra) do sistema solar era geralmente considerada como sendo o modelo correcto. Meio século antes, Nicolau Copérnico (1473-1543) havia defendido o modelo heliocêntrico (centrado no Sol), mas nessa altura, por variadas razões, o modelo heliocêntrico tinha sido rejeitado pela maioria dos intelectuais.

Um dia, enquanto Kepler desenhava polígonos inscritos em círculos, teve a inspiração de que este podia ser o segredo das órbitas planetárias: talvez as órbitas dos planetas fossem circunferências encaixadas inscritas em diversos polígonos, com o sol no centro. Depois de passar um Verão a trabalhar meticulosamente nos detalhes desta ideia, percebeu que não era este o modelo correcto para o sistema solar. Em vez de abandonar este modelo completamente, decidiu reformulá-lo e criou outro com o qual ficaria muito mais satisfeito. O novo modelo apareceu no seu primeiro livro, *Mysterium Cosmographicum* (*Mistério Cósmico*), em 1596<sup>4</sup>.

Kepler tinha compreendido que os polígonos e as circunferências não eram os objectos correctos para um modelo do sistema solar; resolveu então mudar a sua atenção para uma dimensão superior, para os poliedros e as esferas. Ele achava que a existência de cinco sólidos platónicos deveria estar relacionada com a existência dos seis planetas conhecidos: Saturno, Júpiter, Marte, Terra, Vénus e Mercúrio. Alegava que as órbitas dos planetas estariam relacionadas com a inscrição dos cinco sólidos platónicos dentro de esferas.

Consideremos uma esfera contendo a órbita do planeta mais distante, Saturno, ao longo do seu equador. Dentro desta esfera vamos inscrever um cubo, e depois, dentro do cubo, inscrever uma outra esfera. Ao longo do equador desta esfera, Kepler sustentava, está a órbita de Júpiter (ver figura 6.4). Continuando desta forma (com

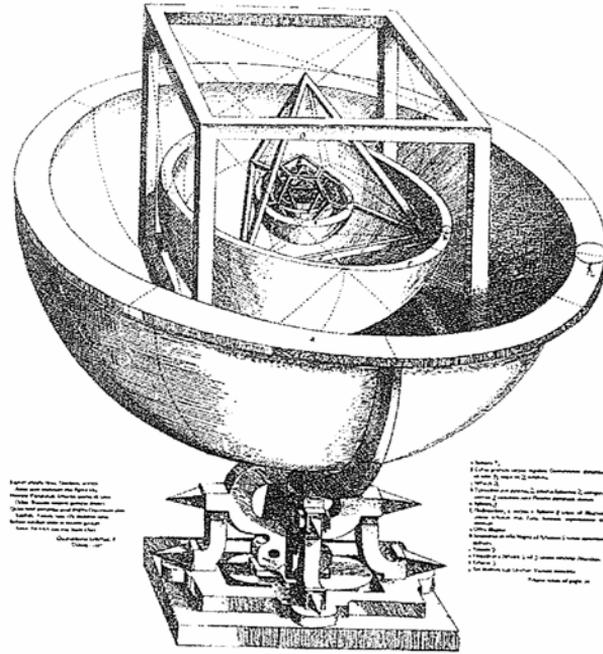


Figura 6.4. Visão inicial de Kepler do sistema solar (retirado de *O Mistério Cósmico*)

a sequência tetraedro, esfera, dodecaedro, esfera, icosaedro, esfera, octaedro, esfera), encontraríamos as órbitas de todos os seis planetas. Kepler escreveu:

Esta foi a ocasião do sucesso dos meus trabalhos. O quão intenso foi o prazer desta descoberta nunca poderá ser expresso em palavras. Eu já não lamentava o tempo perdido. Dia e noite estava consumido pelos cálculos, para determinar se esta ideia concordava com as órbitas de Copérnico, ou se a minha alegria seria levada pelo vento. Dentro de poucos dias tudo se confirmou, e eu verifiquei como um corpo depois do outro cabiam precisamente no seu devido lugar entre os planetas<sup>5</sup>.

Desta forma, Kepler foi o primeiro astrônomo profissional a manifestar publicamente, na imprensa, o seu apoio ao modelo de Copérnico. Nesta altura até mesmo Galileu (1564-1642), seis anos mais velho que Kepler, mantinha silêncio sobre este assunto.

Na primeira metade do *Mistério Cósmico* predominava a mística — Kepler embarcava na astrologia, numerologia e simbologia. Fornecia

elaboradas argumentações não científicas segundo as quais o seu modelo do sistema solar estaria correcto. Apresentava uma nítida hierarquia entre os sólidos platónicos. Por exemplo, eles estavam divididos em sólidos primários (o tetraedro, o cubo e o dodecaedro) e secundários (o octaedro e o icosaedro), sendo os primários aqueles em que apenas três faces se unem em cada vértice. Ele afirmava que «conter é ... mais perfeito» do que «estar contido em»<sup>6</sup>, e no seu modelo planetário, os sólidos primários eram os poliedros exteriores e os secundários interiores, estando a órbita da Terra situada entre as duas classes.

Na segunda metade do livro, abruptamente, virou-se para os argumentos científicos, baseados em dados astronómicos. Efectuou algumas modificações ao modelo para que a sua teoria e os dados concordassem. Embora não soubesse ainda que as órbitas dos planetas eram elipses, ele já sabia que não eram circunferências perfeitas. Assim, de modo a conter as órbitas dos planetas, cada esfera do seu modelo tinha que ter alguma espessura; à medida que um planeta orbitava no seu trajecto não circular, mantinha-se sempre dentro da sua concha esférica. O modelo de Kepler é surpreendentemente preciso; no entanto, ele percebeu que os dados ainda não se encaixavam completamente no modelo (especialmente no que respeitava às órbitas de Júpiter e de Mercúrio). Desta forma, desenvolveu várias formas de explicar as discrepâncias que subsistiam, chegando a rejeitar os dados que tinha usado (que provinham de Copérnico).

Mais tarde, o próprio Kepler mostrou que este arquétipo para o sistema solar não estava correcto. Escreveu então: «Realmente confesso que o chefe da Astronomia foi deposto<sup>7</sup>.» Examinando exaustivamente uma enorme quantidade de dados sobre a órbita de Marte que lhe foram entregues pelo astrónomo Tycho Brahe (1546-1601), Kepler conseguiu deduzir o verdadeiro movimento dos planetas. Num dos grandes feitos na História da Ciência, usou esses dados para descobrir as três leis do movimento planetário (as duas primeiras leis de Kepler, em 1609, e a terceira em 1619). Trinta anos após sua morte, estas leis foram matematicamente verificadas por Isaac Newton. Apesar das erróneas afirmações no *Mistério Cósmico*, é interessante observar que muitas das suas ideias absurdas continham uma pitada de verdade. Algumas das maiores contribuições científicas de Kepler podem ser vistas como consequência das ideias aparentemente absurdas contidas neste livro.

A contribuição mais significativa de Kepler para a teoria dos poliedros foi obtida perto do fim da sua carreira em 1619, na sua obra *Harmonice Mundi (A Harmonia do Mundo)*<sup>8</sup>. Este tratado tem cinco partes: os dois primeiros são dedicados à matemática. Neles, Kepler considera os poliedros regulares e semi-regulares. Aqui, ele redescobre todos os treze sólidos de

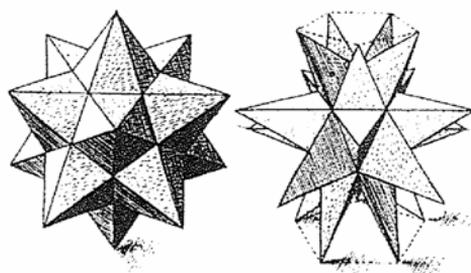


Figura 6.5. Desenhos de Kepler dos poliedros estrelados (de *A Harmonia do Mundo*)

Arquimedes e prova que não há outros. Apresenta a classe de poliedros chamados anti-prismas. Também descobre um par de poliedros em forma de estrelas, hoje conhecidos como o pequeno e o grande dodecaedro estrelares (ver a figura 6.5). Ele usou a palavra *echinus* para designar os poliedros deste tipo, o que significa ouriço ou ouriço-do-mar. Mais tarde, vamos voltar a analisar estes poliedros estrelares e indicar a forma como podem ser considerados poliedros regulares e causar perturbações à fórmula de Euler.

Até ao fim da sua carreira, Kepler continuou fascinado pelos sólidos platônicos. Ele subscrevia a teoria grega de que havia quatro elementos primordiais e a teoria de Platão de que estes eram constituídos a partir dos sólidos platônicos. Devemos observar que a publicação de *A Harmonia do Mundo* ocorreu 42 anos antes do texto revolucionário de Boyle, *O Químico Céptico*. Na *Harmonia do Mundo*, Kepler usou as ideias de Platão e Aristóteles em conjunção com os seus próprios argumentos não científicos, para justificar que os quatro elementos eram sólidos platônicos.

Ele argumentava que, dado que o cubo pode ser colocado numa mesa plana para que não seja facilmente deslocado, este é o mais estável dos sólidos platônicos; deste modo, deve ser a terra. O octaedro, segurado entre dois dedos, pode ser posto a rodar facilmente; assim este é o mais instável, e deve ser o ar. O tetraedro é o que contém o menor volume para uma dada área da sua superfície; portanto, é o mais seco dos cinco sólidos, e deve ser o fogo. Da mesma forma, o icosaedro é o que contém o maior volume para uma dada área de superfície fixa; de modo que é o mais húmido, e deve ser água. Kepler observou uma relação entre as doze faces do dodecaedro e os doze signos do zodíaco grego; por causa dessa relação, ele argumentou que o dodecaedro devia representar o universo. A correspondência entre estes elementos e os sólidos platônicos pode ser visto na famosa ilustração de Kepler na figura 6.6.

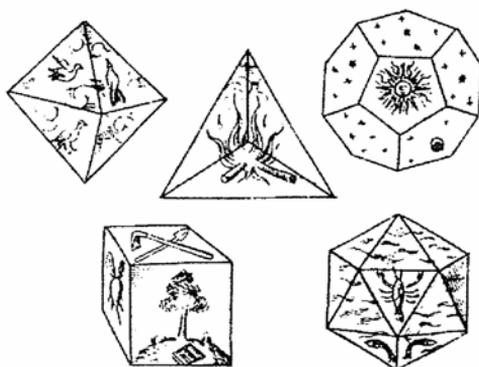


Figura 6.6. Desenhos de Kepler dos sólidos platônicos (de *A Harmonia do Mundo*)

Tabela 6.1:  
O número de vértices, arestas e faces dos sólidos platônicos

	$V$	$A$	$F$
Octaedro	6	12	8
Cubo	8	12	6
Icosaedro	12	30	20
Dodecaedro	20	30	12
Tetraedro	4	6	4

Na *Harmonia do Mundo*, vemos novamente a dicotomia entre as tendências místicas de Kepler e o seu brilhante pensamento científico. Foi neste trabalho que ele fez afirmações errôneas sobre a teoria atômica, mas também fez uma original e importante observação sobre os sólidos platônicos. Ele notou que existe uma relação anti-simétrica entre o octaedro e o cubo, uma relação análoga entre o dodecaedro e o icosaedro; e uma relação simétrica do tetraedro consigo próprio. Como podemos ver na tabela 6.1, tanto o cubo como o octaedro têm 12 arestas. Mas o número de faces do cubo (6) é igual ao número de vértices do octaedro, e o número de vértices do cubo (8) é igual ao número de faces do octaedro. A mesma relação de troca de número de vértices por faces é válida para o icosaedro e o dodecaedro — estes dois poliedros têm 30 arestas cada, o icosaedro tem 20 faces e o dodecaedro tem o mesmo número de vértices; e há 12 vértices no icosaedro, bem como 12 faces no dodecaedro. O tetraedro não se emparelha desta forma com outro poliedro regular, tendo exactamente o mesmo número de faces que de vértices; desta forma, ele é o par de si mesmo.

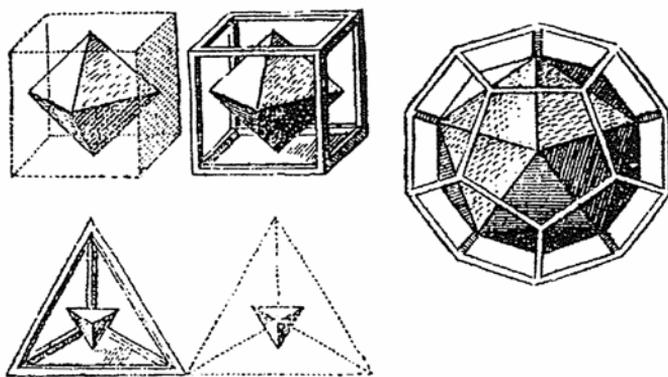


Figura 6.7. Representação de Kepler de poliedros duais (retirado de *A Harmonia do Mundo*)

Kepler compreendeu que esta anti-simetria tinha uma interessante interpretação física/geométrica. Peguemos num dos poliedros regulares, por exemplo o cubo, e coloquemos um novo vértice no centro de cada face. Estes oito novos pontos formam os vértices de um octaedro. O novo poliedro assim formado designa-se por poliedro dual do cubo inicial. Na figura 6.7 vemos a ilustração de Kepler mostrando que o octaedro é o dual do cubo. Note-se que cada uma das faces do cubo corresponde a um dos vértices do octaedro, de modo que o número de faces do cubo é igual ao número de vértices do octaedro. Examinando esta dualidade mais de perto, vemos que a cada aresta do octaedro corresponde uma única aresta bem determinada do cubo, cuja direcção forma um ângulo recto com a primeira; assim, ambos os poliedros têm que ter o mesmo número de arestas. Além disso, cada um dos vértices do cubo corresponde a uma face do octaedro e, conseqüentemente, existem em igual número. Desta forma, encontramos a relação de espelho indicada na tabela 6.1.

Do mesmo modo, Kepler mostrou que o icosaedro é o poliedro dual do dodecaedro e que o tetraedro é o seu próprio dual (ver figura 6.7). Embora Kepler soubesse também que esta dualidade era recíproca (no sentido que, da mesma forma que indicámos, o cubo pode ser inscrito no octaedro, e o dodecaedro no icosaedro), ele não desenhou estes casos. Estes não se enquadravam na sua hierarquia. Como acreditava que conter era mais perfeito do que estar contido, desenhou apenas os seus sólidos primários contendo os secundários.

Como era seu hábito, Kepler não conseguiu resistir a explicar a sua singular interpretação desta observação matemática. Ele atribuiu géneros aos sólidos e usou a dualidade para indicar a compatibilidade sexual.

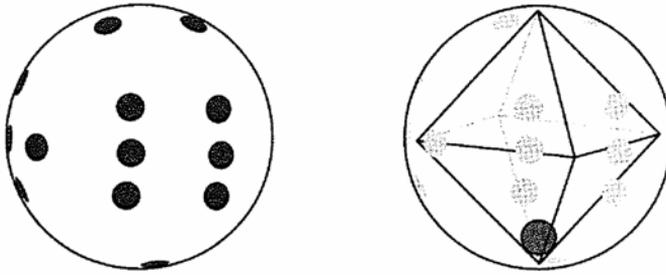


Figura 6.8. Dados redondos

O cubo e o dodecaedro (ambos primários dominantes) seriam do sexo masculino, contendo respectivamente os sólidos femininos octaedro e icosaedro (secundários). O tetraedro seria hermafrodita por se conter a si próprio. As faces e vértices seriam as características sexuais, pois era com eles que os sólidos se tocavam. Kepler escreveu:

No entanto, existem dois casamentos notáveis, por assim dizer, destas figuras, por combinação entre duas classes: os machos, o cubo e o dodecaedro da classe dos primários, e as fêmeas, o octaedro e o icosaedro da classe dos secundários. Para além destes, existe um que é, por assim dizer, celibatário ou hermafrodita, o tetraedro, porque está inscrito em si mesmo, tal como as fêmeas estão inscritas, e por assim dizer sujeitas, aos machos, e têm os símbolos femininos do seu sexo oposto aos masculinos, ou por outras palavras, os ângulos virados para as faces planas<sup>9</sup>.

Os fabricantes de brinquedos têm usado criativamente as propriedades dos poliedros regulares e não regulares de modo a conceber uma grande variedade de dados exóticos. Um engenhoso fabricante de brinquedos chegou a usar esta dualidade dos poliedros regulares para fazer dados redondos não-viciados! As pintas de 1 a 6 são pintadas na superfície de uma esfera, como se fosse um cubo (ver figura 6.8). No interior existe uma cavidade com a forma do dual do cubo — isto é, de um octaedro. Uma esfera pequena mas pesada chocalha no interior deste octaedro, até que pára num dos seus vértices. O peso desta esfera obriga uma única das «faces» do dado a manter-se na parte superior da esfera.

É possível prolongar este conceito de dualidade aos poliedros que não são regulares, embora a definição se torne ligeiramente mais complicada. A ideia de dualidade é assunto de grande relevo, e recorrente em matemá-

tica. Dá-se muitas vezes o caso de criarmos dois pares de objectos duais invertendo alguma característica notável. Por exemplo, para poliedros, nós estamos a «inverter» a dimensão: vértices são entidades de dimensão zero, que estamos a substituir por faces bidimensionais, e as faces de duas dimensões são substituídas por vértices de dimensão zero. Noutras situações, a dualidade é obtida invertendo outras grandezas, tal como trocar cima com baixo, positivo com negativo, e assim por diante. Às vezes, o objecto que é mais semelhante a um determinado objecto é precisamente o seu oposto. Voltaremos à noção de dualidade no capítulo 23.

Durante o século xvii a matemática foi-se tornando uma disciplina académica activa na Europa. O longo período de seca tinha terminado. Os poliedros, reintroduzidos pela comunidade artística, eram novamente objecto da investigação matemática. Como veremos no capítulo 9, por volta do ano 1630 Descartes descobriu propriedades importantes dos poliedros, mas o mundo não lhes iria dar atenção até ao ano 1760. A primeira contribuição significativa para a teoria dos poliedros, ao fim de dois mil anos, teria que esperar um século mais pela brilhante perspicácia de Euler.

## Capítulo 7

### A Pérola de Euler

«Óbvio» é a palavra mais perigosa em matemática.  
— E. T. Bell<sup>1</sup>

«Matemático descobre arestas de poliedros!» Esta deveria ter sido a notícia de primeira página dos jornais, no dia 14 de Novembro de 1750.

Nesse dia, a partir de Berlim, Euler enviou uma carta ao seu amigo Christian Goldbach em São Petersburgo. Numa frase aparentemente desprovida de matemática interessante, Euler descreveu «os pontos de junção onde duas faces se unem ao longo de um dos seus lados, e que, por falta de um termo geralmente adoptado, passarei a chamar 'arestas'<sup>2</sup>.» De facto, esta definição pouco apelativa representou a primeira pedra importante colocada nos fundamentos do que se tornaria uma grandiosa teoria.

Um dos grandes dons de Euler era a sua capacidade de consolidar resultados matemáticos isolados e conceber um modelo teórico no qual tudo se encaixa. Durante o ano de 1750 ele dedicou-se desta forma aos poliedros. Começou com o que esperava tornar-se um estudo dos fundamentos da teoria dos poliedros, ou *estereometria*, como ele a denominou.

Até essa altura, a teoria dos poliedros já tinha mais de dois mil anos, mas era puramente geométrica. Os matemáticos tinham-se focado exclusivamente em propriedades *métricas* dos poliedros — propriedades que podem ser medidas. Eles estavam interessados em determinar os comprimentos dos lados e das diagonais; em calcular as áreas das faces, medir os ângulos planos, e determinar os volumes.

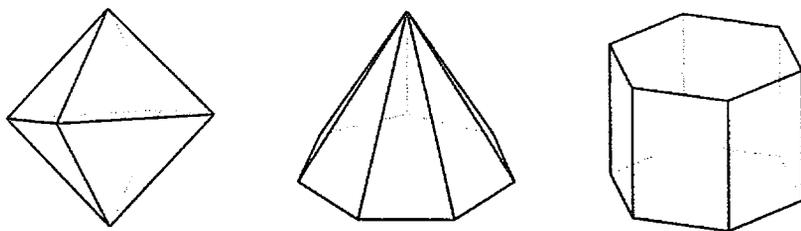


Figura 7.1. Três poliedros diferentes, todos de oito faces

O primeiro passo de Euler não seguiu essa tradição métrica. Ele pretendia descobrir uma forma de agrupar ou *classificar* todos os poliedros, e enumerar as suas características principais. Afinal de contas, é assim que classificamos os polígonos — todos os polígonos de três lados são triângulos, os de quatro lados são quadriláteros, e assim por diante.

A grande dificuldade em classificar poliedros de forma análoga torna-se rapidamente evidente. A característica mais simples de enumerar — o número de faces — não é suficiente para distinguir poliedros. Como podemos ver na figura 7.1, poliedros com o mesmo número de faces podem ser radicalmente diferentes.

A primeira observação brilhante de Euler foi a de que a superfície de um poliedro é composta por componentes de dimensões 0, 1 e 2, nomeadamente vértices (ou ângulos sólidos, como ele lhes chamava), arestas e faces, e que estas eram as características que se deveriam enumerar. Estas três quantidades tornaram-se os blocos de construção mais comuns para todas as superfícies topológicas. Ele escreveu:

Portanto, devem ser considerados três tipos de elementos na fronteira de qualquer corpo sólido; nomeadamente, 1) pontos, 2) linhas e 3) superfícies, ou, com os nomes usados especificamente para esta finalidade: 1) ângulos sólidos, 2) arestas e 3) faces. Estes três tipos de elementos determinam completamente o sólido<sup>3</sup>.

Não é possível exagerar a importância desta observação. Surpreendentemente, até Euler lhes ter dado um nome, ninguém se tinha explicitamente referido às arestas de um poliedro. Euler, escrevendo em latim, usou a palavra *acies* que significa bordo. Em «latim corrente», *acies* é usado para a lâmina afiada de uma arma, um feixe de luz, ou uma formação militar alinhada para uma batalha. Dar um nome a esta característica óbvia de um poliedro pode parecer ser um assunto trivial, mas não o é.

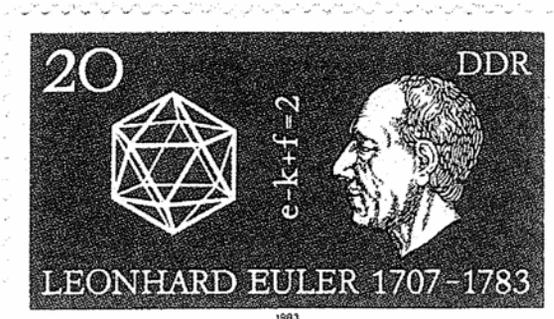


Figura 7.2. Um selo da Alemanha de Leste, com Euler e a sua fórmula

O reconhecimento de que estes bordos unidimensionais são um dos conceitos essenciais foi uma observação crucial na teoria dos poliedros.

Para as faces de um poliedro, Euler usou o termo já estabelecido *hedra*, que, como já mencionámos, se traduz por «lado» ou «base». Euler referiu-se aos vértices dos poliedros com a expressão *angulus solidus*, ou seja, ângulo sólido. Antes do trabalho de Euler sobre poliedros, os ângulos sólidos designavam entidades de 3 dimensões definidas pelas faces que se intersectam num único ponto. O ângulo sólido de um cubo é diferente do ângulo sólido de um tetraedro; distinguem-se pela geometria da região que encerram. Pela descrição fornecida acima, na qual Euler associa um ângulo sólido a um ponto, concluímos que ele entendia ângulos sólidos como objectos de dimensão zero. Ao mencionar ângulo sólido, ele pretende referir-se ao vértice que está na ponta desse ângulo sólido, e não à região tridimensional que as faces encerram. Esta distinção é subtil, mas o reconhecimento de que os ângulos sólidos podem ser vistos como simples pontos no poliedro foi crucial para o seu teorema. No entanto, Euler perdeu a oportunidade de não lhes dar um novo nome — de facto, um vértice de um poliedro e o ângulo sólido no qual se situa não são exactamente o mesmo objecto matemático. Em 1794, Adrien-Marie Legendre (1752-1833) tornou precisa esta questão:

Muitas vezes usamos a palavra ângulo, em conversa coloquial, para designar o ponto situado no seu vértice; esta expressão é falaciosa. Seria mais claro e mais exacto designar esses pontos por um nome particular, como *vértices*, os pontos situados nas extremidades dos ângulos de um polígono ou de um poliedro. É neste sentido que deve ser entendida a expressão, que temos usado, *vértices de um poliedro* [sic]<sup>4</sup>.

Uma vez precisados estes três elementos fundamentais — vértices, arestas, e faces — e começando a anotar os seus valores para várias famílias de poliedros, é provável que o grande Euler tenha rapidamente descoberto a relação entre eles. Podemos imaginar a surpresa de Euler, quando ele descobriu que, para qualquer poliedro, é satisfeita a seguinte relação:

$$V - A + F = 2.$$

Não é de estranhar que tenha ficado espantado por ninguém ter reparado nisto antes. Brillhantes matemáticos gregos e renascentistas tinham-se dedicado inúmeras horas a examinar todos os aspectos possíveis dos poliedros. Como é que lhes poderia ter passado despercebida esta relação elementar?

A resposta fácil mas leviana é o lugar-comum de que a história da matemática está repleta de resultados óbvios que passaram despercebidos durante anos. Uma resposta mais profunda, no entanto, é a de que os matemáticos que o precederam nunca tinham pensado nos poliedros desta forma. Os antecessores de Euler estavam tão focados nas propriedades métricas que não repararam nessa interdependência fundamental. Não só não lhes ocorreu contar os elementos característicos dos poliedros, como não sabiam em concreto o que poderiam enumerar.

Euler é realmente o mestre de todos nós.

O trabalho de Euler na fórmula dos poliedros está descrito em três importantes documentos. O primeiro foi a explicação a Goldbach, em 1750, da descoberta desta relação. Ele escreveu:

Em cada sólido delimitado por faces planas, a soma do número de faces com o número de ângulos sólidos excede por duas unidades o número de arestas, ou seja  $H + S = A + 2$ .<sup>5</sup>

Euler usou as letras  $H$ ,  $A$  e  $S$  para indicar o número de faces (*hedra*) arestas (*acies*) e vértices (*anguli solidi*). Renomeando estas quantidades e rearranjando os termos, obtemos a relação familiar:

FÓRMULA DE EULER PARA POLIEDROS:

Um poliedro com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces satisfaz a relação  $V - A + F = 2$ .

Nesta carta, Euler também incluiu, sem demonstrações, dez outras observações sobre poliedros. Concluiu a carta destacando esta fórmula, e

também uma outra (que discutiremos no capítulo 20) como sendo as mais importantes. Desapontado, admitiu que estas duas fórmulas «são tão difíceis, que eu ainda não fui capaz de prová-las de forma satisfatória»<sup>6</sup>.

Em 1750 e 1751 Euler escreveu dois artigos sobre a sua fórmula para os poliedros. Devido à lentidão na publicação de artigos científicos, estes trabalhos só apareceram em forma impressa em 1758. No primeiro artigo, «Elementa doctrinae solidorum» («Elementos da doutrina de sólidos»)<sup>7</sup>, Euler inicia o estudo da estereometria. Durante as primeiras trinta páginas, Euler faz observações gerais sobre poliedros. De seguida, Euler começa a sua discussão sobre a relação entre o número de vértices, arestas e faces. Ele prova diversos teoremas que relacionam  $V$ ,  $A$ , e  $F$  e verifica que a relação  $V - A + F = 2$  é válida em vários casos especiais. Mas não fornece uma demonstração de que a fórmula é válida para todos os poliedros. Ainda frustrado e incapaz de completar a prova no caso geral, ele escreve: «Não tenho sido capaz de encontrar uma sólida demonstração deste teorema»<sup>8</sup>.

No ano seguinte, publicou um segundo artigo «Demonstratio non-nullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita» («Demonstração de algumas propriedades notáveis com que são dotados os sólidos encerrados por faces»)<sup>9</sup>. Aqui consegue finalmente apresentar uma demonstração da sua fórmula para poliedros. Apesar do facto de esta fórmula ser uma das mais famosas na matemática, a prova dada por Euler é praticamente desconhecida pelos matemáticos de hoje. Há várias razões para isto. Como veremos, a demonstração de Euler não satisfaz os padrões modernos do rigor matemático. Além disso, desde o ano de 1751 foram apresentadas muitas demonstrações da fórmula de Euler que são mais simples e mais transparentes do que a de Euler. Ainda

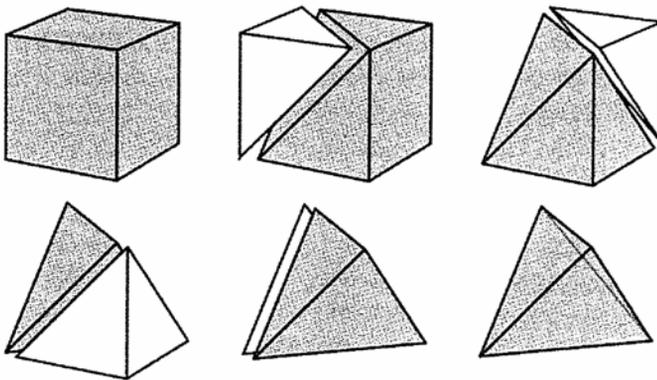


Figura 7.3. Removendo vértices de um cubo para obter um tetraedro

assim, a demonstração de Euler é muito hábil e não usa propriedades métricas dos poliedros. A primeira demonstração verdadeiramente rigorosa foi dada quatro décadas mais tarde, em 1794, por Legendre<sup>10</sup>. No seu argumento surpreendente, que apresentaremos no capítulo 10, Legendre usa propriedades da geometria das esferas.

A demonstração de Euler é uma precursora das demonstrações combinatórias modernas. É usado o método da dissecação, no qual se toma um poliedro complexo, possivelmente com muitos vértices, reduzindo-o sistematicamente a poliedros mais simples. Euler propôs um processo de remoção dos vértices do poliedro, um de cada vez, até que permaneçam apenas quatro, sobrando então uma pirâmide triangular. Através do registo do número de vértices, arestas e faces em cada fase deste processo, e usando as propriedades conhecidas da pirâmide triangular, concluiu que se verifica  $V - A + F = 2$  para o poliedro inicial.

Antes de explicar a demonstração de Euler, olhemos para um exemplo. Consideremos a decomposição do cubo que se mostra na figura 7.3. Em cada fase, vamos remover um vértice do cubo, cortando-lhe uma pirâmide triangular; e continuamos desta forma até obter uma única pirâmide triangular. Uma vez que o cubo é um poliedro relativamente simples, somos capazes de remover cada vértice cortando apenas uma única pirâmide. No entanto, no caso geral, poderemos ter que cortar várias pirâmides triangulares para remover um único vértice. A tabela 7.1 mostra o número de vértices, arestas e faces em cada etapa da decomposição.

Poderíamos esperar que, à medida que o número de vértices diminui, o número de faces e de arestas diminua também de alguma forma previsível. Como podemos ver no gráfico, no entanto, as sequências não apresentam nenhum padrão simples. Neste exemplo, o número de faces aumenta antes de começar a diminuir — o poliedro começa com seis faces, e depois, à medida que os vértices são removidos do poliedro

Tabela 7.1: A decomposição de um cubo até obter um tetraedro, por remoção sucessiva de vértices

	Vértices	Arestas	Faces	Arestas – Faces
Cubo	8	12	6	6
	7	12	7	5
	6	11	7	4
	5	9	6	3
Tetraedro	4	6	4	2

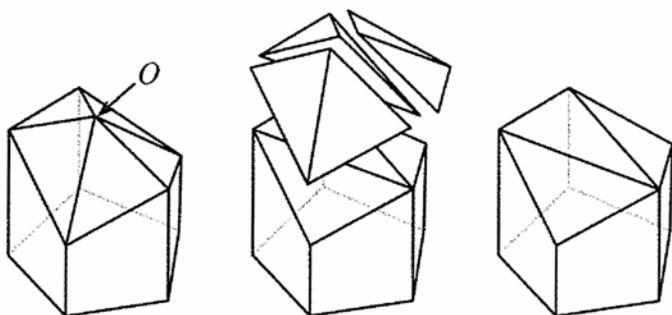


Figura 7.4. Removendo o vértice  $O$ , através do corte de 3 pirâmides triangulares

passa a ter sete, depois sete, depois seis, e finalmente quatro faces. Este caminho para a prova parece levar a um beco sem saída. A chave para a demonstração de Euler é a sua perspicaz observação de que a diferença entre o número de arestas e o número de faces diminui precisamente de uma unidade após a remoção de cada vértice (como indicado na coluna mais à direita da tabela). Como veremos, este é o cerne da prova de Euler.

Começamos com um poliedro com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. A primeira tarefa é a de remover um vértice do poliedro de forma que o poliedro resultante tenha um vértice a menos do que o poliedro original. Após fazer isso, é necessário determinar o número de faces e arestas do poliedro resultante\*. Seja  $O$  o vértice que está a ser removido, e suponhamos que há  $n$  faces (e, portanto,  $n$  arestas) que contêm o ponto  $O$ ". Euler observou que  $O$  pode ser removido cortando-se  $n - 2$  pirâmides triangulares que têm o vértice  $O$ . Por exemplo, o poliedro da figura 7.4 tem um vértice formado a partir da junção de 5 faces, e que é removido cortando 3 pirâmides.

Gostaríamos de determinar o número de faces e o número de arestas no poliedro reduzido. Tal como se viu com o cubo, não há forma simples de responder. Temos que olhar para três casos especiais. Olhemos para o primeiro caso mais simples: assumir que todas as faces que se unem em  $O$  são faces triangulares. Ao remover  $O$ , removemos as  $n$  faces que o contém, mas debaixo das  $n - 2$  pirâmides que retiramos encontramos

\* Mais precisamente, devemos relacionar o número de faces e arestas do poliedro resultante com o número de faces e arestas do poliedro original. (N. do T.)

" Note-se que  $n > 2$ , pois há pelo menos 3 faces que se reúnem em cada vértice de um poliedro. (N. do T.)

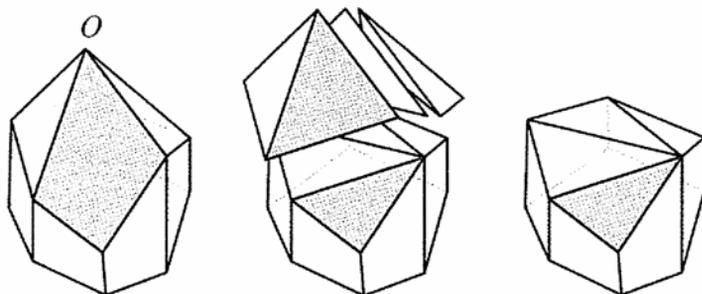


Figura 7.5. Uma face não triangular contribui com uma nova face e com uma nova aresta para o novo poliedro

precisamente  $n - 2$  novas faces triangulares. Partindo do princípio de que todas estas novas faces triangulares se encontram em planos diferentes (não são coplanares), o número de faces do nosso novo poliedro é então

$$F - n + (n - 2) = F - 2,$$

onde  $F$  é o número de faces do poliedro original.

Durante este processo, também removemos as  $n$  arestas que se intersectam no vértice  $O$ , mas somamos as  $n - 3$  arestas que se encontram entre as  $n - 2$  novas faces triangulares. Assim, o número de arestas no novo poliedro é:

$$A - n + (n - 3) = A - 3,$$

onde  $A$  é o número original de arestas.

Olhemos novamente para o exemplo da figura 7.4, que começa com um poliedro com 11 faces e 20 arestas. Após a remoção das três pirâmides triangulares, obtemos um novo poliedro com  $11 - 2 = 9$  faces, e  $20 - 3 = 17$  arestas.

No argumento anterior, fizemos duas hipóteses sobre a decomposição do poliedro. A primeira foi que todas as faces que se reúnem em  $O$  são triangulares, e a outra foi que nenhum par das novas faces triangulares do poliedro são coplanares. Agora, temos de examinar o que acontece se alguma ou ambas as hipóteses não se verificarem.

Suponhamos que uma das faces que se reúnem em  $O$  não é triangular (por exemplo, a face sombreada na figura 7.5). Quando a pirâmide triangular que contém essa face é removida, a totalidade da face não desaparece no novo poliedro. Além disso, é adicionada uma nova aresta

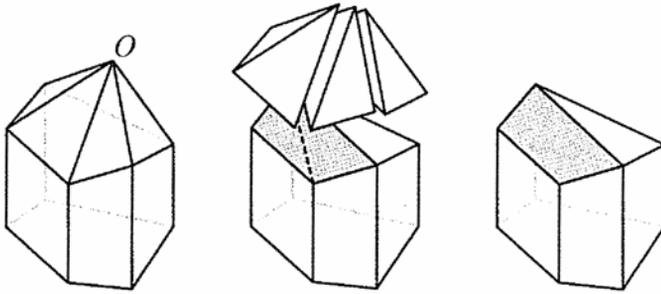


Figura 7.6. Duas faces coplanares reduzem o número de faces e de arestas de uma unidade cada

no lugar onde a face é cortada em duas. Desta forma, o número de faces e arestas do novo poliedro são uma unidade acima do que no argumento anteriormente indicado. No exemplo da figura 7.6, começamos com um poliedro com 12 faces e 23 arestas. Após a remoção das três pirâmides indicadas, obtemos um poliedro com  $12 - 2 + 1 = 11$  faces e  $23 - 3 + 1 = 21$  arestas. Em geral, se o poliedro original tem  $s$  faces não triangulares reunidas no vértice  $O$ , então tanto o número de faces como o de arestas será  $s$  unidades maior do que o esperado. Assim, o número de faces do novo poliedro será igual a  $F - 2 + s$ , e o número de arestas igual a  $A - 3 + s$ .

Por outro lado, suponhamos que duas das novas faces triangulares que se situam lado a lado se encontram no mesmo plano (por exemplo, as faces sombreadas na figura 7.6). Então estas não vão produzir duas faces distintas no poliedro resultante, mas uma única face que será um quadrilátero. Deste modo, haverá uma face a menos do que estava previsto. Como não há nenhuma aresta entre estas duas faces, haverá também menos uma aresta do que o esperado pelo argumento anterior. No exemplo da figura 7.6, começamos com um poliedro de 11 faces e 20 arestas. Após as pirâmides indicadas serem removidas haverá  $11 - 2 - 1 = 8$  faces e  $20 - 3 - 1 = 16$  arestas. Se isto acontecer um número  $t$  de vezes, teremos então menos  $t$  faces, e menos  $t$  arestas do que o previsto. Portanto, no poliedro resultante, o número de faces será  $F - 2 + s - t$  e o número de arestas será  $A - 3 + s - t$ .

Estas fórmulas complicadas\* representam o número de faces e o número de arestas após a remoção de um único vértice. A ideia de man-

\* Aqui, pretende-se essencialmente chamar a atenção para o facto de que estas fórmulas envolvem as variáveis  $s$  e  $t$ , que aparentam dificultar o nosso problema, uma vez que  $s$  e  $t$  não constam na fórmula que queremos demonstrar. (N. do T.)

ter um registo da contagem de arestas e faces após a remoção de vários vértices é assustadora. No entanto, a importante observação de Euler poupa-nos a preocupação de registar todos estes valores. Se tomarmos o número de arestas no novo poliedro e subtraírmos o número de faces no mesmo, obtemos

$$(A - 3 + s - t) - (F - 2 + s - t) = A - F - 1.$$

Por outras palavras, a diferença entre o número de arestas e o número de faces é exactamente uma unidade a menos do que a mesma diferença antes de o vértice ter sido removido\*. Assim, após  $n$  vértices terem sido removidos, a diferença entre o número de arestas e o número de faces no poliedro resultante é exactamente  $A - F - n$ .

Desta forma, podemos agora concluir a demonstração de Euler. Começamos com um poliedro de  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. Suponhamos que vamos removendo vértices, um de cada vez,  $n$  no total, até que fiquem apenas quatro vértices. Então,  $V - n = 4$ , ou  $n = V - 4$ . O único poliedro de quatro vértices é uma pirâmide triangular (que tem quatro faces e seis arestas). Para uma pirâmide triangular, a diferença entre o número de arestas e o número de faces é  $6 - 4 = 2$ , mas de acordo com a discussão anterior, sabemos que essa diferença é também igual a  $A - F - n$ . Assim temos o sistema de equações:

$$A - F - n = 2$$

e

$$n = V - 4.$$

Substituindo a segunda equação na primeira, de forma a eliminar a variável  $n$ , e rearranjando os termos, obtemos  $V - A + F = 2$ , como pretendido.

No início, afirmámos que a demonstração de Euler não era totalmente rigorosa e que ele não tinha reparado nalgumas subtilezas. De facto, Euler foi muito cuidadoso em perceber a variação do número de faces e arestas à medida que os vértices vão sendo removidos; no entanto, foi muito descuidado com o próprio método de remoção de vértices, uma vez que não forneceu instruções precisas de como se devem cortar as pirâmides associadas aos vértices. Em vez disso, indicou o procedimento com alguns

---

\* Notamos também que é precisamente esta subtracção do número de faces ao número de arestas que nos permite eliminar as variáveis auxiliares  $s$  e  $t$ . (*N. do T.*)

exemplos vagos. Euler explicou, correctamente, que há diversas formas de remover um determinado vértice, através do corte de pirâmides triangulares, mas não alertou para o facto de algumas decomposições serem aceitáveis para que o método funcione, ao passo que outras decomposições devem ser evitadas. Ele deixou o leitor com a impressão errada de que uma dada decomposição funcionaria tão bem como qualquer outra. Na verdade, algumas decomposições podem trazer graves problemas.

O primeiro obstáculo que encontramos é que a decomposição pode inadvertidamente originar um poliedro que não é convexo. Euler deu um exemplo no qual o vértice, para ser removido,  $O$ , tem quatro vértices adjacentes  $A, B, C$  e  $D$  (ver figura 7.7). Escreveu ele:

Isto pode ser feito de duas maneiras ... duas pirâmides terão de ser removidas, ou  $OABC$  e  $OACD$ , ou  $OABD$  e  $OBCD$ . E se os pontos  $A, B, C, D$  não estão no mesmo plano, os sólidos resultantes terão, em cada caso, formas diferentes<sup>11</sup>.

Isto é verdade mas, se os quatro vértices vizinhos ao vértice  $O$  não são coplanares, então um dos dois poliedros resultantes será necessariamente convexo e outro não será convexo. Para o poliedro na figura 7.7, a remoção das pirâmides  $OABD$  e  $OBCD$  irá produzir um poliedro que não é convexo.

Euler nunca mencionou a propriedade de convexidade no seu artigo. Ele assumiu, sem o ter indicado, que todos os poliedros são convexos. Observando atentamente o seu algoritmo, vemos que é importante que estes poliedros permaneçam convexos após a remoção de vértices. A obtenção de um poliedro não convexo pode conduzir a problemas

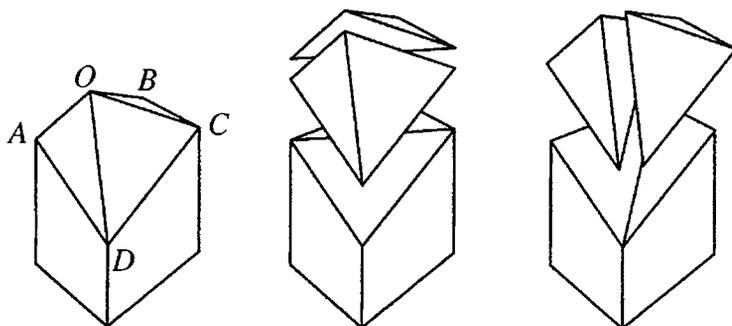


Figura 7.7. A remoção de um vértice de um poliedro (esquerda) pode dar origem a um poliedro convexo (centro) ou não convexo (direita)

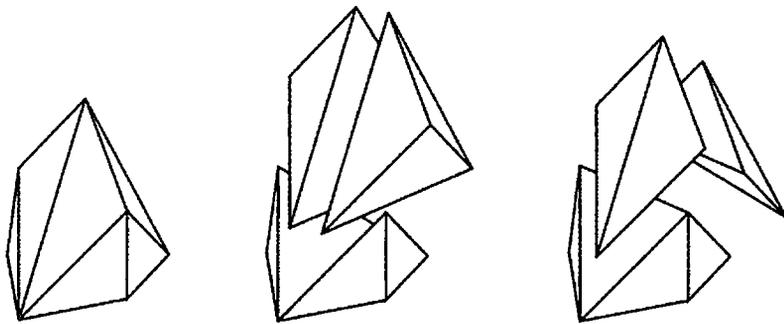


Figura 7.8. O método de Euler, aplicada ao poliedro à esquerda pode produzir um poliedro degenerado (centro) ou não (à direita)

sérios, pois pode ser impossível usar o método de Euler para remover um vértice localizado num ponto onde a convexidade falha. Podemos inclusive encontrar problemas mais graves.

Como o matemático Henri Lebesgue (1875-1941) assinalou, não só o poliedro resultante poderá não ser convexo, como inclusivamente pode nem sequer ser um poliedro<sup>12</sup>! Na figura 7.8 vemos um vértice de um poliedro onde se unem quatro faces. Como no exemplo anterior, podemos remover este vértice de duas maneiras diferentes. Uma dessas formas de remover o vértice funciona para obter um novo poliedro convexo, mas a outra produz um objecto que não é um poliedro, sendo composto por dois poliedros que se unem ao longo de uma aresta comum. Para piorar a situação, este não-poliedro não satisfaz a fórmula de Euler (como  $V = 6$ ,  $A = 11$  e  $F = 8$ , temos  $V - A + F = 3$ , em vez de 2). Este exemplo parece indicar uma grave falha na demonstração de Euler. Na figura 7.9, vemos que, através da aplicação de cortes pelo método de Euler, podemos ainda obter outros poliedros degenerados. Uma das decomposições desta figura dá origem a dois poliedros unidos por um único vértice, e a segunda produz não um, mas a união de dois poliedros. Uma vez mais, estes objectos não satisfazem a fórmula de Euler<sup>13</sup>.

Acontece que a demonstração de Euler ainda pode ser salva. Com um pouco de cuidado, podemos reparar a argumentação<sup>13</sup>. Em todos os exemplos dados acima, fazer uma escolha errada durante o processo de remoção de vértices levaria a uma impossibilidade de prosseguir o método; no entanto, em cada caso, existe também uma decomposição que

<sup>12</sup> Mais precisamente, o primeiro caso da figura 7.9 não satisfaz a fórmula de Euler, embora o segundo a satisfaça. (N. do T.).

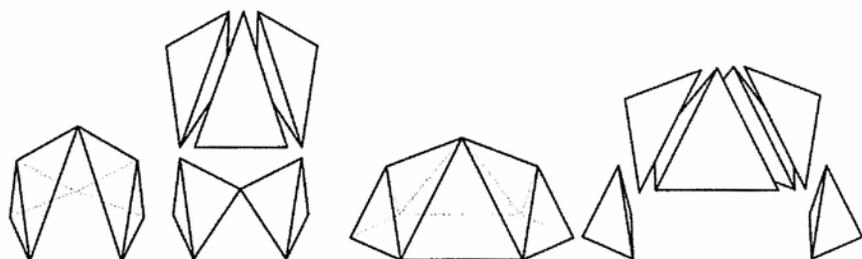


Figura 7.9. Outros problemas com o método de Euler

é adequada ao método. De facto, pode mostrar-se que existem sempre escolhas estratégicas, e não arbitrárias, para remover um dos vértices de forma que garanta que o objecto resultante é ainda um poliedro convexo, salvando-se assim o algoritmo. Assim, após estas observações, podemos finalmente afirmar que a fórmula de Euler é válida para todos os poliedros convexos.

Após Euler ter apresentado a sua prova, apareceram muitas outras novas demonstrações, a maioria delas sendo mais simples e directas que a dele. Veremos algumas delas neste livro.

A questão subtil da convexidade revelou ser um verdadeiro desafio para os matemáticos. Foi uma fonte para décadas de investigação interessante, pois os matemáticos procuraram determinar exactamente quais as propriedades que um poliedro deve possuir a fim de satisfazer a fórmula de Euler. Como veremos, eles olharam para poliedros não convexos, poliedros com buracos, e outros exemplos ainda mais patológicos. Esta linha de investigação acabou por ser extremamente proveitosa.

Tardaram muitos anos até que os matemáticos dessem a devida importância a algo que era evidente para Euler — que este teorema lidava com as dimensões e as regras para a construção de objectos matemáticos. A fórmula de Euler e suas generalizações tornaram-se a pedra angular na área da topologia.

É provável que Euler não fizesse ideia da importância que posteriormente seria dada a este seu teorema. Ele nunca mais regressou ao problema da classificação dos poliedros e não escreveu novamente sobre a fórmula dos poliedros. Euler não chegou a saber que esta seria uma das suas mais adoradas contribuições para a matemática.

## Capítulo 8

# Sólidos Platônicos, Bolas de Golfe, Fullerenos e Cúpulas Geodésicas

*A matemática preocupa-se apenas com a enumeração e comparação de relações.*

— Carl Friedrich Gauss<sup>1</sup>

*Os matemáticos não estudam objectos, mas sim relações entre os objectos.*

— Henri Poincaré<sup>2</sup>

«Isso é fantástico, mas para que serve?», pergunta o aluno céptico, em tom de sarcasmo. A beleza é uma característica maravilhosa, mas é frequente afirmar-se que as aplicações constituem uma medida mais importante do valor de um dado teorema. Afinal, para que serve a fórmula de Euler?

Esta é uma pergunta razoável para se colocar acerca de qualquer teorema matemático. A fórmula de Euler é mais do que simplesmente um teorema elegante. Nos capítulos que se seguem vamos apresentar muitas aplicações da fórmula de Euler. Na maioria deles, será necessário esclarecer o contexto adequado para que se entenda essa aplicação. Para aguçar o apetite do leitor, fazemos agora uma pausa e apresentamos duas aplicações rápidas. Em primeiro lugar, vamos provar a unicidade dos sólidos platônicos utilizando a fórmula de Euler, e de seguida, usaremos a fórmula de Euler para obter um teorema estrutural para bolas de golfe, moléculas grandes, e cúpulas geodésicas.

No capítulo 5, apresentámos a demonstração de Euclides de que existem exactamente cinco sólidos platónicos. Embora esta sua prova pareça curta, baseou-se em muitos dos teoremas geométricos demonstrados nos doze livros anteriores dos *Elementos* de Euclides. Neste capítulo, vamos fornecer uma prova diferente da unicidade dos cinco sólidos platónicos, em que se usa apenas a fórmula de Euler e um pouco de aritmética simples.

Suponhamos que temos um sólido regular. Vamos mostrar que ele tem que ser um dos cinco conhecidos sólidos platónicos: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o icosaedro, ou o dodecaedro. Vamos supor que o poliedro tem  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. Da fórmula de Euler sabemos que

$$V - A + F = 2.$$

Como o poliedro é regular, cada face é um polígono regular com o mesmo número de lados. Este número, que vamos designar por  $n$ , deve obviamente ser igual ou superior a três. Por definição de regularidade, o mesmo número de arestas intersectam-se em cada vértice. Este número,  $m$ , deve ser também igual ou superior a três (naturalmente,  $m$  é também igual ao número de faces que se unem em cada vértice).

Cada face contribui com  $n$  arestas para o polígono, mas como cada aresta é compartilhada por duas faces, a quantidade  $nF$  conta cada aresta duas vezes. Por outras palavras,

$$2A = nF, \text{ ou } A = \frac{nF}{2}.$$

De igual forma, cada face contribui com  $n$  vértices, mas como  $m$  faces se reúnem em cada vértice, a quantidade  $nF$  conta  $m$  vezes cada vértice. Assim,

$$mV = nF, \text{ ou } V = \frac{nF}{m}.$$

Agora vamos substituir estas quantidades na fórmula de Euler, e resolver em ordem a  $F$ .

$$V - A + F = 2$$

$$\frac{nF}{m} - \frac{nF}{2} + F = 2$$

$$F\left(\frac{n}{m} - \frac{n}{2} + 1\right) = 2$$

$$F\left(\frac{2n - mn + 2m}{2m}\right) = 2$$

$$F = \frac{4m}{2n - mn + 2m}.$$

Sabemos que  $4m$  e  $F$  são ambos positivos. Assim, para que esta última equação seja válida, devemos ter

$$2n - mn + 2m > 0.$$

É fácil verificar que apenas cinco pares de números inteiros  $(n, m)$  satisfazem esta desigualdade, juntamente com as hipóteses  $n > 2$  e  $m > 2$ . Estes pares são:  $(3, 3)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(3, 5)$ ,  $(4, 3)$ , e  $(5, 3)$ . Utilizando as fórmulas acima para  $V$ ,  $A$  e  $F$ , vemos que estes correspondem precisamente aos cinco sólidos platônicos (tabela 8.1).

Tabela 8.1: Apenas cinco pares de números inteiros  $(n, m)$  satisfazem os requisitos para definirem poliedros regulares

	$n$ (arestas por face)	$m$ (faces por vértice)	$2n - nm + 2m$	$V$	$A$	$F$
Tetraedro	3	3	3	4	6	4
Octaedro	3	4	2	6	12	8
Icosaedro	3	5	1	12	30	20
Cubo	4	3	2	8	12	6
Dodecaedro	5	3	1	20	30	12

Devemos reflectir sobre quão surpreendente é esta demonstração. A prova de Euclides era local e geométrica. Usava os valores dos ângulos das faces regulares de modo a determinar as configurações possíveis nos vértices. Esta informação local era depois usada para tirar uma conclusão sobre a natureza global do poliedro.

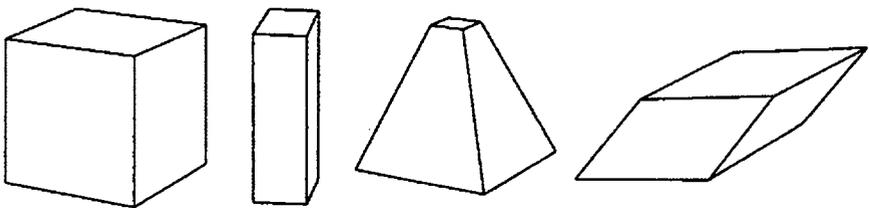


Figura 8.1. Formas cúbicas

Esta nova prova, por outro lado, é global e é praticamente desprovida de geometria. O teorema é acerca de sólidos regulares, mas em nenhuma altura na demonstração se usa o facto de as faces serem polígonos regulares! Nem nunca sequer se supõe que as faces são congruentes. A fórmula de Euler é combinatória — toma em conta o número de vértices, arestas e faces. Não faz sentido incorporar comprimentos de arestas e valores de ângulos na fórmula de Euler, mas fomos capazes de usá-la para determinar os sólidos platónicos.

Uma vez que não usámos todas as hipóteses do teorema, certamente provámos algo original. O que fizemos foi supor que todas as faces tinham exactamente o mesmo número de lados, e que o mesmo número de faces se intersectavam em cada vértice. Deste ponto de vista, todas as formas da figura 8.1 são semelhantes — todas se assemelham ao cubo.

Essencialmente, nós provámos que existem apenas cinco configurações de poliedros com a propriedade de que todas as suas faces têm o mesmo número de lados e o mesmo número de faces se unem em todos os vértices. Mostrámos que qualquer poliedro com estas propriedades deve «parecer-se» com um tetraedro, um octaedro, um icosaedro, um cubo, ou um dodecaedro, da mesma forma que os poliedros na figura 8.1 se assemelham a um cubo. Em particular, o número de vértices, arestas e faces terá que coincidir com o caso de um dos cinco sólidos platónicos.

A fim de criar bolas de golfe que «voam» de forma mais eficiente, uma empresa inventou bolas de golfe poliédricas. Em vez de uma bola coberta por ondulações redondas, a parte exterior da bola é construído a partir de 232 faces poligonais indentadas (ver figura 8.2). Um olhar rápido sobre a superfície da bola revela um mar de faces hexagonais. Porém, podemos

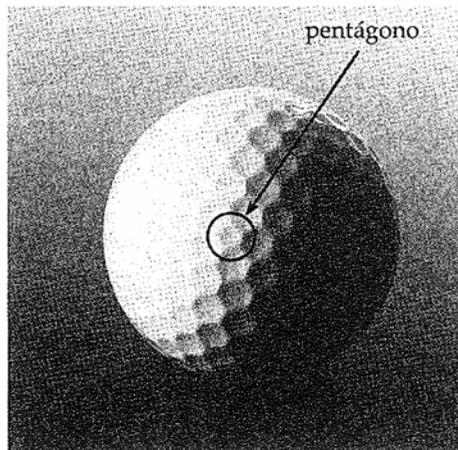


Figura 8.2. Uma bola de golfe composta por 220 hexágonos e 12 pentágonos

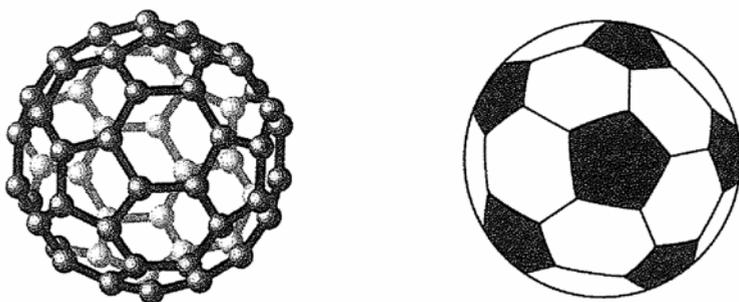


Figura 8.3. Os fulerenos e as bolas de futebol têm exactamente doze pentágonos

ficar descansados, pois esta bola não é um sexto sólido platónico. Após uma inspecção mais minuciosa, descobrimos que 12 das faces são pentágonos.

Na introdução, apresentámos a família de moléculas em forma de bola, constituídas apenas por átomos de carbono, chamadas fulerenos. Na figura 8.3 representa-se o fulereno de Buckminster,  $C_{60}$ , que tem a mesma forma que uma bola de futebol de couro. Os átomos de carbono formam 12 anéis pentagonais e 20 hexagonais. Os cientistas foram capazes de criar fulerenos com vários outros números de átomos de carbono. Por exemplo, o  $C_{540}$  é um fulereno maciço com 540 átomos de carbono. A estrutura poliédrica desta molécula é constituída por 12 pentágonos e 260 hexágonos.

Na verdade, cada fulereno tem anéis pentagonais e hexagonais, e o número de pentágonos é sempre igual a 12.

O seguinte resultado mostra que isso não é uma coincidência. Usamos a expressão «grau de um vértice» para indicar o número de arestas que se encontram num dado vértice.

#### TEOREMA DOS DOZE PENTÁGONOS

Se cada face de um dado poliedro é um pentágono ou um hexágono e se o grau de cada vértice é três, então esse poliedro tem exactamente doze faces pentagonais.

Este teorema é uma aplicação directa da fórmula de Euler. Suponha-se que temos um poliedro, com  $P$  faces pentagonais e  $H$  faces hexagonais. Uma vez que cada pentágono tem cinco lados e cada hexágono tem seis lados, e que cada aresta se encontra em duas faces, o número de arestas é dado por  $A = (5P + 6H)/2$ . Da mesma forma, uma vez que cada um dos vértices tem o grau 3, o número de vértices é  $V = (5P + 6H)/3$ . Inserindo estas quantidades na fórmula de Euler, obtemos

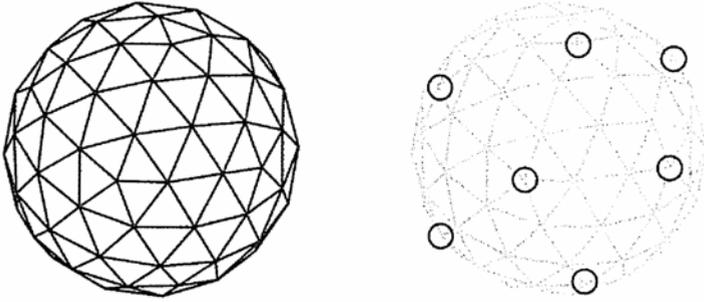


Figura 8.4. Uma cúpula geodésica com doze vértices de grau cinco

$$2 = V - A + F = (5P + 6H)/3 - (5P + 6H)/2 + (P + H).$$

Multiplicando ambos os lados por 6 obtemos a conclusão desejada:

$$12 = 10P + 12H - 15P - 18H + 6P + 6H = P.$$

O teorema dos doze pentágonos tem uma formulação dual, que se obtém trocando os papéis das faces e dos vértices. Deixamos a prova do seguinte enunciado para o leitor.

Se cada face de um poliedro é um triângulo e o grau de todos os vértices é igual a cinco ou a seis, então o poliedro tem exactamente doze vértices de grau cinco.

Na figura 8.4 podemos ver um exemplo de um destes poliedros, em que 7 dos seus 12 vértices de grau cinco estão destacados. Muitas cúpulas geodésicas, tais como a Biosfera de Montreal, são baseados neste *design*. Naturalmente, as cúpulas geodésicas não são esferas completas. O Epcot Center na «Disney World» é baseado neste projecto, embora cada face triangular esteja subdividida noutros três triângulos.

Com estes simples exemplos, obtemos um primeiro vislumbre do alcance da fórmula de Euler. Vemos como uma fórmula de simples contagem pode forçar a existência de certas propriedades nos poliedros. Nos capítulos que se seguem, veremos importantes aplicações da, aparentemente elementar, relação de Euler.

## Capítulo 9

### Ultrapassado por Descartes?

*Espero que a posteridade me julgue generosamente, não apenas quanto às coisas que expliquei, mas também quanto àquelas que intencionalmente omiti de modo a deixar para os outros o prazer da descoberta.*

— René Descartes<sup>1</sup>

Em 1860, um século depois de Euler ter apresentado a sua demonstração da fórmula dos poliedros, surgiram indicações de que René Descartes, o famoso filósofo, cientista e matemático, tinha conhecimento desta notável relação em 1630, mais de cem anos antes de Euler. Estes indícios foram encontrados num manuscrito perdido. A história é fascinante, tal como o debate acerca do nome que deve acompanhar a fórmula dos poliedros.

Descartes nasceu numa nobre, se não mesmo rica, família em La Haye, em França, nos arredores de Tours. A sua mãe morreu poucos dias depois do seu nascimento, e o seu pai, apesar do seu apoio ao «pequeno filósofo», esteve ausente durante grande parte da infância de René.

O jovem René era um menino adoentado que se tornou um hipocondríaco em adulto. Enquanto criança, frequentou a escola jesuíta em La Flèche, e um dos seus professores deixava-o permanecer na cama por quanto tempo fosse necessário, todas as manhãs, mesmo quando os outros meninos já estavam nas aulas. Descartes usava esse tempo para pensar. Continuou com esta prática ao longo de toda a sua vida, alimentando muitas das suas maiores ideias durante as tranquilas e pacíficas manhãs, passadas na cama.

Um tema comum na vida de Descartes foi a sua busca pela solidão. Como ele próprio dizia, «Eu desejo apenas tranquilidade e repouso<sup>2</sup>.» Esta necessidade de poucas distrações reflecte-se nas suas várias mudanças de morada e em ter permanecido solteiro ao longo da sua vida. Durante o seu período no exército, gostava dos longos períodos de paz que lhe proporcionavam momentos de silêncio para reflexão profunda. Embora não fosse propriamente um eremita, Descartes estava sempre ansioso por passar tempo sozinho a trabalhar nas suas actividades científicas e filosóficas. O seu lema ilustrava bem este desejo: *bene vixit qui bene latuit* (viveu bem quem bem se escondeu).

Em 1637 Descartes publicou um pequeno livro com um longo título, os influentes *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les Sciences* (*Discurso sobre o método para bem conduzir a razão e procurar a verdade nas ciências*)<sup>3</sup>. A publicação do *Discurso do Método* marcou o início da filosofia moderna. Neste livro, que é agora considerado um clássico da literatura, Descartes traçou uma filosofia baseada na dúvida e no racionalismo. Ele contém a mais famosa frase de filosofia: *cogito ergo sum*, penso, logo existo. A sua filosofia foi uma das bases da Revolução Científica.

O *Discurso do Método* continha três apêndices, o mais importante e influente dos quais, com uma centena de páginas e intitulado *La Géométrie* (A Geometria), é frequentemente referido como o acontecimento que marca o nascimento da geometria analítica, um assunto tão enraizado na matemática actual que é difícil imaginar trabalhar sem ele (devemos também dar crédito a Fermat, contemporâneo de Descartes, pelas suas contribuições sobre este assunto). A geometria analítica é a fusão entre a geometria e a álgebra. No âmbito da geometria analítica, introduz-se um sistema de coordenadas no plano através do qual podemos localizar um ponto, indicando as suas coordenadas  $(x, y)$ . Este sistema de coordenadas é hoje em dia denominado por *coordenadas cartesianas*, em homenagem a Descartes. A enorme importância desta abordagem é que se passa a poder representar por equações algébricas uma grande quantidade de figuras geométricas — círculos, linhas, curvas —, o que permite usar as ferramentas da álgebra para resolver problemas geométricos. Embora a geometria analítica encontrada no apêndice *A Geometria* não esteja completamente desenvolvida (por exemplo, Descartes nunca usa explicitamente eixos de coordenadas), muitas das ideias-chave estão aqui presentes.

Em 1649, após três anos de repetidos convites, aos cinquenta e três anos de idade, Descartes aceitou visitar a jovem rainha sueca Christina para lhe dar lições de filosofia. A rainha insistiu em que as cinco horas

de ensino tutorial, três vezes por semana, começassem às cinco horas da manhã e que se realizassem numa sala excepcionalmente fria (durante o Inverno mais frio na Suécia em 60 anos).

As lições matinais forçaram Descartes a abandonar a sua longa tradição de permanecer na cama durante as horas da manhã. Estas condições brutais podem ter enfraquecido o já frágil corpo de Descartes. A 1 de Fevereiro de 1650, passados apenas alguns meses da sua chegada à Suécia, contraiu pneumonia. Recusou o tratamento do médico de Christina, preferindo prescrever a sua própria medicação — uma mistura de vinho e tabaco de modo a induzir rapidamente a expectoração. A sua cura revelou-se ineficaz. Morreu a 11 de Fevereiro de 1650.

O amigo de Descartes, o embaixador francês Hector-Pierre Chanut, chamou a si a tarefa de enviar os pertences pessoais de Descartes de volta a Paris, onde seriam recolhidos pelo cunhado de Chanut, Claude Clerselier. Mas o navio naufragou no Sena, derramando o seu conteúdo no rio. As posses de Descartes, incluindo a arca contendo muitas páginas de notas e manuscritos, flutuaram para longe. Felizmente, três dias depois, a arca foi recuperada. Os papéis foram cuidadosamente separados e pendurados para secar como roupa lavada.

Finalmente, na posse dos documentos de Descartes, Clerselier começou a publicá-los. Ele também os disponibilizou para serem analisados por investigadores. Leibniz foi um dos matemáticos interessados nas notas encharcadas de Descartes. Numa das suas viagens a Paris, Leibniz fez uma cópia de algumas das notas de Descartes sobre poliedros, que datavam de cerca de 1630. Estas importantes notas são agora chamadas *Progymnasmata de solidorum elementis* (Exercícios dos Elementos dos Sólidos).

Clerselier morreu em 1684, oito anos após a visita de Leibniz, deixando alguns manuscritos ainda por publicar. Um destes foi *Elementos dos Sólidos*. O original nunca mais foi visto. A cópia pessoal de Leibniz desapareceu e não foi encontrada durante quase dois séculos. Se não fosse a providência, nunca saberíamos do trabalho visionário de Descartes sobre poliedros.

Foucher de Careil, biógrafo de Descartes no século XIX, estava ciente, através das cartas de Leibniz, de que de tinha feito cópias de manuscritos perdidos de Descartes. Em 1860, procurou esses documentos na bem organizada colecção de Leibniz na Biblioteca Real de Hanover, mas não os encontrou. Mas, num incrível golpe de sorte, encontrou uma pilha de empoeirados e desconhecidos papéis não catalogados pertencentes a Leibniz num armário que tinha sido esquecido. Foi nessa colecção que de Careil encontrou a cópia de Leibniz dos *Elementos dos Sólidos*.

Como os que estudaram poliedros antes dele, a abordagem de Descartes era métrica. Muitas das suas fórmulas lidavam com medidas de

ângulos. Ao contrário dos seus antecessores, mas como Euler faria um século mais tarde, Descartes também abordou os poliedros de forma combinatória: contava características dos poliedros e estabelecia relações algébricas entre elas. Enquanto Euler, mais tarde, contaria o número de vértices, arestas e faces, de modo a encontrar a relação  $V - A + F = 2$ , Descartes contava vértices (aos quais, tal como Euler, chamava ângulos sólidos), faces e ângulos planos.

Nas suas notas, Descartes apresentou muitos factos sobre poliedros. Não forneceu provas completas, mas não é difícil deduzir como cada fórmula decorre logicamente das anteriores. O primeiro grande teorema é a generalização, para poliedros, do resultado bem conhecido para os polígonos de que a soma dos ângulos exteriores é de  $360^\circ$ . Vamos discutir este resultado, agora conhecido como a fórmula de Descartes, em detalhe no capítulo 20. Ele também indicou o que pode ser considerada a primeira prova algébrica que não há mais do que cinco sólidos platónicos.

O trabalho culminava na seguinte igualdade, relacionando o número de faces, vértices, e ângulos planos ( $F$ ,  $V$  e  $P$ , respectivamente):

$$P = 2F + 2V - 4.$$

É devido a esta relação ter sido descoberta por Descartes que alguns investigadores alegam que a fórmula de Euler deveria ter o seu nome. Basta simplesmente observar que, num poliedro, o número de ângulos planos é sempre o dobro do número de arestas (por exemplo, um cubo tem 24 ângulos planos e 12 arestas). Ou seja, se há  $A$  arestas, então existem  $P = 2A$  ângulos planos. Substituindo  $P$  por  $2A$  obtém-se  $2A = 2F + 2V - 4$ . Dividindo por dois e reorganizando os termos, obtemos a fórmula para poliedros, como descrevemos antes.

Surgem então as perguntas: será que Descartes descobriu a fórmula de Euler? Nesse caso, deveria ela ter o seu nome? A descoberta das notas de Descartes iniciou um debate que se mantém até aos dias de hoje. Figuras importantes da matemática têm discordado sobre este tema. Ainda hoje, encontramos livros que afirmam enfaticamente que Descartes descobriu a fórmula antes de Euler, e outros que dizem o contrário. Naturalmente, devemos também ter em conta as palavras do eminente filósofo Thomas Kuhn (1922-1996), que escreveu: «O facto de [a prioridade da descoberta] ser questionada ... é um sintoma de que algo está distorcido na imagem da ciência que dá à descoberta um papel tão fundamental<sup>4</sup>.»

Ernest de Jonquières (1820-1901), um dos primeiros e mais fortes apoiantes de Descartes, sugeriu que o teorema deveria ser chamado a fórmula de Descartes-Euler. Em 1890, ele escreveu: «Assim, não se pode

negar que ele a sabia, uma vez que é uma dedução tão directa e tão simples, direi mesmo tão intuitiva, a partir dos dois teoremas que ele tinha acabado de enunciar<sup>5</sup>.» Aqueles que concordam com de Jonquières argumentam que, uma vez que a fórmula de Euler decorre de forma tão directa do trabalho de Descartes, que ou ele sabia da relação, ou estava tão perto que o teorema deveria ter o seu nome. Alegam também que, se Descartes revisse este esboço de manuscrito de modo a considerá-lo apto para publicação, teria formulado o teorema na forma que agora é mais conhecida. Além disso, mesmo que Descartes não soubesse a relação exacta, ele provou um teorema que é logicamente equivalente ao de Euler. Ele e Euler simplesmente escolheram quantidades diferentes para relacionar. Hoje em dia, não é incomum a fórmula dos poliedros ser chamada a fórmula de Descartes-Euler.

Surpreendentemente, muito deste debate gira em torno do conceito de aresta de um poliedro, que, como já dissemos, foi introduzido por Euler. Esta característica é para nós um atributo óbvio de um poliedro, mas não tinha um nome no tempo de Descartes. Se olhássemos para uma aresta de um poliedro, era apenas como um lado de uma das suas faces poligonais; as arestas eram vistas como os objectos geométricos utilizados para criar os ângulos. A fim de obter a forma usual da fórmula de Euler, Descartes teria que ter introduzido a noção de aresta.

Aqueles que afirmam que Descartes não antecipou a fórmula de Euler sustentam que a introdução de arestas para a fórmula é essencial. Como vimos anteriormente, Euler reconheceu que a importância fundamental do teorema é que ele relaciona objectos de dimensão zero (vértices), objectos unidimensionais (arestas) e objectos bidimensionais (faces). Nos anos que se seguiram, a fórmula de Euler foi generalizada e tornou-se um importante teorema de topologia. Os topólogos não pararam nas faces de duas dimensões. Como veremos nos capítulos 22 e 23, Poincaré e outros foram capazes de generalizar a fórmula de Euler para objectos de qualquer dimensão.

Todos concordam que Descartes chegou ameaçadoramente perto, mas não conseguiu dar o importante último passo. Os ângulos planos não são os objectos adequados para serem relacionados com as faces e com os vértices. Para obter uma formulação correcta do resultado, ele precisaria de introduzir a noção de aresta. Para contestar os que dizem que Descartes certamente saberia da relação entre ângulos planos e arestas, os críticos fazem notar que até mesmo o matemático mais talentoso pode não reparar nalgumas consequências óbvias do seu próprio trabalho. Depois de examinar cuidadosamente o manuscrito, o matemático Henri Lebesgue escreveu: «Descartes não enunciou o teorema; ele não o viu<sup>6</sup>.»

Há uma convicção muito generalizada, mas equivocada, de que os conceitos matemáticos são chamados pelos nomes dos seus descobridores, e de que, quando isto não sucede, a situação é semelhante ao plágio ou falsificação na história. De acordo com este critério, Euler terá sido repetidamente injustiçado, pois muitas das suas descobertas são associadas aos nomes de outros matemáticos (há uma anedota bem conhecida segundo a qual «os objectos em matemática levam o nome da primeira pessoa que os descobriu depois de Euler».) Existem inúmeros exemplos (alguns neste livro) de objectos matemáticos que não levam o nome do descobridor, mas de alguém que fez contribuições significativas para o assunto — talvez a primeira pessoa a reconhecer a verdadeira importância dessa descoberta. Kuhn observa que, tal como neste caso, muitas vezes a questão da prioridade da descoberta não é clara. «Assumimos com facilidade que a descoberta de algo, tal como ver ou tocar, deve ser inequivocamente atribuída a um indivíduo e a um momento precisos no tempo. Mas, no segundo caso, a atribuição é sempre impossível, e no primeiro, é muitas vezes igualmente difícil... Descobrir... envolve reconhecer simultaneamente que *algo é*, e *o que é*» (recorde-se o comentário de Waterhouse sobre os sólidos regulares não terem nada de especial até Teeteto ter reconhecido a característica comum a todos eles).

Se Descartes descobriu ou não a fórmula dos poliedros antes de Euler é discutível. Mas como o trabalho de Descartes nunca foi publicado e ele não reconheceu a versão «útil» da fórmula, não é descabido que continuemos a chamar à relação  $V - A + F = 2$ , a fórmula de Euler.

## Capítulo 10

# A Demonstração de Legendre

*O fundamental para os matemáticos é que a arquitectura tem que estar certa. Em toda a matemática que eu fiz, o ponto essencial foi encontrar a arquitectura certa. É como construir uma ponte. Quando as principais linhas da estrutura estão correctas, todos os detalhes milagrosamente encaixam. O problema é a concepção global.*

— Freeman Dyson<sup>1</sup>

A segunda demonstração publicada da fórmula de Euler para poliedros, e a primeira a obedecer aos rigorosos padrões actuais, foi obtida por Adrien-Marie Legendre. Legendre foi um matemático francês que pertenceu à Académie des Sciences de Paris, bem como à Royal Society de Londres. Publicou em diversas áreas, mas as suas contribuições mais importantes foram em teoria dos números e na teoria das funções elípticas. O seu legado inclui ainda um livro extremamente popular na geometria elementar que escreveu em 1794, *Éléments de géométrie* (*Elementos de Geometria*). Em vários aspectos, os *Elementos* de Legendre substituíram os *Elementos* de Euclides, tornando-se o principal texto de geometria durante os cem anos seguintes, e constituíram o protótipo para as futuras gerações de livros de geometria. Foi várias vezes traduzido para o inglês; uma tradução americana chegou a ter trinta e três edições.

Legendre incluiu a fórmula de Euler para poliedros nos seus *Elementos de Geometria*, e a popularidade do livro deu-lhe uma ampla divulgação. Legendre não corrigiu a prova de Euler; em vez disso, apresentou uma

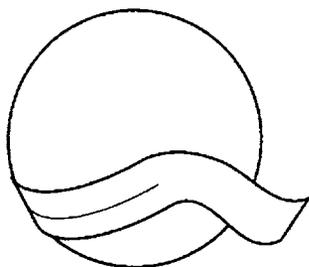


Figura 10.1. Colocando uma fita numa esfera para encontrar um círculo máximo

nova demonstração, que difere substancialmente da de Euler. O argumento engenhoso de Legendre utiliza conceitos de geometria esférica e propriedades métricas, tais como medidas de ângulos e áreas. O sucesso desta prova é especialmente inesperado uma vez que estes conceitos não aparecem no enunciado do teorema.

A chave para a prova de Legendre é uma fórmula elegante da geometria esférica que determina a área de um triângulo na superfície de uma esfera em termos dos seus ângulos internos. Numa esfera, os triângulos e outras figuras poligonais não são formados a partir de linhas rectas, mas a partir de arcos, ou segmentos, de *círculos máximos*. Um círculo máximo é qualquer circunferência sobre uma esfera que possui o mesmo raio que o da própria esfera, ou, de forma equivalente, é uma circunferência, desenhada sobre a esfera, cujo raio é o máximo possível. Exemplos de círculos máximos na Terra são o equador e as linhas de longitude constante. As linhas de latitude constante (excepto o equador), como os Trópicos de Câncer e de Capricórnio, ou o círculo polar ártico, não são círculos máximos. Os círculos máximos não são rectas, mas são o mais próximo possível de uma linha recta sobre a superfície de uma esfera. Estes círculos têm a propriedade notável de minimizar o comprimento. Dito de outra forma, o caminho mais curto entre quaisquer dois pontos sobre uma esfera é sempre parte de um círculo máximo. Ignorando constrangimentos físicos, tais como a resistência do ar na atmosfera e a rotação da Terra, um voo de avião desde a Pensilvânia até à Índia, pretendendo percorrer o caminho mais curto, iria voar ao longo de um círculo máximo que sobrevoa a Islândia.

Uma forma prática de encontrar círculos máximos numa pequena esfera é usar uma fita (figura 10.1). Tome uma fita larga, tais como as que se usam em presentes de aniversário e coloque-a na esfera. Ajuste a fita em torno da esfera de tal forma que fique lisa e sem torcer lateralmente. Fazendo isto, a fita irá percorrer um círculo máximo.

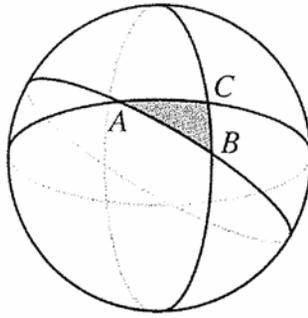


Figura 10.2. Um triângulo formado por três círculos máximos

Vamos definir um triângulo esférico como sendo uma região, na superfície de uma esfera, delimitada por três círculos máximos (como ilustrado na figura 10.2). Em linguagem matemática, um círculo máximo é conhecido como uma *geodésica*, por isso, um nome mais preciso para um triângulo esférico é um *triângulo geodésico*. Vamos supor, como fez Legendre, que cada um dos lados de um triângulo geodésico é menor do que uma metade de um círculo máximo.

Os triângulos geodésicos foram introduzidos, pela primeira vez, pelo matemático grego Menelau de Alexandria (c. 98), no seu livro *Sphaerica*. Neste livro, Menelau apresentou uma teoria para a geometria esférica que é análoga à teoria de Euclides para a geometria plana encontrada nos *Elementos*. Ele mostrou que muitos dos teoremas para triângulos planos são também válidos para triângulos geodésicos. Por exemplo, a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo esférico é sempre maior do que o comprimento do terceiro lado. Menelau mostrou um resultado interessante que é verdadeiro numa esfera, mas não num plano: dois triângulos geodésicos semelhantes (que têm ângulos internos com igual medida) têm que ser congruentes. Por outro lado, um dos teoremas mais conhecidos de geometria plana — a soma dos ângulos internos de um triângulo é de  $180^\circ$ , ou  $\pi$  radianos — não se verifica numa esfera\*. Numa esfera, a soma dos ângulos internos é sempre maior do que  $\pi$ . Por exemplo, os ângulos internos do maior dos triângulos geodésicos da figura 10.3 são três ângulos rectos, de modo que a soma é  $3\pi/2$ . Nessa figura, o

---

\* No dia-a-dia medimos os ângulos em graus — um ângulo recto é de  $90^\circ$ , existem  $360^\circ$  numa volta completa, e assim por diante. No entanto, na maioria das aplicações matemáticas, os ângulos são medidos em radianos. A conversão é simples:  $180^\circ$  correspondem a  $\pi$  radianos. Assim, um ângulo recto vale  $\pi/2$  radianos, e há  $2\pi$  radianos numa volta completa. Mais tarde, veremos exemplos concretos que ilustram a razão pela qual o radiano é uma unidade de ângulo preferível ao grau.

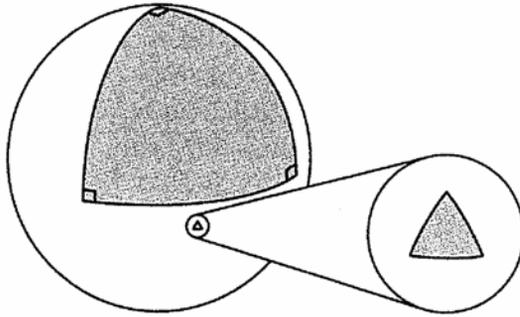


Figura 10.3. Triângulos geodésicos numa esfera

triângulo geodésico menor é formado por arcos geodésicos mais curtos, que adquirem menos curvatura, de modo que a soma dos ângulos internos é menor — mas é ainda superior a  $\pi$ .

Durante quase mil e quinhentos anos ninguém aperfeiçoou a observação de Menelau sobre a soma dos ângulos internos em triângulos esféricos. Foi apenas no século XVII que dois homens, Thomas Harriot (c. 1560-1621) e Albert Girard (1595-1632), quantificaram o excesso nesta soma.

Na figura 10.3, vemos que há uma relação directa entre a área de um triângulo e a soma dos seus ângulos internos. À medida que um triângulo vai aumentando de tamanho, os seus lados tornam-se mais torcidos por causa da curvatura da esfera, e a soma dos ângulos internos vai crescendo.

O teorema de Harriot e Girard dá-nos uma fórmula que relaciona três grandezas: a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico, a área do triângulo, e o raio da esfera na qual se encontra. Para simplificar, vamos apresentar a fórmula para triângulos na *esfera unitária* — a esfera de raio um (a fórmula para uma esfera com um raio diferente é obtida re-escalando as quantidades de forma apropriada).

TEOREMA DE HARRIOT-GIRARD

A área de um triângulo geodésico na esfera unitária com ângulos internos  $a, b, e c$  é  $a + b + c - \pi$ . Por outras palavras,  
 área = (soma dos ângulos internos)  $- \pi$ .

Como a soma dos ângulos internos de cada triângulo no plano é  $\pi$ , podemos reformular a fórmula de outro modo:

área = (soma dos ângulos internos)  $-$  (soma dos ângulos internos para um triângulo plano).

Isto é, a área de um triângulo esférico é precisamente o valor que devemos adicionar à soma dos ângulos internos de um triângulo plano, para obter a mesma soma para o triângulo na esfera. Como veremos, esta notável fórmula generaliza-se para polígonos esféricos com mais de três lados. A propósito, este é o nosso primeiro exemplo concreto que mostra porque é vantajoso medir os ângulos em radianos; a fórmula acima não é válida quando os ângulos são medidos em graus.

Como exercício de aquecimento, vamos agora verificar este teorema no caso do maior dos triângulos geodésicos mostrados na figura 10.3 (supondo que a esfera é a esfera unitária). Podemos cobrir toda a esfera com oito destes triângulos — quatro no hemisfério norte, e mais quatro no hemisfério sul. Assim, a área deste triângulo é um oitavo da área da esfera. Como a área da superfície de uma esfera de raio  $r$  é  $4\pi r^2$ , a esfera unitária ( $r = 1$ ) tem uma área igual a  $4\pi$ . Assim, a área do triângulo é um oitavo de  $4\pi$ , ou seja  $\pi/2$ .

Agora podemos verificar que o teorema Harriot-Girard conduz ao mesmo valor. A soma dos três ângulos internos deste triângulo é  $3\pi/2$ . Assim, de acordo com o teorema, a área deste triângulo deve ser  $3\pi/2 - \pi = \pi/2$ , o que está de acordo com o cálculo anterior.

Esta relação foi descoberta independentemente por Harriot e Girard. O académico britânico Thomas Harriot é uma personalidade enigmática. Foi um investigador talentoso e activo, mas nunca publicou um único dos seus trabalhos. Quando morreu, deixou dez mil páginas de manuscritos inéditos, diagramas, colecções de cálculos e medições. Um biógrafo escreveu que a aversão de Harriot à publicação «pode em grande parte ser explicada por circunstâncias externas adversas, procrastinação, e pela sua relutância em publicar um artigo quando pensava que, com mais trabalho, poderia melhorá-lo»<sup>2</sup>. Muitos dos seus trabalhos apareceram postumamente. Ficou mais conhecido pelo seu trabalho em álgebra, mas também estudou óptica, astronomia, química e linguística. Harriot, tal como Leibniz e Euler, ficou famoso pela introdução de notação matemática nova e elegante. Infelizmente, por causa da dificuldade de usar caracteres para a sua invulgar notação, nem toda apareceu na imprensa e, por isso, não foi amplamente adoptada. Dois símbolos que sobreviveram são os sinais  $<$  para «menor do que» e  $>$  para «maior do que». Muito pouco se sabe sobre a vida privada de Harriot. Em 1585, ele foi enviado por Sir Walter Raleigh numa viagem de um ano para o Novo Mundo como explorador e cartógrafo. Assim, é provável que tenha sido o primeiro matemático de formação a colocar os pés na América do Norte.

O matemático francês Albert Girard viveu na Holanda, provavelmente porque, sendo protestante, não sentia à vontade na sua casa de infância

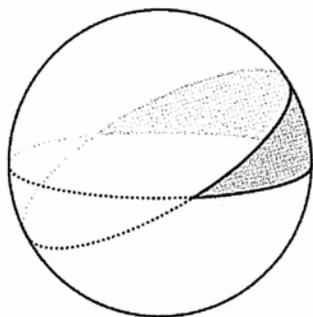


Figura 10.4. Uma *luna* numa esfera

na Lorena, em França. Actualmente, ele é conhecido pelo seu trabalho em álgebra e trigonometria. Cabe-lhe a distinção de ter sido o primeiro a utilizar as abreviaturas *sen*, *tan*, e *sec* e para as funções trigonométricas seno, tangente e secante, respectivamente, e de ter introduzido a notação  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$  para as raízes cúbicas. Girard foi também o primeiro matemático a atribuir um significado geométrico aos números negativos. Ele escreveu: «A solução negativa é explicada em geometria movendo-se para trás; e o sinal negativo move-se para trás, enquanto o + avança<sup>3</sup>.»

Historicamente, a fórmula para a área dos triângulos esféricos ficou associada ao nome de Girard, mas não ao de Harriot. Esta atribuição é compreensível porque a demonstração de Girard, que foi publicada em 1629<sup>4</sup>, foi a primeira a aparecer em forma impressa. Girard era conhecido pelo seu estilo de escrita concisa, e as suas provas eram muitas vezes parcas nos detalhes. Neste caso, a prova era insatisfatória para o próprio Girard — ele descreveu o resultado como «uma conclusão provável»<sup>5</sup>. Sem que ele o soubesse, o mesmo teorema tinha já sido provado por Harriot, 26 anos antes. Claro que, como observámos, Harriot não tinha publicado este resultado, nem nenhum outro resultado matemático. No entanto, ele não o tinha mantido em segredo. A sua demonstração era conhecida pelos seus contemporâneos; o matemático britânico Henry Biggs (1561-1630) havia informado Kepler do resultado de Harriot, e tinha-o incluído numa lista das grandes descobertas do seu tempo. No entanto, não há nenhuma indicação de que Girard tivesse conhecimento da prova de Harriot.

Uma vez que Harriot foi o primeiro a provar o teorema, e Girard o primeiro a publicá-lo, hoje chamamos a este resultado o teorema de Harriot-Girard. É interessante notar que a prova de Harriot era muito mais simples e mais elegante que a de Girard. O argumento que damos a seguir é devido a Legendre, mas é muito semelhante ao de Harriot.

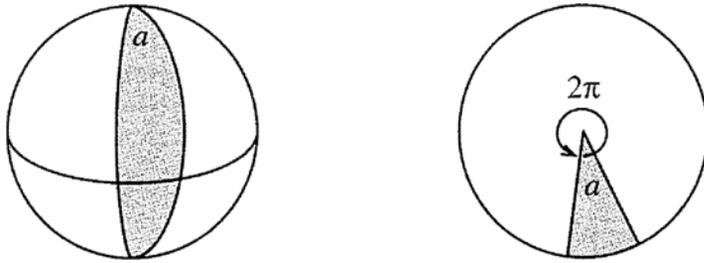


Figura 10.5. Uma *luna* numa esfera (esquerda), e a mesma vista de cima (direita)

A prova de Legendre usa habilmente um objecto chamado *luna* (por vezes chamado um biângulo, por analogia com um triângulo). Uma *luna* é uma região delimitada por dois círculos máximos (ver figura 10.4). Um par de círculos máximos distintos intersectam-se sempre em dois pontos localizados exactamente em lados opostos na superfície da esfera. Se estes dois círculos se cruzam fazendo um ângulo  $a$  num desses pontos de intersecção, então também se cruzam fazendo o mesmo ângulo  $a$  no outro ponto de intersecção. Se o ângulo  $a$  for medido em radianos, então a área da *luna* (numa esfera unitária) é  $2a$ . Justifica-se facilmente este facto com uma regra de três simples: a área da *luna* está para a área total da superfície da esfera tal como  $a$  está para  $2\pi$  (como pode ser visto na figura 10.5). Assim, temos

$$\frac{\text{Área da luna}}{4\pi} = \frac{a}{2\pi}.$$

Resolvendo a equação, vemos que a área da *luna* é  $2a$ .

Agora, consideremos um triângulo geodésico  $ABC$  numa esfera unitária com ângulos internos  $a$ ,  $b$  e  $c$ . O triângulo está contido nalgum hemisfério. Vamos prolongar, ao longo de círculos máximos, os lados do triângulo  $ABC$  até atingirem a fronteira deste hemisfério. Como na figura 10.6, sejam  $D$ ,  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  e  $I$  os pontos onde estas linhas geodésicas encontram a fronteira do hemisfério.

Dada a simetria da esfera, a soma das áreas das regiões  $ADE$  e  $AGH$  é a mesma que a área de uma *luna* de ângulo  $a$ . Por outras palavras, se recortássemos o triângulo  $AGH$  e o colássemos ao triângulo  $ADE$  unindo o lado  $GH$  com o lado  $ED$ , então teríamos uma *luna* de ângulo  $a$ . A partir desta observação, concluímos que

$$\text{área}(ADE) + \text{área}(AGH) = \text{área da luna} = 2a.$$

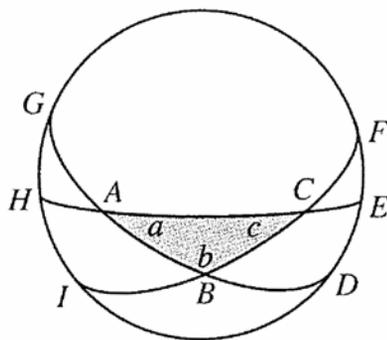


Figura 10.6. Círculos máximos num hemisfério

Da mesma forma, os triângulos  $BFG$  e  $BDI$  têm a mesma área que uma *luna* de ângulo  $b$ , e os triângulos  $CHI$  e  $CEF$  têm a mesma área que uma *luna* de ângulo  $c$ . Portanto, temos

$$\text{área}(BFG) + \text{área}(BDI) = 2b$$

e

$$\text{área}(CHI) + \text{área}(CEF) = 2c.$$

Somando estas três equações, obtemos

$$[\text{área}(ADE) + \text{área}(AGH)] + [\text{área}(BFG) + \text{área}(BDI)] + \\ + [\text{área}(CHI) + \text{área}(CEF)] = 2a + 2b + 2c.$$

Olhando atentamente para o lado esquerdo desta expressão, notamos que estamos adicionando a área de todas as regiões do hemisfério uma vez, com exceção da região triangular  $ABC$ , que adicionamos três vezes. Portanto, temos

$$\text{área}(\text{hemisfério}) + 2 \cdot \text{área}(ABC) = 2a + 2b + 2c.$$

Como a área do hemisfério é  $2\pi$ , obtemos

$$2\pi + 2 \cdot \text{área}(ABC) = 2a + 2b + 2c.$$

Reorganizando os termos nesta expressão e dividindo por 2, podemos concluir que

$$\text{área}(ABC) = a + b + c - \pi,$$

como desejado.

Para a prova de Legendre da fórmula de Euler necessitamos da seguinte generalização do teorema de Harriot-Girard para polígonos esféricos, ou polígonos geodésicos, com três ou mais lados.

**TEOREMA DE HARRIOT-GIRARD PARA POLÍGONOS GEODÉSICOS**  
 A área de um polígono geodésico de  $n$  lados na esfera unitária, com ângulos internos  $a_1, \dots, a_n$  é  $a_1 + \dots + a_n - n\pi + 2\pi$ , ou equivalentemente, área = (soma dos ângulos)  $- n\pi + 2\pi$ .

A soma dos ângulos internos de qualquer polígono no plano com  $n$  lados é  $(n - 2)\pi$  (vamos considerar atentamente este teorema e suas generalizações no capítulo 20). Assim, tal como com triângulos, a área de um polígono geodésico é simplesmente o valor que a soma dos seus ângulos internos excede a mesma soma de ângulos num polígono plano com o mesmo número de lados. Isto é,

$$\text{área} = (\text{soma dos ângulos internos}) - (\text{soma dos ângulos internos de um polígono plano}).$$

Para verificar a validade desta generalização, dividimos o polígono geodésico em triângulos geodésicos cortando-o ao longo de linhas geodésicas «diagonais». Uma tal decomposição tem sempre  $n-2$  triângulos (Ver figura 10.7). A soma das áreas destes triângulos é a área do polígono, e a soma dos ângulos internos dos triângulos é igual à soma dos ângulos do polígono. Aplicando o teorema de Harriot-Girard a todos os  $n-2$  triângulos e somando, vemos que a área do polígono é

$$\text{área} = a_1 + \dots + a_n - (n - 2)\pi = a_1 + \dots + a_n - n\pi + 2\pi.$$

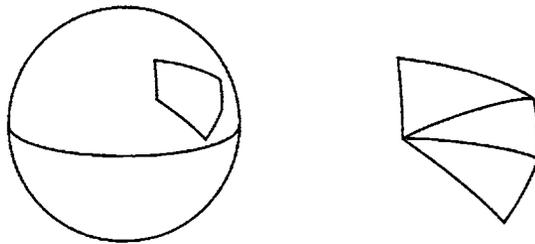


Figura 10.7. Um polígono geodésico numa esfera, dividido em triângulos geodésicos

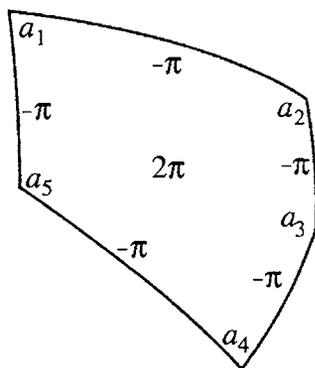


Figura 10.8. A área do polígono esférico é a soma das quantidades no diagrama

Há uma forma simples de fixar esta fórmula. Visualizemos o polígono geodésico tal como na figura 10.8. Indica-se a medida de cada ângulo interno, junto ao respectivo vértice, escreve-se  $-\pi$  do lado de dentro de cada aresta, e  $2\pi$  no meio da face esférica. A área do polígono é simplesmente a soma de todas estas quantidades. Esta representação visual será útil para entender a demonstração de Legendre da fórmula de Euler.

Finalmente, estamos prontos para indicar o argumento de Legendre. Começemos com um poliedro convexo com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces. Seja  $x$  um ponto qualquer no interior do poliedro. Tal como mostrado na figura 10.9, construímos uma esfera centrada em  $x$  que rodeia completamente o poliedro. Como as unidades não são importantes, podemos escolhê-las de modo que a esfera tenha raio um.

Projectemos o poliedro na esfera usando o ponto  $x$  como foco, ou centro de projecção. Uma forma de visualizar esta projecção é imaginar que o poliedro é um modelo com arestas feitas de arame e que  $x$  é uma lâmpada. A projecção será então a sombra destes arames na superfície da esfera envolvente. Não vamos prová-lo, mas, nesta situação, as faces do poliedro projectam-se em polígonos geodésicos\*.

Na sua prova, Legendre usou um truque matemático comum: calculou a mesma quantidade — neste caso a superfície da esfera unitária — de

\* A demonstração deste facto não é muito difícil. Para mostrar que as projecções das faces são polígonos geodésicos, basta provar que a projecção de cada aresta é um segmento de uma geodésica. Como o centro de projecção é  $x$ , o centro da esfera, a imagem projectada de uma dada aresta, estará contida no único plano que a contém e que contém  $x$ . Tal como qualquer plano que passe em  $x$ , este plano corta a esfera em duas partes iguais, e portanto num círculo máximo, ou geodésica. Assim, a projecção da aresta considerada é um segmento geodésico, como queríamos mostrar. (N. do T.)

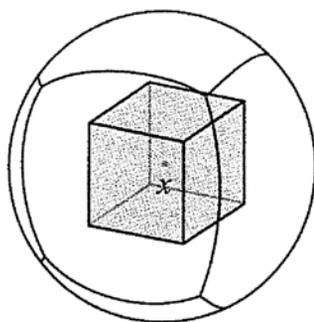


Figura 10.9. A projecção de um poliedro numa esfera

duas formas diferentes, obtendo assim uma igualdade. Em primeiro lugar, utilizou a bem conhecida fórmula para a área de uma superfície esférica, obtendo para valor da área da esfera unitária  $4\pi$ . Em segundo lugar, adicionou as áreas de cada um dos polígonos geodésicos que cobrem a esfera, obtendo novamente a área total da superfície.

Pelo teorema Harriot-Girard sabemos que a área de cada polígono geodésico de  $n$  lados é a soma dos seus ângulos internos subtraída de  $(n - 2)\pi$ . Em lugar de trabalharmos directamente com essa fórmula, vamos usar a representação visual introduzida na figura 10.8. Coloquemos um rótulo em cada ângulo, aresta e face deste polígono esférico — a respectiva medida em cada ângulo, o valor  $-\pi$  em cada aresta, e  $2\pi$  no meio de cada face esférica — obtendo assim um diagrama na esfera, tal como aquele da figura 10.10. Para calcular a área da superfície da esfera, vamos somar todas as quantidades indicadas.

Embora os ângulos planos que se encontram num vértice do poliedro somem um valor inferior a  $2\pi$  (ver o capítulo 5), esses mesmos ângulos somam exactamente  $2\pi$  quando projectados sobre a superfície suave da esfera. Uma vez que existem  $V$  vértices, os vértices contribuem  $2\pi V$  para a área total. Cada aresta contribui  $-2\pi$ ; ou seja,  $-\pi$  de um dos lados da aresta e  $-\pi$  do outro lado. Uma vez que existem  $A$  arestas, estas contribuem  $2\pi A$  para a área total. No meio de cada face esférica temos o valor  $2\pi$ . Uma vez que existem  $F$  faces, elas contribuem  $2\pi F$  para a área. Adicionando tudo, vemos que a área total da superfície da esfera é

$$4\pi = 2\pi V - 2\pi A + 2\pi F.$$

Dividindo então por  $2\pi$ , obtemos a fórmula de Euler,

$$2 = V - A + F.$$

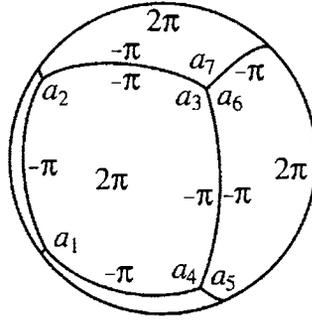


Figura 10.10. A projecção devidamente rotulada

Uma rápida comparação entre as abordagens de Euler e de Legendre é suficiente para mostrar que as suas demonstrações são muito diferentes. Por um lado, a argumentação de Euler parece ser «a prova correcta», ou pelo menos parece ter o estilo adequado. O teorema é combinatório, e Euler forneceu uma prova combinatória. Euler trabalha, de forma muito directa, com a relação entre vértices, arestas, e faces. Quando um vértice era removido, algumas faces e arestas eram adicionadas ou subtraídas para compensar, e esta operação não alterava a soma alternada  $V - A + F$ .

Pelo contrário, Legendre incluiu conceitos aparentemente não relacionados com a fórmula de Euler — esferas, ângulos e áreas para provar o resultado. A sua abordagem é válida e muito engenhosa, mas não ilustra a *razão* para o teorema ser verdadeiro; pelo menos, não o faz de forma transparente. No entanto, a prova de Legendre deu-nos a primeira indicação de que estamos perante mais do que um simples teorema de combinatória. O facto de podermos provar o teorema usando geometria métrica sugere uma relação importante entre a fórmula de Euler e a geometria. Voltaremos a este tema — a relação entre a fórmula de Euler e geometria — nos capítulos 20 e 21.

Devemos fazer uma última observação sobre a prova de Legendre. Com a abordagem de Euler, tivemos o cuidado (mais ainda do que o próprio Euler) de aplicar a fórmula apenas a poliedros convexos. Tal como Euler, Legendre supôs que os seus poliedros eram convexos. No entanto, no apêndice de um artigo escrito em 1809, Louis Poinsot (1777-1859) observou que a prova de Legendre se aplica a uma classe um pouco mais geral de poliedros, a classe dos chamados *poliedros em estrela*<sup>6</sup>, que inclui os poliedros convexos.

O primeiro passo na demonstração de Legendre foi a projecção do poliedro na superfície da esfera. Para consegui-lo precisamos de um ponto  $x$ , interior ao poliedro, a partir do qual a projecção possa ser efectuada. Este ponto deve ter a propriedade de poder «ver» todos os

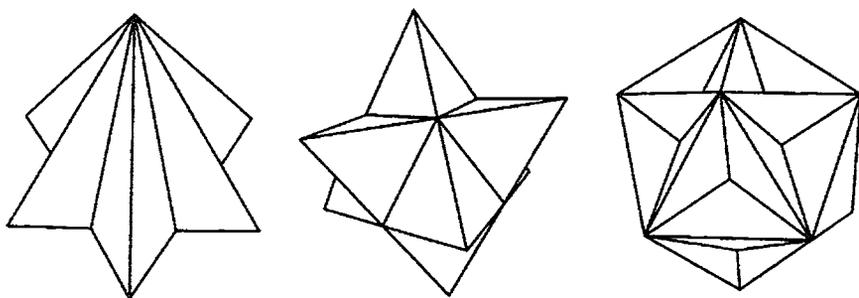


Figura 10.11. Poliedros em estrela

outros pontos do poliedro. Para um poliedro convexo, este ponto  $x$  pode ser qualquer ponto no seu interior. No entanto, a maioria dos poliedros não-convexos não possui um tal ponto «central»; aqueles que o têm são designados por poliedros em estrela. Os poliedros estelares de Kepler, mostrados na figura 6.5, são exemplos de poliedros em estrela, tal como os ilustrados na figura 10.11. Para cada um destes objectos, existe pelo menos um ponto interior que «vê» todo o resto do poliedro, e, a partir deste ponto, a projecção pode ser feita. Poincot explicou isto da seguinte forma:

[A fórmula de Euler] ainda é válida para qualquer poliedro com ângulos sólidos reentrantes, desde que se possa encontrar, no interior do sólido, um ponto, que é o centro de uma esfera, de tal modo que, quando as faces dos sólidos são aí representados através de rectas na direcção do centro, não há duplicação dessas projecções sobre a esfera; ou seja, desde que não haja nenhuma face, em parte ou no seu todo, que é projectada no mesmo sítio que outra; o que se aplica, como se vê, a um número infinito de poliedros com ângulos sólidos reentrantes. Pode reconhecer-se a verdade desta proposição facilmente a partir da própria demonstração de M. Legendre, na qual não haverá nada a mudar<sup>7</sup>.

Graças a Legendre, no final do século XIX, a fórmula de Euler tinha sido colocada em base sólida para todos os poliedros convexos, e o seu influente livro disseminou a beleza da fórmula de Euler a uma ampla audiência. Nos anos que se seguiram, Poincot e outros matemáticos importantes ficaram encantados com esta relação elegante. Eles tentaram encontrar novas demonstrações e outras generalizações. Para entender algumas destas generalizações, é necessário investigar a área da teoria dos grafos. As origens desta área remontam, sem surpresas, a Euler e a um recreativo quebra-cabeças matemático sobre a cidade de Königsberg.

# Capítulo 11

## Um Passeio por Königsberg

*Qual é o sentido de passar novamente por cima do mesmo trilho? Há uma víbora no caminho que os teus próprios pés gastaram. É preciso construir trilhos para o desconhecido.*

—Henry David Thoreau<sup>1</sup>

De modo a colocar a fórmula de Euler no contexto moderno, devemos debruçar-nos sobre uma área da matemática chamada *teoria dos grafos*. Isto não significa o estudo dos gráficos das funções que encontramos na escola secundária (como, por exemplo  $y = mx + b$ , que representa uma recta,  $y = x^2$  uma parábola, etc.). É o estudo de certos diagramas como os mostrados na figura 11.1. São constituídos por pontos, chamados *vértices*, e linhas unindo esses pontos, a que se chama *arestas*<sup>2</sup>.

Em 1736, durante a sua primeira estadia em São Petersburgo, Euler abordou o problema, hoje famoso, das sete pontes de Königsberg. A sua contribuição para este problema é frequentemente mencionada como marcando o nascimento da teoria dos grafos e da topologia.

A cidade de Königsberg foi fundada pelos Cavaleiros Teutónicos em 1254. Situava-se naquilo que era então a Prússia, perto do mar Báltico,

---

<sup>1</sup> A terminologia vértices e arestas provém precisamente da teoria dos poliedros; note-se, no entanto, que num grafo não está definida a noção de *face*. (N. do T.)

<sup>2</sup> Às vezes, os grafos são chamados *redes*, e nesse caso os vértices e arestas são designados por *nós* e *ligações*, respectivamente.

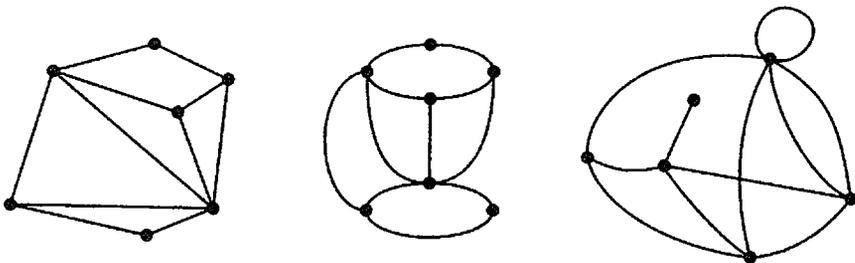


Figura 11.1. Grafos

numa bifurcação no Rio Pregel. Mais tarde, tornou-se a capital da Prússia Oriental. A cidade, que tinha sido fortemente danificada pelos bombardeamentos dos aliados durante a Segunda Guerra Mundial, ficou sob controlo soviético na sequência do acordo de Potsdam. Houve muitas mudanças em Königsberg quando se tornou um estado soviético — a maior parte dos alemães nativos foram expulsos, o nome da cidade foi alterado para Kaliningrado, e o rio foi rebaptizado com o nome Pregolya. Hoje Kaliningrado faz parte da Rússia e é a capital da região Kaliningrad Oblast. Esta é a única região russa que não está ligada ao resto da Rússia, constituindo um enclave cercado pela Polónia, pela Lituânia, e pelo Mar Báltico. Ao contrário de outras cidades como Estalinegrado e Leninegrado, o nome de Kaliningrado não foi revertido para o nome do período pré-comunista. O habitante mais conhecido de Königsberg foi o filósofo do século XVIII Immanuel Kant (1724-1804). Também em Königsberg nasceu Christian Goldbach, o matemático a quem Euler anunciou a descoberta da sua fórmula para os poliedros.

A cidade está localizada numa bifurcação do rio e, mesmo no meio do rio, perto dessa bifurcação, está a ilha Kneiphof. No tempo de Euler havia sete pontes que cruzavam este rio, unindo os seus dois lados e a ilha (ver figura 11.2). Segundo reza a história, os habitantes de Königsberg faziam agradáveis caminhadas na sua cidade e divertiam-se a tentar atravessar cada uma das sete pontes apenas uma vez. Ninguém foi capaz de encontrar tal caminho. Este suposto passatempo tornou-se o problema das pontes de Königsberg:

É possível uma pessoa atravessar todas as sete pontes de Königsberg sem atravessar nenhuma delas duas vezes?

Não se sabe como Euler soube deste problema. Talvez o tenha conhecido através do seu amigo Carl Ehler, o presidente da Câmara de Danzig,

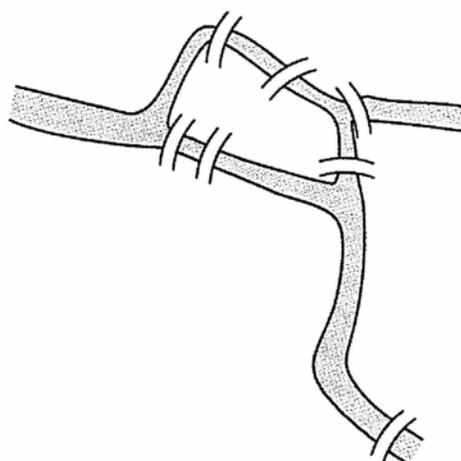
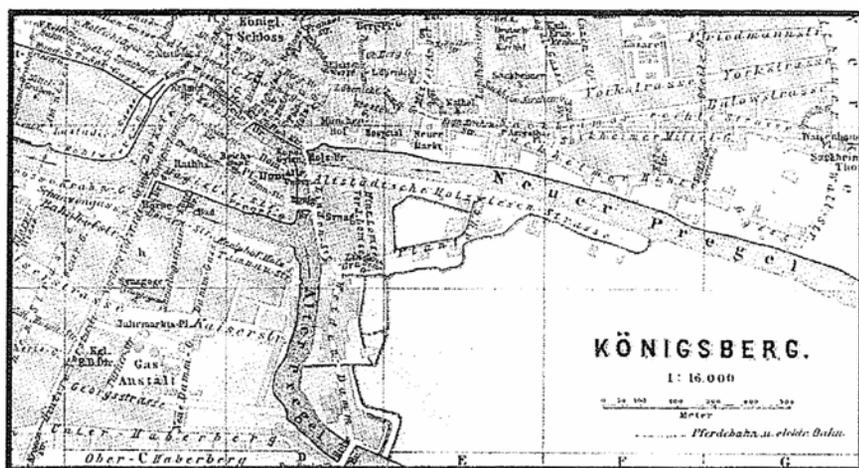


Figura 11.2. As sete pontes de Königsberg

Prússia, que se correspondia com Euler a pedido de um professor de matemática dessa cidade. Conhecem-se cartas entre Ehler e Euler durante o período de 1735-1742, algumas das quais discutem o problema das pontes de Königsberg. Sabemos que, a princípio, Euler era indiferente a esta questão. Em 1736, numa carta a Ehler, Euler escreveu:

Assim pode ver, meu nobre senhor, como este tipo de solução tem pouca relação com a matemática, e não entendo por que espera que um matemático a resolva, ao invés de qualquer outra pessoa, pois a solução será baseada na razão, e a sua descoberta não depende de qualquer princípio matemático<sup>2</sup>.

Mais tarde, Euler dedicou algum tempo a pensar no problema. A mesma característica que ao princípio o afastou, foi também o que lhe despertou interesse: o problema não se encaixava de forma clara no âmbito da matemática existente. Euler notou que, apesar de o assunto parecer geométrico, não havia necessidade de tomar em conta as distâncias exactas. Tudo o que era necessário saber era a informação sobre as posições relativas das pontes.

Noutra carta de 1736, esta dirigida ao matemático e engenheiro italiano Giovanni Marinoni (1670-1755), Euler escreveu:

Esta questão é tão banal, mas pareceu-me digna de atenção, pois nem a geometria, nem a álgebra, nem mesmo a arte de contar parece suficiente para resolvê-la. Em vista disto, ocorreu-me que talvez esta pertencesse à geometria da posição, aquilo que Leibniz há muito ansiava desenvolver<sup>3</sup>.

Nesta carta, Euler usou um termo introduzido por Leibniz, *geometriam situs*, que se traduz por *geometria da posição*. Mais tarde, este assunto passaria a designar-se *analysis situs* (análise da posição) e, finalmente, chamar-se-ia topologia. Leibniz referia-se a um novo campo na matemática, que «lidasse directamente com a posição, tal como a álgebra lida com magnitudes»<sup>4</sup>. Há algum desacordo entre os investigadores sobre se Euler compreendeu ou não a utilização de Leibniz desta expressão; no entanto, Euler concordou com o reconhecimento de Leibniz da necessidade de novas técnicas matemáticas para lidar com este problema.

Em 1736 Euler apresentou o seu artigo «Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis» («Solução de um problema relacionado com a geometria da posição») para a St. Petersburg Academy<sup>5</sup>. Foi publicado em 1741. Nele, Euler resolve o problema das pontes de Königsberg e, no seu estilo típico, generaliza a solução para qualquer problema análogo com pontes.

Euler percebeu que os únicos detalhes importantes para o problema são as posições relativas das zonas da cidade e das pontes que as ligam. Usando um diagrama, podemos abstrair esta situação com facilidade e elegância. Coloquemos um vértice em cada região de terra na cidade (uma em cada um dos três lados do rio bifurcado, e outro na ilha central), e unamos cada par de vértices com tantas arestas quantas as pontes que ligam essas regiões. O grafo resultante apresenta-se na figura 11.3.

Desta forma, reduzimos o problema a um problema de grafos — é possível percorrer todas as arestas deste grafo com um lápis, sem o levantar, e sem percorrer duas vezes nenhuma aresta? A partir deste exemplo pode-

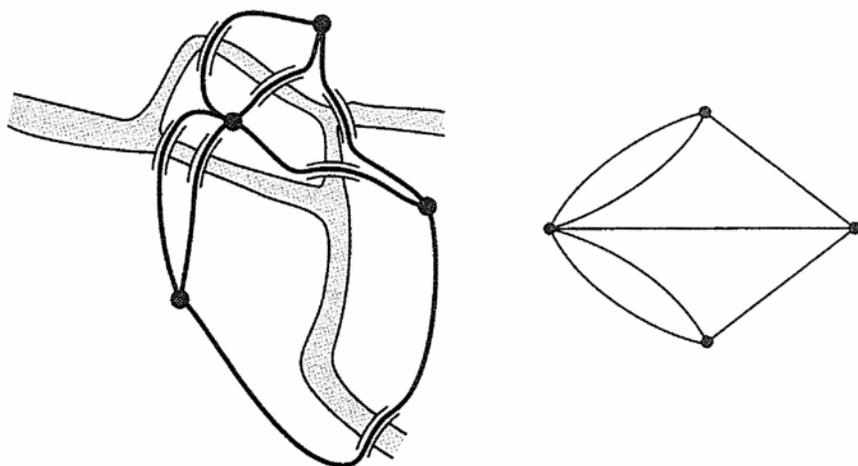


Figura 11.3. O grafo associado com o problema das pontes de Königsberg

mos formular a seguinte pergunta mais geral: Dado um grafo qualquer, como determinar se é possível percorrê-lo desta forma?

É um equívoco comum dizer-se que o grafo de Königsberg, apresentado na figura 11.3, se encontra no trabalho de Euler. De facto, nem o grafo de Königsberg, nem qualquer outro grafo aparece aí. Os problemas relacionados com percursos em grafos foram desenvolvidos independentemente do problema das pontes de Königsberg. Os quebra-cabeças sobre trajectos em grafos apareceram pela primeira vez no início do século XIX, tanto em artigos matemáticos como em livros de matemática recreativa. Foi apenas em 1892 que W. W. Rouse Ball (1850-1925), no seu célebre trabalho «Recreações e problemas matemáticos»<sup>6</sup>, estabeleceu a ligação entre o resultado de Euler sobre as pontes de Königsberg e os problemas de trajectos em grafos. A primeira aparição do grafo de Königsberg foi no livro de Ball, mais de cento e cinquenta anos após a publicação do trabalho de Euler.

Também é comum referir o artigo de Euler como a génese da teoria dos grafos. Esta atribuição não é desprovida de sentido. Embora Euler não tenha colocado grafos no seu artigo, o tratamento abstracto que deu ao problema assemelha-se aos argumentos usados em teoria dos grafos. A sua aplicação da *geometriam situs*, que viria a ser chamada topologia, a este problema, e o reconhecimento da originalidade deste método, sinalizam o início desta nova área.

Para discutir a sua solução precisamos de algumas definições. Tal como acontece com poliedros, o *grau* de um vértice de um grafo é o número

de arestas que emanam a partir dele. Se houver um *lacete* neste vértice (uma aresta cujo ponto inicial e final são este mesmo vértice, como no grafo do lado direito na figura 11.1), então esse lacete conta por dois para determinar o grau. O grafo do problema das pontes de Königsberg tem três vértices de grau 3 e um vértice de grau 5. Diz-se que um grafo é *conexo* se é possível deslocar-se a partir de um qualquer vértice para outro qualquer vértice, percorrendo uma sequência de arestas.

Um percurso num grafo que começa num vértice e termina noutra vértice é chamado *passeio*. Estamos interessados numa classe muito especial de passeios, os que visitam cada aresta exactamente uma vez: estes são chamados *passeios de Euler*, ou *passeios eulerianos*. Se este passeio de Euler começa e termina no mesmo vértice, é então chamado *circuito de Euler*. Em geral, um circuito designa um passeio ao longo de um grafo que começa e acaba no mesmo vértice e nunca passa na mesma aresta duas vezes. Um circuito (se não for euleriano) não tem que passar em todas as arestas.

Usando a linguagem da teoria dos grafos, podemos reformular o problema das pontes de Königsberg da seguinte maneira:

Será que o grafo das pontes de Königsberg (figura 11.3) admite um passeio de Euler? De modo mais geral, como podemos determinar se um dado grafo possui um passeio de Euler?

Euler resolveu ambos os problemas. Traduzida a sua solução para a linguagem moderna, ela pode descrever-se como se segue.

Um grafo admite um passeio de Euler precisamente quando é conexo e o número de vértices de grau ímpar é igual a zero ou a dois. Se existe um par de vértices de grau ímpar, então o passeio deve começar num desses vértices e terminar no outro; caso contrário, o passeio pode começar em qualquer vértice.

Usando estas condições, facilmente resolvemos o problema das pontes de Königsberg. Como o grafo de Königsberg tem quatro vértices de grau ímpar, não existe um passeio de Euler! Não é de espantar que os habitantes de Königsberg tenham ficado tão frustrados na sua tentativa de dar o passeio ideal à tardinha.

Mas por que razão o critério de Euler funciona? A exigência de que o grafo seja conexo é clara. A condição imposta ao número de vértices de grau ímpar exige alguma reflexão. Para provar o teorema, temos dois

objectivos. Primeiro devemos mostrar que qualquer grafo com um passeio de Euler deve ter ou nenhum ou dois vértices de grau ímpar. Depois, temos de mostrar o recíproco: se um grafo conexo não tem nenhum, ou tem exactamente dois, vértices de grau ímpar, então ele admite um passeio de Euler.

Suponhamos que temos um grafo onde existe um dado passeio de Euler; vamos então mostrar que ele não pode ter, ou ter dois, vértices de grau ímpar. Coloquemos uma folha de papel vegetal em cima do grafo e comecemos a percorrer esse passeio de Euler. À medida que começamos a traçar esse percurso, vamos desenhando um grafo na folha de papel vegetal, no qual o primeiro vértice terá grau um, e todos os outros vértices ainda têm grau zero. Quando chegamos ao segundo vértice, e passamos por ele, este segundo vértice terá agora grau dois. A partir de então, cada vez que passamos por um vértice, o seu grau no grafo do papel vegetal aumenta de duas unidades. Continuamos assim até chegar ao fim do passeio. Nesta altura, adicionamos um ao grau do último vértice. Se o passeio começa e termina em dois vértices diferentes, então estes dois vértices terão grau ímpar, e eles serão os únicos vértices de grau ímpar. Se o passeio começa e termina no mesmo vértice, então, tanto esse vértice como todos os outros terão grau par.

Euler tomou o recíproco como sendo verdade sem o mostrar: se um grafo tem dois, ou nenhum, vértices de grau ímpar, então ele admite um passeio de Euler. A primeira demonstração deste facto foi obtida por Carl Hierholzer (1840-1871), e foi publicada postumamente em 1873<sup>7</sup>.

Tomemos um grafo conexo sem nenhum, ou com dois vértices de grau ímpar. Se o grafo tem um par de vértices de grau ímpar, coloquemos o lápis num desses vértices; caso contrário, podemos colocá-lo em qualquer vértice. Começemos por uma aresta qualquer. Ao chegar ao segundo vértice, escolhamos aleatoriamente uma nova aresta a seguir. Continuemos desta forma, fazendo escolhas arbitrárias em cada vértice (com o cuidado de evitar arestas que já foram visitadas anteriormente, naturalmente), até que seja impossível continuar. Pelo argumento dado anteriormente, se iniciámos num vértice de grau ímpar, então o final deste trajecto será no outro vértice de grau ímpar, caso contrário o traçado irá terminar no vértice de partida. Na figura 11.4 o trajecto *abcdefghi* é um desses passeios.

Como neste exemplo, se esse caminho não percorreu todas as arestas do grafo, então removemos todas as arestas por onde passámos e analisemos o grafo que sobrou (este novo grafo pode já não ser conexo). Coloque o lápis num vértice que estava no traçado inicial. Como antes, percorremos este grafo da mesma forma que anteriormente, até que seja impossível continuar. No nosso exemplo, obtemos o passeio *jkl*. Agora

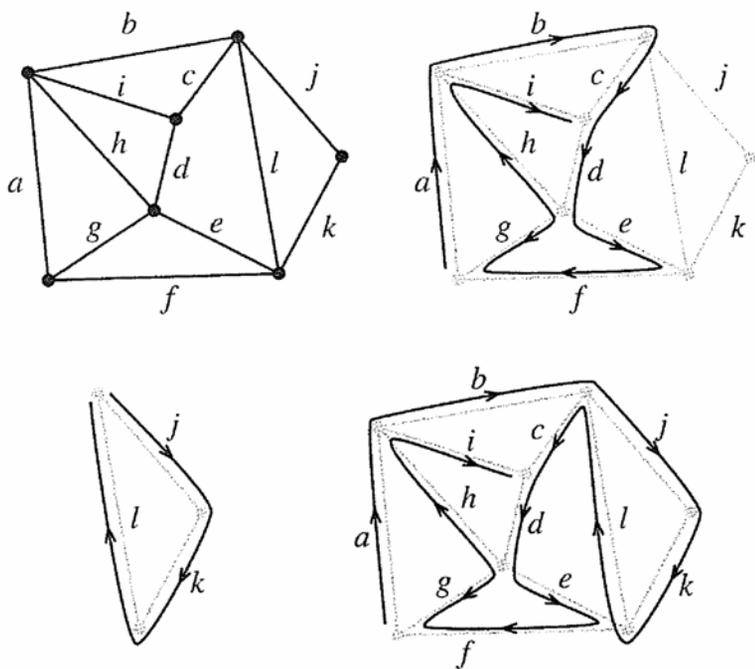


Figura 11.4. Construindo um caminho de Euler

inserirmos este novo trajecto no local apropriado do passeio que construímos anteriormente. No nosso exemplo, podemos inserir  $jkl$  entre as arestas  $b$  e  $c$  do passeio original. Assim, obtemos  $abjklcdefghi$ , que já é um passeio de Euler, pois percorreu todas as arestas. Em geral, pode ser necessário fazer várias destas inserções até passar por todas as arestas.

Observe-se que retirámos mais informação sobre trajectos em grafos do que era aparente pelos critérios indicados acima. O nosso objectivo era encontrar passeios de Euler em grafos, mas também determinámos a condição para que o passeio possa começar e terminar no mesmo vértice. Isto é:

Um grafo tem um circuito de Euler precisamente quando é conexo e não tem vértices de grau ímpar. Neste caso, o circuito de Euler pode começar e terminar em qualquer vértice.

Em 1875, século e meio depois de Euler se ter debruçado sobre os percursos pedestres na cidade de Königsberg, foi construída uma nova

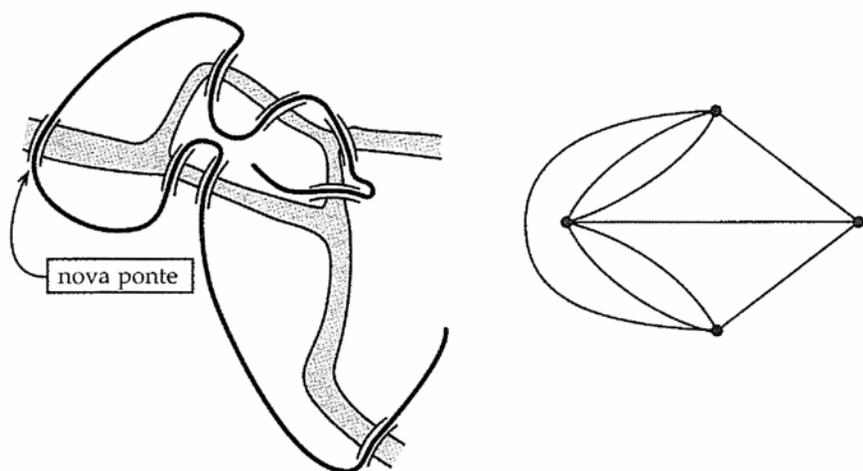


Figura 11.5. A nova ponte em Königsberg e o novo grafo

ponte<sup>8</sup>. Foi colocada a oeste da ilha Kneiphof ligando as margens norte e sul (ver figura 11.5). Com esta nova ponte, os habitantes de Königsberg puderam finalmente dar um passeio por todas as pontes e visitar cada ponte exactamente uma vez, pois agora havia precisamente dois vértices de grau ímpar — os vértices correspondentes à ilha e à região da bifurcação. Naturalmente, alguns dos habitantes da cidade não podiam começar essa caminhada à porta de casa, e ninguém podia acabar o seu passeio no mesmo sítio onde tinha começado.

Esta solução para o problema das pontes de Königsberg ilustra um fenómeno geral em matemática. Ao examinar um problema, podemos ser «bombardeados» por informação irrelevante. Uma boa técnica de resolução de problemas consiste em extrair todas as informações irrelevantes, de modo a concentrarmo-nos na essência do problema. Neste caso, os pormenores como as posições exactas das pontes e das regiões de terra, a largura do rio, e a forma da ilha eram irrelevantes. Euler transformou o problema noutra que é simples de enunciar em termos de teoria dos grafos. Esse é o traço da genialidade.

Concluimos com três exemplos. Em 1847, Johann Benedict Listing (1808-1882), um matemático que encontraremos novamente mais tarde, concebeu o grafo mostrado na figura 11.6 para ilustrar problemas de percursos em grafos (desenhámos o grafo tal como o fez Listing, sem realçar os vértices nas intersecções das linhas)<sup>9</sup>. Será que este grafo admite um passeio de Euler? Será que tem um circuito de Euler? O leitor pode querer pensar neste problema antes de prosseguir.

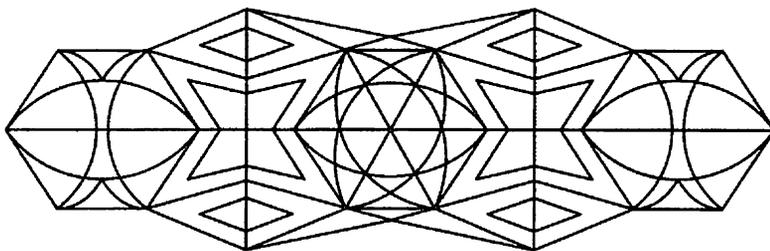


Figura 11.6. O quebra-cabeças de Listing

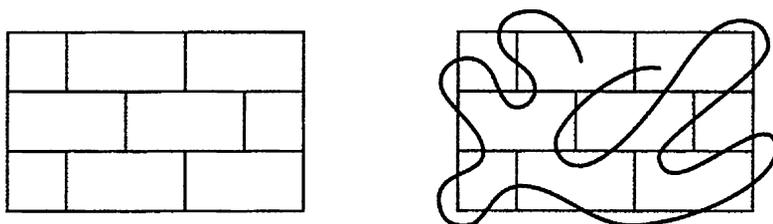


Figura 11.7. Uma solução errada para o enigma da parede de tijolos

Vemos que todos os vértices têm grau par, com excepção do que está mais à esquerda e do que está mais à direita — estes vértices têm grau cinco. Como há exactamente dois vértices de grau ímpar, o grafo de Listing admite um caminho de Euler, e cada caminho euleriano deve começar num destes vértices e terminar no outro. Dado que o grafo contém vértices de grau ímpar, não existe nenhum circuito de Euler.

O segundo exemplo é uma variação do problema das pontes. Considere-se o desenho, que se assemelha a uma parede de tijolos, mostrado na figura 11.7. É possível desenhar uma única curva contínua que atravesse todos os segmentos de recta da figura exactamente uma vez (a curva pode começar e terminar em tijolos diferentes)? A curva indicada no desenho à direita não é uma solução válida, porque há um segmento que não é atravessado.

A resposta é que não é possível. Podemos justificar esta afirmação transformando o problema num problema de percursos em grafos. Coloquemos um vértice no interior de cada tijolo e um vértice no exterior da figura. Desenhemos uma aresta de um vértice para outro vértice por cada segmento que separa os tijolos correspondentes na imagem original (ver figura 11.8). Para resolver o problema, basta determinar se este grafo tem um caminho de Euler. Como o grafo tem quatro vértices de grau cinco, não admite caminho de Euler. Portanto, não existe uma curva com as propriedades desejadas.

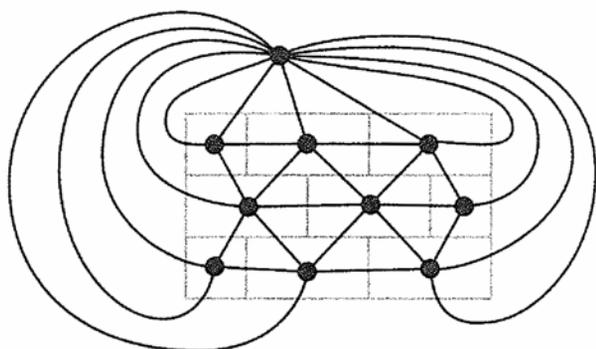


Figura 11.8. O grafo associado ao enigma da parede de tijolos

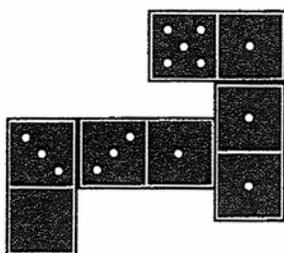


Figura 11.9. Um típico jogo de dominós

Finalmente, vamos aplicar a teoria dos grafos e caminhos de Euler ao jogo dos dominós. Este exemplo foi concebido por Orly Terquem (1782-1862), em 1849<sup>10</sup>. Num conjunto completo para o jogo de dominós mais comum, cada metade de uma peça de dominó tem um número de pintas que vão de zero a seis. Neste conjunto, não há duas peças iguais, e todas as combinações estão presentes. Isto dá um total de 28 dominós. O jogo decorre de modo a que cada jogador, alternadamente, coloca uma peça de dominó de tal modo que o número na metade de uma das suas peças coincida com o mesmo número numa extremidade do conjunto dos dominós previamente jogados. Uma peça com igual número de pintas nas duas metades pode ser colocado na forma de «T» tocando uma outra peça já colocada com o mesmo número de pintas (ver figura 11.9). O jogo termina quando um jogador não pode colocar nenhum dos seus dominós. Podemos perguntar, será que um jogo termina sempre numa situação em que pelo menos um jogador fica com dominós na sua mão? Ou é possível jogar-se todos os dominós, sem que nenhum jogador fique bloqueado?

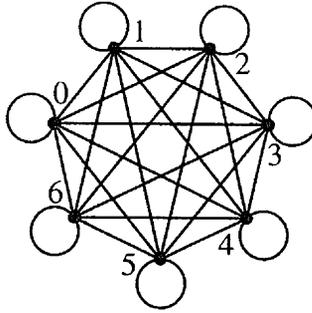


Figura 11.10. O grafo correspondente à colocação de todas as peças de dominó

Para analisar este problema, vamos construir um grafo da seguinte forma. Começemos com sete vértices, numerados de 0 a 6. Cada dominó corresponde a uma aresta deste grafo. Mais precisamente, o dominó com  $m$  pintas numa metade e  $n$  pintas na outra corresponde a uma aresta que liga o vértice  $m$  ao vértice  $n$ . Se considerarmos todas as peças de dominó, obtemos então o grafo da figura 11.10. Note-se que há um lacete em todos os vértices, correspondentes aos dominós com igual número de pintas em cada metade.

Cada vértice neste grafo dos dominós tem grau oito. Como o grau de cada vértice é par, este grafo admite um caminho de Euler. Assim, podemos percorrer o grafo inteiro passando por cada aresta exactamente uma vez. Esta observação é a chave para responder à nossa pergunta. Para mostrar que existe a possibilidade de se jogar todos os dominós do conjunto sem que nenhum jogador fique bloqueado, basta encontrar uma tal sequência de jogo. A que vamos obter é simples — uma fila de 28 dominós (embora seja pouco provável que esta sequência ocorra num jogo verdadeiro).

Começamos com a primeira aresta no caminho de Euler. Suponha-se que liga os vértices 0 e 3 (por esta ordem). Jogamos então o dominó que contém zero pintas numa metade e três pintas na outra. Agora, consideramos a segunda aresta no caminho. Esta aresta começa no vértice 3. Suponhamos que ela liga o vértice 3 ao vértice 1. Então, colocamos o dominó com três pintas de um lado e uma pinta do outro, juntando-o ao dominó anterior (ver figura 11.11).

Continuamos desta forma, jogando as peças tal como indicado no percurso no grafo. Como estamos a seguir um caminho euleriano, vamos passar por cada aresta exactamente uma vez. Assim seremos capazes de jogar todas as peças do jogo de dominó.

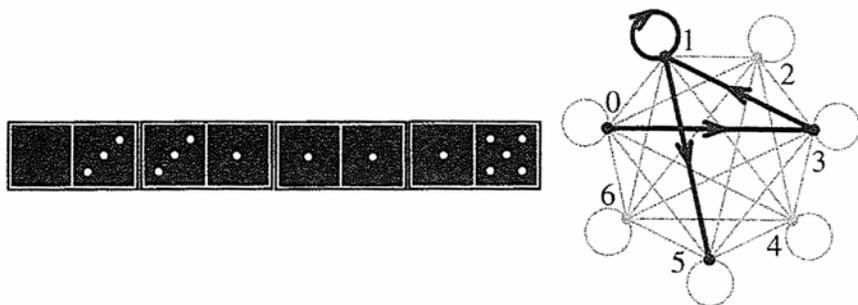


Figura 11.11. Parte de um jogo de dominó, em que todas as peças serão jogadas, e o grafo correspondente

Como mostram estes exemplos, a teoria dos grafos tem algumas aplicações fantásticas à matemática recreativa. No entanto, é também uma área muito importante da matemática com inúmeras aplicações práticas em áreas tão diversas como a ciência da computação, teoria de redes, estruturas sociais, sistemas de transporte, e modelos de epidemiologia. Encontraremos a teoria dos grafos novamente nos capítulos seguintes. Em particular, vamos descobrir um análogo da fórmula de Euler para uma determinada classe de grafos.

## Capítulo 12

# Os Poliedros Achatados de Cauchy

*Cauchy é louco e não há nada que se possa fazer sobre isso, embora, neste momento, ele seja o único que sabe como a matemática deve ser feita.*

— Niels Abel<sup>1</sup>

Nos cem anos após a demonstração da fórmula de Euler para poliedros, apareceram muitas novas provas e uma variedade de generalizações para outras formas poliédricas exóticas. A primeira generalização significativa foi levada a cabo por Augustin-Louis Cauchy, que também forneceu uma nova e engenhosa demonstração.

Cauchy nasceu em Paris em 1789. Era o filho mais velho de um administrador sénior do governo. Embora a sua família tenha sido deslocada durante o reinado do terror, o pai certificou-se de que ele receberia uma boa educação. Durante a sua juventude, Cauchy conheceu os matemáticos Pierre-Simon Laplace (1749-1827) e Joseph-Louis Lagrange, e o químico Claude Louis Berthollet (1748-1822), de maneira que, desde o início da sua vida, esteve em contacto com investigadores influentes.

Cauchy teve uma breve carreira como engenheiro militar trabalhando no Canal Ourcq, na Ponte Saint-Cloud, e na base naval de Cherbourg. As suas primeiras publicações matemáticas foram redigidas em 1811, dois anos antes do seu regresso a Paris, para começar uma carreira em matemática. Em 1815 começou a trabalhar na École Polytechnique.

Cauchy foi extremamente prolífico. A sua volumosa produção foi apenas ultrapassada por Euler; as suas obras completas, que incluem

pelo menos sete livros e oitocentos documentos, preenchem vinte e sete volumes consideráveis. Embora fosse provavelmente um boato, dizia-se que uma das novas regras da Academia Francesa, que limitava o número de publicações por cada colaborador por ano, teria sido instituída como resposta à enxurrada de publicações que nasciam da pena de Cauchy.

Cauchy fez contribuições profundas e substanciais para muitas áreas da matemática, incluindo a análise complexa, a análise real, a álgebra, as equações diferenciais, a teoria das probabilidades, os determinantes, e a física-matemática. Foi um dos primeiros defensores da necessidade do rigor em matemática. Muitas das ideias fundamentais do cálculo introduzidas por Newton, Leibniz, Euler, e outros, foram finalmente colocadas numa fundamentação teórica firme por Cauchy. Podemos agradecer-lhe por ter chegado, essencialmente, às definições modernas de continuidade, limite, derivadas e integrais definidos. Através das suas frequentes palestras na École Polytechnique e das suas numerosas publicações, a sua voz esteve sempre presente na comunidade matemática durante a primeira metade do século XIX.

Um testemunho da influência de Cauchy é a existência de inúmeros teoremas, propriedades e conceitos com o seu nome — talvez em maior quantidade do que para qualquer outro matemático, incluindo Euler. No entanto, podia parecer que Cauchy se tornou um dos grandes matemáticos fruto de algum acaso. Muitas vezes, publicava grandes obras sem parecer reconhecer a sua profundidade e importância. O matemático Hans Freudenthal (1905-1990) escreveu: «Em quase todas as situações, ele deixou a forma final das suas descobertas para a geração seguinte. Em tudo o que Cauchy alcançou há uma estranha falta de profundidade... Ele foi o mais superficial dos grandes matemáticos; tinha uma destreza para encontrar o que era simples e fundamental, mas sem o perceber<sup>2</sup>.»

Apesar de Cauchy ser muito admirado como matemático, não era geralmente apreciado como pessoa. Era conhecido por ser teimoso, e tinha uma tendência para o melodrama. Essas características estão bem presentes no seu auto-exílio, da França para Turim e para Praga, que durou quase uma década. Era um político conservador, que apoiou o deposto rei Carlos X, da dinastia Bourbon, após a revolução de Julho de 1830. Antes de ter deixado a França e após o seu regresso, recusou-se a fazer o juramento obrigatório de lealdade ao novo regime, bem como a concordar em não criticá-lo. Era um católico convicto, cujas acções de caridade eram ofuscadas por certos comportamentos, que o traíam como «preconceituoso, egoísta e intolerante»<sup>3</sup>. Um biógrafo escreveu que Cauchy era «um monárquico arrogante na política, e um crente devoto e farisaico na religião... a maioria dos seus colegas investigadores não simpatizava com ele, considerando-o um hipócrita convencido»<sup>4</sup>.

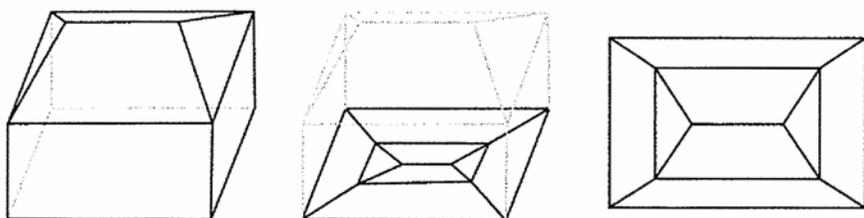


Figura 12.1. Cauchy projectou o poliedro na face inferior

Cauchy escreveu os seus primeiros trabalhos matemáticos enquanto era engenheiro. Estes documentos contêm os seus resultados sobre poliedros, incluindo o teorema de rigidez (que discutimos no capítulo 5) e seu trabalho sobre a fórmula de Euler. Estes importantes resultados foram das poucas contribuições de Cauchy para a geometria.

A primeira característica notável que distingue a demonstração da fórmula de Euler, elaborada por Cauchy, das dos seus antecessores, é que os poliedros nesta prova são ocios, e não sólidos. Mais especificamente, Cauchy considera a «superfície convexa de um poliedro»<sup>5</sup>. Devido a esta linguagem, e devido a outras partes do artigo onde decompõe um poliedro noutros poliedros menores, dá a aparência que ainda considera os poliedros como sólidos, apenas supondo que são ocios de modo a prosseguir a sua demonstração.

O primeiro passo na prova de Cauchy é a transformação deste poliedro ocioso num grafo no plano. Primeiro remove-se uma das faces do poliedro, e depois «transportando para essa face todos os outros vértices, sem alterar o seu número, vamos obter uma figura plana formada por vários polígonos contidos num determinado contorno». Cauchy esclarece esta construção, acrescentando que «as outras faces ... poderiam ser consideradas como formando um conjunto de polígonos, todos contidos no contorno da face removida». Vemos este processo ilustrado na figura 12.1, onde o poliedro, em forma de casa, é «transportado» para o «rés-do-chão».

Joseph Diaz Gergonne (1771-1859), um contemporâneo de Cauchy, que encontraremos também no capítulo 15, descreveu o processo da seguinte forma:

Tomemos um poliedro, no qual uma das faces é transparente; imaginemos que o nosso olho se aproxima desta face do lado de fora até chegar tão perto, que podemos ver o lado interior de todas as outras faces; isto é sempre possível quando o poliedro é convexo. Podemos dispor as coisas de modo a imaginar que, no plano da face transparente, se desenha uma perspectiva do conjunto de todas as outras<sup>6</sup>.

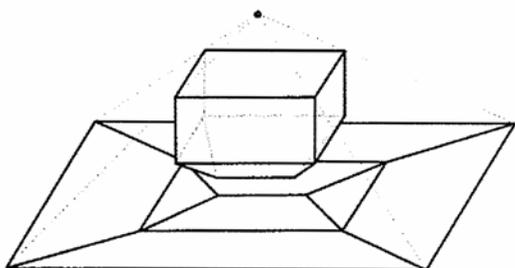


Figura 12.2. O poliedro achatado desenhado no plano, formado pela sombra das arestas

No seu magnífico livro *Proofs and Refutations*, Imre Lakatos (1922-1974) deu uma visão moderna à ideia de Gergonne sugerindo que se colocasse uma máquina fotográfica perto da face removida, e se fotografasse o interior do poliedro. O grafo a que Cauchy aludiu apareceria, então, impresso na fotografia. Uma forma alternativa, e usual, de visualizar este poliedro achatado é vê-lo como a sombra das arestas quando uma lâmpada está situada perto da face removida (figura 12.2).

Cauchy percebeu que, para a fórmula de Euler, bastava determinar os números de vértices, arestas e faces no grafo plano. Cauchy provou que qualquer um destes grafos satisfaz  $V - A + F = 1$ . Uma vez estabelecido este facto, é fácil completar a demonstração da fórmula dos poliedros. O grafo obtido a partir do «transporte» do poliedro para o plano tem o mesmo número de arestas e vértices que o poliedro original, mas tem menos uma face. Como  $V - A + F = 1$  para o grafo, temos  $V - A + F = 2$  para o poliedro. Esta adaptação da fórmula de Euler para poliedros, para grafos no plano, é uma das generalizações mais úteis.

A ideia da prova de Cauchy é adicionar e remover arestas no grafo, de modo a que, em cada passo, a quantidade  $V - A + F$  não se altera. Então, no final, vamos obter um único triângulo, que satisfaz  $V - A + F = 3 - 3 + 1 = 1$ , o que implica que  $V - A + F = 1$  para o grafo original. Em primeiro lugar, dividimos o grafo em regiões triangulares acrescentando diagonais a todas as faces que não sejam triângulos (ver a figura 12.3). Este procedimento chamado uma *triangulação de um grafo*. De cada vez que uma diagonal é adicionada, o número de arestas aumenta de uma unidade, o número de faces também aumenta um, e o número de vértices permanece igual. Assim a soma  $V - A + F$  é a mesma para o grafo original e para o grafo modificado. Após o grafo ter sido triangulado, vamos decompô-lo, removendo os triângulos, a partir do exterior, um de cada vez, até que reste um único triângulo (uma possível ordem de remoção é dada pela numeração dos triângulos, na figura 12.3).

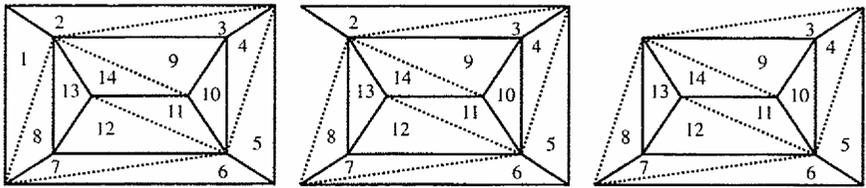


Figura 12.3. Uma ordem possível para remoção dos triângulos do grafo triangulado

Note-se que um triângulo na parte exterior do grafo tem uma ou duas arestas exteriores. No primeiro caso, o triângulo pode ser removido, retirando a aresta única e sem mudar os vértices (tal como na remoção do triângulo número 1). No segundo caso, o triângulo pode ser removido, retirando as duas arestas e o vértice (tal como na remoção do triângulo número 2). Em ambos os casos, a quantidade  $V - A + F$  permanece inalterada. Assim, tem-se forçosamente  $V - A + F = 1$  para o grafo original.

A demonstração de Cauchy foi mais tarde criticada. Tal como a prova de Euler que levantava problemas ao não dar instruções explícitas sobre a forma de remover as pirâmides, Cauchy não deu instruções precisas sobre como eliminar os triângulos. Se não tivermos cuidado, é possível que, seguindo o algoritmo de Cauchy, obtenhamos um grafo desconexo para o qual a relação já não se aplica. Por exemplo, na figura 12.4 removem-se triângulos por uma ordem errada, e obtém-se um grafo desconexo que não satisfaz a fórmula de Euler ( $V = 10$ ,  $A = 14$  e  $F = 6$ ). No entanto, é sempre possível utilizar a técnica de Cauchy para decompor um gráfico sem encontrar uma situação deste tipo.

Como foi mencionado, Cauchy tinha uma tendência para provar teoremas sem compreender a sua importância, ou sem os conduzir a todas as suas conclusões lógicas. A sua demonstração da fórmula dos poliedros de Euler é um exemplo perfeito desta situação. No seu artigo, ele afirma explicitamente que a sua prova se aplica a poliedros convexos. Isto é verdade mas, de facto, a sua prova aplica-se a uma classe mais geral de poliedros. O passo chave na prova de Cauchy é a remoção de uma face e a projecção do poliedro restante para um plano, de forma que nenhum par das restantes faces se sobreponha. Isto pode ser conseguido para qualquer poliedro convexo, como explicado acima, mas também pode ser feito para muitos outros poliedros.

Por exemplo, a demonstração de Cauchy aplica-se, sem modificação, para o poliedro não convexo mostrado na figura 12.5. Para verificar isto, basta colocar a máquina fotográfica de Lakatos perto da face inferior do cubo.

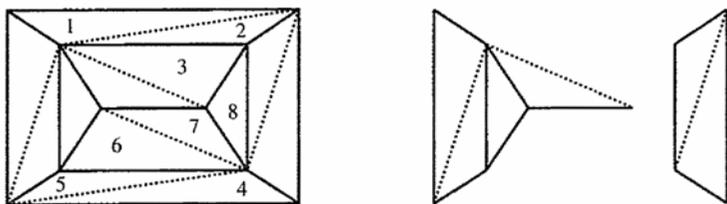


Figura 12.4. O método de Cauchy pode produzir polígonos degenerados

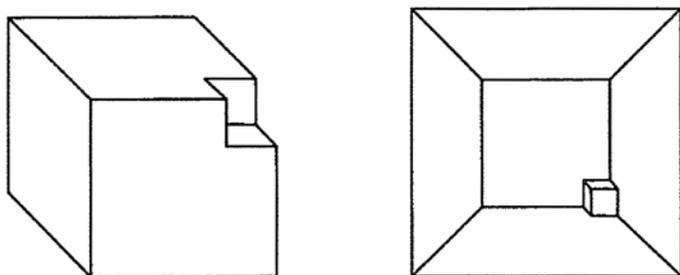


Figura 12.5. Um cubo com um canto indentado e o respectivo grafo

Lakatos e o matemático Ernst Steinitz (1871-1928) afirmaram que Cauchy sabia que a sua demonstração se aplicava a alguns ou talvez a todos os poliedros não convexos, mas isso não é claro a partir do que Cauchy escreveu. A discussão surge do uso casual, por Cauchy, da palavra «convexo». A noção de convexidade não aparece no enunciado do teorema, mas disse, na demonstração, que estava a considerar «a superfície convexa de um poliedro». Ele não abordou a razão pela qual essa hipótese aparece, pelo que é impossível adivinhar o que sabia ou não.

Independentemente de Cauchy ter reconhecido que o resultado se podia generalizar a alguns poliedros não convexos, isso foi rapidamente observado por outros. Em 1813, no mesmo ano em que o artigo de Cauchy foi publicado, Gergonne forneceu a sua própria prova da fórmula de Euler. Mais tarde, este escreveu: «Pode preferir-se ainda, e com razão, a bela demonstração do Sr. Cauchy, que tem a preciosa vantagem de não assumir que o poliedro é convexo<sup>7</sup>.»

Com um pouco de imaginação, podemos aplicar a demonstração de Cauchy a uma classe mais ampla de poliedros. As versões modernas desta prova de Cauchy descrevem um poliedro como sendo feito de borracha. Se pudermos remover uma das faces, e esticar o resto do poliedro de modo a ficar num plano sem criar qualquer sobreposição ou dobra, então

a prova de Cauchy é aplicável. No capítulo 15 iremos ver exemplos patológicos de poliedros que não possuem esta propriedade — ao remover uma face, o resto do poliedro não pode ser colocado desta forma num plano. A propriedade chave é saber se o nosso poliedro tem ou não a «forma de uma esfera». Vamos discutir esta propriedade aparentemente vaga em maior detalhe no capítulo 16. Cauchy ficou muito perto de reconhecer esta propriedade essencial. Se tivesse percebido isto, teria dado uma contribuição significativa para a área ainda por formar da topologia, ou *Analysis Situs*, como era denominada nos primeiros tempos. Tal como Jacques Hadamard (1865-1963) escreveu em 1907:

Considero ser um dos eventos mais marcantes na história da ciência o erro de Cauchy ao ter acreditado que podia demonstrar o teorema de Euler sem introduzir qualquer hipótese sobre a natureza do poliedro estudado. Na verdade, é uma questão de enorme importância que lhe escapou e cuja descoberta ele deixou para Riemann: o papel fundamental da *Analysis Situs* na matemática<sup>8</sup>.

Tal como não reparou na generalidade da sua prova para poliedros, Cauchy também não reconheceu a importância desta prova para a teoria dos grafos. Por exemplo, foi Arthur Cayley (1821-1895) que, em 1861, observou que a demonstração de Cauchy se aplica igualmente para grafos cujas arestas não são segmentos rectos, mas são curvas (este facto foi observado independentemente por Listing em 1861, e por Camille Jordan (1838-1922) em 1866)<sup>9</sup>.

No enunciado do seu teorema, Cauchy supôs que o grafo é um conjunto de polígonos contidos num contorno poligonal. Como veremos no próximo capítulo, podemos fornecer uma afirmação mais geral sobre grafos, mas, para o fazer precisamos de introduzir alguma da terminologia moderna.

## Capítulo 13

# Grafos, Geoplanos e Couves-de-bruxelas

*Na maioria das ciências uma geração destrói o que a anterior construiu, e o que uma estabelece, outra desfaz. Só na Matemática cada geração acrescenta um novo andar ao edifício antigo.*

— Hermann Hankel<sup>1</sup>

No capítulo anterior vimos o método inovador de Cauchy para mostrar a fórmula de Euler. Considerando um poliedro ele removeu uma das faces e projectou as restantes sobre um plano. De seguida, mostrou que, para esta figura, é válida a relação  $V - A + F = 1$ , de modo que  $V - A + F = 2$  para o poliedro. A relação com a teoria dos grafos parece estar clara. À primeira vista, parece ser simples obter uma generalização da fórmula de Euler para grafos que não são projecções de poliedros, e que podem possuir arestas que são curvas em vez de rectas.

A dificuldade de generalizar a fórmula de Euler é que ela não se verifica para todos os grafos. A contagem de vértices e arestas é fácil — estes são os blocos com que se constroem os grafos — mas um grafo não precisa de ter «faces». Mesmo quando um grafo é desenhado no papel, as arestas podem não dividir o desenho em «faces». Por exemplo, a aresta  $PR$  no grafo do lado esquerdo da figura 13.1 atravessa a aresta  $QS'$ , por isso, não pode estar na fronteira de uma face. No entanto, o

---

<sup>1</sup> Nos grafos da figura 13.1, todos os vértices estão indicados com uma letra; assim, o ponto de intersecção entre as arestas  $PR$  e  $QS$  não é um vértice. (*N. do T.*)

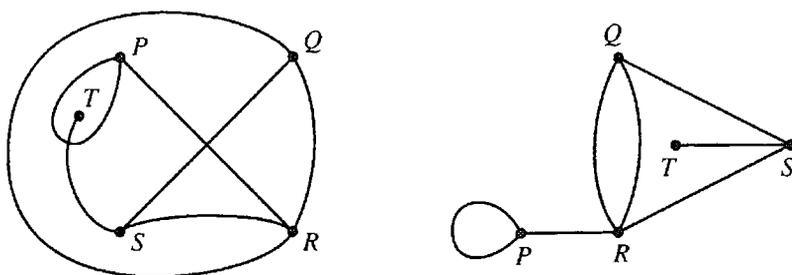


Figura 13.1. Duas representações do mesmo grafo

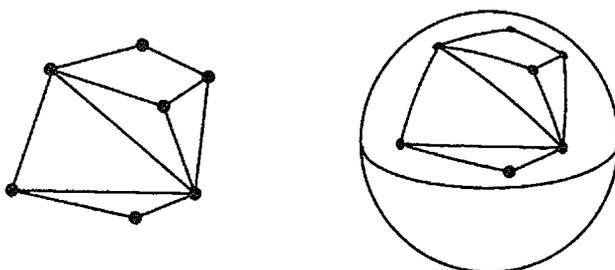


Figura 13.2. A forma de colocar um grafo planar sobre uma esfera

grafo pode ser redesenhado (como no lado direito), sem quaisquer cruzamentos entre arestas, dividindo assim a página em *faces*. Um grafo que pode ser desenhado num plano sem arestas que cruzam, é chamado um *grafo planar*.

Num poliedro, uma face é uma região delimitada por um polígono. Para grafos, adoptamos uma definição mais flexível. Uma face num grafo pode ser delimitada por uma única aresta, tal como o lacete que une o vértice  $P$  a si próprio, na figura 13.1, à direita. Uma face pode ser delimitada por apenas duas arestas, tal como o par de arestas que unem  $Q$  a  $R$  (um par de arestas que ligam os mesmos dois vértices são chamadas paralelas). Uma face pode mesmo ter uma aresta contida no seu interior, tal como a aresta de  $S$  para  $T$ .

Em teoria de grafos, é comum contar a região exterior do grafo como uma das faces. Se o grafo é visto como uma ilha, então esta face ilimitada é como o mar estendendo-se até ao infinito em todas as direcções. Embora pareça estranho chamar a esta região ilimitada uma face, muitas vezes é mais útil incluí-la do que excluí-la. Uma forma de a colocar em pé de igualdade com as outras faces do grafo é desenhar o mesmo grafo,

não num plano infinito, mas num globo ou esfera (figura 13.2). Deste modo, a face ilimitada passa a ter área finita\*.

Portanto, temos a seguinte generalização da fórmula de Euler para grafos planares.

FÓRMULA DE EULER PARA GRAFOS PLANARES

Um grafo planar conexo com  $V$  vértices,  $A$  arestas, e  $F$  faces (incluindo a exterior) satisfaz  $V - A + F = 2$ .

Se não tivéssemos contado a região ilimitada como uma das faces, então a fórmula de Euler ficaria  $V - A + F = 1$ . Observe-se que o grafo da figura 13.1 tem 5 vértices, 7 arestas e 4 faces pelo que  $5 - 7 + 4 = 2$ , como esperado.

Como exemplo elementar, considere uma *árvore*. Uma árvore é um grafo conexo que não tem circuitos (ver figura 13.3). Uma vez que uma árvore não tem circuitos, a única face é precisamente a face ilimitada, e por isso a fórmula de Euler fica  $V - A + 1 = 2$ , ou  $V = A + 1$ . Por outras palavras, o número de vértices de uma árvore excede o número de arestas por uma unidade. A árvore na figura 13.3 tem 19 vértices e 18 arestas.

Há muitas demonstrações da fórmula de Euler para grafos. Vamos fornecer uma prova curta na qual, como a prova de Cauchy, se removem as arestas do grafo, uma de cada vez. Mas vamos ter cuidado, para evitar o seu erro.

Começemos com um qualquer grafo planar conexo. Escolhemos uma aresta arbitrária. Esta aresta, ou une dois vértices diferentes, ou é um lacete unindo um vértice a si mesmo. Suponhamos que a aresta une dois vértices distintos. Agora, vamos encolhendo a aresta até desaparecer

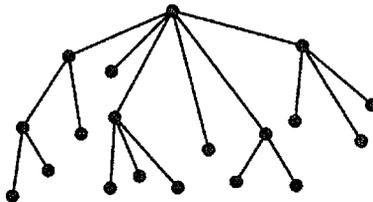


Figura 13.3. Uma árvore

\* Há sempre apenas uma face ilimitada, que também é chamada face exterior; a sua fronteira é constituída por todas as arestas exteriores do grafo planar. (N. do T.)

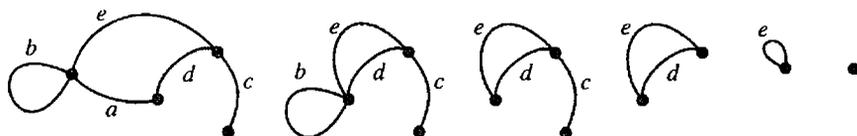


Figura 13.4. O processo de redução de um grafo planar a um único vértice, por remoção das arestas  $a, b, c, d$  e  $e$

completamente, quando as suas extremidades se juntam e se fundem num único ponto. Isto pode ser feito de modo a que o grafo resultante permaneça planar (considere a eliminação por encolhimento das arestas  $a, c$  e  $d$  na figura 13.4). Este processo reduz o número de arestas por uma unidade e o número de vértices também, deixando o número de faces inalterado. Assim a soma alternada  $V - A + F$  não é modificada. Agora, suponhamos que a aresta que pretendemos eliminar é um lacete. Neste caso, basta retirá-la simplesmente do grafo (considere a eliminação das arestas  $b$  e  $e$  na figura 13.4). Este processo diminui o número de arestas e de faces de uma unidade, mas mantém o número de vértices. Assim, uma vez mais,  $V - A + F$  fica inalterado.

Continuamos esse processo de remoção de arestas até ficarmos com um único vértice. Nesta altura, temos apenas um vértice, nenhuma aresta, e uma face (a face exterior). Assim,  $V - A + F = 2$ . Como a soma alternada  $V - A + F$  permaneceu constante durante todo o processo, temos  $V - A + F = 2$  para o grafo original.

Uma consequência interessante desta fórmula é que, para um grafo planar com  $A$  arestas e  $V$  vértices, todas as representações planares terão sempre o mesmo número de faces. Por outras palavras, se dez pessoas considerassem o mesmo grafo planar, mas cada uma, na sua folha de papel, colocasse os vértices de forma diferente e arbitrária e desenhasse as arestas do grafo de modo a evitar cruzamentos de arestas, todos os dez grafos teriam o mesmo número de faces ( $F = 1 + A - V$ , se excluirmos a face exterior). Por exemplo, na figura 13.5 apresenta-se um grafo com quatro vértices e seis arestas, e temos duas representações planares distintas desse grafo, ambos com três faces limitadas.

Como a fórmula de Euler só se aplica a grafos planares, muitas vezes podemos usá-la para comprovar que um determinado grafo não é planar. Para ilustrar essa ideia, apresentamos duas importantes famílias de grafos: os grafos completos e os grafos bipartidos completos.

O grafo completo com  $n$  vértices, designado por  $K_n$ , tem  $n$  vértices e exactamente uma aresta por cada par de vértices distintos, ligando-os.

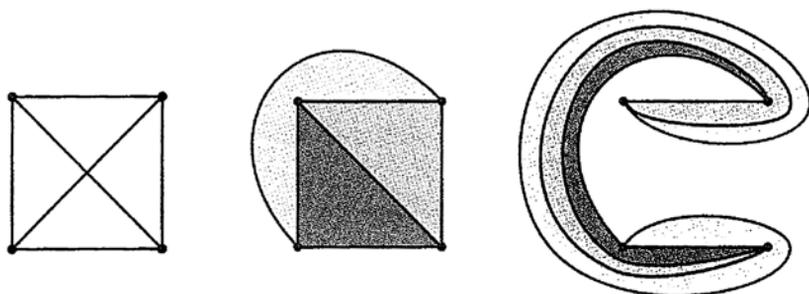


Figura 13.5. Diferentes representações planares do mesmo grafo, com o mesmo número de faces

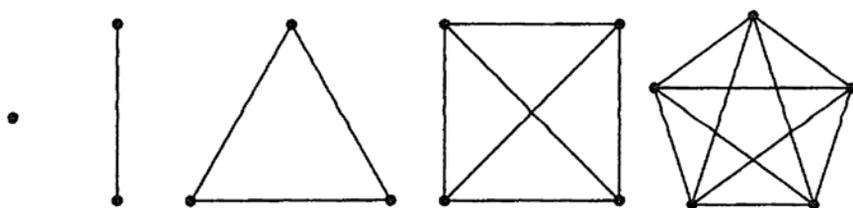


Figura 13.6. Os grafos completos  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  e  $K_5$

É o maior grafo possível com  $n$  vértices (no sentido em que tem mais arestas) que não tem lacetes ou arestas paralelas. Os grafos  $K_1$  a  $K_5$  são mostrados na figura 13.6. Se removermos os lacetes do grafo dos dominós (figura 11.11), obteríamos o grafo  $K_7$ .

Na mesma família dos grafos completos, temos os grafos bipartidos completos. Um grafo bipartido completo tem a propriedade de que os seus vértices podem ser divididos em dois conjuntos,  $U$  e  $V$ , de modo que não existem arestas que unem vértices de  $U$  com vértices de  $U$ , não existem arestas unindo vértices de  $V$  com vértices em  $V$ , e para todos os pares consistindo num vértice de  $U$  e um vértice de  $V$  existe exactamente uma aresta que os liga. Se  $U$  tem  $m$  vértices e  $V$  tem  $n$  vértices, denotamos este grafo bipartido completo com a notação  $K_{m,n}$ . Os grafos  $K_{3,2}$  e  $K_{3,3}$  estão ilustrados na figura 13.7. Os exemplos típicos de grafos bipartidos completos que se encontram em todos os livros introdutórios de teoria de grafos são grafos que representam redes de serviços. O conjunto  $U$  consiste em empresas de serviços distintos (por exemplo, água, gás, electricidade, etc.) e o conjunto  $V$  é composto pelos clientes. Uma vez que todos

\* Naturalmente  $K_{n,n} = K_{m,n}$ . (N. do T.)

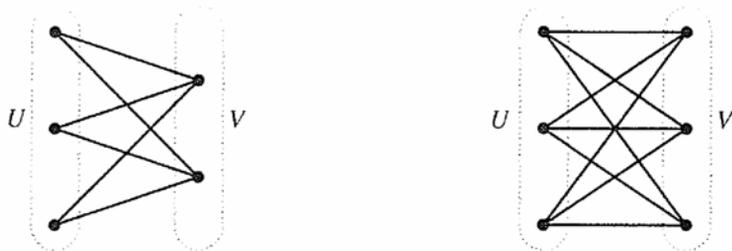


Figura 13.7. Os grafos completos bipartidos  $K_{3,2}$  e  $K_{3,3}$

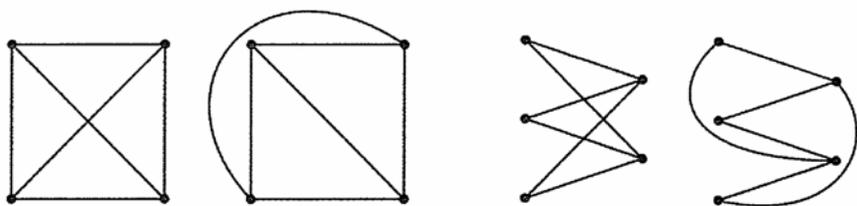


Figura 13.8.  $K_4$  e  $K_{3,2}$  são grafos planares

os clientes devem beneficiar de todos os serviços, o grafo pretendido é um grafo bipartido completo.

Gostaríamos de determinar quais são os grafos completos e os grafos bipartidos completos que são planares. É fácil mostrar que  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_{2,1}$ ,  $K_{m,1}$  e  $K_{m,2}$  são grafos planares. Por exemplo, na figura 13.8, vemos que  $K_4$  e  $K_{3,2}$  são planares. Acontece que nenhum dos restantes é planar. Usando a fórmula de Euler, vamos provar que  $K_5$  e  $K_{3,3}$  não são planares.

Para provar que  $K_5$  não é planar, usamos uma técnica de demonstração chamada *prova por contradição*, ou *redução ao absurdo*. Vamos assumir o contrário do que precisamos provar (isto é, supomos que  $K_5$  é planar) e mostrar que isso leva a uma contradição lógica. Desta forma, podemos concluir que  $K_5$  não é planar. G. H. Hardy escreveu: «*reductio ad absurdum*, que Euclides tanto adorava, é uma das melhores armas de um matemático. É uma jogada bem mais fina do que qualquer troca num jogo de xadrez: um jogador de xadrez pode oferecer o sacrifício de um peão ou mesmo peças mais importantes, mas um matemático oferece o jogo<sup>2</sup>.»

Suponhamos então que  $K_5$  é um grafo planar. Então, pode desenhar-se no plano de tal modo que nenhum par de arestas se cruza.  $K_5$  tem cinco vértices e 10 arestas (figura 13.6). A fórmula de Euler para grafos planares afirma que  $V - A + F = 2$ , portanto, o nosso desenho planar de  $K_5$  deve ter 7 faces, incluindo a face ilimitada (dado que  $2 = 5 - 10 + F$ ).

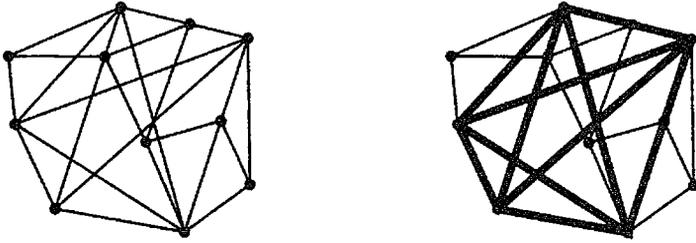


Figura 13.9. Um exemplo de um grafo não planar contendo  $K_5$

Num grafo planar, cada aresta está no bordo de exactamente duas faces, assim  $pF = 2A$ , onde  $p$  é a média do número de lados por face.  $K_5$  é um grafo completo, por isso não tem lacetes ou arestas paralelas. Como não há lacetes, não há faces delimitadas por uma única aresta, e como não há arestas paralelas, não há faces delimitadas por duas arestas. Assim, o número médio de arestas por face é um número igual ou superior a três. Deste modo,  $p \geq 3$ , donde  $2A \geq 3F$ . Mas  $F = 7$  e  $A = 10$ , pelo que obtemos  $20 \geq 21$ , o que representa uma contradição. Assim, concluímos que  $K_5$  não é planar.

De uma forma análoga, podemos provar que o grafo bipartido completo  $K_{3,3}$  não é planar (experimente-o!). A principal diferença para este caso é que, por causa de  $K_{3,3}$  ser bipartido, um passeio que começa e termina no mesmo vértice deve ter um número par de arestas. Assim, neste caso, também não podemos ter faces de três lados.

Em geral, temos o seguinte teorema:

$K_n$  não é planar se  $n > 4$ , e  $K_{m,n}$  não é planar se  $m > 2$  e  $n > 2$ .

Acontece que, num certo sentido,  $K_5$  e  $K_{3,3}$  são os dois únicos obstáculos para um grafo ser planar. Um teorema famoso, chamado teorema de redução de Kuratowski, afirma que a única forma de um grafo não ser planar é se ele contém, dentro dele, uma cópia de  $K_5$  ou de  $K_{3,3}$ . Por exemplo, o grafo mostrado na figura 13.9 não é planar, pois contém uma cópia de  $K_5$ .

Agora, vamos indicar uma outra aplicação interessante da fórmula de Euler para grafos, chamado teorema de Pick. Foi mostrado por Georg Alexander Pick (1859-c. 1943) em 1899<sup>3</sup>. Pick era um matemático austríaco que passou grande parte de sua vida em Praga. Morreu no campo de concentração de Theresienstadt, na Checoslováquia ocupada.

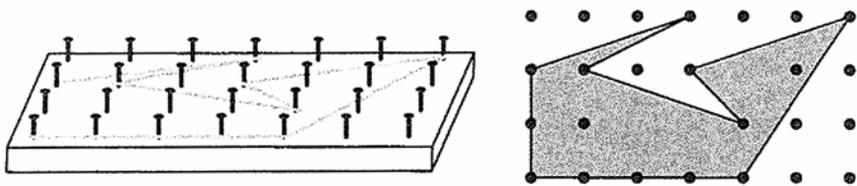


Figura 13.10. Um polígono feito num geoplano

Para explicar o teorema de Pick, vamos usar o geoplano, uma ferramenta para o ensino da matemática elementar que foi inventada por Caleb Gattegno (1911-1988), e que dá às crianças um método prático de aprender geometria elementar. Um geoplano pode ser construído em casa, com pregos martelados a meia altura numa placa de madeira, de modo a formar uma rede quadriculada. Os alunos podem então colocar elásticos em redor dos pregos para formar polígonos de formas variadas (ver figura 13.10). Desta forma, o professor pode explicar conceitos geométricos, tais como perímetro, ângulo, área e o teorema de Pitágoras.

O teorema de Pick fornece-nos um método muito fácil para calcular áreas de polígonos convexos ou não, mesmo os mais complicados (assumimos, contudo, que o elástico não se auto-intersecta).

#### TEOREMA DE PICK

Se há  $B$  pregos a tocar a fronteira (bordo) de um dado polígono e  $I$  pregos no seu interior, então, a área do polígono é dada por  

$$\text{área} = I + B/2 - 1.$$

Por exemplo, como o polígono tem na figura 13.10 tem  $B = 12$  e  $I = 5$ , a área é igual a  $5 + 12/2 - 1 = 10$ .

É sabido que, pelo menos, um engenheiro florestal em Oregon usou o teorema de Pick para estimar o tamanho da sua floresta<sup>4</sup>. O engenheiro colocou uma transparência com um padrão quadriculado de pontos previamente desenhados e colocou-o por cima de um mapa do terreno florestal, que tinha uma forma aproximadamente poligonal. Para estimar a respectiva área, adicionou o número de pontos no interior do terreno a metade do número de pontos na sua fronteira (tal como no teorema de

<sup>4</sup> Nesta fórmula, a área fica expressa na unidade que corresponde à distância entre 2 pregos vizinhos. Assim, por exemplo, se dois pregos consecutivos do geoplano (na horizontal ou vertical) distam de 1 cm, a área fica dada em  $\text{cm}^2$ ; se distam 2 cm, a área é dada em múltiplos de  $4 \text{ cm}^2$ . (N. do T.)

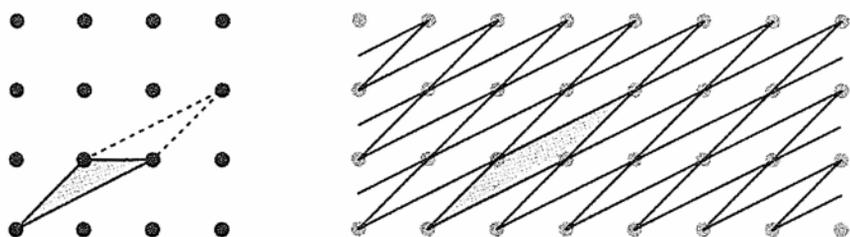


Figura 13.11. O paralelogramo formado a partir de um triângulo primitivo do plano

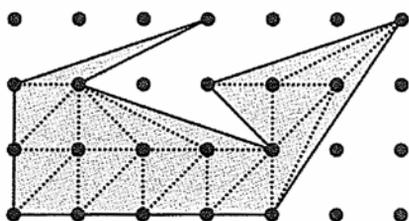


Figura 13.12. Um polígono subdividido em triângulos primitivos

Pick, à excepção da parcela  $-1$ ) e multiplicou o número resultante pelo factor de escala adequado.

O teorema de Pick é uma consequência elementar da fórmula de Euler, desde que saibamos qual a área de um *triângulo primitivo*. Um triângulo no geoplano diz-se *primitivo* se não tem pregos no seu interior e tem apenas pregos nos vértices (e portanto em número de 3, tal como o triângulo sombreado na figura 13.11). Por outras palavras, um triângulo é primitivo se  $B = 3$  e  $I = 0$ . Surpreendentemente, todos os triângulos primitivos têm uma área de  $1/2$ .

Infelizmente, este facto é um pouco fastidioso de mostrar com rigor. Em vez de o fazer, vamos dar apenas uma vaga indicação do motivo pelo qual é verdadeiro. É fácil visualizar todo o plano (considerado, por exemplo, como um geoplano infinito) como estando coberto por azulejos quadrados de lado 1. Realizada esta pavimentação, se retirarmos um destes azulejos, e o deslocarmos uma unidade para cima, para baixo, para a direita ou para a esquerda, ele vai pousar precisamente por cima de um outro azulejo quadrado. Da mesma forma, consideremos agora um triângulo primitivo arbitrário, e vamos duplicá-lo para formar um paralelogramo com o dobro da área (ver figura 13.11). Tal como com o quadrado, podemos usar este paralelogramo para pavimentar todo o plano colocando cópias exactas deslocadas de uma unidade para a esquerda, para a direita, para cima

e para baixo. Pode-se provar rigorosamente que, tal como o quadrado, este paralelogramo terá área 1. Assim, o triângulo tem área igual a  $1/2$ .

Estamos agora em condições de mostrar o teorema de Pick. Primeiro, triangulamos o polígono usando  $T$  triângulos primitivos (tal como na figura 13.12). Se contarmos a região ilimitada como uma das faces, então  $F = T + 1$  é o número total de faces. Como cada face triangular tem uma área de  $1/2$ , a área total do polígono é área =  $(1/2) T$ .

Cada face limitada tem três lados, de modo que a quantidade  $3T$  conta cada aresta duas vezes, excepto para as arestas ao longo do bordo do polígono, que são contadas apenas uma vez. Dado que o número de arestas no bordo é o mesmo que o número de vértices no bordo do polígono, temos então

$$3T = 2A - B,$$

ou, resolvendo em ordem a  $A$ ,

$$A = \frac{3T}{2} + \frac{B}{2}.$$

O número de vértices total é  $V = I + B$ . Aplicando a fórmula de Euler, temos

$$2 = V - A + F,$$

$$2 = (I + B) - \left( \frac{3T}{2} + \frac{B}{2} \right) + (T + 1),$$

$$2 = -\frac{T}{2} + \frac{B}{2} + I + 1.$$

Assim, o número de faces triangulares é

$$T = 2I + B - 2,$$

e, finalmente, a área total é dada por

$$\text{área} = \frac{T}{2} = \frac{1}{2} (2I + B - 2) = I + \frac{B}{2} - 1,$$

tal como pretendido.

Terminamos este capítulo com dois jogos de papel e lápis. Apesar das suas semelhanças, o primeiro é um desafio intelectual e o outro uma partida que se pode «pregar» aos amigos, uma vez que o resultado é

De acordo com Martin Gardner (1914-2010), colunista matemático para a *Scientific American* ao longo de vários anos, o jogo «rebentos» foi inventado durante a hora do chá numa tarde de Fevereiro de 1967 por John Horton Conway (nascido em 1937) e Michael Paterson, da Universidade de Cambridge. Rapidamente se tornou um fenómeno de culto. Conway escreveu a Gardner dizendo que «no dia depois de os rebentos terem rebentado, parecia que todo o mundo o estava a jogar. Durante o café ou chá, havia pequenos grupos de pessoas analisando várias posições deste jogo, desde o ridículo ao sensacional»<sup>5</sup>.

O jogo começa com qualquer número de pontos numa folha de papel em branco. O primeiro jogador desenha uma curva partindo de um dos pontos à sua escolha para outro ponto, podendo ligar o ponto a si próprio, e, em seguida, coloca um novo ponto nalgum lugar ao longo da curva que acabou de desenhar. O jogo prossegue alternadamente, com ambos os jogadores a desenhar curva de um ponto a outro e colocando um novo ponto ao longo dessa curva. As únicas regras são que uma nova curva não pode cruzar uma outra curva ou ponto já existentes e que, no máximo, três linhas se podem reunir em qualquer ponto. O vencedor é o último jogador capaz de fazer uma jogada. A figura 13.13 mostra um jogo que começa com apenas 2 pontos, e no qual o segundo jogador ganha ao quarto movimento.

Quanto mais pontos houver no início, mais longo será o jogo, mas o jogo não pode durar para sempre. No início de um jogo com  $n$  pontos, como o número máximo de arestas num vértice é 3, existem  $3n$  locais disponíveis onde incidir uma dada aresta. Cada vez que uma nova aresta é desenhada, o número de pontos disponíveis diminui uma unidade (pois dois locais são usados, e um é adicionado). Assim, um jogo com  $n$  pontos iniciais durará no máximo  $3n - 1$  movimentos.

Verifica-se que, para pequenos valores de  $n$ , existe uma ligeira vantagem de jogar em primeiro ou em segundo lugar, dependendo do número de pontos iniciais. Se o jogo começa com dois pontos, o segundo jogador pode sempre fazer escolhas para garantir a vitória. O mesmo é válido para  $n = 1, 6, 7$  e  $8$  pontos iniciais. Por outro lado, o primeiro jogador tem vantagem quando  $n = 3, 4, 5, 9, 10$  ou  $11$  pontos. A maioria destes casos (aquele para os quais  $n > 6$ ) foi verificada por computador<sup>6</sup>. Para valores de  $n$  superiores, não se sabe se um ou outro jogador têm vantagem. Embora exista um enviesamento teórico neste jogo, a estratégia para vencer, à excepção destes valores baixos de  $n$ , é desconhecida. Assim, na prática, continua a ser um desafio intelectual conseguir ganhar o jogo.

Mais tarde Conway inventou uma variante de *rebentos*, que ele designou por «couves-de-bruxelas». Em vez de começar com  $n$  pontos, o jogo

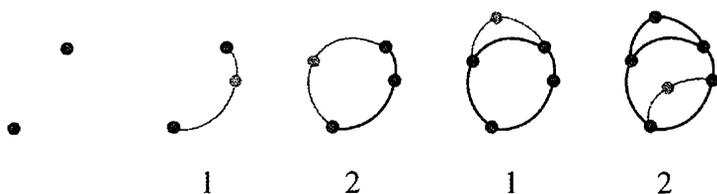


Figura 13.13. O segundo jogador vence este jogo de rebentos

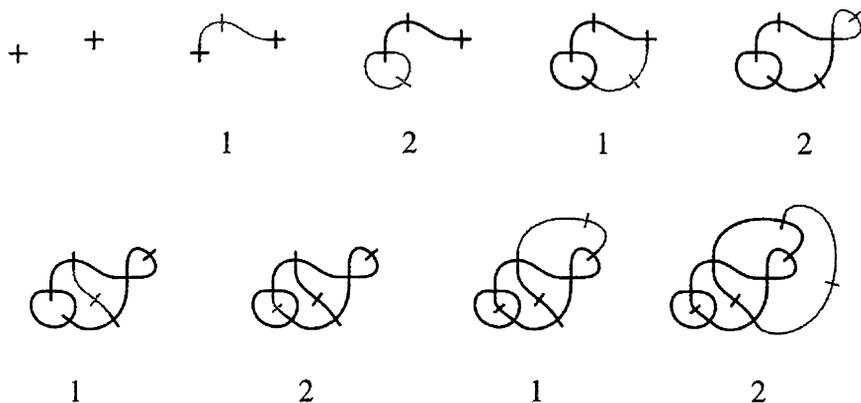


Figura 13.14. O segundo jogador vence este jogo de couves-de-bruxelas

começa com  $n$  cruzes em forma de sinal +, como se cada ponto tivesse quatro pernas. Cada vez que um jogador une duas pernas livres através de uma curva, coloca um novo sinal de mais (produzindo duas pernas livres) no meio da aresta desenhada (ver figura 13.14). Ao contrário de *rebentos*, as regras para o *couves-de-bruxelas* permitem que quatro arestas se juntem no mesmo ponto. Tal como antes, o vencedor é o último jogador capaz de fazer uma jogada. Acontece que o nome humorístico *couve-de-bruxelas* é uma dica de que o jogo em si é apenas uma anedota.

Observámos que um jogo de *rebentos* deve forçosamente terminar, mas isso não é tão fácil de ver para o *couves-de-bruxelas*. Cada jogada usa duas pernas livres e acrescenta outras duas, pelo que é concebível que o jogo possa continuar indefinidamente. No entanto, todos os jogos de *couves-de-bruxelas* estão destinados a terminar, e aqui reside a piada. Independentemente de quão inteligentes ou burros forem os jogadores, o jogo vai sempre durar exactamente  $5n - 2$  jogadas. Por outras palavras, um número ímpar de cruzes garante a vitória ao primeiro jogador, e um número par garante a extraordinária vitória ao segundo jogador.

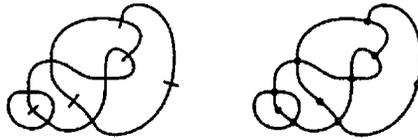


Figura 13.15. O grafo final para o jogo *couves-de-bruxelas* da figura 13.14

Se ignorarmos as pernas livres, então, em cada jogada, o diagrama do jogo é um grafo planar (tendo possivelmente várias componentes conexas). Se pensarmos em cada cruz como um vértice, então cada jogada adiciona duas arestas e um vértice. A não ser que a nova aresta una duas componentes conexas distintas, cada jogada também adiciona uma face.

Vamos mostrar que o jogo irá parar quando o grafo for conexo e tiver exactamente  $4n$  faces (contando a região do exterior como uma face). No início do jogo, existem  $n$  cruces possuindo  $4n$  pernas livres. Como todas as jogadas reduzem duas pernas livres e acrescentam mais duas, existem sempre  $4n$  pernas livres. Cada face deve ter pelo menos uma perna livre apontando para dentro dela, mais precisamente, aquela perna no meio da sua curva de fronteira mais recentemente desenhada. Assim, o grafo não pode ter mais do que  $4n$  faces. Por outro lado, se existem menos do que  $4n$  faces, significa que alguma face do grafo deve conter ainda duas pernas livres, pelo que o jogo ainda não acabou.

Suponha que o jogo termina após  $m$  jogadas, deixando um grafo conexo com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F = 4n$  faces. (Por exemplo, a configuração final na figura 13.15 tem  $V = 10$ ,  $A = 16$ , e  $F = 8$ .) Tal como explicado anteriormente, cada um das  $m$  jogadas adiciona duas novas arestas e um novo vértice. Como o jogo começou sem arestas e com  $n$  vértices, no final do jogo há  $A = 2m$  arestas e  $V = n + m$  vértices. Agora usamos a fórmula de Euler para obter

$$2 = V - A + F = (n + m) - 2m + 4n.$$

Resolvendo em ordem a  $m$ , obtemos  $m = 5n - 2$ .

Assim, se sentir vontade de pregar uma partida aos seus amigos de confiança, peça-lhes para jogar o *couves-de-bruxelas* consigo. Depois de explicar as regras, dê-lhes a escolher: ou escolhem quem joga primeiro ou o número de cruces iniciais. Em qualquer dos casos, pode garantir que é o vencedor.

## Capítulo 14

### É um Mundo Colorido

*«Illinois é verde, Indiana é cor-de-rosa. Mostra-me qualquer coisa cor-de-rosa lá em baixo, se poderes. Não senhor, é verde...»*

*«Huck Finn, achas que a América lá fora é da mesma cor que no mapa?»*

*«Tom Sawyer, para que serve um mapa? Não é para ensinar os factos?»*

*«É claro.»*

*«Bom, então, como é que o vai fazer se nos diz mentiras? Isso é o que eu gostava de saber.»*

— Mark Twain, *Tom Sawyer Abroad*<sup>1</sup>

O matemático Charles Lutwidge Dodgson (1832-1898), mais conhecido como Lewis Carroll, autor de *Alice no País das Maravilhas*, inventou a seguinte brincadeira para duas pessoas. A pessoa *A* desenha um mapa de um continente com um número qualquer de países. De seguida, a pessoa *B* pinta o mapa de modo que os países vizinhos (que partilham uma fronteira; tocar apenas num ponto não conta) tenham cores diferentes. O objectivo da brincadeira é desenhar um mapa tão complicado que obrigue *B* a usar muitas cores. *B*, por sua vez, tem que descobrir como pintar o mapa com o menor número possível de cores.

Um mapa simples, análogo a um tabuleiro de xadrez, pode ser pintado com apenas duas cores, mas mesmo alguém com pouco jeito para desenhar mapas pode forçar três cores. Também não é difícil desenhar um mapa que exige quatro cores — basta para isso desenhar um país cercado por exactamente três outros (como, por exemplo, o Luxemburgo rodeado



Figura 14.1. O mapa dos Estados Unidos pode ser pintado com quatro cores

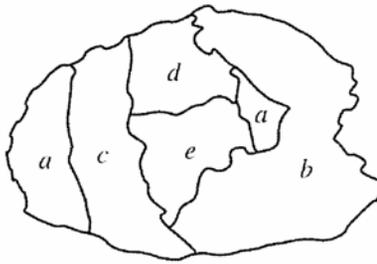


Figura 14.2. Países que não são conexos podem forçar cinco cores

pela Alemanha, França e Bélgica). Dado que todos os quatro países são vizinhos mútuos, são necessárias as quatro cores (o Paraguai e Malauí são outros dois exemplos).

Na introdução, vimos uma forma mais subtil de forçar quatro cores num mapa. Para pintar os estados Nevada, Califórnia, Arizona, Utah, Idaho, Nevada e Oregon, são necessárias quatro cores porque o estado do Nevada está rodeado por um número ímpar de estados (figura 14.1). Verifica-se que Nevada, Virgínia Ocidental e Kentucky são os únicos estados que têm esta propriedade nos Estados Unidos da América. Ao pintar de forma criteriosa esses estados e os seus vizinhos, é possível estender a coloração de todo o restante mapa dos Estados Unidos, usando uma quarta cor apenas duas vezes.

Conseguirá a pessoa *A* fazer um mapa mais difícil neste aspecto? Pode forçar *B* a usar cinco cores? Como discutiremos em breve, é impossível encontrar cinco países mutuamente vizinhos dois a dois (vamos assumir desde já que não permitimos nações «imperialistas» desconexas, como o país da figura 14.2). Será isto suficiente para garantir que quatro cores chegam para pintar qualquer mapa?

É geralmente admitido que os cartógrafos foram os primeiros a reparar que quatro cores eram suficientes para pintar qualquer mapa. Não há nenhuma evidência que apoie esta afirmação. Se algum cartógrafo estava ciente disso, não o divulgou. Kenneth O. May vasculhou vários livros sobre cartografia, e sobre a sua história, e não encontrou nenhuma referência ao teorema das quatro cores<sup>2</sup>. Uma rápida consulta a um atlas mostra que a maioria dos mapas é pintada ou usando uma só cor ou várias cores. Mas não há indicação de que os cartógrafos tenham sentido qualquer desejo de minimizar o número de cores utilizadas.

Tanto quanto se pôde investigar, esta observação remonta a 1852. Francis Guthrie (1831-1899), um recém-licenciado em matemática, reparou que todas as províncias de Inglaterra poderiam ser pintadas com apenas quatro cores, e questionou-se sobre se isso seria sempre verdade. Formulou então uma conjectura que se tornaria um dos problemas mais difíceis e mais bem conhecidos de toda a matemática: a conjectura das quatro cores.

#### CONJECTURA DAS QUATRO CORES

Todos os mapas podem ser pintados com quatro cores ou menos de modo a que não haja países vizinhos com a mesma cor.

Francis Guthrie mencionou esta observação ao seu irmão Frederick, que por sua vez a partilhou com o seu professor, o respeitado matemático Augustus De Morgan (1806-1871). De Morgan ficou intrigado com a questão. A 23 de Outubro de 1852, escreveu a Sir William Rowan Hamilton (1805-1865):

Um aluno meu pediu-me hoje para lhe indicar uma razão para um facto que eu não sabia que era um facto — e não sei ainda. Ele diz que se uma figura for dividida de maneira arbitrária, e as regiões forem pintadas de forma que duas regiões que tenham em comum qualquer parte da linha de fronteira sejam coloridas de cor diferente — quatro cores podem ser necessárias, mas não mais que quatro... Será impossível de inventar a necessidade de cinco ou mais cores?... O que acha? E terá isso, a ser verdade, sido notado?... Quanto mais penso nisso, mais evidente parece. Se me responder com algum caso muito simples, que me faz figura de animal estúpido, acho que devo fazer como a Esfinge fez<sup>3</sup>.

Felizmente para De Morgan, ele não teve que saltar para a morte, como fez a Esfinge após Édipo ter respondido ao seu enigma correctamente.

De facto, Hamilton não ficou sequer tentado pelo problema. Ele respondeu: «Não é provável que tente o seu 'quaternião de cores' nos próximos tempos<sup>4</sup>.»

Apesar de De Morgan ter tentado com que outras pessoas trabalhassem sobre este problema, a comunidade matemática recusou-se teimosamente a considerá-lo. Nada apareceu nas publicações matemáticas durante quase vinte anos. O ponto de inflexão sobre o problema das quatro cores deu-se a 13 de Junho de 1878, quando, numa reunião da Sociedade Matemática de Londres, o prestigiado matemático Arthur Cayley perguntou se o problema tinha sido resolvido, e admitiu que não tinha conseguido fazê-lo. A questão foi, de seguida, escrita e amplamente difundida através das Actas da Sociedade<sup>5</sup>.

Desde a altura em que Cayley chamou a atenção do mundo, este problema tem sido um favorito dos entusiastas da matemática. A beleza da questão é que é tão fácil de enunciar que uma jovem criança pode entendê-la. É um problema de matemática, certamente, mas não exige nenhuma aritmética, álgebra, trigonometria ou cálculo. A sua solução parece tentadoramente ao alcance de qualquer um. Tal como escreveu o famoso geómetra H. S. M. Coxeter (1907-2003):

Quase todos os matemáticos devem ter experimentado a sensação de uma noite gloriosa, quando pensaram que tinham descoberto uma demonstração, descobrindo na manhã seguinte que tinham afinal caído nalguma armadilha semelhante<sup>6</sup>.

Enquanto colunista na *Scientific American*, Martin Gardner costumava receber, a cada par de meses, longas demonstrações da conjectura das quatro cores (todas falhadas, naturalmente). Por isso, em 1975, quando decidiu escrever um artigo para o Dia das Mentiras, ele incluiu a conjectura das quatro cores. No seu artigo «Seis descobertas sensacionais que, de alguma forma, escaparam à atenção do público», relatou seis grandes descobertas de 1974, uma das quais era um contra-exemplo para a conjectura das quatro cores. A legenda sob um mapa com 110 regiões era clara: «O teorema das quatro cores explodiu<sup>7</sup>.» No entanto, a mentira não foi entendida por muitos leitores. Ele recebeu mais de mil cartas sobre este artigo, incluindo mais de uma centena de cópias coloridas do «contra-exemplo», de ingénuos, que não perceberam a brincadeira.

Embora actualmente se atribua o problema das quatro cores a Francis Guthrie, muitos textos antigos erroneamente davam crédito ao matemático alemão August Möbius (1790-1868). Möbius, um descendente

de Martinho Lutero, era um homem de família calmo e reservado. Em adulto não viajava com frequência, mas como estudante de pós-graduação frequentou a Universidade de Leipzig, a Universidade de Göttingen (tendo trabalhado com Gauss durante dois semestres), a Universidade de Halle, e depois novamente Leipzig, onde completou sua tese de doutoramento em astronomia. Após este período de mudanças frequentes, prometeu permanecer na sua amada Saxónia. Apesar de repetidas ofertas de emprego por parte de outras universidades, manteve-se em Leipzig durante o resto da sua carreira.

Em Leipzig, Möbius trabalhava como astrónomo e supervisionava o observatório. Ele adorava matemática, e foi na matemática, e não na astronomia, que fez as suas mais importantes contribuições. Os seus trabalhos mais conhecidos foram sobre o cálculo baricêntrico, geometria projectiva e afim, e sobre os fundamentos da topologia. A sua abordagem solitária e cuidadosa da matemática produziu trabalho de qualidade, mas não fez dele um professor vocacionado. Por isso, poucos alunos pagavam propinas para assistir às suas aulas.

A fonte da atribuição errónea é uma história contada por um dos alunos de Möbius, Richard Baltzer (1818-1887). Baltzer escreveu que em 1840 Möbius colocou à sua turma *o problema dos cinco príncipes*. Descreveu o problema da seguinte forma:

Era uma vez um rei na Índia que tinha um grande reino e cinco filhos. No seu testamento decretou que, após a sua morte, o reino deveria ser dividido entre os seus filhos, de tal forma que o território de cada um tenha forçosamente uma linha de fronteira comum (não apenas um ponto) com os territórios dos quatro restantes. Como foi o reino dividido<sup>8</sup>?

No dia seguinte, Möbius confessou aos seus alunos frustrados que o problema era impossível de resolver, da forma enunciada.

Dado o que sabemos, é fácil deduzir a impossibilidade de uma tal solução. Suponhamos que existia uma forma de dividir o reino em cinco regiões, e colocávamos em cada região o palácio de cada príncipe. Então, por cada par de irmãos seria possível construir uma estrada entre os dois palácios, de forma que a estrada cruze a fronteira destes dois reinos, mas não atravessa as terras dos outros irmãos. No entanto, isto cria um grafo planar cujos vértices são os palácios e arestas são estas estradas. Em particular, este é o grafo completo de cinco vértices,  $K_5$ , que já vimos que não é planar.

Num comentário, Baltzer escreveu, erradamente, que a impossibilidade da solução do problema dos cinco príncipes implica a validade do



Figura 14.3. O grafo de adjacência de um mapa

teorema das quatro cores. Ele escreveu: «Quão encantado Möbius teria ficado ao verificar uma tal aplicação extraordinária» deste problema<sup>9</sup>. A ligação ténue entre o problema dos cinco príncipes e o problema das quatro cores é que, se tal divisão do reino existisse, então (tal como o mapa da figura 14.2) seria impossível pintar esse mapa com apenas quatro cores. No entanto, na realidade, isto apenas elimina um dos impedimentos à demonstração do teorema de quatro cores. Poderia ainda ser possível produzir um mapa complicado, sem as cinco regiões mutuamente vizinhas, mas que não pudesse ser pintado com quatro cores. Segundo Martin Gardner, muitas das falsas provas do teorema de quatro cores que apareciam na sua caixa postal eram baseadas na impossibilidade de resolver o problema dos cinco príncipes.

No entanto, não devemos deitar fora o quebra-cabeça de Möbius. A técnica de unir palácios por estradas é realmente útil. Tal como com o problema das pontes de Königsberg, a geografia exacta dos países é irrelevante, tudo o que importa são as suas posições relativas. É um problema topológico que pode ser reescrito em termos de teoria dos grafos.

O *grafo de adjacência* de um mapa tem um vértice por cada país, e dois vértices são unidos por uma aresta sempre que os respectivos países compartilham uma fronteira (ver figura 14.3). Mesmo quando dois países compartilham mais do que uma linha de fronteira, vamos apenas desenhar uma aresta entre os vértices correspondentes.

Os grafos de adjacência têm algumas propriedades simpáticas. Não é difícil ver que o gráfico de adjacência de qualquer mapa é planar. Basta para isto tomar para vértices as capitais dos países e para arestas entre duas capitais uma das estradas entre elas que não atravessam outros países. Por construção, um grafo de adjacência não tem lacetes nem arestas

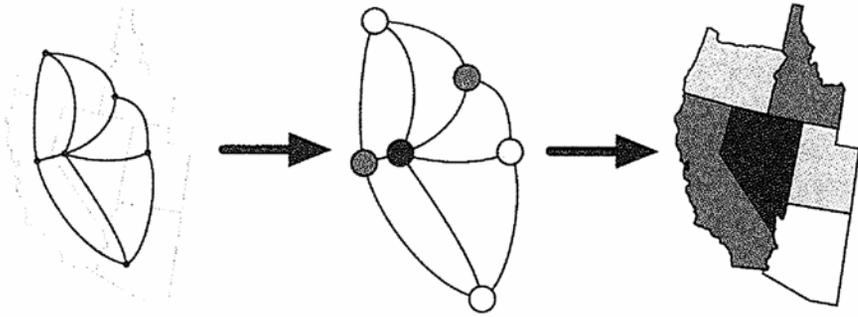


Figura 14.4. Uma coloração do grafo de adjacência dá origem a uma coloração do mapa

paralelas; um tal grafo é chamado *grafo simples*. Resumindo, um grafo de adjacência de um mapa é um grafo planar simples. Note-se que se um mapa for conexo, então o seu grafo de adjacência também o será.

Quando construímos o grafo de adjacência de um dado mapa, transformamos um problema de coloração de um mapa num problema de coloração de grafos. Em vez de pintar os países de um mapa, vamos dar cores aos vértices do grafo. Se um mapa (respectivamente, grafo) pode ser colorido usando  $n$  cores de modo que os países vizinhos (respectivamente, vértices ligados por arestas) têm cores diferentes, vamos dizer que é  $n$ -colorável. Podemos enunciar a conjectura das quatro cores da seguinte forma.

CONJECTURA DAS QUATRO CORES PARA GRAFOS PLANARES  
Qualquer grafo planar simples é 4-colorável.

Na figura 14.4, vemos o mapa de Nevada e os estados vizinhos, bem como o grafo de adjacência associado. Se colorirmos o grafo usando quatro cores, podemos então transferir esta coloração para o mapa inicial.

Num mapa típico, pode haver países com muitos vizinhos, mas é impossível isso ocorrer para todos os países do mapa. Em qualquer mapa, deve haver algum país que tem cinco ou menos vizinhos. Chamamos a este importante facto o teorema dos cinco vizinhos. A demonstração do teorema dos cinco vizinhos usa a fórmula de Euler e um pouco de contagem. Em termos de grafos, enunciamos este teorema da seguinte forma.

#### TEOREMA DOS CINCO VIZINHOS

Todos os grafos planares simples têm um vértice de grau cinco ou menos.

Suponhamos que temos um grafo planar simples. Como o gráfico não tem lacetes ou arestas paralelas, podemos adicionar-lhe arestas de modo a que cada face fique delimitada por exactamente três arestas. Vamos demonstrar que este *grafo triangulado* e maior (no sentido que tem mais arestas) tem um vértice de grau 5 ou menos, e, portanto, o mesmo se passa para o grafo inicial (menor, com menos arestas). Suponha que o grafo triangulado tem  $V$  vértices,  $A$  arestas, e  $F$  faces (contando a região do exterior como uma face). Cada aresta limita duas faces e cada face é encerrada por três arestas, de modo que temos  $3F = 2A$ . Pela fórmula de Euler  $V - A + F = 2$ , ou equivalentemente,  $6A - 6F = 6V - 12$ . Substituindo  $6F$  por  $4A$  obtemos

$$2A = 6V - 12.$$

Como cada aresta tem dois extremos, a soma dos graus de todos os vértices é também  $2A$ . Assim, o *grau médio* dos vértices é

$$\text{grau médio} = \frac{2A}{V} = \frac{6V - 12}{V} = 6 - \frac{12}{V} < 6.$$

Naturalmente, uma vez que o grau médio é inferior a seis, tem de haver pelo menos um vértice de grau cinco ou menos.

Para mostrar como o teorema dos cinco vizinhos é útil em problemas de coloração de grafos, vamos demonstrar o teorema das seis cores.

#### TEOREMA DAS SEIS CORES

Todos os mapas podem ser pintados com seis ou menos cores.

Para fazer uma prova por contradição, suponhamos que a afirmação é falsa. Isto é, que existe um ou mais mapas que não podem ser pintados com apenas seis cores. Fazendo uma pesquisa neste conjunto de mapas desagradáveis, destaquemos um dos mapas com o menor número de países. Seja  $N$  o número de países que tem este mapa. Um tal contra-exemplo menor é muitas vezes chamado um *criminoso minimal*. O benefício de destacar um criminoso minimal é que podemos dizer, com propriedade, que todos os mapas com  $N - 1$  ou menos países, podem ser coloridos com apenas seis cores ou menos.

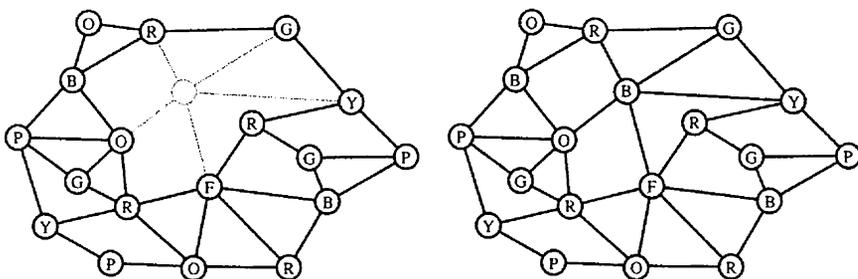


Figura 14.5. Uma 6-coloração de um criminoso minimal

Consideremos o grafo de adjacência  $G$  deste criminoso minimal. Pelo teorema dos cinco vizinhos, existe algum vértice  $v$  de  $G$  com grau cinco ou menos. Se removermos o vértice  $v$  e todas as arestas de  $G$  incidentes a  $v$ , obtemos um novo grafo,  $H$ . Não é difícil de perceber que  $H$  é o grafo de adjacência de um certo mapa com  $N - 1$  países. Uma vez que  $H$  tem  $N - 1$  vértices, a nossa hipótese garante que  $H$  é 6-colorável. Depois de colorir o grafo  $H$ , coloquemos novamente o vértice  $v$  e as arestas que tínhamos retirado ao grafo  $G$ . Como  $v$  é adjacente a, no máximo, cinco outros vértices, coloridos portanto com 5 cores, existe pelo menos uma cor restante disponível para colorir o vértice  $v$ . Assim, é possível colorir  $G$  com apenas 6 cores. Isto contradiz a nossa hipótese de que  $G$  era um criminoso minimal, e a contradição mostra que todos os grafos são 6-coloráveis. Na figura 14.5, usamos esta técnica para colorir um grafo usando as cores vermelho, azul, amarelo, verde, roxo e laranja.

Infelizmente, esta mesma demonstração não funciona quando há apenas quatro ou cinco cores disponíveis. No momento em que vamos reinserir o vértice  $v$ , pode não haver nenhuma cor disponível para colorir esse vértice, se este estiver ligado a 5 outros com cores distintas. Temos que empregar um truque mais sutil nestes casos.

Um tal truque foi descoberto por Alfred Bray Kempe (1849-1922). A 17 de Julho de 1879, Kempe, um aluno de Cayley, anunciou que tinha uma demonstração da conjectura de quatro cores, e essa prova foi publicada mais tarde nesse ano<sup>10</sup>.

Ao contrário da maioria das falsas provas que se seguiram nos seguintes cem anos, a prova de Kempe era muito convincente. Ele introduziu novas técnicas engenhosas que lhe permitiram colorir os restantes vértices do criminoso minimal. A comunidade matemática ficou entusiasmada com a demonstração.

A prova de Kempe permaneceu como a palavra final sobre a conjectura das quatro cores durante uma década. Infelizmente para Kempe, o caso não ficou fechado. Em 1889, Percy John Heawood (1861-1955) descobriu um erro no argumento de Kempe. O erro revelou-se fatal. Heawood criou um mapa para o qual a lógica de Kempe não se podia aplicar. Na sua nota, que foi publicada em 1890, Heawood escreveu:

O presente artigo não professa dar uma prova deste teorema original. Na verdade, os seus objectivos são, por agora, mais destrutivos do que construtivos, pois mostrar-se-á que existe um defeito na demonstração que aparentemente tinha sido reconhecida<sup>11</sup>.

E assim, o teorema das quatro cores voltou novamente a ser a conjectura das quatro cores.

Embora a prova de Kempe estivesse errada, as técnicas que ele introduziu foram muito importantes. Heawood reconheceu que as ideias de Kempe seriam suficientes para provar o teorema das cinco cores. Na verdade, elas foram igualmente ingredientes essenciais naquilo que viria a ser a demonstração do teorema das quatro cores. Embora esta demonstração errada tenha causado embaraço a Kempe, não prejudicou a sua carreira. Ele continuou a ser um membro activo da Royal Society (tinha sido eleito devido a trabalho matemático não relacionado com o teorema das quatro cores) e, mais tarde, foi nomeado cavaleiro.

Como qualquer pessoa que tenha tentado pintar com quatro cores um grande mapa sabe, é fácil colorir o mapa inicialmente e ficar, ao fim de algum tempo, preso de modo a não ser possível completar a coloração\*. Nesta altura, somos forçados a voltar atrás e a pintar algumas partes do mapa, para continuar com apenas quatro cores. O truque que Kempe usou dá-nos uma forma fácil de voltar a colorir um mapa.

Começamos com qualquer grafo colorido (ou parcialmente colorido). Escolhamos duas cores, digamos, vermelho e azul, e um vértice de uma dessas cores. Seguimos todos os caminhos possíveis começando neste vértice e que passem por um vértice azul, um vértice vermelho, um vértice azul, e assim por diante (na figura 14.6, denotados por  $B$  e  $R$ , respectivamente). Este conjunto de vértices vermelhos e azuis é chamado uma cadeia vermelho-azul, ou uma *cadeia de Kempe*. Observe que uma cadeia

---

\* Stephen Barr sugeriu um jogo para duas pessoas que usa esta observação. O primeiro jogador desenha um país e pinta-o usando uma de quatro cores. O segundo jogador junta um outro país e pinta-o. O jogo alterna desta forma até que um jogador seja forçado a usar uma quinta cor<sup>12</sup>.

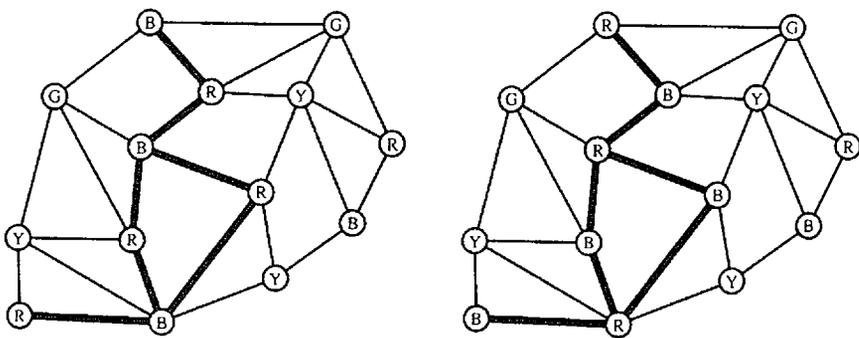


Figura 14.6. Trocando as cores de uma cadeia vermelho-azul produz outra coloração válida

de Kempe não tem que ser linear, isto é, pode ter ramificações ou circuitos fechados. A observação importante é que, uma vez que nenhum vértice adjacente a uma tal cadeia de Kempe é vermelho ou azul, podemos trocar a cor de todos os vértices vermelhos nesta cadeia para a cor azul, e cada vértice azul na cadeia para vermelho, e a nova coloração assim obtida ainda é válida para o mesmo grafo.

Anteriormente, provámos o teorema das seis cores. Este truque de Kempe permite-nos provar o teorema das cinco cores.

#### TEOREMA DAS CINCO CORES

Todos os mapas podem ser pintados com cinco cores ou menos.

Começamos a demonstração exactamente da mesma forma que fizemos para o teorema das seis cores. Suponhamos que temos um criminoso minimal — um mapa com o menor número de países,  $N$ , que não pode ser 5-colorável. Uma vez mais, pelo teorema dos cinco vizinhos, existe um vértice  $v$  no grafo de adjacência  $G$  que tem grau cinco ou menos. Seja  $H$  o gráfico obtido por remoção do vértice  $v$  e das arestas incidentes a  $v$ . Como  $H$  tem  $N - 1$  vértices, pode ser colorido com cinco cores. Consideremos os vértices adjacentes a  $v$ . Se existem 4 ou menos cores usadas para colorir estes vértices (por exemplo, tal acontece quando o grau de  $v$  é de 4 ou menos), então podemos usar a quinta cor, não utilizada nestes vizinhos, para colorir  $v$ . Por outro lado, se os vértices adjacentes a  $v$  usam todas as cinco cores, então a solução não é assim tão simples.

Suponhamos que os vértices adjacentes a  $v$ , indicados com as letras  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  e  $e$ , são de cor vermelha, azul, amarelo, verde e roxo, respectiva-

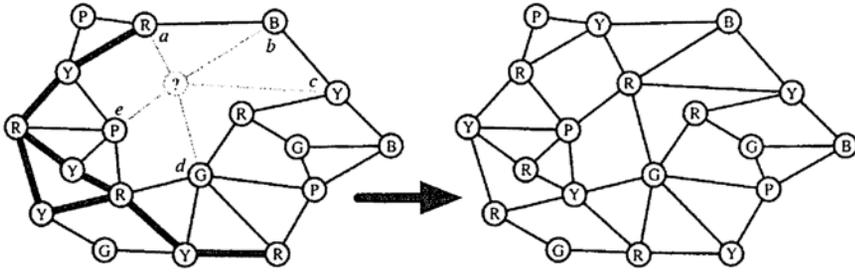


Figura 14.7. Trocando as cores da cadeia vermelho-amarelo para completar a coloração

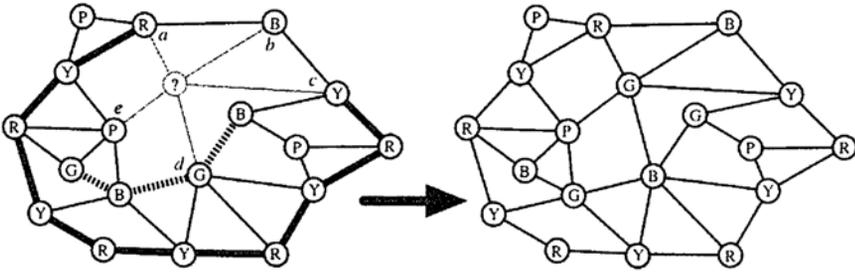


Figura 14.8. Trocando as cores da cadeia azul-verde para completar a coloração

mente. Consideremos o vértice vermelho  $a$ , e a cadeia vermelho-amarelo que o contém. Há dois casos para analisar. Em primeiro lugar, como na figura 14.7, suponhamos que o vértice  $c$  não está nesta cadeia vermelho-amarelo. Então, podemos trocar todos os vértices vermelhos pelos amarelos nesta cadeia, sem alterar a cor do vértice  $c$ , amarelo. Em particular,  $a$  fica também amarelo e podemos colorir  $v$  de vermelho e obter uma 5-coloração de  $G$ .

No outro caso, supomos que  $c$  está na nossa cadeia vermelho-amarela (tal como na figura 14.8). Então, se trocássemos as cores nesta cadeia, tanto  $a$  como  $c$  mudariam de cor e não libertávamos uma cor para usar em  $v$ . Assim, esta troca não ajuda em nada.

No entanto, como o grafo é planar, a cadeia de azul-verde que contém o vértice  $d$  não pode conter o vértice  $b$ . Assim, temos uma cadeia que permite trocar as cores azul e verde, de modo a colorir de azul os vértices  $b$  e  $d$ , e atribuir a  $v$  a cor verde; obtemos então uma 5-coloração de  $G$ .

A prova falhada de Kempe do teorema das quatro cores era semelhante a esta prova do teorema de cinco cores. No entanto, o argumento



Figura 14.9. Um conjunto inevitável de configurações

era necessariamente mais subtil. Era possível ter um vértice  $v$  de grau 5 rodeado por vértices de quatro cores diferentes. Era então necessário voltar a colorir uma ou duas cadeias de Kempe para diminuir este número até três, de modo a colorir  $v$ . Embora o seu método parecesse correcto, ele não reparou num caso em que a recoloração de duas cadeias de Kempe em simultâneo poderia produzir uma coloração inadmissível.

A popularidade deste fascinante problema continuou a encantar matemáticos consagrados e amadores. Matemáticos notáveis como George D. Birkhoff (1884-1944), Hassler Whitney (1907-1989), Henri Lebesgue (1875-1941) e Oswald Veblen (1880-1960) entraram na liça. Apesar das suas longas listas de sucessos, estes gigantes foram incapazes de decifrar o difícil problema. Alguns matemáticos respeitados, como H. S. M. Coxeter, chegara a exprimir dúvidas de que a conjectura fosse verdadeira.

À medida que o século xx avançava, as atenções voltaram-se para a determinação de *conjuntos inevitáveis* e *configurações redutíveis*. Um conjunto inevitável é um conjunto de configurações com a propriedade de que qualquer grafo de adjacência tem que apresentar pelo menos uma dessas configurações. Por exemplo, o teorema dos cinco vizinhos dá-nos o conjunto inevitável mais simples, mostrado na figura 14.9, uma vez que qualquer grafo tem um vértice de grau inferior a seis.

Por outro lado, uma configuração redutível é uma configuração de arestas e vértices que não podem aparecer num críminoso minimal. Usando o método das cadeias de Kempe é fácil mostrar que as primeiras quatro configurações na figura 14.9 são redutíveis. Para estes, podemos remover o vértice central, colorir o resto do grafo, trocar as cores das cadeias de Kempe, caso seja necessário, e depois colorir o vértice removido. A quinta configuração é a que causa problemas.

Assim, o objectivo passou a ser encontrar um conjunto inevitável formado apenas por configurações redutíveis. Encontrá-lo é equivalente a demonstrar o teorema das quatro cores, porque teríamos então uma colecção de configurações das quais nenhuma poderia aparecer num críminoso minimal, e ao mesmo tempo, pelo menos uma delas teria que surgir em todos os grafos de adjacência. Isto produziria uma contradição à existência de um críminoso minimal.

A 22 de Julho de 1976, quase um século depois da prova fracassada de Kempe, dois investigadores da Universidade de Illinois, Kenneth Appel (nascido em 1932) e Wolfgang Haken (nascido em 1928), anunciaram que tinham encontrado um conjunto inevitável contendo 1936 configurações redutíveis. No momento em que os seus dois artigos apareceram, no ano seguinte, eles tinham sido capazes de simplificar o trabalho e, através da remoção de redundâncias, reduzir o número para 1482<sup>13</sup>. (John Koch, pela sua ajuda com os cálculos, foi também o terceiro autor de um dos artigos.) O problema das quatro cores tinha sido finalmente resolvido!

TEOREMA DAS QUATRO CORES

Todos os mapas podem ser pintados com quatro cores ou menos.

No final do Verão de 1976, Haken apresentou os seus resultados aos participantes de um encontro conjunto da American Mathematical Society, e da Mathematical Association of America. No final da palestra, a audiência não aplaudiu euforicamente, nem rejubilou de alegria, nem saudou Haken entusiasticamente. Em vez disso, os aplausos foram contidos e cerimoniais. Para a sala apinhada de matemáticos teóricos, a conclusão tão esperada de uma das histórias mais interessantes da matemática tinha sido extremamente decepcionante.

A razão para esta fria reacção deveu-se ao facto de, depois de Appel e Haken terem concebido estas configurações inevitáveis e redutíveis de grafos, que enchiam setecentas páginas escritas à mão, as terem introduzido num computador, que verificou os muitos milhares de casos especiais. O trabalho do computador não era nem remotamente verificável à mão. Os cálculos tinham levado seis meses, tinham sido utilizadas mil horas de tempo de processador, e tinha sido produzida uma pilha de impressões com mais de um metro de altura. Embora a maioria das pessoas tenha acabado por acreditar que a demonstração está correcta, os matemáticos mais puros acharam-na deselegante, insatisfatória, e «anti-desportiva». Era como se Evel Knievel se gabasse de conseguir atravessar o Grand Canyon na sua motorizada, e depois construísse uma ponte para fazer a travessia. Talvez seja como os puristas do alpinismo se sentem acerca do uso de garrafas de oxigénio na escalada a grande altitude.

Os cientistas e engenheiros têm usado os computadores para resolver inúmeros problemas, mas não ocorre o mesmo com os matemáticos. Os computadores são bons a fazer cálculos rápidos, mas não no tipo de argumentos precisos e subtis que são necessários nas demonstrações matemáticas. Tal como a escrita, a filosofia e a arte, a matemática foi sempre

uma actividade humana, que não pode ser automatizada. Talvez algum dia alguém crie uma «caixa preta» que prove teoremas. Nós colocaríamos um enunciado, e a caixa preta responderia: «verdadeiro» ou «falso». (Há algumas tentativas incipientes para fazer isto.) Alguns diriam que isso seria tirar o prazer de fazer matemática e torná-la menos bonita.

A demonstração do teorema das quatro cores foi a primeira prova assistida por computador para resolver um problema notável. Este tipo de demonstração não parece ter tendência para desaparecer. Outro exemplo polémico é a demonstração, por Thomas C. Hales, em 1998, da conjectura de Kepler<sup>14</sup>. Hales provou que Kepler estava correcto quando afirmou que a maneira mais eficiente de empacotar esferas numa caixa é colocá-las num certo padrão cristalino, tal como os merceeiros fazem com as laranjas ou os artilheiros faziam com balas de canhão. Embora o resultado tenha aparecido na revista prestigiada *Annals of Mathematics*, tardaram anos até a revista concordar em publicá-lo (o que só aconteceu em 2005), tendo os editores dito, ainda assim, que não verificaram, nem conseguiriam verificar, as milhares de linhas de código usadas com o computador.

Depois de Appel e Haken terem revelado a sua demonstração controversa, ela já foi verificada de forma independente. Outros matemáticos descobriram conjuntos inevitáveis com um menor número de configurações redutíveis, e descobriram formas mais eficientes de provar o teorema, mas, até agora, todas as provas têm exigido verificação por computador.

Paul Erdős (1913-1996), o excêntrico e famoso matemático húngaro, costumava falar d'«O Livro», um livro imaginário que conteria as demonstrações mais bonitas e elegantes dos teoremas matemáticos. Actualmente, a porta para o teorema das quatro cores está quase fechada, mas ainda estamos à espera de uma verificação à moda antiga, com lápis e papel — ainda não vimos a prova que vem no Livro.

## Capítulo 15

# Novos Problemas e Novas Demonstrações

*As primeiras noções importantes na topologia foram adquiridas através do estudo dos poliedros.*

— Henri Lebesgue<sup>1</sup>

Suponha que lhe perguntavam: Que árvores têm folhas que mudam de cor e caem no Outono? Se respondesse: «Os plátanos», teria dado uma resposta correcta. No entanto, quem já conduziu através do campo na Pensilvânia em Outubro sabe que também existem carvalhos de cores radiantes, bétulas, e faias que se erguem no meio de mantos de folhas caídas. Assim, embora a resposta tenha sido correcta, não dá uma ideia da grande variedade de tais árvores. Poderíamos dizer que todas as árvores mudam de cor no Outono? Não. As folhas dos pinheiros, abetos e cedros não mudam de cor. Para se dar uma resposta mais geral, mas ainda verdadeira, deve olhar-se de perto para inúmeras árvores. Uma resposta mais completa seria: as árvores de folha caduca mudam de cor e perdem as suas folhas no Outono.

Os poliedros convexos satisfazem a igualdade  $V - A + F = 2$ . Esta é uma afirmação verdadeira. Sabemos disso a partir das demonstrações de Euler, Legendre, Cauchy e outros. No entanto, também sabemos que esta não é a afirmação mais geral que podemos fazer. Tal como Poincaré observou, a fórmula de Euler é válida para outros poliedros para além

daqueles que são convexos — poliedros em estrela, por exemplo. O matemático D. M. Y. Sommerville (1879-1934) escreveu que «A convexidade é, até certo ponto, accidental, dado que um poliedro convexo pode ser transformado, por exemplo, por indentação, ou empurrando um ou mais dos seus vértices, num poliedro que deixa de ser convexo, mas tem os mesmos números de configuração<sup>2</sup>.» Assim, é enganoso e desnecessariamente simplista dizer que os poliedros convexos são os únicos que satisfazem a fórmula de Euler. Ernest de Jonquières acreditava que «ao invocar Legendre, bem como outras altas autoridades, só se promove um preconceito amplamente difundido, que conquistou até mesmo alguns dos melhores intelectos: que o domínio de validade do teorema de Euler consiste apenas no conjunto dos poliedros convexos»<sup>3</sup>.

Podemos ir ao ponto de dizer que a fórmula de Euler é válida para todos os poliedros? Não, tal como existem árvores que não mudam de cor no Outono, há poliedros que não satisfazem a fórmula de Euler. Gostaríamos de determinar exactamente quais as propriedades que um poliedro deve possuir para satisfazer a fórmula de Euler. O mineralogista Johann Friedrich Christian Hessel (1796-1872), que vamos reencontrar em breve, chamou a estes poliedros eulerianos.

Como discutimos no capítulo 2, os matemáticos lidaram com poliedros durante muitos séculos sem ter uma definição precisa. O seu trabalho ficava seguro quando se assumia (quase sempre implicitamente) a convexidade, mas quando tentavam fazer uma afirmação válida para todos os poliedros geralmente encontravam problemas. A necessidade de uma definição rigorosa de poliedro teve que ser enfrentada no início do século XIX.

A primeira pessoa a abordar cuidadosamente o conjunto de poliedros que satisfazem a fórmula dos poliedros foi Simon-Antoine-Jean Lhuilier (1750-1840). Talvez Lhuilier estivesse destinado a trabalhar na fórmula de Euler. Tal como Euler, Lhuilier era suíço, e o ano do seu nascimento foi o ano em que Euler descobriu a fórmula dos poliedros. Mais divertido é a tradução literal de *l'huilier* ser «a lata de óleo» ou «aquele que põe óleo»; assim, Lhuilier podia ser apelidado de «O Oiler»<sup>4</sup>.

Tal como Euler, Lhuilier afastou-se do clero ao sentir-se atraído pela matemática. Quando Lhuilier era jovem, um dos seus parentes pretendia deixar-lhe parte da sua fortuna caso ele prosseguisse uma carreira

---

<sup>4</sup> Em inglês, a expressão «aquele que põe óleo», ou «*the one who oils*», podia ser abreviada para «*The Oiler*», que provém da raiz «*oil*», ou «óleo». A graça está na maneira de ler a palavra «*Oiler*» que se pronuncia, tanto em inglês como em português, da mesma forma que «Euler». (N. do T.)

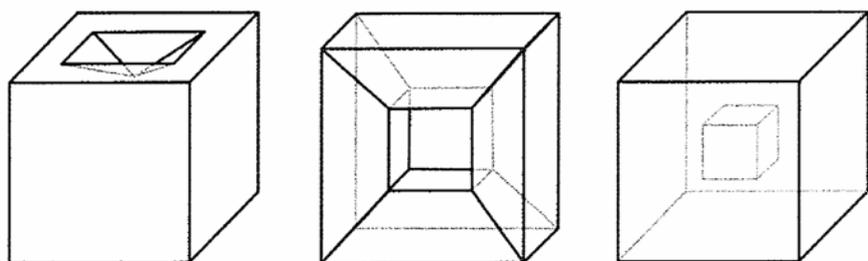


Figura 15.1. As exceções de Lhuilier: faces anelares, túneis e cavidades

na igreja. Em vez de aceitar esta oferta generosa, Lhuilier decidiu tornar-se matemático.

Lhuilier passou a primeira parte da sua carreira matemática em Varsóvia, como tutor do filho do príncipe Adam Czartoryski. Mais tarde, regressou à Suíça, onde assumiu uma posição na Academia de Genebra, e aqui subiu na carreira até se tornar reitor. Durante a sua longa vida, fez contribuições para a geometria, álgebra e a teoria das probabilidades, e teve reconhecimento internacional pelo seu trabalho. Também escreveu livros populares que foram usados durante muitos anos na Polónia. Sobre a sua personalidade, um biógrafo escreveu: «Enquanto os polacos acham Lhuilier distintamente puritano, os seus conterrâneos de Genebra criticam-no pela sua falta de austeridade e pela sua excentricidade, embora esta última qualidade nunca tenha ido para além de ter colocado teoremas geométricos em verso, e escrito baladas sobre o número três e sobre a raiz quadrada de menos um<sup>4</sup>.»

Em 1813, Lhuilier fez uma contribuição importante para a teoria dos poliedros e para a compreensão da fórmula de Euler. No seu trabalho, apresentou três classes de poliedros que não satisfaziam a fórmula dos poliedros. Ele chamou-as de «exceções».

O artigo de Lhuilier foi publicado na recentemente criada revista *Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*. Esta revista, a primeira dedicada exclusivamente à matemática, foi fundada e editada pelo oficial de artilharia francês e geómetra Joseph Diaz Gergonne. Tal como o matemático Jean-Claude Pont escreveu, Gergonne «tinha o detestável hábito de publicar, do trabalho que lhe era submetido, apenas as partes que lhe interessavam»<sup>5</sup>. O trabalho de Lhuilier não foi apenas substancialmente editado por Gergonne; este chegou a inserir repetidamente os seus próprios comentários no texto do artigo de Lhuilier, e inclusivamente a afirmar que também conhecia duas das três exceções antes de ter lido o artigo de Lhuilier!

A primeira classe de exceções apresentadas por Lhuilier consistia em poliedros com faces anelares, ou seja, em forma de anel. Por exemplo, na figura 15.1, temos uma reentrância no meio de uma face de um cubo, o que produz uma face na forma de um ringue quadrado. Este poliedro tem 13 vértices, 20 arestas e 10 faces (5 faces quadradas, quatro faces triangulares, e uma única face anelar). Neste caso, a fórmula de Euler não se verifica, pois  $13 - 20 + 10 = 3$ . Lhuilier não chamou a estas faces anelares, ou em forma de anel. Ele dizia simplesmente que a face tem um «polígono interno».

A segunda classe de exceções apresentadas por Lhuilier são poliedros com um ou mais «túneis» perfurados através do seu «corpo». Na figura 15.1, vemos um poliedro, em forma de um *donut* ou *toro*. Neste exemplo, o poliedro tem 16 vértices, 32 arestas e 16 faces, e portanto  $16 - 32 + 16 = 0$ .

A inspiração para a terceira classe de exceções proveio de uma coleção de minerais de um amigo de Lhuilier. Numa das amostras, Lhuilier observou um cristal colorido suspenso dentro de um outro cristal transparente (mais tarde, em 1832, Hessel também se inspirou num tal cristal, neste caso, um cubo de sulfureto de chumbo, dentro de um cristal de cloreto de cálcio). Lhuilier imaginou um poliedro com uma cavidade interior que também tinha a forma de poliedro. É claro que esta exceção só faz sentido se os poliedros forem considerados sólidos e não ocos. Um cubo com uma cavidade interior em forma de cubo está ilustrado na figura 15.1. Este poliedro tem 16 vértices, 24 arestas e 12 faces e  $16 - 24 + 12 = 4$ .

Lhuilier (tal como Gergonne) acreditava que esta coleção abrangia todas as possíveis exceções à fórmula de Euler. Lhuilier escreveu: «É fácil convencermos-nos de que o teorema de Euler é válido, em geral, para todos os poliedros, sejam eles convexos ou não, excepto para os casos que serão de seguida especificados<sup>6</sup>.»

Seguidamente, em vez de ignorar estas exceções, Lhuilier concebeu uma modificação da fórmula de Euler, que leva em conta as características dos seus poliedros excepcionais. Afirmou então que um poliedro com  $T$  túneis,  $C$  cavidades e  $P$  polígonos internos, satisfaz a fórmula

$$V - A + F = 2 - 2T + P + 2C.$$

Um cálculo rápido mostra que esta fórmula é realmente válida para os três poliedros da figura 15.1.

Acontece, porém, que as três exceções de Lhuilier não incluem todas as possíveis exceções à fórmula de Euler, e que a sua fórmula perspicaz não se aplica a todos os poliedros «exóticos». Por exemplo, nenhum dos quatro poliedros da figura 15.2 se encaixam nas três categorias de

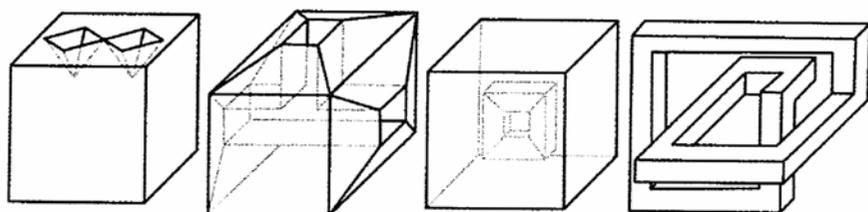


Figura 15.2. Alguns «poliedros» complicados

Lhuilier, nem sequer está claro como podemos aplicar a sua fórmula. O primeiro poliedro tem uma face com dois polígonos «interiores» que partilham um vértice comum, o segundo tem um «túnel» que se ramifica, o terceiro tem uma cavidade com a forma de um *toro*, e o quarto tem a forma de um *toro*, embora não seja claro o que é, neste caso, um «túnel».

Voltemos, então, ao problema de definir rigorosamente um poliedro — é impossível classificar poliedros eulerianos sem ter uma definição precisa de poliedro. Apesar de tudo, as excepções classificadas por Lhuilier foram extremamente importantes, e uma versão devidamente modificada da sua fórmula acabaria finalmente por revelar-se correcta. Na verdade, segundo Lakatos, esta versão modificada da fórmula de Euler, ou fórmulas semelhantes a ela, foram redescobertas uma dúzia de vezes, nos 80 anos que se seguiram à contribuição de Lhuilier.

Johann Hessel era formado inicialmente em medicina, mas mudou a sua vocação após o notável mineralogista K. C. von Leonard o ter incentivado a tornar-se mineralogista. Hessel acabaria por tornar-se professor de mineralogia e de tecnologia de mineração em Marburg, na Alemanha. Fez contribuições para muitas áreas da ciência, sendo mais conhecido pela sua investigação matemática das classes de simetria dos minerais.

No seu artigo de 1832, Hessel apresentou cinco excepções à fórmula dos poliedros<sup>7</sup>. Quando escreveu e submeteu o seu artigo para publicação não tinha conhecimento do trabalho de Lhuilier, duas décadas antes. Em breve Hessel ficaria ao corrente do trabalho de Lhuilier, descobrindo que três das suas cinco excepções coincidiam com as de Lhuilier. Hessel acreditou que muitas pessoas não tinham conhecimento destas excepções importantes, pelo que decidiu não retirar a sua publicação. As duas novas excepções de Hessel são mostradas na figura 15.3. Uma delas é um poliedro formado a partir de dois poliedros que se juntam numa aresta, e o outro é formado a partir de dois poliedros que se intersectam num vértice apenas. É discutível se estes objectos devem ser classificados ou

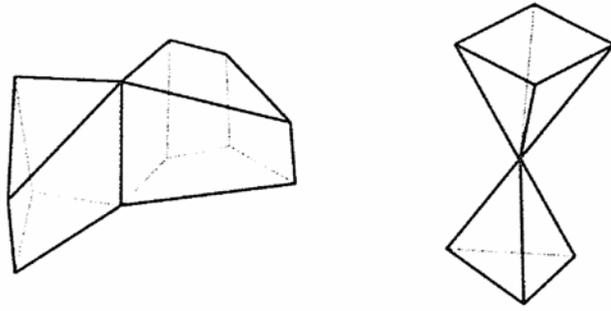


Figura 15.3. Exceções de Hessel à fórmula dos poliedros

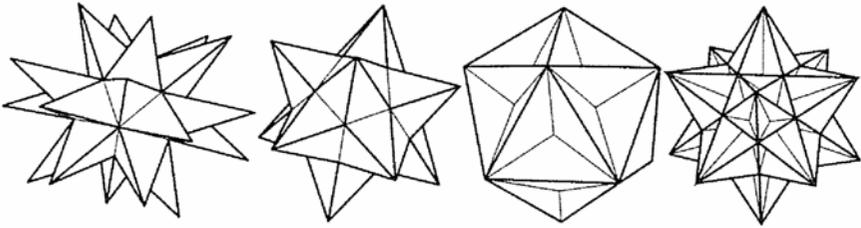


Figura 15.4. Os poliedros de Kepler-Poinsot: o grande e o pequeno dodecaedro estrelado, o grande dodecaedro e o grande icosaedro

não como poliedros, mas certamente não satisfazem a fórmula dos poliedros. O primeiro tem 12 vértices, 20 arestas e 11 faces ( $12 - 20 + 11 = 3$ ) e o segundo tem 8 vértices, 14 arestas e 9 faces ( $8 - 14 + 9 = 3$ ).

Louis Poinsot descobriu duas outras exceções em 1810<sup>8</sup>. No mesmo artigo em que explicou o refinamento da demonstração de Legendre, Poinsot apresentou os quatro poliedros estrelados mostrados na figura 15.4. Como já observámos, muitas vezes a matemática é descoberta, esquecida, e mais tarde redescoberta. Dois dos quatro poliedros estrelados de Poinsot, o grande e o pequeno dodecaedro estrelados, haviam já sido descritos por Kepler (ver a figura 6.5), e antes disso tinham aparecido na obra de Jamnitzer e Uccello (figura 6.3). Poinsot foi o primeiro a apresentar os dois outros poliedros estrelados, o grande dodecaedro e o grande icosaedro, num contexto matemático, embora o primeiro destes seja também encontrado nos desenhos de Jamnitzer (figura 6.3). Estes quatro poliedros são agora referidos como os *poliedros de Kepler-Poinsot*.

A maneira mais simples de pensar nestes poliedros é como poliedros não convexos formados a partir de faces triangulares. Como já salientámos, eles são poliedros em estrela e portanto, pela prova de Legendre,

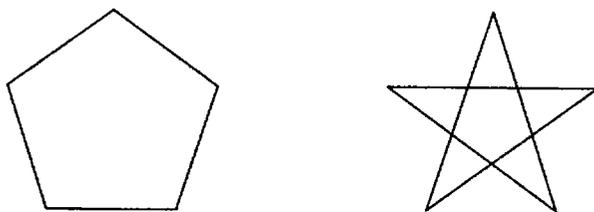


Figura 15.5. Um pentágono regular e um pentágono regular com auto-intersecções, o pentagrama

satisfazem, nesta interpretação, a fórmula dos poliedros. No entanto, nem Kepler nem Poinot entendiam os poliedros estrelados desta forma. Eles viam estes poliedros exóticos como novos poliedros regulares.

A fim de compreender este seu ponto de vista, precisamos de considerar novamente polígonos no plano. Anteriormente afirmámos que há apenas um polígono regular de  $n$  lados para cada número natural  $n > 2$ . Mostra-se, por exemplo, o pentágono regular na figura 15.5. No entanto, se alargássemos os nossos critérios para permitir que os lados do polígono se auto-intersectassem, encontraríamos outro pentágono regular — o pentagrama dos pitagóricos. Afinal de contas, o desenho de um pentagrama requer apenas cinco segmentos de recta. Pensamos assim no pentagrama como tendo cinco vértices e cinco lados, que unem esses vértices. Acontece que cada aresta cruza outras duas, mas ignoramos essas intersecções e não as contamos como vértices. O pentagrama é então formado pelos cinco lados de comprimento igual, sendo os ângulos entre eles também iguais. Faz, assim, sentido chamar regular a este polígono.

Kepler e Poinot viam os seus poliedros estrelados da mesma maneira. Assim, em vez de formar o grande dodecaedro com triângulos, podemos construí-lo a partir de doze faces pentagonais que se auto-intersectam (ver figura 15.6). Ou seja, tomamos todas as faces coplanares (no mesmo plano) e juntamo-las para formar uma única face. Desta forma, o grande dodecaedro é construído a partir de pentágonos regulares congruentes e o mesmo número de faces encontram-se em cada vértice. Se estamos dispostos a deixar cair a exigência da convexidade, então, o grande dodecaedro pode ser considerado um poliedro regular, tal como os sólidos platónicos. Da mesma forma, os outros três sólidos de Kepler-Poinot também consideram esta redefinição de regularidade — o grande e o pequeno dodecaedros estrelados têm pentagramas como faces, e o grande icosaedro tem triângulos equiláteros como faces.

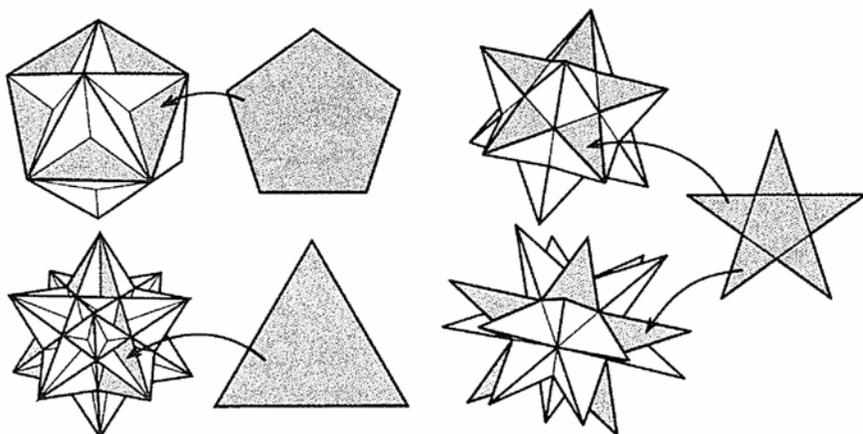


Figura 15.6. Poliedros regulares com faces que se auto-intersectam

Sucedede que, tal como Teeteto provou que existem apenas cinco poliedros regulares, em 1811 Cauchy mostrou que somente quatro poliedros satisfazem esta nova definição mais versátil de regularidade, precisamente os quatro poliedros de Kepler-Poinsot<sup>9</sup>.

Embora estes não sejam poliedros que encontremos todos os dias, podemos facilmente calcular  $V - A + F$ . Com segurança, vemos que o grande icosaedro ( $V = 12$ ,  $A = 30$ ,  $F = 20$ ) e o grande dodecaedro ( $V = 20$ ,  $A = 30$ ,  $F = 12$ ) satisfazem a fórmula de Euler. No entanto, os outros dois não a verificam; eles são duas exceções adicionais à fórmula de Euler. De facto, quando consideramos o grande dodecaedro como um poliedro com doze faces pentagonais, ele não satisfaz a fórmula dos poliedros. Tem 12 vértices e 30 arestas, pelo que  $12 - 30 + 12 = -6$ . O pequeno dodecaedro também tem 12 vértices, 30 arestas e 12 faces, e novamente a soma alternada dá  $-6$ .

A primeira metade do século XIX presenciou muitas exceções à fórmula de Euler, mas também foram encontradas muitas novas provas. No ano de 1811, contavam-se as demonstrações de Euler, Legendre e Cauchy. Em 1813, no artigo de Lhuilier que continha as suas três exceções<sup>10</sup>, ele forneceu uma nova prova de que a fórmula dos poliedros é válida para poliedros convexos. Tal como Euler fez, Lhuilier decompôs o poliedro em pirâmides. Para o conseguir, colocou um novo vértice no interior do poliedro e considerou novas arestas e faces que ligavam esse vértice central aos outros vértices e arestas do poliedro. Desta forma, decompõe-se o poliedro em várias pirâmides, as quais têm um vértice em comum. De

seguida, mostrou que a fórmula é válida para qualquer pirâmide e para os sólidos construídos, desta maneira, a partir de pirâmides.

No artigo de Lhuilier, Gergonne apresenta uma outra prova para poliedros convexos (esta mesma prova foi redescoberta 14 anos depois por Jakob Steiner [1796-1863])<sup>11</sup>. Gergonne projecta o poliedro para um plano e usa um argumento que tem em conta os ângulos dos polígonos projectados.

Uma das provas mais engenhosas da fórmula dos poliedros é devida a Georg Karl Christian von Staudt (1798-1867) em 1847. A sua demonstração tem a grande vantagem de se poder aplicar a uma ampla classe de poliedros não convexos.

Staudt nasceu numa família nobre em Rothenburg, na Alemanha. Com vinte anos, matriculou-se na Universidade de Göttingen, para estudar astronomia e matemática com Gauss. O seu trabalho de doutoramento em astronomia impressionou de tal forma Gauss que este o ajudou a obter uma posição de professor na Universidade de Würzburg na altura em que Staudt era professor do ensino secundário. Em 1835, Staudt tornou-se professor titular da Universidade de Erlangen, sendo aí o matemático mais proeminente. Staudt não foi um matemático prolífico mas, em 1847, escreveu um livro influente sobre geometria projectiva intitulado *Geometrie der Lage*, que mais tarde foi continuado em três longos suplementos. É por esta obra que ele é mais lembrado.

A convexidade é uma condição suficiente para a fórmula de Euler, mas como Poinot observou, não é uma condição necessária. No livro *Geometrie der Lage* Staudt encontra, finalmente, um conjunto muito geral de critérios que descrevem os poliedros eulerianos<sup>12</sup>. Staudt supõe implicitamente que os seus poliedros são conjuntos ocós, não são sólidos. Adicionalmente, ele faz as seguintes hipóteses sobre os seus poliedros:

1. É possível mover-se a partir de qualquer vértice para qualquer outro vértice, ao longo de um caminho constituído por arestas.
2. Qualquer caminho de arestas que começa e termina no mesmo vértice sem visitar nenhum vértice duas vezes (recordemos que um tal caminho chama-se circuito) divide o poliedro em duas partes.

Esta perspicaz escolha de critérios permite a Staudt abranger uma classe contendo muitos poliedros que não são convexos\*. Por exemplo, na figura 15.7, vemos dois poliedros muito longe de ser convexos. Verifica-

---

\* É fácil verificar que, de facto, também inclui todos os poliedros convexos. Mais precisamente, uma vez que Staudt considera poliedros ocós, todos os objectos que constituem a superfície exterior de qualquer poliedro sólido convexo verificam os critérios 1 e 2 de Staudt. (*N. do T.*)

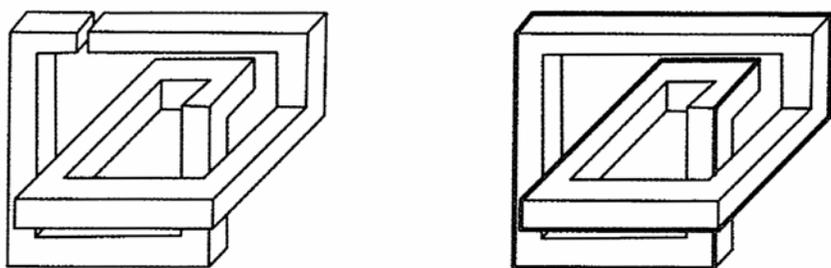


Figura 15.7. Dois «poliedros» retorcidos

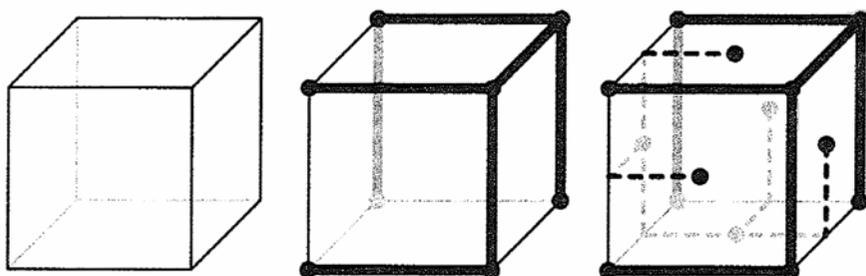


Figura 15.8. As duas árvores na demonstração de Staudt

-se que o primeiro satisfaz todos os critérios de Staudt ( $V = 48$ ,  $A = 72$  e  $F = 26$ , e como esperado,  $48 - 72 + 26 = 2$ ). O segundo não verifica. Cortando ao longo do trajecto indicado com o caminho de arestas mais grosso, não separamos o poliedro em duas partes (para este poliedro  $V = 40$ ,  $A = 60$  e  $F = 20$ , e  $40 - 60 + 20 = 0$ ).

De seguida Staudt fornece um belo argumento provando que qualquer poliedro que verifique os seus critérios necessariamente satisfaz a fórmula dos poliedros. Vamos agora indicar um breve esboço desta prova.

Vamos colorir um vértice do poliedro com a cor vermelha. Começando nesse vértice, colorimos também uma aresta adjacente a ele, e o outro vértice adjacente a esta aresta de vermelho (o processo é ilustrado para um cubo na figura 15.8, onde as linhas mais grossas representam arestas vermelhas). De seguida, escolhemos um destes dois vértices vermelhos e pintamos de vermelho uma das suas arestas adjacentes, incluindo o outro vértice adjacente a ela. Continuamos a colorir arestas e vértices desta forma, obedecendo a uma única condição: nunca criar um circuito vermelho. Forçosamente, este processo vai terminar. Como o poliedro satisfaz as condições de Staudt, isto irá ocorrer precisamente quando todos os

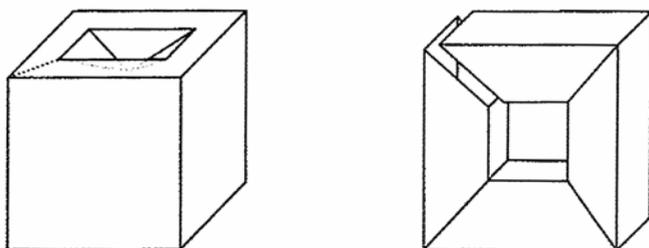


Figura 15.9. Uma alteração numa face anelar, e o corte num *toro*

vértices  $V$  tiverem a cor vermelha. Como esta colecção de arestas vermelhas não forma nenhum circuito, o grafo correspondente a uma árvore, e como vimos anteriormente (figura 13.3 e texto), temos então  $V - 1$  arestas pintadas de vermelho.

Agora, colocamos um vértice azul dentro de todas as faces. Desenhamos então uma linha azul ligando um vértice azul a outro vértice azul noutra face, sempre que estes não estejam separados por uma aresta vermelha (as arestas azuis estão indicadas na figura 15.8 como linhas tracejadas). Uma vez mais, verifica-se que, para um poliedro verificando os critérios de Staudt, o grafo azul resultante será uma árvore. Esta árvore azul tem  $F$  vértices, e por isso tem  $F - 1$  arestas. Uma observação crucial é que cada aresta do poliedro original ou é vermelha ou é atravessada por uma linha azul. Desta forma, o número total de arestas é a soma do número de arestas vermelhas e o número de linhas azuis:

$$A = (V - 1) + (F - 1),$$

ou, reorganizando os termos,  $V - A + F = 2$ .

Devemos fazer uma pausa momentânea e visitar as três excepções de Lhuillier (mostradas na figura 15.1) de modo a convencer-mos de que estas excepções não verificam a definição de poliedro de Staudt. O primeiro poliedro de Lhuillier tem uma face anelar. Uma vez que é impossível, caminhando ao longo de arestas, passar de uma aresta externa na face anelar a uma aresta interna, a condição número 1 falha. Observe-se que podemos alterar este poliedro de modo a que fique em conformidade com a definição de Staudt. Para isso, basta adicionar uma nova aresta unindo o interior da face anelar ao lado exterior (como na figura 15.9)\*.

\* Facilmente se verifica que, como esperado,  $V - A + F = 2$  para o poliedro assim alterado. (N. do T.)

O segundo poliedro tem um túnel através do seu centro. Este poliedro não verifica a condição número 2, porque, como vemos na figura 15.9, é possível considerar um circuito de arestas que não desconecta o poliedro. Em 1879, R. Hoppe comentou: «Consideremos que o nosso poliedro é feito de um material fácil de cortar, como argila, e passemos um fio através do túnel e, portanto, através do barro. O poliedro não vai cair<sup>13</sup>.» Recordemos que Lhuillier não deu uma definição adequada de «túnel». Hoppe, usando as ideias no artigo de Staudt, ajudou a corrigir esta situação. Ele definiu um túnel em termos do número de cortes necessários para desconectar a superfície do poliedro. Voltaremos a essa ideia no capítulo 17.

Finalmente, podemos facilmente descartar a terceira exceção de Lhuillier. Esta exceção, um poliedro com uma cavidade que é, ela própria, da forma de poliedro, só faz sentido se considerarmos os poliedros como sólidos, e Staudt assumiu que os seus poliedros eram ocios. Ainda que se considerassem os poliedros como sólidos, a condição de Staudt número 1 falharia, pois não existem arestas que unem vértices internos aos vértices externos. Embora as exceções de Hessel satisfaçam as duas condições de Staudt, ele, tal como a maioria dos matemáticos, não os considerou como sendo poliedros.

Intuitivamente, os poliedros que satisfazem os critérios de Staudt são aqueles que são «da forma de uma esfera» e têm faces com uma única fronteira poligonal. Os poliedros não precisam de ser convexos, mas não podem ter quaisquer túneis. Se fossem feitos de borracha e fossem enfiados como balões, iriam assemelhar-se a balões esféricos.

Este diálogo frutífero sobre poliedros eulerianos e não eulerianos, na primeira metade do século XIX, constituiu o cenário para o desenvolvimento da área que se tornou a topologia. Estas ideias continuaram a ser exploradas por outros, e culminaram na maravilhosa generalização da fórmula de Euler, devida a Poincaré, no final do século XIX. Vamos discutir este desenvolvimento nos capítulos 17, 22 e 23.

## Capítulo 16

# Membranas de Borracha, *Donuts* Ocos e Garrafas Loucas

*Um matemático chamado Klein  
Achava que a faixa de Möbius era divina.  
Disse ele: «Se colares  
Os bordos de duas,  
Obténs uma estranha garrafa como a minha.»*  
— Anónimo

Em meados do século XIX, os matemáticos já compreendiam muito melhor as circunstâncias em que a fórmula de Euler se aplicava a poliedros. Foi nessa altura que começaram a questionar-se como aplicá-la a outros objectos. E se o objecto não fosse um poliedro feito de faces planas, mas fosse, em vez disso, uma superfície arredondada, tal como uma esfera ou um *toro*? Neste caso, como deveríamos subdividi-lo? Recordemos que, em 1794, Legendre usou uma decomposição de uma esfera em polígonos geodésicos, na sua demonstração da fórmula de Euler, e Cayley mostrou que, para aplicar a fórmula de Euler a grafos, as arestas não precisam de ser segmentos de recta.

Estes diálogos ilustram a mudança, que já estava em marcha, de uma forma de pensar geométrica para uma forma de pensar topológica. A imprensa popular usa muitas vezes o termo «geometria das membranas de borracha» para descrever a área da topologia junto de um público

menos familiarizado com o termo. Embora o matemático purista possa afirmar que isto é uma simplificação exagerada, esta frase é uma forma razoável de descrever a diferença entre a topologia e a geometria. Na geometria, é fundamental que os objectos de estudo sejam rígidos. Medir ângulos e comprimentos, demonstrar congruências entre certas figuras, e calcular áreas e volumes, são tudo tarefas para as quais são necessárias estruturas geométricas precisas e inamovíveis.

Como já vimos anteriormente, nalguns casos, as características rígidas, inflexíveis dos objectos geométricos não são necessárias, chegando mesmo, muitas vezes, a obscurecer a matemática subjacente. Na investigação de Euler sobre as pontes de Königsberg, ele observou que era a disposição relativa das características da cidade que era importante, e não as suas localizações exactas. Esta observação levou à criação da teoria dos grafos, uma das primeiras manifestações da topologia. Mais tarde, vimos indícios de que a soma alternada  $V - A + F$  depende apenas da forma geral — a topologia — de um objecto, e não do número total de faces ou das suas formas. Observámos que, para qualquer poliedro em forma de esfera,  $V - A + F = 2$ , para um poliedro com  $g$  «túneis»,  $V - A + F = 2 - 2g$ , e que para qualquer grafo planar conexo,  $V - A + F = 1$ .

Assim, não é difícil de imaginar que a fórmula de Euler pode ser aplicada a outros objectos para além dos poliedros. Começemos com um poliedro de borracha que satisfaz  $V - A + F = 2$ . Podemos alterar esta forma para que  $V - A + F \neq 2$ ? Não de forma fácil. Se o enchêssemos como se fosse um balão, de modo que todas as faces e arestas se tornassem curvas, mesmo assim esta soma alternada não mudaria. Se o apertássemos, torcêssemos ou puxássemos, esta relação entre o número de vértices, arestas e faces manter-se-ia inalterada. Somente usando uma faca para cortar uma fenda na superfície da borracha poderíamos mudar o valor da soma alternada (isto iria criar pelo menos uma aresta adicional). No próximo capítulo, veremos com mais pormenor o que significa duas formas serem topologicamente «a mesma», e vamos investigar como a fórmula de Euler se aplica a várias formas topológicas.

O termo matemático «topologia» remonta a 1847 (e tinha um significado em botânica antes desta data). A palavra apareceu pela primeira vez, em alemão, no título do livro de Listing *Vorstudien zur Topologie*<sup>1</sup>, embora ele já estivesse a usar o termo na sua correspondência nos dez anos anteriores. A primeira aparição em inglês foi no louvor de Peter Guthrie Tait (1831-1901) a Listing, em 1883. Ele escreveu: «O termo *topologia* foi introduzido por Listing para destacar o que pode ser chamado de geometria qualitativa da geometria usual, em que são tratadas principalmente as relações quantitativas<sup>2</sup>.»

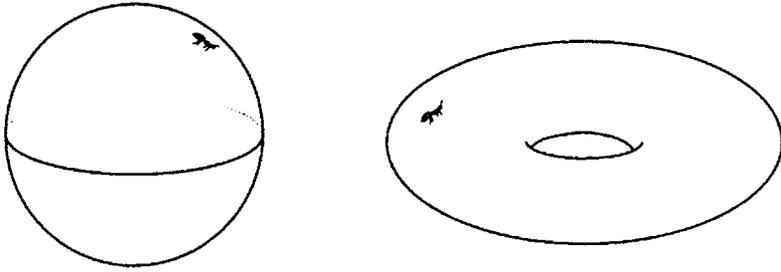


Figura 16.1. Formigas na superfície de uma esfera e de um *toro*

O termo «topologia» não foi adoptado imediatamente. Matemáticos influentes como Henri Poincaré e Oswald Veblen continuaram a usar a expressão utilizada pelos franceses, *analysis situs*. O grande topólogo do início do século xx Solomon Lefschetz (1884-1972) não apreciava este termo. Ele referiu-se a *analysis situs* como «um termo bonito, mas estranho»<sup>3</sup>.

O caminho de Lefschetz para a grandiosidade foi curioso. Ele nasceu numa família de turcos, na Rússia, em 1884, foi criado e educado em França, emigrou para a América, e aceitou um emprego como engenheiro em Filadélfia. Com vinte e seis anos, não muito tempo depois de ter perdido as mãos e os antebraços num acidente de trabalho, decidiu seguir uma carreira em matemática. Completou o seu doutoramento na Universidade de Clark, num único ano, e leccionou por breve período no Nebraska, antes de obter uma posição na Universidade de Kansas em Lawrence. Mais tarde, aos quarenta anos, após mais de uma década de trabalho importante, foi contratado pela Universidade de Princeton. Recebeu inúmeras homenagens na sua longa e distinta carreira, incluindo a National Medal of Science.

De acordo com Albert Tucker (1905-1995), um dos alunos de Lefschetz, foi Lefschetz quem popularizou o uso do termo «topologia». Ele deu o título *Topology* ao seu influente livro de 1930, publicado pela American Mathematical Society. De acordo com Tucker:

Lefschetz queria um título distinto e, também, como ele dizia, um título irreverente, pelo que decidiu importar a palavra *Topologie* do alemão. Isso podia ser estranho para Lefschetz, uma vez que ele tinha educação francesa e *analysis situs* era o termo usado por Poincaré; mas uma vez tomada a decisão, conduziu uma campanha para que todos passassem a usá-lo. A sua campanha rapidamente teve sucesso, sobretudo, penso eu, por causa das palavras derivadas: topólogo, *topologizar*, topológico. Isso não funciona bem com *analysis situs*<sup>4</sup>!

Começamos a nossa abordagem da topologia olhando para as superfícies. Exemplos de superfícies são um plano bidimensional, uma esfera, um *toro*, um disco e um cilindro. Uma superfície é qualquer objecto que parece ser localmente como um plano. Se uma formiga se passeasse numa superfície grande, poderia pensar estar num plano bidimensional. Isto não é contrário à nossa experiência — a Terra é um globo esférico, mas é tão grande que, para os seus habitantes, é indistinguível da superfície de um plano. Uma formiga inteligente pode ser capaz de descobrir que a sua superfície não é plana se se aventurar e explorar a superfície (tal como Cristóvão Colombo tentou fazer, quando navegou para oeste em direcção «às Índias»), mas ficando parada, ela não poderia fazer essa descoberta.

É importante estar ciente da diferença entre as dimensões *intrínseca* e *extrínseca*. Como a formiga sobre uma superfície lhe poderá dizer, esta é localmente bidimensional — a dimensão intrínseca de uma superfície é dois. No entanto, para que possamos construir uma cópia física desta superfície, a superfície deve estar inserida noutro espaço, e a dimensão deste espaço envolvente é a dimensão extrínseca. A esfera e o *toro* têm uma dimensão intrínseca de dois, mas «vivem» no espaço tridimensional, por isso a sua dimensão extrínseca é três. Em breve, vamos encontrar superfícies estranhas que não podem ser construídas no espaço tridimensional. A sua dimensão extrínseca é quatro\*. De um ponto de vista topológico, a dimensão intrínseca de uma superfície é o mais importante, é por isso que dizemos que as superfícies são bidimensionais.

As superfícies são caracterizadas por serem localmente simples e globalmente complexas. Por outras palavras, vistas de perto, todas as superfícies são idênticas. Todas são semelhantes ao plano euclidiano. Contudo, globalmente, podem ser muito distintas. Podem curvar-se para trás sobre si próprias, podem ter buracos, podem estar torcidas ou emaranhadas, entre outras propriedades globais.

Uma esfera e um *toro* são exemplos do que se chama *superfícies fechadas*. Não têm furos, não se estendem até ao infinito como o plano euclidiano, e não têm quaisquer cantos ou bicos. Por vezes, queremos considerar superfícies limitadas mas *com bordo*, como um disco e um cilindro. Uma superfície com bordo é ainda localmente de duas dimensões, mas tem uma ou mais curvas unidimensionais que formam o bordo. Alguns dos

---

\* É fácil perceber que, se um objecto pode ser colocado num espaço de dimensão  $n$ , então também se pode colocar num espaço de dimensão  $n+1$ ,  $n+2$ , etc. Desta forma, a noção de «dimensão extrínseca», salvo quando indicado outro espaço ambiente de forma explícita, referir-se-á à menor dimensão do espaço envolvente para um dado objecto. (*N. do T.*)

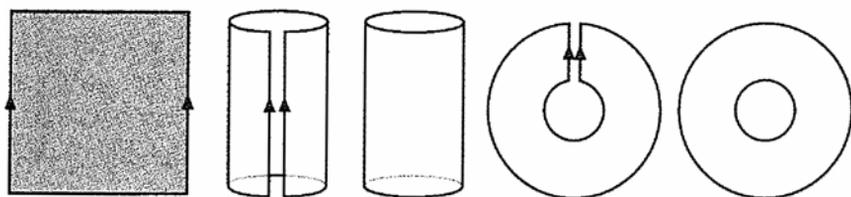


Figura 16.2. Um cilindro ou anel

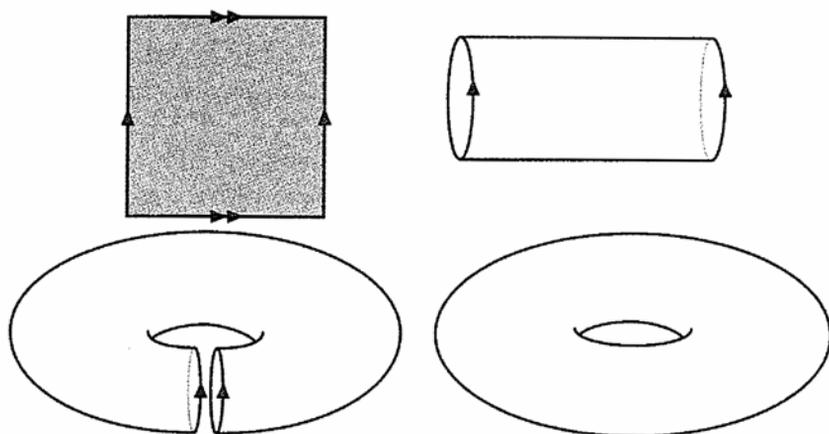


Figura 16.3. Construindo um *toro* a partir de um quadrado

que acreditavam que a Terra era plana achavam que ela tinha um bordo. Se vivêssemos num tal planeta, o azarado Colombo não chegaria às Índias, mas, em vez disso, navegaria até sair do limite do oceano.

Para simplificar, de ora em diante, quando usarmos o termo «superfície», queremos dizer *superfície compacta*. O termo «compacto» é um termo técnico que significa que esta superfície é limitada e contém todas as suas curvas que estejam no seu bordo. Por outras palavras, doravante não vamos considerar superfícies ilimitadas, tais como o plano bidimensional ou um tubo cilíndrico que se estende infinitamente em ambas as direcções. Quando dizemos que a superfície deve conter todas as suas curvas de bordo, significa que excluimos superfícies como o disco unitário aberto ( $x^2 + y^2 < 1$ ). Este disco aberto é o conjunto de todos os pontos cuja distância à origem é estritamente inferior a uma unidade, e equivale ao disco unitário compacto ( $x^2 + y^2 \leq 1$ ) em que se removeu o círculo no bordo. Uma boa analogia são as pernas das calças sem a bainha feita — nós precisamos da bainha.

Em 1882, Felix Klein (1849-1925) concebeu uma forma engenhosa de construir superfícies<sup>5</sup>. Começa-se com um polígono (imagine-se que é feito de um material de borracha extremamente maleável). Cria-se então uma superfície através da colagem dos vários lados deste polígono, aos pares. Por exemplo, se começarmos com um quadrado e o enrolamos sobre si mesmo e, de seguida, colamos os dois lados opostos, obtemos um cilindro (ver a figura 16.2). Observe que se, em vez de enrolarmos o quadrado, quiséssemos manter toda a figura no mesmo plano e, esticando-a por dois lados, distorcêssemos e rodássemos esses lados até que esses dois lados opostos se encontrem (precisamos que o quadrado seja feito de uma borracha muito macia!), a colagem destes lados iria formar um disco sem um círculo interior, que se designa por anel. Para um topólogo, um cilindro e um anel são indistinguíveis.

Para deixar claro que os lados serão colados e qual a orientação em que a colagem é feita, é comum decorar o bordo do quadrado com setas. Há duas maneiras diferentes de colar um par de lados, com ou sem uma torção. Assim, as setas são usadas para mostrar a direcção adequada. Quando precisamos de colar mais do que um par de lados usamos um número distinto de setas, ou setas de formas diferentes, para indicar quais os pares que se correspondem. Na figura 16.3, colam-se ambos os pares de lados opostos de um quadrado. Ilustramos esta operação colocando uma seta num dos pares de lados e setas duplas no outro par. Em primeiro lugar, colamos um par de lados para obter um cilindro. De seguida, uma vez que os dois bordos circulares que ainda não colámos têm orientações compatíveis, unimos estes dois círculos para obter um *toro*.

Alguns videojogos já antigos, estilo arcádia, como o *Asteroids*, usam esta representação de um *toro*. Quando a nave espacial voa para fora de um dos limites do écran rectangular, reaparece de repente no lado oposto (ver figura 16.4). Se voa saindo pelo lado de cima, reaparece subindo a partir do lado de baixo. Outros jogos têm outras configurações topológicas. Por exemplo, o *Pac-Man* é jogado num cilindro.

Não temos de nos limitar aos quadrados para construir superfícies. Na figura 16.5, vemos um octógono com quatro diferentes pares de lados identificados (são indicados por setas simples e duplas, e por um e dois triângulos). Para entender a forma da superfície resultante, é útil fazer um corte adicional numa diagonal deste octógono (colocamos três flechas dos dois lados deste corte diagonal, de modo a indicarmos que devemos colá-lo novamente mais tarde). Deformamos estes dois pentágonos em dois quadrados, cada qual com uma reentrância curva. Estes quadrados são semelhantes ao quadrado da figura 16.3; assim, depois de colar os respectivos lados dois a dois, construímos dois *toros*, cada

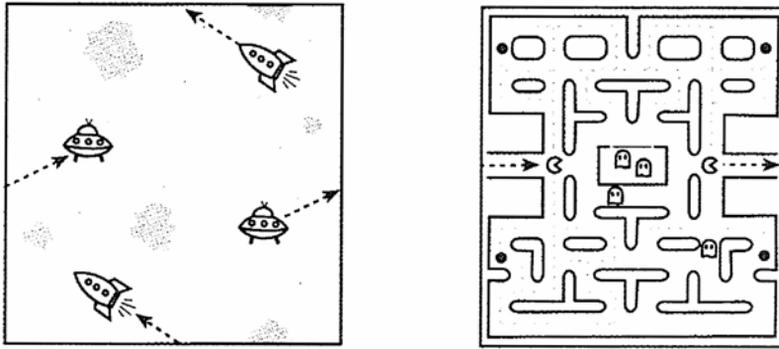


Figura 16.4. Jogos de arcádia jogados num *toro* e num *cilindro*

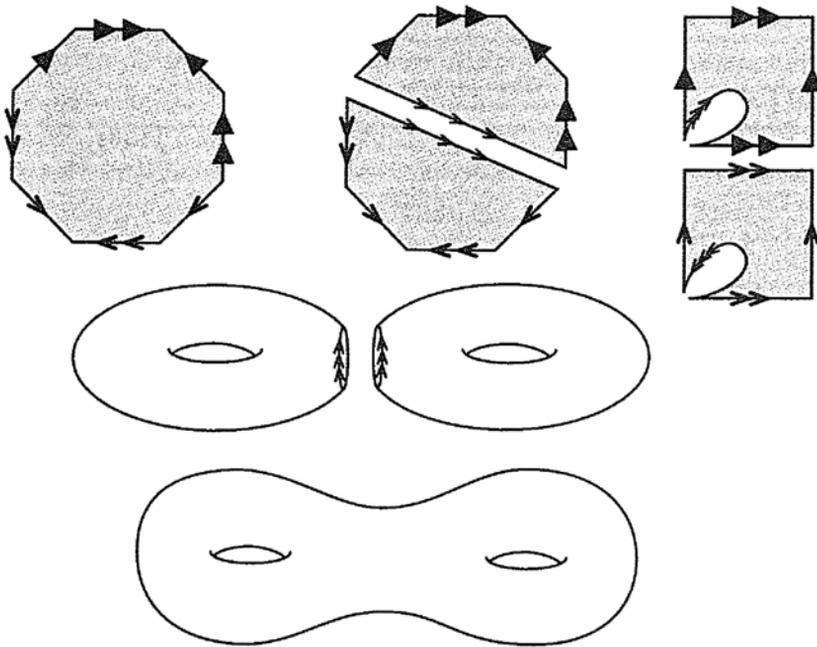


Figura 16.5. Um *toro* duplo

um com o seu buraco circular. Por fim, colamos os dois *toros* ao longo destes círculos, e obtemos um *toro* «de dois túneis» (também chamado duplo *toro*).

Klein mostrou que qualquer superfície pode ser representada como um polígono com os lados colados em pares da forma que descrevemos, mas pode haver muitas representações poligonais da mesma superfície.

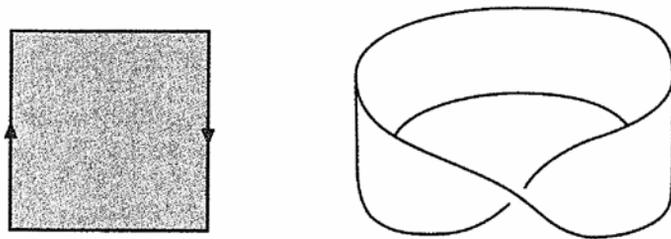


Figura 16.6. A banda de Möbius

Felizmente, todas as superfícies têm uma representação poligonal «simpática», tal como os exemplos que considerámos, e por corte e recolagem, qualquer representação poligonal pode ser transformada numa deste tipo<sup>6</sup>.

Em cada um dos exemplos que vimos, até agora, os lados dos polígonos foram colados, sem qualquer torção prévia. Na figura 16.6 temos um quadrado no qual um par de lados opostos são colados após uma torção. Como o nosso quadrado é feito de borracha, podemos esticá-lo, enrolá-lo como se estivéssemos a fazer um cilindro, e aplicar uma meia-volta antes de colar. Esta forma é a famosa *banda de Möbius* ou *faixa de Möbius*.

Apesar da construção da banda de Möbius ser simples, esta tem muitas propriedades surpreendentes. Ao contrário do cilindro, a banda de Möbius tem apenas um lado. Uma formiga caminhando ao longo da linha central de uma banda de Möbius acabaria por regressar ao mesmo local, mas estaria do outro lado da banda. Dito de outra forma, um cilindro pode ser pintado de vermelho de um lado e azul do outro, mas uma banda de Möbius tem que ser pintada toda de vermelho ou toda de azul. Também ao contrário do cilindro, a banda de Möbius tem apenas um bordo. A formiga vê uma linha limite tanto à esquerda como à direita, mas mal sabe ela que ambas as linhas são realmente a mesma linha.

A banda de Möbius é um dos objectos topológicos favoritos para os amantes da matemática. Ela foi reproduzida por vários escultores e artistas. A ilustração artística mais famosa é, provavelmente, (1898-1972) a xilografia de 1963 de M. C. Escher, com (que outra coisa poderia ser?) formigas caminhando numa faixa de Möbius (figura 16.7). Esta tem aparecido na literatura, geralmente de ficção científica, tal como no conto de Arthur C. Clarke de 1949, *The Wall of Darkness*<sup>7</sup>. Ela forma a base para o *design* premiado de Gary Anderson no concurso «Earth Day

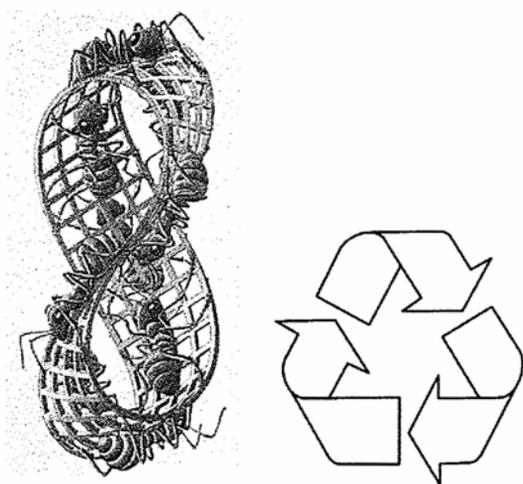


Figura 16.7. Duas famosas bandas de Möbius: A gravura *Möbius strip II* de M. C. Escher (1963), e o símbolo da reciclagem

1970» para criar o símbolo da reciclagem que se tornou onnipresente<sup>7</sup>. Também já chegou a ser usada para fazer correias de transmissão e fitas com desgaste uniforme.

A banda de Möbius também está na base de um truque de magia com o nome misterioso de «bandas afegãs», que remonta pelo menos a 1882. Um ilusionista de circo segura três cintos de tecido, explicando que são inteiramente feitos de pano. O problema é que ele precisa de dois cintos para dois palhaços, um para uma senhora gorda, e também para gémeos siameses. Pega então na primeira faixa, e com uma tesoura corta-a ao longo da linha central, fazendo os cintos para os dois palhaços. A seguir, corta a segunda faixa da mesma forma, mas em vez de duas voltas, ele obtém um único laço com o dobro da circunferência do original — o cinto para a senhora gorda. Finalmente, para obter os cintos para os gémeos, ele corta ao longo da linha central a terceira faixa e obtém dois cintos ligados entre si. O truque, como podemos ver na figura 16.8, é que os cintos originais incorporam meias-voltas de torção (zero, uma, e duas meias-voltas, respectivamente). Para o efeito máximo, o tecido ou papel deve ser flexível e muito menos largo do que o comprimento para que o público não se aperceba das torções. Stephen Barr sugere a seguinte alteração, para maior efeito dramático<sup>8</sup>. Antes do espectáculo, secretamente aplica um líquido inflamável à linha central

<sup>7</sup> Na verdade, a certa altura, surgiu uma variação do símbolo de reciclagem de Anderson, com três meias-voltas. Hoje em dia, é frequente encontrar ambas as versões.

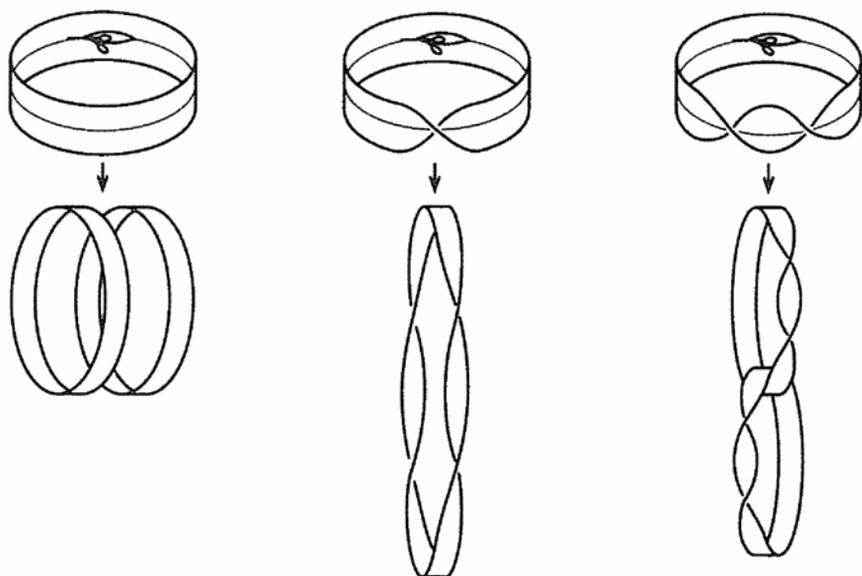


Figura 16.8. Bandas afegãs

de um ciclo torcido. Na presença da audiência, prega o cinto à parede perto de uma das bordas e acende um fósforo perto do tecido. Após uma explosão de chama, o cinto descai na configuração pretendida.

O leitor é convidado a colocar o livro de lado para tentar estes truques de corte e outras variações (ver o Anexo A onde estão alguns modelos). Tente dar às bandas mais de duas meias-voltas. Tente cortar uma banda de Möbius ao longo da linha a  $1/3$  do caminho entre os «dois» bordos. O truque favorito pessoal do autor é devido a Stanley Collins<sup>9</sup>. Passamos a banda através de uma aliança de casamento, antes de dar três meias-voltas, e colá-la para formar uma banda. Quando a banda é cortada ao longo da linha central terá formado um nó, e dentro do nó fica a aliança!

A banda de Möbius tem o nome de Möbius, mas foi descoberta quase simultaneamente por Listing (foi Listing quem primeiro observou a matemática por trás do que se tornaria o truque das bandas afegãs). Listing publicou a sua descrição da banda de Möbius em 1861<sup>10</sup>, quatro anos antes de Möbius<sup>11</sup>. A correspondência e notas entre eles, mostram que a primeira aparição foi pela mão de Listing (em Julho de 1858), antecipando-se a Möbius (Setembro) por alguns meses.

A razão pela qual a faixa de Möbius não é chamada a faixa de Listing é que Möbius foi o primeiro a atribuir um sentido matemático à propriedade de a banda ter apenas um «lado». Hoje dizemos que tais superfícies

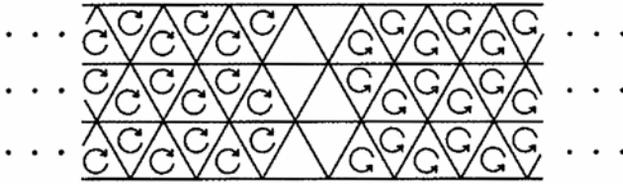


Figura 16.9. Um triangulação de uma banda de Möbius não pode ser orientada

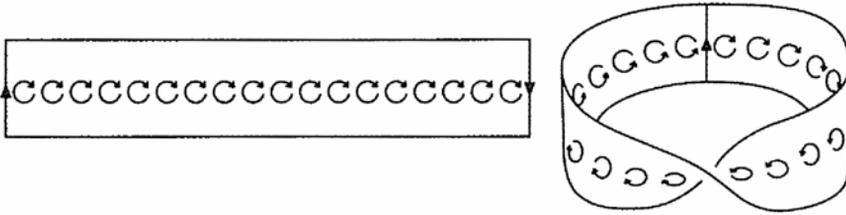


Figura 16.10. A banda de Möbius não é orientável

são não-orientáveis. Existem várias maneiras de descrever matematicamente este fenómeno. Möbius mostrou que é impossível decompor a banda de Möbius em triângulos, e de seguida, orientar os triângulos de modo que essa orientação seja igual à dos seus vizinhos (ver figura 16.9).

Posteriormente Klein definiu a orientabilidade de um modo diferente. Desenhemos uma pequena circunferência na superfície e escolhamos para ela uma orientação. Supomos que esta circunferência, em vez de estar apenas de um dos lados da superfície, faz parte da superfície de modo a ser visível de ambos os lados (de um lado, a orientação corresponde ao sentido horário, e, do outro, ao sentido anti-horário). Podemos imaginar que a superfície é feita de papel vegetal, de modo que uma circunferência desenhada com marcador é visível em ambos os lados. Klein chamou a uma tal circunferência orientada uma *indicatriz*. Se for possível fazer deslizar continuamente esta indicatriz ao longo da superfície para que, quando ela regressa à sua posição original, a orientação seja oposta à inicial, então a superfície não é orientável. Na figura 16.10 mostra-se que a banda de Möbius não é orientável deslizando a indicatriz ao longo da linha central.

Walther von Dyck (1856-1934), um aluno de Klein, forneceu uma outra definição. Coloca-se um referencial de coordenadas móvel, ou seja, define-se um eixo dos  $xx$  e um eixo dos  $yy$ , na superfície. Se for possível mover o referencial de coordenadas na superfície de tal forma que os

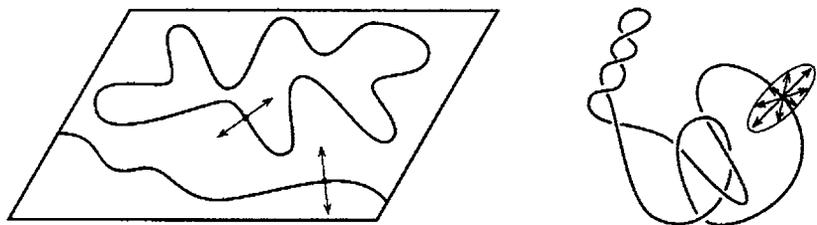


Figura 16.11. Uma curva no plano tem dois lados, mas uma curva no espaço tridimensional não tem lados

eixos troquem de posição, então a superfície não é orientável. (Uma vantagem da abordagem de Dyck é que esta facilmente se generaliza para objectos topológicos de maior dimensão.)

É interessante notar que os matemáticos não usaram a ideia da existência de um só lado para definir orientabilidade. Embora este conceito possa parecer equivalente à ideia de não ser possível atribuir uma orientação, Klein e Dyck argumentaram que o conceito de «lado» perde todo o significado em espaços de dimensões superiores, apesar de «orientabilidade» ser uma noção bem definida. Um «lado» de uma dada superfície só faz sentido se a superfície estiver no espaço tridimensional. A alusão ao «lado interior» ou ao «lado exterior» não faz qualquer sentido para uma superfície — por exemplo, uma esfera — num espaço de 4 dimensões.

Esta, bem como outras afirmações que faremos sobre espaços de dimensão elevada são difíceis de compreender. Exigem alguma ginástica mental que os seres humanos não estão adestrados para executar. Como o matemático Thomas Banchoff escreveu: «Somos todos escravos dos preconceitos da nossa própria dimensão<sup>12</sup>.»

Para ilustrar a afirmação desconcertante de que as superfícies, num espaço de 4 dimensões, não admitem a noção de «lado», vamos descer uma dimensão, e passar das superfícies às curvas. Como podemos ver na imagem da esquerda da figura 16.11, para um determinado ponto de uma curva no plano bidimensional, os vectores normais podem apontar em apenas dois sentidos possíveis (num ponto de uma curva, um vector diz-se normal se é perpendicular à direcção tangente, nesse ponto, à curva). Assim, podemos dizer que uma curva no plano tem lados, e, dado que é impossível mover um vector normal ao longo da curva de modo a que, regressando ao ponto inicial, ele aponte na direcção oposta, a curva tem dois lados. Se a curva for uma *curva fechada simples* — um circuito fechado que não se auto-intersecta, então chamam-se a esses lados o «lado interior» e «lado exterior» (na verdade, a afirmação aparentemente óbvia

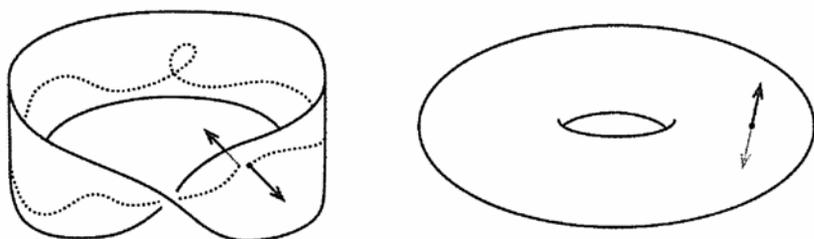


Figura 16.12. No espaço tridimensional a banda de Möbius tem um só lado, mas o *toro* tem dois lados

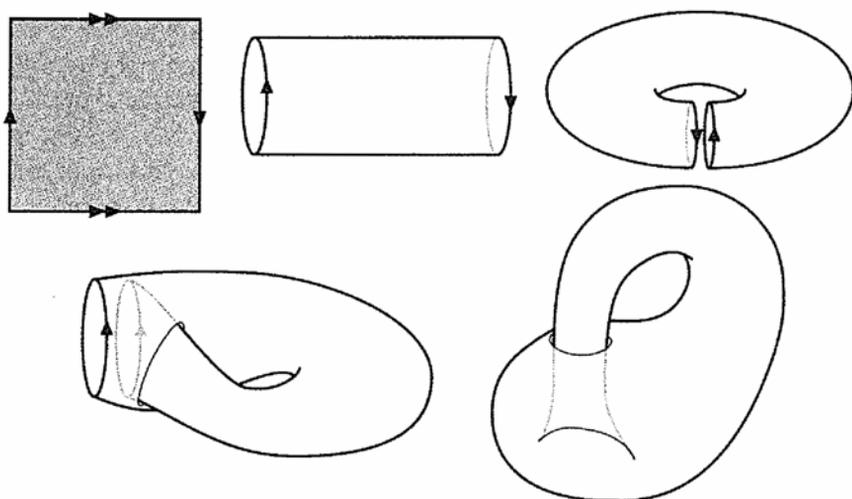


Figura 16.13. Uma garrafa de Klein

de que cada curva fechada simples tem um interior e um exterior é um teorema profundo, conhecido como o teorema da curva de Jordan).

Por outro lado, para uma curva no espaço de 3 dimensões, há infinitas direcções normais em cada ponto dessa curva (como ilustrado pelo disco de vectores normais na imagem do lado direito na figura 16.11). Portanto, neste caso, o conceito de «lado» não tem nenhum significado.

Da mesma forma, em qualquer ponto de uma superfície no espaço tridimensional, existem duas direcções normais (um vector normal, neste caso, é perpendicular ao plano tangente à superfície). Para superfícies não orientáveis é possível deslocar um vector normal em torno da superfície de modo que ele regressa a apontar na direcção oposta, de modo que tem apenas um lado (ver figura 16.12). Para superfícies orientáveis, isso não acontece, e portanto têm dois lados. Mas, para uma superfície no espaço



Figura 16.14. Com um pequeno desvio na terceira dimensão, podemos permitir que duas linhas passem sem se cruzar

de 4 dimensões, existem infinitas direcções normais a um dado ponto, por isso, como no caso de uma curva no espaço 3-dimensional, a noção de «lados» não faz sentido.

A banda de Möbius não é a única superfície não orientável. Em 1882, Klein descobriu outra, desta vez sem bordo, que se designa por *garrafa de Klein*.<sup>13</sup> Na figura 16.13 representamo-la através de um quadrado com lados a serem identificados. Devemos colar lados opostos; o par de lados em cima e em baixo é colado sem torção, e o par esquerda-direita é colado após torcer meia volta. Para construir a garrafa de Klein, colamos primeiro os dois lados orientados da mesma forma para obter um cilindro. Se dobrássemos este cilindro na forma de um *donut*, veríamos que as extremidades têm orientações opostas, pelo que não podem ser coladas directamente. Em vez disso, uma das extremidades do cilindro deve passar «através de si próprio» de modo a unir as duas circunferências do bordo com as orientações alinhadas.

O que quer dizer «passar através de si próprio»? Não é no sentido literal. A garrafa de Klein é o nosso primeiro exemplo de uma superfície que não pode ser construída no espaço tridimensional. Quando dizemos que a garrafa se atravessa a si própria, ele realmente não se intersecta a si próprio em quatro dimensões. Para ilustrar esta ideia pouco intuitiva, de novo baixamos uma dimensão. Suponhamos que, no plano, queríamos desenhar duas linhas não paralelas que não se intersectam. Como sabemos, isso é impossível, mas se fomos capazes de sair do papel bidimensional e usar a terceira dimensão, então, um pouco antes de chegar ao ponto de intersecção, poderíamos fazer uma das rectas saltar por cima da outra (ver figura 16.14). Assim, as duas linhas são praticamente planas, mas é necessário um pouco de altura, na terceira dimensão, para evitar o cruzamento. Usando a mesma técnica, construímos a garrafa de Klein. Quando estamos a ponto de passar uma das extremidades do tubo através de si mesmo, este dá um pequeno salto na quarta dimensão, evitando a auto-intersecção.

Voltemos ao quadrado para criar uma última superfície. Esta é a mais difícil de visualizar. É construída colando os pares de lados opostos, mas ambos os pares após uma torção de meia volta (figura 16.15). Começamos com o quadrado de borracha e deformamo-lo até tomar a forma de uma

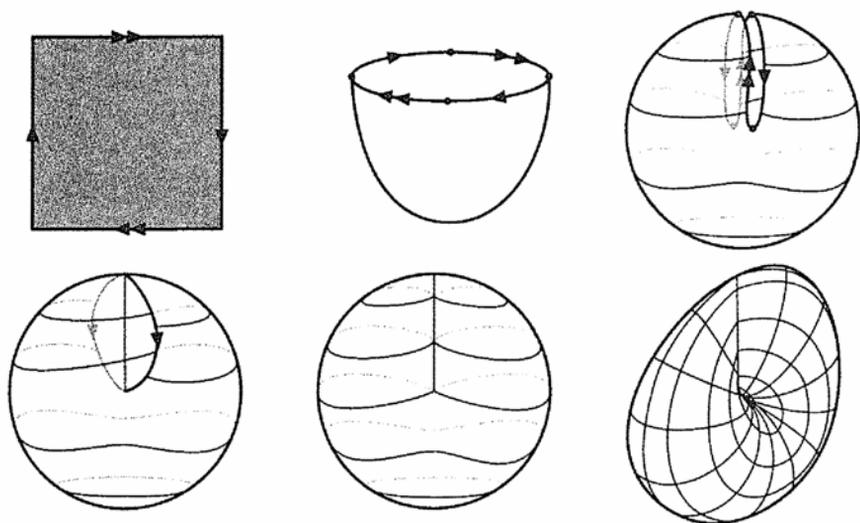


Figura 16.15. O plano projectivo

tigela. Temos cuidado em manter a informação de quais os segmentos da fronteira que devem ser colados. Continuamos a deformar esta tigela de modo que os lados que têm que ser colados fiquem alinhados lado a lado e orientados na mesma direcção. Colamos um par de lados (na figura 16.15, são colados primeiro os lados marcados com as setas duplas). Como podemos ver, ficamos em dificuldade — esta colagem obrigou o outro par de lados a estar em lados opostos da superfície assim feita. Para fazer a colagem final é necessário usar a quarta dimensão para permitir que a superfície passe através de si própria. Na figura 16.15, ilustramos duas visões diferentes desta bizarra superfície não orientável chamada plano projectivo.

O plano projectivo não apareceu inicialmente neste contexto — como objecto criado a partir da colagem de superfícies. Em vez disso, como o nome sugere, foi um objecto de estudo em geometria projectiva, um sistema geométrico não euclidiano no qual quaisquer duas linhas, mesmo aquelas que são paralelas, se encontram num único ponto. Klein e Ludwig Schläfli (1814-1895) foram os primeiros a reconhecer que o plano projectivo não era orientável.

O Apêndice A contém modelos de papel, para construir o cilindro, o *toro*, a banda de Möbius, a garrafa de Klein, e o plano projectivo.

Klein forneceu um método de criar superfícies complicadas a partir de formas mais simples, através da colagem de lados de polígonos, dois a dois. Apresentamos agora uma outra maneira de construir superfícies complexas a partir de outras mais simples. Começamos com uma esfera e

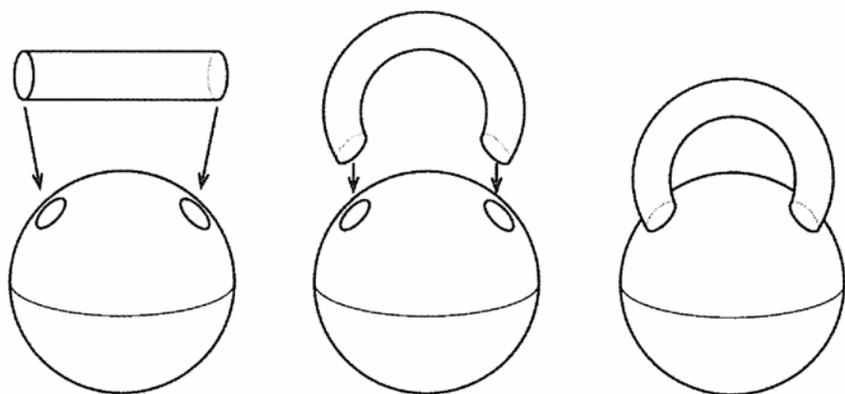


Figura 16.16. Uma esfera onde se cola uma alça (um *toro*)

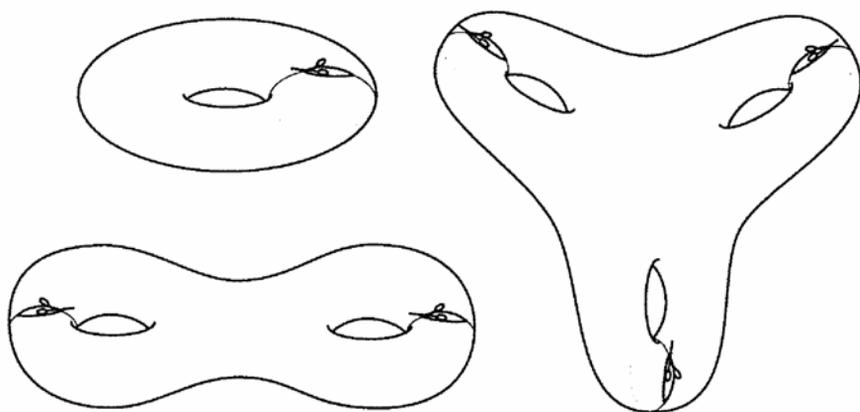


Figura 16.17. As superfícies de género 1, 2 e 3

colamos nela tubos cilíndricos de modo a construir superfícies orientáveis, ou colamos bandas de Möbius para construir superfícies não orientáveis.

Como podemos ver na figura 16.16, para adicionar uma *alça*, um tubo cilíndrico, a uma superfície, cortamos dois discos da superfície e colamos as extremidades do cilindro aos bordos dos buracos cortados. A esfera com uma destas alças transforma-se num *toro*. Construimos um *toro* duplo juntando uma outra alça, e um *toro* de  $g$  túneis adicionando  $g$  alças a uma esfera.

O número de alças de uma tal superfície está intimamente relacionado com o número topológico chamado o *género*. O género de uma superfície orientável (com ou sem fronteira) é o número máximo de curvas fechadas que não se intersectam duas a duas, ao longo do qual se pode cortar essa superfície, sem que se obtenha uma superfície não conexa.

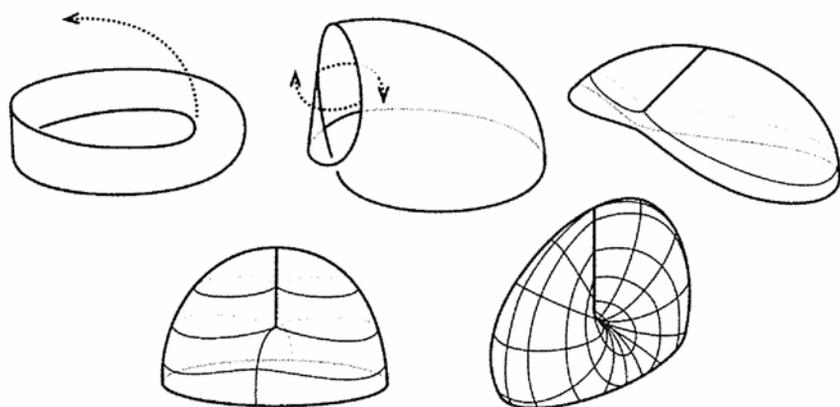


Figura 16.18. Uma banda de Möbius é o mesmo que um *chapéu cruzado*

Para ilustrar este conceito, consideremos uma esfera. Um corte ao longo de qualquer curva fechada simples irá *desconectar* a esfera — torná-la não conexa. Esta é uma outra aplicação do teorema da curva de Jordan — tal como no plano, uma curva fechada simples vai dividir a esfera em duas regiões. Assim, o gênero da esfera é 0. Por outro lado, é possível cortar um laço na superfície de um *toro* de modo a que permaneça conexo (ver figura 16.17), mas após este primeiro corte, é impossível encontrar uma nova curva fechada onde cortar sem desconectá-la. Assim, o gênero de um *toro* é 1.

O gênero de uma esfera com alças é simplesmente o número de alças. Assim, um duplo *toro* tem gênero 2 e, em geral, um *toro* com  $g$  túneis tem gênero  $g$ . O gênero de uma superfície fornece uma forma rigorosa de definir a contagem intuitiva de Lhuillier do número de túneis nos seus poliedros. Poderíamos definir o gênero para superfícies não orientáveis, e algumas pessoas fazem-no. No entanto, uma vez que o gênero está tão intimamente relacionado com o número de túneis numa superfície orientável, não é tão utilizado no caso não orientável.

Tal como podemos construir toda a gama de superfícies compactas orientáveis, acrescentando alças a uma esfera, podemos usar um procedimento semelhante para criar superfícies não orientáveis. De forma a entender esse processo, voltemos à banda de Möbius. Uma das suas propriedades notáveis é a existência de uma única linha de fronteira. A banda de Möbius é geralmente desenhada de forma que este bordo dê duas voltas ao longo da faixa torcida. Queremos agora manipular a banda de Möbius de modo a que a sua linha de fronteira apareça como uma verdadeira circunferência. Naturalmente, vamos precisar de quatro dimensões para realizar esta façanha de ioga topológico.

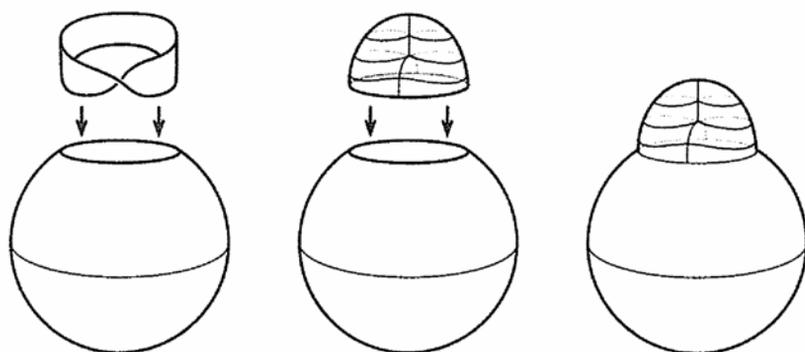


Figura 16.19. Colando um *chapéu cruzado* numa esfera, para formar um plano projectivo

Na figura 16.18 vemos a banda Möbius a ser deformada desta forma. Note-se que a superfície se atravessa a si mesma ao longo de um segmento de recta. A auto-intersecção no topo da banda de Möbius com a cúspide acima e abaixo da superfície que se cruza é chamado um guarda-chuva de Whitney, em homenagem ao topólogo Hassler Whitney. Esta ilustração estranha da banda de Möbius é chamada um *chapéu cruzado*. A semelhança com um plano projectivo deve ser clara, uma vez que o chapéu cruzado é simplesmente um plano projectivo com um disco removido.

Podemos formar superfícies não orientáveis por colagem de bandas de Möbius. Para o fazer, retiramos um disco à superfície, e colamos a fronteira circular de uma banda de Möbius ao bordo do buraco. Como podemos ver na figura 16.19, é mais fácil visualizar esta colagem substituindo o típico desenho da banda de Möbius por um chapéu cruzado. Assim, obtemos um plano projectivo, adicionando um chapéu cruzado a uma esfera. Dito de outra forma, um plano projectivo é uma banda de Möbius com um disco colado ao seu bordo.

Não é tão fácil de visualizar, mas uma esfera à qual colamos dois chapéus cruzados é uma garrafa de Klein. Dito de forma equivalente, uma garrafa de Klein é obtida por colagem de duas bandas Möbius ao longo das suas fronteiras. Este é o sentido da quadra no início do capítulo. Se colarmos mais de dois chapéus cruzados a uma esfera obtemos outras superfícies não orientáveis ainda mais estranhas.

Temos agora duas maneiras de construir superfícies orientáveis e não orientáveis. No próximo capítulo, vamos investigar como aplicar a fórmula de Euler a estas superfícies. Apresentaremos também o teorema de classificação de superfícies que afirma que todas as superfícies fechadas podem ser obtidas pela adição de alças e chapéus cruzados a uma esfera.

## Capítulo 17

### São Iguais, ou são Diferentes?

*Tem sido muito repetida a ideia de que a geometria é a arte de raciocinar bem acerca de figuras mal desenhadas; no entanto, estas figuras, para não sermos enganados, devem satisfazer determinadas condições, as proporções podem ser fortemente distorcidas, mas as posições relativas das diversas partes não podem ser alteradas.*

— Henri Poincaré, Introdução de *Analysis Situs*<sup>1</sup>

Uma das questões recorrentes mais importantes da matemática é a seguinte: Será que dois objectos matemáticos,  $X$  e  $Y$ , são o mesmo? Em diferentes contextos, «ser o mesmo» pode significar coisas distintas. Muitas vezes, quando dizemos o mesmo, queremos dizer igual, tal como quando dizemos que a expressão  $5 \cdot 4 + 6 - 2^3$  é igual ao número 18, ou o polinómio  $x^2 + 3x + 2$  é igual a  $(x + 2)(x + 1)$ . Noutras circunstâncias, o mesmo pode não ser exactamente igual. Para um marinheiro que navega usando a bússola, dois ângulos são iguais se diferem por  $360^\circ$ , ou um múltiplo (por exemplo,  $30^\circ$  é o mesmo que  $390^\circ$ ). Um geómetra poderá afirmar que dois triângulos são iguais quando são congruentes, ou mesmo quando são apenas semelhantes.

Em topologia, o conjunto de critérios para que dois objectos sejam o mesmo é mais flexível do que na geometria. É aqui que a analogia com as membranas de borracha entra em jogo. Intuitivamente, se uma forma pode ser continuamente deformada noutra, então, essas formas são as mesmas. Dobrar, torcer, esticar e amachucar essa forma não modifica a

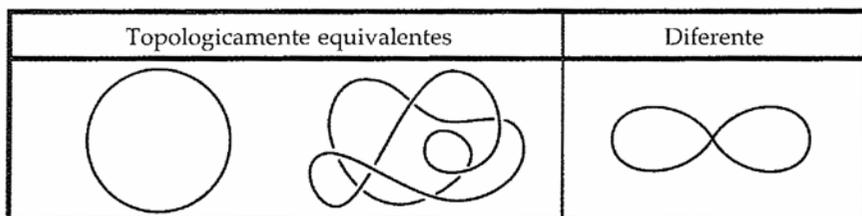


Figura 17.1. Um emaranhado, que é topologicamente igual a uma circunferência, e a forma do número oito, que não o é

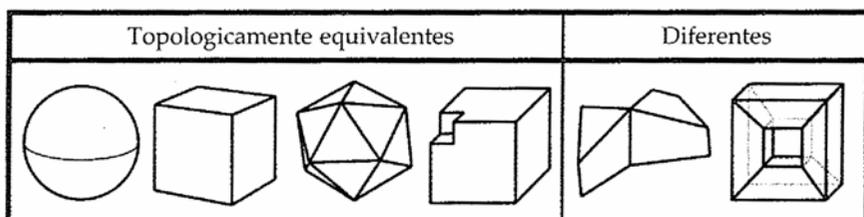


Figura 17.2. Poliedros que são topologicamente equivalentes a uma esfera, e outros poliedros que não o são\*

sua topologia. Por exemplo, a circunferência mostrada na figura 17.1 é, topologicamente, o mesmo que o emaranhado à sua direita. Por outro lado, perfurar um objecto, cortá-lo, ou colá-lo a si próprio, irá produzir, provavelmente, um objecto que é topologicamente diferente. Uma circunferência não fica a mesma após termos colado dois dos seus pontos, obtendo a forma de um oito.

Na primeira metade do século XIX, os matemáticos esforçaram-se por classificar os poliedros que satisfazem a fórmula de Euler — os chamados poliedros eulerianos. Chegámos à noção imprecisa de que todos os poliedros «do tipo da esfera» são eulerianos, enquanto as excepções bizarras de Lhuillier e Hessel não o são. De facto, a fórmula de Euler aplica-se a qualquer poliedro que é topologicamente o mesmo que uma esfera. Um cubo, qualquer sólido platónico ou de Arquimedes, e até certos poliedros não convexos podem ser deformados numa esfera redonda (ver figura 17.2)\*. Poliedros não eulerianos, tais como um poliedro formado pela junção de dois poliedros ao longo de uma aresta ou em forma de *toro*, não são topologicamente o mesmo que uma esfera.

\* Aqui, usamos a interpretação segundo a qual os poliedros são ocós. (N. do T.)

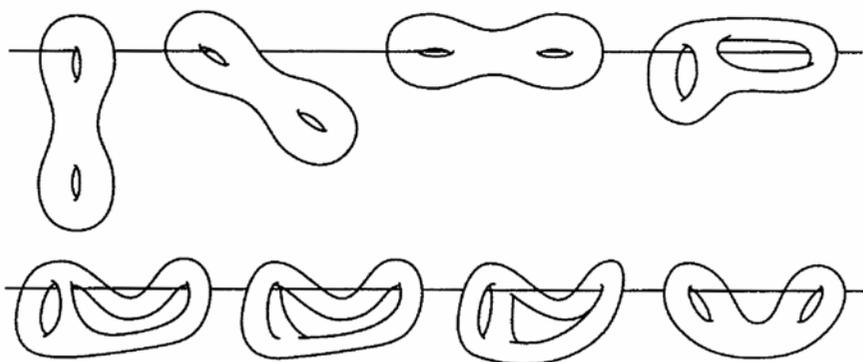


Figura 17.3. O truque do duplo *toro* num estendal

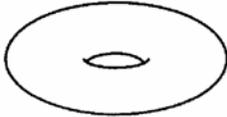
Topologicamente equivalentes	Diferente
	

Figura 17.4. Dois objectos que são topologicamente iguais, mas ambos distintos de um duplo *toro*

Poderá parecer que este estudo das formas é intuitivo, mas é extraordinária a quantidade de vezes com que nos deparamos com resultados contra-intuitivos. Por exemplo, na figura 17.3 começamos com um duplo *toro* pendurado num estendal, com a corda a passar por um dos buracos. Usando apenas manipulações topológicas (nenhum corte ou colagem!) conseguimos o que, à primeira vista, pode parecer ser uma impossibilidade — transformá-lo num duplo *toro* pendurado pelos dois buracos.

No capítulo 16, abordámos a diferença entre dimensão extrínseca e intrínseca. Poderíamos usar uma terminologia semelhante neste contexto. No último exemplo, os objectos têm o que podemos chamar a mesma topologia extrínseca, pois uma forma pode ser deformada na outra no espaço tridimensional. Os matemáticos chamam *isotópicas* a duas formas com a mesma topologia extrínseca. A isotopia é uma possibilidade válida para a definição de «o mesmo» em topologia, mas os topólogos necessitam de mais liberdade. Precisamos de uma definição menos restritiva do que significa «o mesmo».

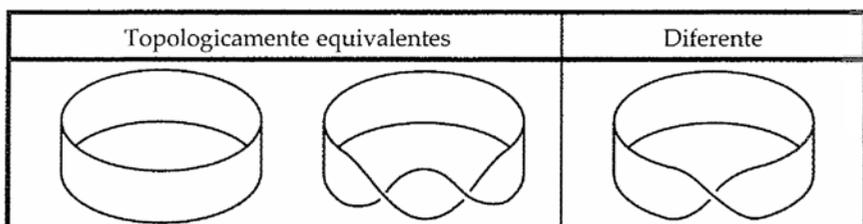


Figura 17.5. Uma faixa com duas meias-voltas é homeomorfa a um cilindro, o que não se passa com uma faixa com apenas uma meia-volta

Para que dois objectos sejam topologicamente o mesmo, devem ter a mesma topologia intrínseca. Se duas superfícies são a mesma, então, independentemente de quão inteligente seja uma formiga vivendo numa ou noutra, não será capaz de distingui-las sem as ver de fora. É possível encontrar duas superfícies que são a mesma, mas não ser possível deformar uma na outra no espaço envolvente. Desta forma, a analogia da membrana de borracha não é perfeita.

Para entender esta nova definição, vamos revisitamos o nosso método de recortes e colagem. Embora, em geral, recortar e colar uma superfície modifique a sua topologia, isto nem sempre se verifica. Uma excepção importante é quando recortamos um objecto de determinada forma, e colamos novamente os pedaços de modo a alinhar os cortes de forma exactamente como antes de cortar. Neste caso, a topologia intrínseca não se altera. Se cortarmos um *toro* ao longo da circunferência menor, de modo a formar um cilindro, fizermos um nó com esse cilindro, e em seguida voltamos a colá-lo alinhando o bordo como estava (como na figura 17.4), a forma resultante é ainda topologicamente a mesma de um *toro*. Note-se que este *toro* atado não pode ser obtido a partir do *toro* original usando apenas deformações no espaço tridimensional — os dois *toros* não são isotópicos. A topologia intrínseca é a mesma, mas a topologia extrínseca não é. Por outro lado, não há nenhuma forma de cortar, deformar e colar novamente um *toro* de modo a obter um duplo *s*. Uma formiga suficientemente inteligente seria capaz de provar que são topologicamente diferentes (muito em breve, veremos como).

Por estar fora do âmbito deste livro, omitimos a definição precisa do que os topólogos chamam «o mesmo». Essencialmente, dois objectos topológicos são o mesmo se houver uma correspondência biunívoca entre os seus pontos que preserve uma noção de vizinhança — pontos próximos num dos objectos correspondem a pontos próximos no outro. Esta noção de «o mesmo» foi introduzida por Möbius, que chamou a esta

correspondência uma «relação elementar»<sup>2</sup>. Hoje esta correspondência é chamada de *homeomorfismo*. Assim, no jargão dos topólogos, duas formas são as mesmas sempre que forem *homeomorfas*.

Consideremos os três cintos de pano do truque de magia das bandas afegãs, do capítulo 16. Um não tem meias-voltas, outro tem uma meia-volta, e o terceiro tem duas meias-voltas. Claramente, todos têm topologias extrínsecas diferentes. No entanto, de acordo com a regra dos topólogos, a terceira forma é homeomorfa à primeira faixa cilíndrica sem torção, uma vez que se cortarmos a faixa e dermos duas meias-voltas, antes de colar, as bordas do corte alinham-se correctamente (figura 17.5). Vamos chamar à forma deste terceiro cinto um cilindro torcido. Não fizemos o mesmo para a banda de Möbius. Cortando a faixa e dando apenas uma meia-volta, os bordos desse corte já não se alinham correctamente. Assim, apesar da semelhança superficial entre uma faixa de Möbius e um cilindro torcido, estes não são homeomorfos.

Embora a nossa intuição nos diga que a banda de Möbius e o cilindro (torcido ou não) não são homeomorfos, ainda não explicámos porquê. Embora pareça improvável, poderia haver um esquema de corte elaborado que transformasse um no outro. Como aprendemos com o truque do *toro duplo* no estendal, nem sempre podemos confiar na nossa intuição, mas neste caso a intuição está correcta, e estes objectos não são homeomorfos.

Um *invariante topológico* (de uma superfície) é uma propriedade ou entidade matemática relacionada com uma superfície que só depende da sua topologia. Um invariante topológico pode tomar a forma de um número, tal como o número de componentes do bordo da superfície. Se duas superfícies são homeomorfas, então devem ter o mesmo número de componentes do bordo. Na prática, é mais útil aplicar o recíproco: se duas superfícies têm um número diferente de componentes na fronteira, então não podem ser topologicamente iguais. Como um cilindro tem duas componentes de fronteira, mas uma banda de Möbius tem apenas uma, estes não são homeomorfos.

A dimensão intrínseca é outro invariante topológico: esta dimensão permite-nos distinguir uma esfera (duas dimensões) de uma circunferência (uma dimensão). Vamos abordar a noção de dimensão com mais detalhe no capítulo 22.

A orientabilidade é outro invariante topológico, ou mais especificamente, uma *propriedade topológica*. Se duas superfícies são topologicamente iguais, então são ambas orientáveis, ou ambas não orientáveis. Dito de outra forma, se uma superfície é orientável e outra não o é, então elas não podem ser homeomorfas. Não é difícil de verificar que tanto o cilindro como o cilindro torcido são ambos orientáveis, mas uma banda de Möbius não é.

De acordo com as nossas regras de colagem, uma tira de papel com os extremos colados após um número par de meias-voltas é topologicamente idêntico a um cilindro, e se for colada após um número ímpar de meias-voltas, é um objecto homeomorfo a uma banda de Möbius. As tiras com um número par de meias-voltas são orientáveis e têm duas componentes de bordo, enquanto aquelas com um número ímpar de meias-voltas são não orientáveis e têm apenas um bordo; assim, os dois casos não são homeomorfos. Observe-se, a propósito, que para todas as faixas torcidas, a forma obtida por reflexo num espelho é diferente. Quando torcemos e colamos, existem duas opções para torcer, dar meias-voltas para o lado direito ou para o lado esquerdo.

A orientabilidade, a dimensão e o número de componentes de bordo são três invariantes topológicos importantes. Outro invariante, possivelmente o mais importante, é a quantidade  $V - A + F$ . Dada uma superfície  $S$  decomposta usando  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces (naturalmente, ainda precisamos de evitar faces em forma de anel), definimos o *número de Euler* de  $S$  como  $V - A + F$  (o número de Euler é muitas vezes chamado a *característica de Euler*). É costume usar a letra grega *chi* para denotar o número de Euler, pelo que se escreve  $\chi(S) = V - A + F$ .

O número de Euler é um invariante topológico para as superfícies.

Ao dizer que o número de Euler é um invariante topológico, queremos dizer que cada superfície tem a sua própria fórmula de Euler. Por exemplo, a esfera na figura 17.6 tem 62 vértices, 132 arestas e 72 faces, pelo que o seu número de Euler é

$$\chi(\text{esfera}) = 62 - 132 + 72 = 2.$$

Como sabemos, este valor é obtido com qualquer decomposição de uma esfera ou qualquer objecto homeomorfo a uma esfera.

O *toro* da figura 17.6 tem 8 vértices, 16 arestas e 8 faces, por isso o seu número de Euler é

$$\chi(\text{toro}) = 8 - 16 + 8 = 0.$$

Da mesma forma, a garrafa de Klein da figura 17.6 tem 8 vértices, 16 arestas e 8 rostos, de modo que

$$\chi(\text{garrafa de Klein}) = 8 - 16 + 8 = 0.$$

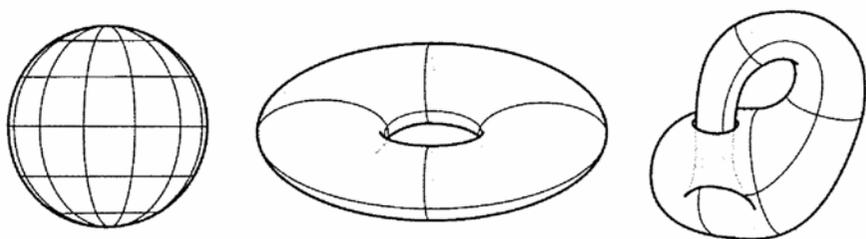


Figura 17.6. Decomposições da esfera, do *toro* e da garrafa de Klein

Existem várias etapas na demonstração de que o número de Euler é um invariante topológico. Primeiro devemos mostrar que qualquer superfície pode ser dividida num número finito de vértices, arestas e faces. Isto é, não existem superfícies tão bizarras que não admitem nenhuma tal decomposição finita (é aqui que usamos a hipótese de a superfície ser compacta, conceito abordado no Capítulo 16 — o plano euclidiano e o disco unitário aberto não são compactos, pelo que são excluídos). Quando trabalhávamos com poliedros, a partição era-nos dada *a priori*: consistia simplesmente nos vértices, arestas e faces do poliedro. Uma superfície em geral não tem uma tal decomposição canónica. Surpreendentemente, foi apenas em 1924 que apareceu a primeira demonstração de que é possível dividir todas as superfícies em vértices, arestas e faces<sup>3</sup>.

De seguida, devemos provar que o número de Euler é independente da escolha desta partição. Não é difícil ver que a adição de vértices e arestas a uma partição não mudará  $V - A + F$ . Assim, faz sentido perguntar se, dadas duas partições de uma superfície,  $P$  e  $P'$ , é possível adicionar vértices e arestas a  $P$  e a  $P'$  de modo que as duas partições fiquem com o mesmo número de vértices, arestas, faces triangulares, faces quadradas, pentagonais, e assim por diante, e que as suas posições relativas sejam a mesma? Este problema foi rapidamente identificado e foi chamado de *Hauptvermutung*, que é uma abreviação de «conjectura principal da topologia combinatória». A sua demonstração chegou tarde — apenas em 1943<sup>4</sup> — e, como veremos no capítulo 23, as coisas não são tão elegantes em dimensões superiores. Como o *Hauptvermutung* é válido para todas as superfícies, o número de Euler é, de facto, independente da escolha da partição.

Finalmente, devemos mostrar que duas superfícies homeomorfas têm o mesmo número de Euler. Se  $S$  e  $S'$  são superfícies homeomorfas e  $P$  é uma partição de  $S$ , então, como o homeomorfismo é uma correspondência biunívoca entre  $S$  e  $S'$ , podemos utilizá-lo precisamente para transferir a partição  $P$ , em  $S$ , para obter uma partição de  $S'$ . Claramente,

teremos então,  $\chi(S) = \chi(S')$ . Assim, concluímos o esboço da prova do nosso teorema — o número de Euler é um invariante topológico.

Um dos maiores desafios no estudo da fórmula de Euler para poliedros foi compreender o efeito dos «túneis» na expressão  $V - A + F$ . Tanto Lhuillier como Hessel afirmaram que, se um poliedro tem  $g$  túneis, então  $V - A + F = 2 - 2g$ . Usando a nossa terminologia moderna, eles afirmaram que o número de Euler da superfície desse poliedro é  $2 - 2g$ . O problema era que não tinham definido a noção de «túnel». Em vez de túneis, agora usamos alças (no sentido do capítulo 16) para descrever esta característica topológica. É interessante observar que eles se focaram nos buracos dos sólidos, ao passo que agora nos focamos nas alças que circundam esses buracos.

Examinemos o efeito, sobre o número de Euler, de adicionar uma alça a uma esfera. Primeiro, são eliminados dois discos da esfera, e depois são coladas as alças aos respectivos bordos. Podemos considerar que estes dois discos são faces triangulares (ver figura 17.7). Se a partição da superfície não tiver faces triangulares, subdividimos uma das faces em triângulos. Sabemos que o número de Euler da esfera é 2, e a alça é da forma de um cilindro, que tem número de Euler 0 (a partição mais simples tem  $V = 2$ ,  $A = 3$  e  $F = 1$ ). Então, antes dos recortes e da colagem, temos

$$V - A + F = \chi(\text{esfera}) + \chi(\text{alça}) = 2 + 0 = 2.$$

Quando cortarmos os dois triângulos perdemos duas faces. Quando colamos a alça à esfera, seis pares de arestas são unidas. Assim, as doze arestas tornam-se seis arestas. Da mesma forma, os doze vértices tornam-se seis vértices. Logo, após cortes e colagem, tanto  $V$  como  $A$  diminuem seis unidades, e  $F$  diminui duas, pelo que  $V - A + F$  também diminui duas. Portanto,

$$V - A + F = \chi(\text{esfera}) + \chi(\text{alça}) - 2 = 2 - 2 = 0.$$

Naturalmente, sabemos que uma esfera com uma destas alças é um *toro*, pelo que o resultado não é surpreendente.

Pelo mesmo raciocínio, de cada vez que adicionamos uma alça à superfície o número de Euler diminui de 2 unidades. Assim, obtemos uma prova da observação de Lhuillier:

$$\chi(\text{esfera com } g \text{ alças}) = 2 - 2g.$$

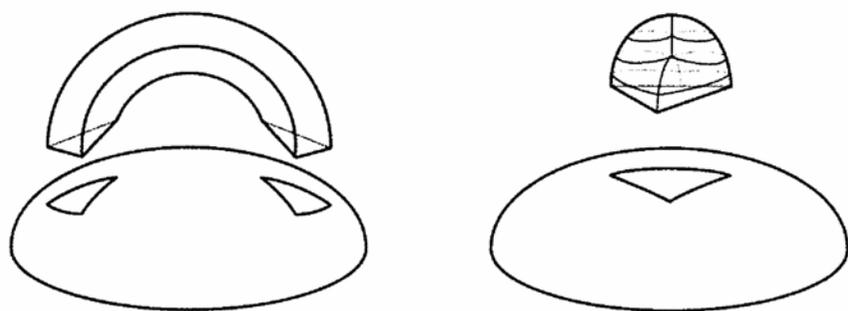


Figura 17.7. Adicionando uma alça e um chapéu cruzado a uma esfera

Da mesma forma, podemos calcular o efeito da colagem de um chapéu cruzado. Note-se que  $\chi(\text{chapéu cruzado}) = \chi(\text{faixa de Möbius}) = 0$  (como um cilindro, podemos decompô-lo com  $V = 2$ ,  $A = 3$ , e  $F = 1$ ). Como os chapéus cruzados têm uma única linha fechada como bordo, precisamos de remover apenas uma face da esfera por cada chapéu cruzado que adicionamos. Mais uma vez, assumimos que esta face é um triângulo. Usando o mesmo raciocínio de antes, quando se adiciona um chapéu cruzado tanto o número de arestas como de vértices diminui de 3 unidades, e o número de faces diminui uma. Assim, após a adição de um chapéu cruzado,  $V - A + F$  diminui uma unidade. Para uma esfera com um chapéu cruzado temos

$$V - A + F = \chi(\text{esfera}) + \chi(\text{chapéu cruzado}) - 1 = 1.$$

Conclui-se que o número de Euler do plano projectivo (uma esfera com um chapéu cruzado) é 1. Quando acrescentamos  $c$  chapéus cruzados obtemos

$$\chi(\text{esfera com } c \text{ chapéus cruzados}) = 2 - c.$$

Sabemos agora como determinar o número de Euler de qualquer superfície que pode ser obtido a partir de uma esfera pela colagem de alças e chapéus cruzados. Uma questão importante permanece — existem superfícies que não podem ser obtidas desta maneira? Por outras palavras, podemos descrever todas as possíveis superfícies (compactas) em termos de alças e chapéus cruzados? Usando a linguagem matemática, perguntamos: é possível *classificar* todas as superfícies?

Em matemática, os teoremas de classificação são tipicamente difíceis ou impossíveis. Não é surpreendente que Euler nunca tenha completado

a sua classificação dos poliedros. No entanto, ocasionalmente, é possível classificar os objectos matemáticos. Afinal, Teeteto classificou todos os poliedros regulares e Arquimedes classificou todos os poliedros semi-regulares.

Surpreendentemente, é possível classificar as superfícies (compactas, com e sem bordo). Todas as superfícies compactas sem bordo (abreviadamente «superfícies fechadas») são homeomorfas a uma esfera com alças ou a uma esfera com chapéus cruzados. Isto é, todas as superfícies orientáveis são topologicamente iguais a um *toro* com vários túneis, e todas as superfícies não orientáveis são esferas com uma ou mais bandas de Möbius coladas. Na verdade, o teorema é ainda mais forte do que isto. Se nos for dada uma superfície fechada arbitrária e soubermos o seu número de Euler e se é orientável ou não, então podemos identificar com precisão essa superfície.

#### TEOREMA DE CLASSIFICAÇÃO DE SUPERFÍCIES FECHADAS

Uma superfície fechada é determinada exclusivamente pelo seu número de Euler e pela sua orientabilidade. Uma superfície orientável é homeomorfa a uma esfera com  $g$  alças, para algum  $g \geq 0$ . Uma superfície não orientável é homeomorfa a uma esfera com  $c$  chapéus cruzados, para algum  $c > 0$ .

Por exemplo, seja  $S$  uma superfície fechada orientável com número de Euler igual a  $-6$ . Como  $S$  é orientável, sabemos que é homeomorfa a uma superfície de género  $g$  (uma esfera com  $g$  alças), de onde  $-6 = \chi(S) = 2 - 2g$ . Ou seja,  $S$  é homeomorfa a um *toro* com 4 túneis. Da mesma forma, se  $T$  é uma superfície fechada não orientável com número de Euler igual a  $-4$ , então é homeomorfa a uma esfera com  $c$  chapéus cruzados, pelo que  $-4 = \chi(T) = 2 - c$ . Por outras palavras,  $T$  é homeomorfa a uma esfera à qual foram colados seis chapéus cruzados.

É válido um teorema de classificação semelhante para as superfícies com bordo. Qualquer superfície com bordo é uma destas superfícies padrão, com um ou mais discos removidos. O número de Euler, a orientabilidade, e o número de componentes de fronteira determinam a superfície de forma única. Por exemplo, a única superfície orientável com número de Euler igual a 0 e duas componentes de fronteira é um cilindro, e a única superfície não orientável com número de Euler 0 e uma única componente de bordo é uma banda de Möbius, e assim por diante (veja a tabela 17.1).

Tabela 17.1: Número de Euler, orientabilidade e número de componentes de bordo para várias superfícies

<i>Superfície S</i>	$\chi(S)$	<i>Orientável</i>	<i>Bordo (n.º de componentes)</i>
Esfera	2	Sim	0
Toro	0	Sim	0
Duplo toro	-2	Sim	0
Toro com $g$ túneis	$2 - 2g$	Sim	0
Disco	1	Sim	1
Cilindro/anel	0	Sim	2
Garrafa de Klein	0	Não	0
Plano projectivo	1	Não	0
Esfera com $c$ chapéus cruzados	$2 - c$	Não	0
Faixa de Möbius	0	Não	1

Num certo sentido, foi Bernhard Riemann (1826-1866) que, na década de 1850, iniciou o processo de classificação. Riemann foi um dos matemáticos mais proeminentes do século XIX. Ele completou o seu doutoramento em Göttingen sob a orientação de Gauss, já no final da carreira deste. Naquela época, Göttingen não era um centro de investigação em matemática na Alemanha (Gauss ensinava apenas cursos introdutórios), pelo que Riemann elaborou grande parte do seu trabalho de pós-graduação na Universidade de Berlim.

A sua genialidade rapidamente foi reconhecida. Gauss, que não elogiava os outros de ânimo leve, ficou impressionado com a primeira palestra pública de Riemann, proferida em 1854. Freudenthal descreveu esta palestra da seguinte forma:

Um evento de destaque na história da matemática: o jovem e tímido Riemann leccionando ao envelhecido e lendário Gauss, que não viveria para além da Primavera seguinte, acerca das consequências de ideias que o velho certamente reconheceu como suas próprias, e que tinha durante muito tempo secretamente cultivado. W. Weber contou quão perplexo estava Gauss, e como, com emoção inusitada, elogiou a profundidade do trabalho de Riemann, no seu caminho de regresso a casa<sup>5</sup>.

Grande parte do trabalho de Riemann foi na área de análise complexa — o estudo dos números e das funções complexas. Um número complexo tem a forma  $a + bi$ , onde  $a$  e  $b$  são números reais e  $i = \sqrt{-1}$ .

Foi em busca da compreensão completa das funções complexas que a maioria da sua obra se formou — teoria das funções, geometria, equações diferenciais parciais e topologia. Alguns dos seus trabalhos foram postumamente publicados, entre os quais o seu tratamento da teoria da integração, que forma hoje em dia um alicerce em qualquer curso introdutório de cálculo. É uma infelicidade que a vida deste pensador tão original tenha sido interrompida pela tuberculose, na precoce idade de quarenta anos.

O interesse de Riemann pelas superfícies não proveio da teoria dos poliedros mas sim da análise complexa. Como os números complexos têm dois graus de liberdade ( $a$  e  $b$ ), o conjunto dos números complexos forma um plano de duas dimensões — exactamente como o plano euclidiano (cartesiano), mas com a propriedade suplementar de um dos eixos ser real e o outro eixo ser imaginário.

Riemann estava a estudar funções complexas multi-valoradas, isto é, que podem tomar vários valores. Por exemplo, consideremos a função  $f(z) = \sqrt[4]{z}$ . Qual é o valor de  $f(16)$ ? É um número  $w$  com a propriedade de que  $w^4 = 16$ . Não é difícil ver que há quatro números complexos que verificam a equação:  $2, -2, 2i$  e  $-2i$ . Assim, um único número ( $16$ ) dá origem a vários valores de  $f$ . Uma maneira de pensar neste facto é visualizando o gráfico da função  $f$  como tendo várias camadas, ou *folhas*. Riemann conseguiu habilmente interpretar estes gráficos em camadas como superfícies, que agora se chamam superfícies de Riemann. Uma superfície de Riemann pode ter uma topologia bastante interessante, mas é sempre orientável.

Foi desta forma que Riemann começou as suas investigações em topologia. Introduziu o conceito de género de uma superfície (e o conceito relacionado de conectividade, que discutiremos no capítulo 22). Agrupou as superfícies orientáveis de acordo com seu género, e reconheceu intuitivamente que duas superfícies topologicamente equivalentes devem ter o mesmo género<sup>6</sup>. Apesar deste agrupamento de superfícies semelhantes, ele não reconheceu a afirmação recíproca: duas superfícies com o mesmo género são topologicamente iguais.

Möbius foi a primeira pessoa a enunciar e demonstrar o teorema de classificação das superfícies orientáveis. Möbius tinha uma ferramenta que Riemann não tinha. Em 1863, ele desenvolveu a ideia das suas «relações elementares» (essencialmente o que agora chamamos homeomorfismos). Assim, conseguiu afirmar com alguma precisão o que significava que duas superfícies fossem a mesma. Möbius mostrou que todas as superfícies orientáveis são topologicamente equivalentes a uma das formas normais mostradas na figura 17.8 — uma esfera, um *toro*, um duplo *toro*, e assim por diante<sup>7</sup>.

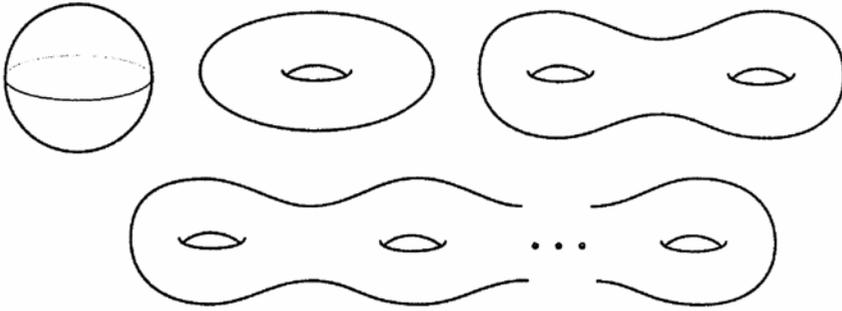


Figura 17.8. Formas normais de Möbius para as superfícies orientáveis

Em 1866, Camille Jordan mostrou que quaisquer duas superfícies orientáveis com bordo são homeomorfas se e somente se têm o mesmo gênero e o mesmo número de componentes de fronteira<sup>8</sup>. O primeiro enunciado completo e a prova do teorema de classificação, incluindo o caso de superfícies não orientáveis, é devido a Dyck em 1888<sup>9</sup>. No entanto, isto foi ainda antes das definições modernas de superfície e homeomorfismo. A primeira prova verdadeiramente rigorosa do teorema de classificação é devida a Max Dehn (1878-1952) e Poul Heegaard (1871-1948) em 1907<sup>10</sup>.

Não iremos demonstrar aqui o teorema de classificação, mas existem algumas demonstrações legíveis. Algumas envolvem a construção da superfície de modo a obter uma esfera com alças e chapéus cruzados. Por exemplo, a prova «ZIP» de John Conway («prova de irrelevância zero») começa com um conjunto de triângulos — as peças do puzzle desmontadas de uma superfície triangulada. Como cada novo triângulo é colado à restante superfície, sempre em expansão, terá que ser uma esfera com alças, chapéus cruzados e componentes de fronteira<sup>11</sup>. Outras demonstrações fazem-se em sentido inverso, começando com uma superfície e repetidamente retirando cilindros e faixas de Möbius (ou seja, alças e chapéus cruzados), vão-se preenchendo os buracos com discos, um de cada vez, até obter uma esfera.

À primeira vista, pode parecer fácil determinar o gênero de uma superfície orientável pois, no fundo, é apenas uma esfera com um certo número de alças. No entanto, a superfície nem sempre se parece com uma das formas normais de Möbius. Por exemplo, a primeira das superfícies na figura 17.9 é um exemplo de uma esfera com quatro alças — é homeomorfa a um *toro* com 4 túneis.

O teorema de classificação diz-nos que cada superfície é homeomorfa a uma esfera com alças ou a uma esfera com chapéus cruzados. Não nos

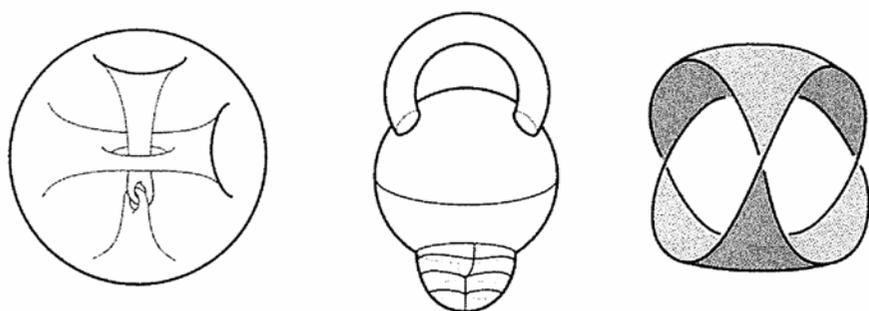


Figura 17.9. Superfícies menos comuns

diz directamente como tratar os casos mistos. Por exemplo, a segunda imagem da figura 17.9 é uma esfera com uma alça e um chapéu cruzado. Como é que isto se encaixa na classificação? De acordo com os cálculos acima, a esfera tem número de Euler igual a 2, acrescentar uma alça diminui-o 2 unidades, e adicionar um chapéu cruzado diminui uma. Portanto, o número de Euler desta superfície é  $-1$ . Devido à presença do chapéu cruzado, sabemos que a superfície não é orientável. Assim, de acordo com o teorema de classificação, ela é homeomorfa a uma esfera com três chapéus cruzados, uma superfície conhecida como a superfície de Dyck<sup>12</sup>.

Uma rápida inspecção da terceira superfície da figura 17.9 mostra que tem dois lados (é orientável) e tem apenas uma componente de bordo. Curiosamente, a própria fronteira forma o que se chama um nó de trevo. Como veremos no próximo capítulo, qualquer nó pode ser obtido como fronteira de uma superfície orientável com uma componente de bordo. Considerando uma decomposição desta superfície, e contando os seus vértices, arestas e faces, descobrimos que o seu número de Euler é  $-1$ . Pelo teorema de classificação para as superfícies com bordo, esta superfície é homeomorfa a um *toro* com um disco removido.

Como exemplo final, voltamos ao grande icosaedro e ao grande dodecaedro, os poliedros de Kepler-Poinsot com faces triangulares e pentagonais (ver capítulo 15). Apesar de não ser óbvio, as respectivas superfícies são orientáveis (recorde-se que têm auto-intersecções no espaço tridimensional). O número de Euler do grande icosaedro é 2, pelo que é homeomorfo a uma esfera, e o número de Euler do grande dodecaedro é  $-6$ , e por isso, é homeomorfo a um *toro* de 4 túneis.

## Capítulo 18

### Um Problema Enredado

*Ó Tempo, debes ser tu a desenredar isto, não eu. É um nó muito difícil p'ra que eu o desate.*

— William Shakespeare, *Décima Segunda Noite*<sup>1</sup>

Uma das primeiras investigações topológicas foi o estudo dos nós. Todos estamos familiarizados com os nós. Eles mantêm os barcos bem amarrados à costa, os sapatos aconchegados nos nossos pés, e os cabos e fios irremediavelmente entrelaçados atrás dos nossos computadores. Estes exemplos não são, estritamente falando, nós matemáticos. Um nó matemático não tem as extremidades livres, é topologicamente equivalente a uma circunferência, que vive no espaço euclidiano tridimensional. (Para transformar um cabo de extensão eléctrica num nó matemático, basta conectar as fichas macho-fêmea nos extremos.)

Na figura 18.1 vemos as projecções de seis nós matemáticos: o nó *trivial*, o nó de trevo, o nó *figura oito*, o nó *cinco-folhas*, o nó *homem-biscoito* (à falta de um nome atribuído) e o nó *quadrado* (ou nó *oito duplo*).

No capítulo anterior, enfatizámos o facto de os topólogos estarem normalmente interessados nas propriedades intrínsecas dos objectos topológicos, e não nas propriedades extrínsecas. A teoria dos nós é uma notável excepção. O que é interessante sobre um nó é precisamente a forma como ele está colocado no seu espaço envolvente — a sua configuração extrínseca. Intrinsecamente, todos os nós são idênticos — são todos homeomorfos a uma circunferência. Assim, no estudo dos nós, «o mesmo» não



Figura 18.1. O nó trivial, o nó de trevo, o nó figura oito, o nó cinco-folhas, o nó homem-biscoito, e o nó quadrado

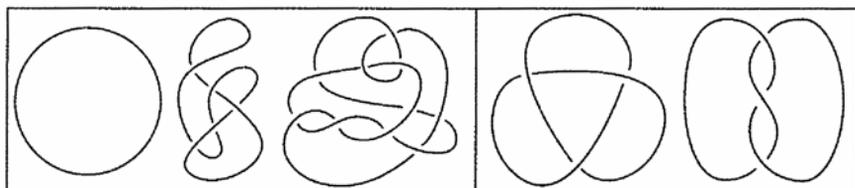


Figura 18.2. Três projecções do nó trivial e duas projecções do nó de trevo

significa homeomorfo. Em vez disso, dois nós são «o mesmo» se um deles pode ser continuamente deformado até ao outro no espaço ambiente. Isto é, dois nós são iguais se houver uma isotopia entre eles. Os primeiros três nós na figura 18.2 são isotópicos (todos eles são nós triviais), e os dois últimos são também isotópicos (ambos são o nó de trevo), mas, como se verá, o nó trivial não é isotópico ao nó de trevo.

O principal objectivo da teoria dos nós é a sua classificação. Assim, tal como fizemos para as superfícies, gostaríamos de encontrar ferramentas que nos permitam dizer se e quando dois nós são iguais ou diferentes. Idealmente, como com as superfícies, sonhamos em produzir uma lista exaustiva, e sem duplicações, de todos os nós. Até este momento não se conseguiu ainda obter essa lista completa, mas muito tem sido feito neste sentido. O modesto objectivo deste capítulo é desenvolver ferramentas suficientes para provar que os nós apresentados na figura 18.1 são todos diferentes. Uma dessas ferramentas requer a classificação das superfícies e o número de Euler.

O estudo e aplicações da teoria dos nós é tão antiga quanto a humanidade. Uma vasta gama de dobradiças, emaranhados, tranças e laços foram descobertos para todos os possíveis usos. Em muitas culturas, os nós e as suas projecções foram temas frequentes para jóias e obras de arte. Eles foram também importantes na produção de tecidos; de facto, o que é uma peça de tecido se não um nó gigante? Em compara-

ção, o estudo matemático dos nós é consideravelmente mais jovem; a primeira investigação matemática remonta ao século XVIII.

O significado topológico dos nós foi reconhecido por Alexandre-Théophile Vandermonde (1735-1796) em 1771, apenas 35 anos depois do artigo de Euler sobre as pontes de Königsberg. O curto artigo de Vandermonde «Remarques sur les problêmes de situation» («Observações sobre os problemas de posição») começa da seguinte forma:

Sejam quais forem as voltas e reviravoltas de um sistema de linhas no espaço, pode obter-se sempre uma expressão para o cálculo das suas medidas, mas esta expressão será de pouco uso na prática. O artesão que cria uma trança, uma rede, ou alguns nós estará interessado, não com questões de medição, mas com questões de posição; o que ele observa é a maneira como os fios estão entrelaçados<sup>2</sup>.

Apesar do começo promissor, este artigo não se foca nos nós, mas numa abordagem topológica aos chamados «saltos do cavalo» no xadrez. Apesar disso, ele faz uma breve descrição de como certos padrões de têxteis poderiam ser descritos de forma simbólica.

A partir dos seus desenhos e anotações, sabemos que Gauss pensou sobre os nós logo em 1794, mas, infelizmente, nunca publicou nada sobre o assunto. Numa preciosidade manuscrita em 1833, forneceu um integral duplo que pode ser usado para calcular o número de ligação entre duas curvas fechadas, uma quantidade topológica que mede quantas vezes uma das curvas se enreda à volta da outra<sup>3</sup>.

Talvez não seja de estranhar, por isso, que tenha sido Listing, um dos alunos de Gauss, quem iniciou verdadeiramente o estudo matemático da teoria dos nós. As suas contribuições podem ser encontradas na sua monografia de 1847 *Topologie*<sup>4</sup>, o muito citado tesouro de curiosidades topológicas. Embora Listing não tenha proposto a classificação de todos os nós, ele estava claramente interessado em encontrar técnicas para distinguir dois dados nós. Por exemplo, ele afirmou que o nó de trevo e a sua imagem num espelho não são o mesmo nó. Tal como o tratamento de Listing da banda de Möbius foi ignorado, assim o foi o seu estudo dos nós. Em última análise, o desenvolvimento da teoria dos nós deveu-se não a Listing, mas a dois físicos escoceses que trabalhavam numa nova teoria atômica.

Em 1867, William Thomson (1824-1907) afirmou que os átomos eram formados por vórtices, ou nós, no éter. Provavelmente mais conhecido como Lord Kelvin, Thomson também é responsável pela escala

absoluta da temperatura, e por ajudar na elaboração do primeiro cabo telegráfico transatlântico (foi nomeado cavaleiro por este trabalho). Segundo Kelvin, cada átomo correspondia a um nó, ou de um conjunto diferente de nós interligados, e a estabilidade de cada átomo era a consequência da estabilidade do nó sob deformações topológicas. Esta crença inventiva mas equivocada, chegou a prevalecer por duas décadas.

A teoria atômica de Thomson levou o seu amigo, Peter Guthrie Tait, a iniciar a classificação dos nós. Em 1877, Tait começou a tabulação de todos os nós — aos seus olhos, ele estava a conceber uma tabela periódica dos elementos. Mais tarde, este ponto de vista da química foi abandonado, mas Tait continuou o seu estudo. Por volta de 1900, ele e o matemático americano, nascido na Índia, Charles Newton Little (1858-1923) tinham elaborado uma listagem praticamente completa de todos os nós com dez ou menos cruzamentos (por cruzamentos, queremos referir-nos a um determinado desenho desse nó num papel — vamos explicar melhor esta terminologia em breve).

Tait usou principalmente a sua notável intuição na classificação dos nós. Nos anos seguintes, os matemáticos desenvolveram uma infinidade de ferramentas engenhosas para distinguir rigorosamente entre dois nós. A maioria destas ferramentas é o que se chama *invariantes de nós*. No capítulo anterior falámos de invariantes topológicos de superfícies. Os invariantes de nós desempenham o mesmo papel na teoria dos nós. Um invariante de nós é um número, ou outra entidade, que está associado a um nó para que, se os invariantes de dois nós são diferentes, então estes nós sejam diferentes.

Há muitos invariantes de nós, e alguns são muito fáceis de descrever. Neste capítulo, vamos introduzir alguns invariantes de nós, incluindo um que está relacionado com as superfícies e o número de Euler.

Um nó é uma linha fechada, e as linhas fechadas podem ser encontradas nas fronteiras das superfícies. Surpreendentemente, é possível encontrar superfícies cujas componentes de bordo são nós não-triviais. Na figura 18.3, vemos que o nó trivial é a fronteira de um disco (aqui não há nenhuma surpresa) e que o nó de trevo é o bordo de uma banda de Möbius de três meias-voltas. Anteriormente, vimos outro exemplo de superfície cujo limite era um nó de trevo, na figura 17.9.

Espantosamente, não apenas é possível encontrar uma superfície cujo bordo seja um dado nó, como o inverso também é verdadeiro: qualquer nó pode ser realizado como a fronteira de uma superfície no espaço tridimensional.

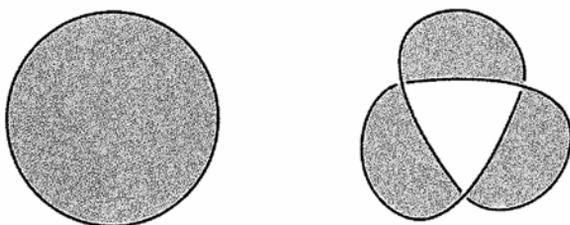


Figura 18.3. O nó trivial é o bordo de um disco e o nó de trevo é a fronteira de uma faixa de Möbius com três meias-voltas

Para realizar uma experiência divertida, tente fazer superfícies de películas de sabão, cujos bordos são nós. Para isso, faça um nó de arame rígido (um cabide de arame será suficiente para nós simples, embora seja muito duro de dobrar para fazer nós elaborados), e de seguida, mergulhe-o numa solução de sabão. Pode ser necessário fazer alguns furos na película, de modo a formar uma única superfície\*.

O trevo na figura 18.3 é o bordo de uma superfície não orientável (recorde que, no espaço tridimensional, não ser orientável é o mesmo que ter «um único lado»). É possível evitar esta situação — dado qualquer nó, podemos construir uma superfície orientável tendo este nó como o seu bordo. Uma tal superfície é chamada *superfície de Seifert*, em homenagem a Herbert Seifert (1907-1996). Talvez tão surpreendente quanto este teorema é a simplicidade da construção de tais superfícies. Vamos agora explicar o elegante algoritmo de Seifert, que ele descobriu em 1934<sup>5</sup>.

Ilustremos o algoritmo para um nó de trevo. Para começar, escolhemos uma das duas orientações possíveis para o nó. Ou seja, escolhemos uma direcção de percurso ao longo do nó, considerado como uma linha fechada. De seguida, projectamos o nó no plano. Quase todas as projecções são permitidas. Queremos evitar projecções «degeneradas», tais como as que apresentam três porções da linha que se cruzam no mesmo ponto, ou que duas partes da linha se sobrepõem ao longo de mais que um ponto, mas fora estes casos, a projecção pode ser tão complicada quanto quisermos.

Seguidamente, usamos esta projecção para criar um conjunto de curvas chamadas *curvas de Seifert*. Começamos percorrendo o nó, segundo a orientação que lhe demos. Ao chegar a um cruzamento, mudamos de direcção, de uma das linhas para a outra que a cruza, mas mantendo ainda o sentido dado pela orientação. Um circuito, ou curva fechada, é

---

\* Para fazer bolhas duráveis e de dimensões razoáveis, recomendamos misturar, por cada litro de água, 60 cl de detergente e 4 cl de glicerina (que pode ser encontrada em qualquer drogeria). Para melhores resultados, deixe a solução repousar algum tempo antes de a usar.

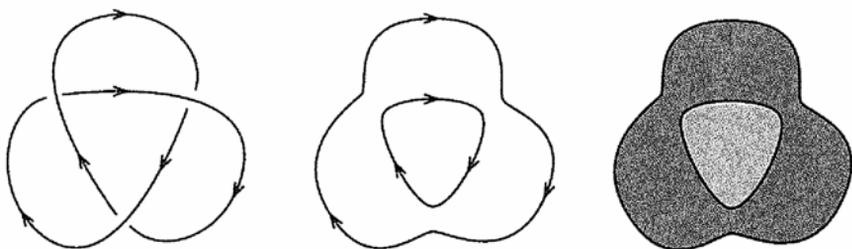


Figura 18.4. Curvas de Seifert para um nó de trevo e os discos correspondentes

então obtido quando este percurso retorna ao ponto de partida (ver figura 18.4). Repetimos este processo para todas as partes da linha que ainda não foram percorridas. Tomando agora estas curvas de Seifert, criamos discos que têm estas curvas fechadas como fronteira. Dependendo da projecção, alguns dos círculos podem estar dentro de outros. Neste caso, colocamos os vários discos uns em cima dos outros (como é o caso para o nó de trevo na figura 18.4).

Agora, vamos juntar os discos criados, colando faixas rectangulares, cada um deles após uma meia-volta. Mais precisamente, em cada local onde antes havia um cruzamento, colamos uma destas bandas torcidas, para que a direcção da torção seja determinada pelo cruzamento do nó original (ver a figura 18.5). Embora não seja imediatamente evidente, não é muito difícil provar que este procedimento produz sempre uma superfície orientável com bordo.

A parte final da construção da superfície de Seifert para o nó de trevo está ilustrada na figura 18.6. Na figura 18.7 repetimos o processo para o nó quadrado. Esta superfície é obtida a partir de três discos e seis bandas.

De acordo com o poderoso teorema de classificação das superfícies, «conhecemos» todas as superfícies possíveis. Uma superfície de Seifert é uma superfície orientável com uma componente de fronteira. Portanto, ela deve ser homeomorfa a uma esfera ou *toro* com  $g$  túneis, com um disco removido. Agora vemos realmente o poder do teorema de classificação, pois as superfícies de Seifert em nada se parecem aos *toros* com túneis. Teoricamente, bastaria colar um disco ao bordo de uma destas superfícies de Seifert para obter uma superfície fechada, mas essa colagem, para evitar auto-intersecções, exige quatro dimensões.

Como sabemos que uma superfície de Seifert é orientável e tem uma componente de fronteira, precisamos apenas de saber o seu número de Euler para a classificar. Suponhamos que  $S$  é uma superfície de Seifert construída a partir de  $d$  discos e  $b$  bandas. Uma vez que o número de Euler de

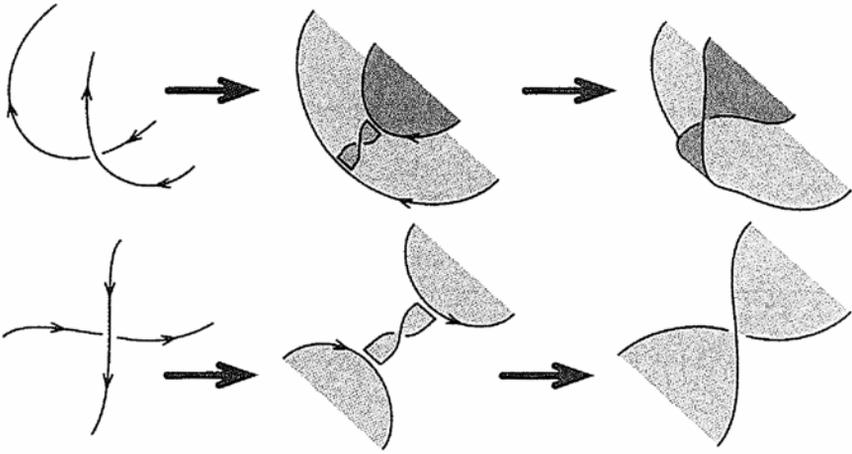


Figura 18.5. A colagem de uma banda com uma torção

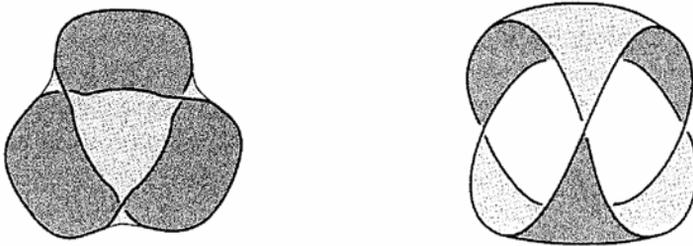


Figura 18.6. A superfície de Seifert para um nó de trevo

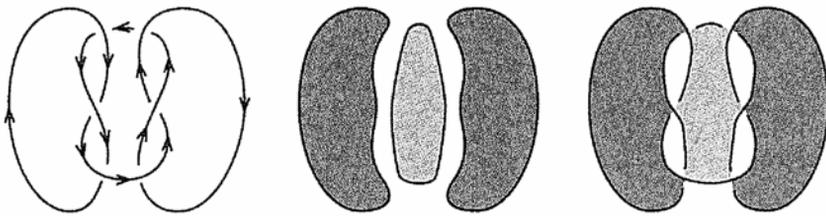


Figura 18.7. A superfície de Seifert para um nó quadrado

um disco é 1 (e, portanto, o número de Euler de  $d$  discos disjuntos é  $d$ ), bastamos agora determinar o efeito da colagem de uma banda a uma superfície.

Suponhamos que juntamos as duas extremidades de uma banda a uma superfície com bordo (mas que não necessita de ser conexa). Ao

fazer isto, adicionamos uma face e duas arestas (e nenhum vértice) à superfície. De acordo com a familiar soma alternada da fórmula de Euler, esta adição de uma banda diminui o número de Euler de uma unidade. Assim, acrescentando  $b$  bandas, o número de Euler decresce  $b$  unidades.

A superfície de Seifert  $S$  construída a partir de  $d$  discos e de  $b$  bandas tem número de Euler igual a  $\chi(S) = d - b$

A superfície de Seifert para o nó de trevo (figura 18.6) foi construída utilizando dois discos e três bandas. Assim, o seu número de Euler é  $-1$ . Da mesma forma, a superfície de Seifert para o nó quadrado foi feito a partir de três discos e seis bandas, pelo que o seu número de Euler é  $-3$ .

Se fôssemos colar um disco na fronteira de uma superfície de Seifert, obteríamos uma superfície fechada de certo género  $g$ . Esta colagem apenas introduz uma nova face, por isso a superfície fechada terá número de Euler uma unidade superior ao da correspondente superfície de Seifert. A superfície de Seifert para o nó de trevo da figura 18.6 tem número de Euler  $-1$ . Se anexarmos um disco ao bordo, então a superfície resultante terá número de Euler  $0$ . Assim, deve ser um *toro*, uma superfície de género  $1$ . Dizemos então que a superfície de Seifert tem género  $1$ .

Podemos aplicar esta mesma lógica para qualquer superfície de Seifert, feita a partir de  $d$  discos e de  $b$  bandas. Ao colar um disco ao bordo, obtém-se uma superfície  $S$ , fechada e orientável, com número de Euler igual a  $\chi(S) = d - b + 1$ . Se  $S$  é uma superfície de género  $g$ , temos  $\chi(S) = 2 - 2g = d - b + 1$ . Resolvendo em ordem a  $g$  encontramos a seguinte expressão.

Uma superfície de Seifert feita a partir de  $d$  discos e de  $b$  bandas tem género  $g = (1 - d + b) / 2$ .

A superfície de Seifert para o nó quadrado tem género  $g = (1 - 3 + 6) / 2 = 2$ . Portanto, é um duplo *toro* com um disco removido. Na figura 18.8 vemos as superfícies de Seifert para o nó cinco-folhas, o nó figura oito, e o nó homem-biscoito. A superfície de Seifert para o nó cinco-folhas é construída a partir de dois discos e cinco bandas. Assim, o seu género é  $(1 - 2 + 5) / 2 = 2$ . A superfície de Seifert para o nó figura oito é feita de três discos e quatro bandas, e tem género  $(1 - 3 + 4) / 2 = 1$ . E a superfície de Seifert para o nó homem-biscoito, feita com três discos e seis bandas, tem género  $(1 - 3 + 6) / 2 = 2$ .

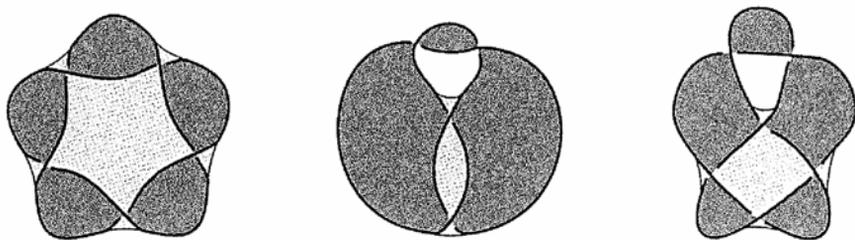


Figura 18.8. Superfícies de Seifert para os nós cinco-folhas, figura oito, e homem-biscoito

Seria óptimo se o género de uma superfície de Seifert fosse um invariante de nós. O problema é que um dado nó pode ter mais do que uma superfície de Seifert topologicamente distinta (para o que, em geral, bastaria escolher uma projecção diferente do nó, no início do método). No entanto, não temos que abandonar completamente esta ideia. Podemos definir o género de um nó como o menor género de todas as possíveis superfícies de Seifert a ele associadas. Designamos o género de um nó  $K$  por  $g(K)$ .

O nó trivial é a fronteira de um disco, que, por sua vez, é uma esfera com outro disco removido, tendo pois género 0. Este é o único nó que é o bordo de um disco, de modo que o género é um número positivo, para qualquer nó que não seja trivial.

Esta definição é um pouco frustrante. Embora o género seja um invariante de nós perfeitamente válido, na prática não é fácil de calcular. Construímos uma superfície de Seifert para o nó homem-biscoito, a qual calculámos ter género 2. É este o género deste nó? Talvez sim, talvez não. Talvez seja possível encontrar uma superfície de Seifert diferente para este nó, com género 1. Não está claro como provar que tal superfície de Seifert não existe.

Uma boa novidade é que podemos facilmente calcular o género para uma ampla classe de nós chamados nós alternados. Vamos percorrer com o dedo a projecção do nó figura oito, indicada na figura 18.1, observando o seu comportamento nos cruzamentos. A linha passa por cima, a seguir por baixo, depois por cima, novamente por baixo, e assim por diante, alternando ao longo da projecção. Esta projecção é chamada alternada. As projecções dos nós de trevo, do de cinco-folhas, e do homem-biscoito são também alternadas, mas repare-se que a projecção do nó quadrado não o é. Um nó é chamado *alternado* se tiver alguma projecção alternada. A projecção indicada para o nó quadrado não é alternada, mas isto não significa que não seja um nó alternado, pois ele pode ter outra projecção que *seja* alternada.

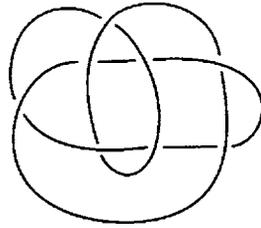


Figura 18.9. Uma projecção não alternada de um nó, com 8 cruzamentos

Os nós mais simples são alternados. Todos os nós com sete ou menos cruzamentos são alternados, e apenas três dos nós com 8 cruzamentos não são alternados (um deles é mostrado na figura 18.9). No entanto, à medida que o número de cruzamentos aumenta, o número relativo dos nós alternados vai diminuindo. Dos 2404 nós *primos* (vamos definir esta noção em breve) com 12 cruzamentos ou menos, 63% são alternados. Dos cerca de 1,7 milhões de nós primos com 16 cruzamentos ou menos, apenas 29% são alternados<sup>6</sup>.

Uma preciosa ajuda é-nos dada por um teorema provado no final da década de 1950, por Richard H. Crowell e Kunio Murasugi<sup>7</sup>.

A superfície de Seifert obtida a partir de uma projecção alternada tem forçosamente o género mínimo.

Por outras palavras, dado que o nó de trevo, o nó figura oito, o cinco-folhas e o homem-biscoito são alternados, podemos dizer com toda a certeza que os seus géneros são 1, 1, 2 e 2, respectivamente. Assim, nenhum destes quatro nós é o nó trivial; além disso, o nó de trevo e o nó figura oito são distintos do nó cinco-folhas e do nó homem-biscoito. Chegados a este ponto, o leitor poderá verificar que os dois nós indicados na introdução (figura I.5) são diferentes.

Vamos agora fazer uma breve digressão para determinar o género do nó quadrado. Os números primos são os blocos básicos de construção dos números inteiros positivos. Um número  $p > 1$  diz-se *primo* se, sempre que escrevemos  $p$  como o produto de dois números inteiros positivos  $m$  e  $n$ , ou  $m = 1$  ou  $n = 1$ ; caso contrário,  $p$  diz-se *composto*. De forma semelhante, definimos os nós primos, os blocos de construção básicos para os nós. Para fazer isto, precisamos de uma forma de «multiplicar» nós.

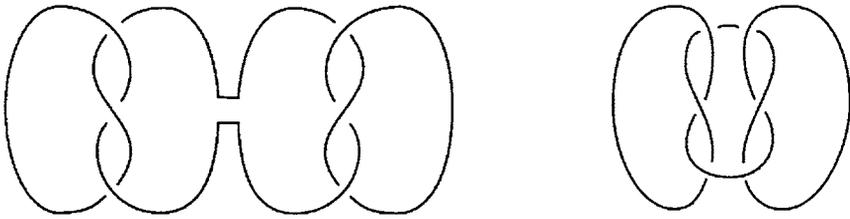


Figura 18.10. Uma projecção não alternada de um nó, com 8 cruzamentos

Dados nós  $K$  e  $L$ , o *produto* de  $K$  e  $L$ , denotado por  $K\#L$ , é formado como se segue. Coloquemos as projecções de  $K$  e  $L$  uma ao lado da outra (mas não sobrepostas). Cortamos uma das linhas exteriores de cada um dos nós, e a seguir unimos as quatro pontas livres, de modo a não introduzir novos cruzamentos. Por exemplo, na figura 18.10, vemos que o nó quadrado é o produto de um nó de trevo com a sua imagem de espelho (o produto de dois nós de trevo idênticos é um outro nó)\*.

Um nó  $M$  diz-se *primo* se, sempre que temos  $M = K\#L$ , para certos nós  $K$  e  $L$ , então ou  $K$  ou  $L$  são o nó trivial\*\*. Por outras palavras, um nó é primo, se não pode ser escrito como o produto de dois nós não triviais. Um nó não trivial que não é primo é chamado *nó composto*. Claramente, ser ou não primo é um invariante de nós. Pode mostrar-se que o nó quadrado é um nó composto. Não vamos prová-lo, mas tanto o nó de trevo, a figura oito, o cinco-folhas e o homem-biscoito são todos nós primos, de modo que nenhum deles é isotópico ao nó quadrado.

Vamos supor que sabemos os géneros dos nós  $K$  e  $L$ . É fácil determinar o género de  $K\#L$ ? Sejam  $S_K$  e  $S_L$  superfícies de Seifert para  $K$  e  $L$  de género mínimo, para certas projecções de  $K$  e  $L$ . Com estas, formamos  $K\#L$  e a correspondente superfície de Seifert  $S_{K\#L}$ . Não é difícil ver que, se  $S_K$  é formado a partir de  $d_K$  discos e  $b_K$  bandas, e  $S_L$  é formado a partir de  $d_L$  discos e  $b_L$  bandas, então  $S_{K\#L}$  é construído com  $d_K + d_L - 1$  discos e  $b_K + b_L$  bandas. Assim, o género de  $S_{K\#L}$  é

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [1 - (d_K + d_L - 1) + (b_K + b_L)] &= \frac{1}{2} (1 - d_K + b_K) + \frac{1}{2} (1 - d_L + b_L) \\ &= g(K) + g(L). \end{aligned}$$

\* É muito importante observar que esta operação de produto está bem definida. Isto é, o produto de dois nós  $K$  e  $L$  depende apenas deles, e não depende dos pontos onde cada um dos nós é cortado antes de fazer a união. (N. do T.)

\*\* O nó trivial satisfaz esta definição de primalidade, mas, tal como o número 1 também não é considerado um número primo, o nó trivial não é considerado um nó primo.

O problema é que não sabemos se esta superfície  $S_{K\#L}$  tem o género mínimo para o nó  $K\#L$ . Então, tudo o que podemos concluir daqui é que  $g(K\#L) \leq g(K) + g(L)$ . Omitiremos a demonstração, mas pode provar-se que  $S_{K\#L}$  tem, de facto, o género mínimo. Assim, o género é aditivo.

Para quaisquer nós  $K$  e  $L$ ,  $g(K\#L) = g(K) + g(L)$ .

Esta fórmula permite calcular o género do nó quadrado:

$$g(\text{nó quadrado}) = g(\text{nó de trevo}) + g(\text{nó de trevo}) = 1 + 1 = 2.$$

Uma consequência interessante desta fórmula é que basta um dos nós  $K$  ou  $L$  não ser trivial para  $K\#L$  não ser trivial. Isto segue-se do facto de, se  $g(K) \neq 0$  ou  $g(L) \neq 0$ , então  $g(K\#L) \neq 0$ . Uma forma pitoresca de entender isto é a seguinte: se der um nó a cada um dos dois cordões dos seus sapatos, então é impossível unir as extremidades livres dos dois cordões para desfazer estes nós. Nenhum nó tem um «nó inverso» que o desata.

Vale a pena observar que, se  $K$  e  $L$  são nós alternados, então  $K\#L$  é também um nó alternado (consegue verificar que isto é verdade?). Assim, o nó quadrado, que mostrámos na figura 18.10 com uma projecção que não é alternada admite, de facto, uma projecção alternada.

Apesar do género de um nó nos permitir distinguir entre muitos nós, não é um invariante completo — quando dois nós têm o mesmo género, isto não significa que eles sejam o mesmo nó. Por exemplo, os géneros do nó de trevo e do nó figura oito são ambos iguais a 1. Assim, ou os dois nós são o mesmo (e veremos que não são), ou temos que encontrar um método diferente para distingui-los. Da mesma forma, os géneros do nó cinco-folhas, do homem-biscoito e do nó quadrado são os mesmos.

Na parte restante deste capítulo, vamos apresentar outros dois invariantes de nós, que nos permitem distinguir os nós da figura 18.1. Constituem apenas uma pequena amostra dos muitos invariantes de nós conhecidos.

O primeiro destes invariantes é a *colorabilidade*. Para determiná-lo, vamos desenhar a projecção de um nó, usando três lápis de cores diferentes. O nó diz-se *colorável* se em todos os cruzamentos aparece apenas uma cor, ou se todas as três cores aparecem. Além disso, insistimos que, em toda a projecção, não podemos usar uma só cor. Não é muito difícil provar

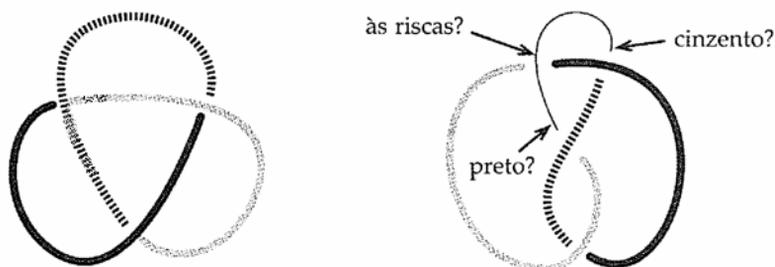


Figura 18.11. O nó de trevo é colorável, mas o nó figura oito não é

Tabela 18.1: O número de nós primos distintos, com número de cruzamentos entre 3 e 14

$c(K)$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Nós distintos	1	1	2	3	7	21	49	165	552	2176	9988	46972

que a colorabilidade é um invariante de nós, mas vamos saltar a prova. Em particular, a colorabilidade não depende da escolha da projecção.

Na figura 18.11, vemos que o nó de trevo é colorável (usamos preto, cinzento, e «às riscas» como as nossas três cores). No entanto, uma pequena experimentação mostra que o nó figura de oito não é colorável. No exemplo mostrado na figura 18.11 obedecemos às regras e colorimos as primeiras três linhas. Nesta altura, deparamo-nos com um problema para colorir a linha no topo. Cada um dos 3 cruzamentos desta linha força-a a ser de uma cor diferente. Não há forma de colorir este nó de acordo com as regras. Assim, o nó de trevo e o nó figura oito são nós distintos.

Deixamos o leitor mostrar que o nó quadrado é colorável, mas o nó cinco-folhas, bem como o homem-biscoito não o são. Desta forma, temos mais uma prova de que o nó quadrado é diferente do nó homem-biscoito e do nó cinco-folhas.

Usando os três invariantes género, primalidade (ser ou não primo), e colorabilidade fomos capazes de distinguir todos os nossos nós excepto o cinco-folhas e o homem-biscoito. Estes dois nós são ambos primos, de género 2, e não coloráveis. Para provar que são distintos, precisamos de introduzir um outro invariante de nós: o *número de cruzamentos*.

O número de cruzamentos de um nó é o menor número de cruzamentos de uma qualquer projecção desse nó. Vamos designar por  $c(K)$  o número de cruzamentos do nó  $K$ . A projecção usual do nó trivial não tem cruzamentos, tendo por isso número de cruzamentos 0. Sabemos que

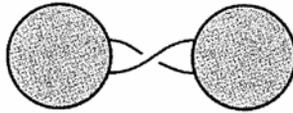


Figura 18.12. Um cruzamento não essencial

o nó de trevo não é o nó trivial, e temos uma projecção do nó de trevo com três cruzamentos. Pode verificar-se que qualquer nó com zero, um ou dois cruzamentos é o nó trivial; portanto, o número de cruzamentos do nó de trevo é 3.

Os nós muitas vezes são agrupados pelo número de cruzamentos. Não existe muita diversidade para nós com poucos cruzamentos. Como podemos ver na tabela 18.1, o nó de trevo é o único nó com o número de cruzamentos 3 (aqui, não estamos a distinguir entre um nó e a sua imagem de espelho), e há apenas sete nós primos com seis ou menos cruzamentos. À medida que o número de cruzamentos aumenta, a variedade de nós aumenta muito rapidamente<sup>8</sup>.

Tal como o género, e exactamente pela mesma razão, o número de cruzamentos é um invariante muitas vezes difícil de calcular. Dada uma projecção concreta, é fácil contar o número de cruzamentos nessa projecção. No entanto, é difícil poder garantir que não existe nenhuma outra projecção com menos cruzamentos. Se temos uma projecção de um nó  $K$  com  $n$  cruzamentos, tudo o que podemos dizer é que  $c(K) \leq n$ . Felizmente, tal como com o género, o número de cruzamentos é fácil de calcular para nós alternados.

Um século antes, Tait tinha conjecturado que uma projecção alternada reduzida de um nó tem o número mínimo de cruzamentos. Aqui, «reduzido» significa que, antes de contar o número de cruzamentos, se removem todos os cruzamentos não essenciais, tais como o cruzamento na figura 18.12. Tal cruzamento pode ser removido simplesmente dando a uma das partes do nó uma meia volta. Removidos estes cruzamentos, conjecturou Tait, o número de cruzamentos é o mínimo para projecções alternadas. A conjectura de Tait permaneceu em aberto durante muitos anos, mas foi provada de forma independente e quase simultânea por Louis Kauffman, Kunio Murasugi e Morwen Thistlethwaite em meados dos anos 1980<sup>9</sup>.

Uma projecção alternada e reduzida de um nó possui o número mínimo de cruzamentos.

Este teorema permite calcular facilmente o número de cruzamentos de qualquer nó alternado. Como as nossas projecções dos nós de trevo, figura oito, cinco-folhas, e homem-biscoito são reduzidas e alternadas, é elementar determinar os seus números de cruzamento. São 3, 4, 5 e 6, respectivamente. Assim, bastaria este único invariante para concluir que todos estes nós são distintos, incluindo o cinco-folhas e o homem-biscoito.

Vale a pena questionar a relação entre o número de cruzamentos e o produto de nós. Existe uma relação simples entre  $c(K)$ ,  $c(L)$ , e  $c(K\#L)$ ? Se  $K$  e  $L$  são ambos alternados, então  $K\#L$  é alternado. Além disso, sendo cuidadoso e usando projecções reduzidas alternadas de  $K$  e  $L$ , podemos garantir que, ao uni-los, a projecção resultante de  $K\#L$  é também reduzida e alternada (não foi o que fizemos para o nó quadrado). Por conseguinte, neste caso especial, o número de cruzamentos é aditivo.

Se  $K$  e  $L$  são nós alternados, então  $c(K\#L) = c(K) + c(L)$ .

Por exemplo,  $c(\text{nó quadrado}) = c(\text{nó de trevo}) + c(\text{nó de trevo}) = 3 + 3 = 6$ .

Tabela 18.2: Resumo das propriedades de alguns nós simples

Nó	Primo	Número de cruzamentos	Género	Colorável
Nó trivial	não	0	0	sim
Nó de trevo	sim	3	1	sim
Nó figura oito	sim	4	1	não
Nó cinco-folhas	sim	5	2	não
Nó homem-biscoito	sim	6	2	não
Nó quadrado	não	6	2	sim

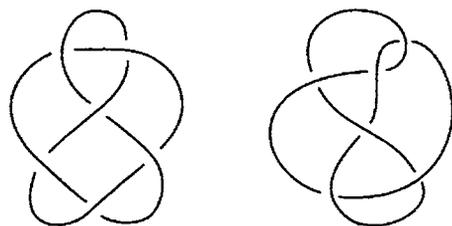


Figura 18.13. O nó homem-biscoito e o nó  $6_3$  são o mesmo?

Será que o número de cruzamentos é aditivo para todos os nós, tal como o género? Esta é uma antiga conjectura. Surpreendentemente, ninguém descobriu uma demonstração nem um exemplo mostrando que é falsa!

Neste capítulo introduzimos alguns dos muitos invariantes de nós importantes, e utilizando-os, fomos capazes de distinguir os seis nós que mostrámos no início do capítulo. Resume-se esta análise na tabela 18.2.

Com estas ferramentas, pudemos avançar no processo de classificação. No entanto, elas não nos levam muito longe. As duas projecções da figura 18.13, o nó homem-biscoito e o chamado nó  $6_3$ , são nós diferentes, mas os nossos invariantes não os conseguem distinguir. Ambos os nós são primos, têm 6 cruzamentos, são alternados, não coloráveis e têm género 2. Precisamos ainda de mais ferramentas para os distinguir.

Além disso, não apresentámos quaisquer técnicas para analisar quando é que duas projecções planares distintas representam o mesmo nó. Dedicámos este capítulo a mostrar que algumas projecções representam nós diferentes. Incentivamos o leitor a dar uma vista de olhos pela literatura, e investigar este interessante campo da teoria dos nós.

Os matemáticos e os cientistas têm uma relação disfuncional de partilha. Ingenuamente, poderíamos pensar que eles trabalham lado a lado. Os cientistas fornecem problemas para os matemáticos resolverem, e os matemáticos concebem teorias que esperam que sejam úteis aos cientistas.

As necessidades dos cientistas costumam estimular a criação de nova matemática, tal como, por exemplo, o modelo dos vórtices da teoria atómica de Kelvin foi fonte de inspiração para a teoria dos nós. Mas os matemáticos não se satisfazem em ser servos da ciência. Mesmo quando uma teoria matemática nasce a partir de uma aplicação prática, rapidamente assume vida própria e é desenvolvida pelo interesse das suas propriedades inerentes. Os matemáticos teóricos formam um grupo teimoso que, como um todo, estão mais interessados na beleza, verdade, elegância e grandiosidade, do que na aplicabilidade.

Quando se provou que o modelo atómico de Kelvin estava errado, os cientistas perderam rapidamente o interesse nos nós, mas os matemáticos continuaram a estudá-los. A teoria dos nós ganhou uma vida própria enquanto área da matemática pura. Durante a maioria do século *xx* foi de interesse apenas para os matemáticos. A teoria dos nós manteve-se como área de investigação activa, com aplicações noutras áreas da matemática pura, mas não noutras ciências.

Mas mesmo as áreas mais abstractas e teóricas da matemática podem ser úteis. A matemática aplicada muitas vezes provém de áreas que pre-

sumivelmente não são aplicáveis. A utilidade de uma teoria particular muitas vezes não é clara durante muitos anos. Ninguém poderia ter previsto que o estudo dos números primos permitiria, mais tarde, encriptar informações dos nossos cartões de crédito para que possam ser enviadas de forma segura através da Internet. Os matemáticos do século XIX não sabiam que o seu trabalho sobre as geometrias não-euclidianas fossem fornecer os fundamentos para a teoria da relatividade geral de Einstein.

Perto do final do século XX, a utilidade da teoria dos nós ressurgiu nas ciências naturais. Tanto físicos, como biólogos e químicos descobriram que a teoria matemática dos nós lhes permitia entender melhor as suas áreas. Seja no estudo do ADN ou de outras grandes moléculas, das linhas do campo magnético, da teoria quântica de campo, ou da mecânica estatística, a teoria dos nós desempenha, hoje em dia, um importante papel.

Os matemáticos trabalham numa loja que fabrica e vende ferramentas. Ocasionalmente tratam de encomendas especiais dos seus clientes cientistas, mas durante a maior parte do tempo labutam a elaborar ferramentas elegantes cujas aplicações não foram ainda descobertas. Os cientistas visitam esta loja de ferramentas e pesquisam as prateleiras na esperança de que uma das ferramentas se adapte às suas necessidades. A secção de teoria dos nós desta loja, durante muito tempo ignorada pelos cientistas, está agora fervilhante de actividade. No próximo capítulo, veremos como as ideias emergentes da topologia e do número de Euler criaram mais uma ferramenta inesperadamente útil para os cientistas.

## Capítulo 19

### Penteando o Pêlo de um Coco

*Deixemos o caos fazer a tempestade!*  
*As nuvens, um enxame de figuras!*  
*Eu espero pela forma.*  
— Robert Frost, «Pertinax»<sup>1</sup>

Muitos cientistas usam a matemática como ferramenta para prever comportamentos. Um cientista pode ter uma equação ou um sistema de equações que descreve as interações das quantidades no seu modelo. E então, usa a matemática para retirar conclusões a partir dessas equações.

Muitas vezes, os modelos matemáticos são *equações diferenciais*. Estas descrevem as taxas de variação de várias quantidades em função do tempo. Por exemplo, um ecologista pode usar um sistema de equações diferenciais para modelar a dinâmica populacional de coelhos e raposas que vivem numa reserva natural de vida selvagem numa relação predador-presa. Quando o número de coelhos é grande, as raposas têm uma abundante fonte de alimento. À medida que as raposas se alimentam dos coelhos, o número de raposas aumenta e o número de coelhos diminui. A certa altura, diminui o fornecimento alimentar das raposas, fazendo com que a sua população diminua. Isto, por sua vez, permite aos coelhos prosperar novamente. Ilustramos visualmente este comportamento cíclico na figura 19.1.

As equações diferenciais exprimem-se como relações algébricas entre as variáveis e as suas derivadas. Dizemos que encontramos uma *solução*

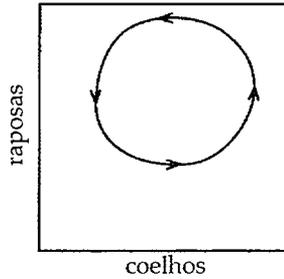


Figura 19.1. O modelo predador-presa

de uma equação diferencial quando, para uma dada condição inicial, podemos prever o comportamento futuro do sistema. Por outras palavras, se soubermos quantos coelhos e raposas existem hoje, podemos prever quantos haverá daqui a um ano. A curva da figura 19.1 é a trajetória de uma solução. As setas indicam a direcção do tempo. A curva é representada no *espaço de fase*, um objecto topológico que representa todos os valores possíveis das variáveis. Neste nosso caso, o espaço de fase é o primeiro quadrante do plano (uma vez que nem o número de coelhos nem o número de raposas podem ser negativos). Noutros exemplos mais sofisticados, o espaço de fase pode apresentar uma forma topológica mais complicada.

Às vezes, encontrar uma solução particular de uma equação diferencial não é suficiente para o cientista. Muitas vezes, é mais importante tirar conclusões qualitativas. O sistema tem um equilíbrio — populações para as quais a taxa de mortalidade é igual à taxa de natalidade para ambas as espécies? Existem condições iniciais que conduzam à extinção de uma ou de ambas as espécies? Pode haver crescimento populacional ilimitado? Será que as populações apresentam um comportamento cíclico, ou será que variam caoticamente? Mesmo que seja possível resolver uma equação diferencial usando o cálculo, pode não ser fácil responder a estas importantes questões «globais».

A fim de entender melhor as soluções de um sistema de equações diferenciais, podemos preferir uma forma mais visual e geométrica de as representar. As duas técnicas mais comuns consistem em produzir um *fluxo* ou um *campo vectorial* no espaço de fases. Um *fluxo*, também conhecido como sistema dinâmico contínuo, associa a cada ponto no espaço de fases a trajetória do movimento desse ponto. Esta trajetória é simplesmente a curva de solução para a equação diferencial. Podem ver-se na figura 19.2 várias linhas de fluxo para o modelo predador-presa.

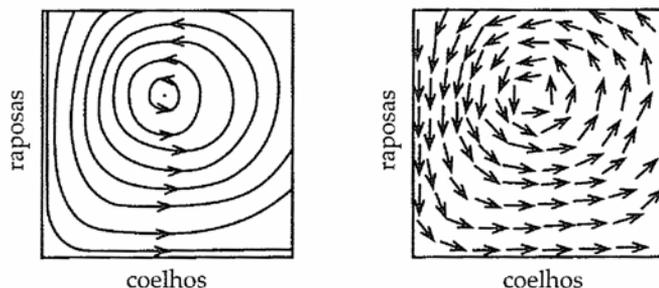


Figura 19.2. O fluxo associado e o campo vectorial para o modelo predador-presa

Estas mostram que, para qualquer condição inicial de populações que não esteja em equilíbrio, estas populações sobem e descem ciclicamente ao longo do tempo.

Em vez de exprimir uma equação diferencial algebricamente, ou como um fluxo, podemos descrevê-la em termos de um campo vectorial. Ao contrário das quantidades escalares, tais como o tempo, a temperatura, a luminosidade, ou a massa, que podem ser descritas por uma única grandeza, as quantidades *vectoriais* tem uma grandeza e uma direcção. Em física, pode utilizar-se vectores para descrever a velocidade; o *vector velocidade* aponta no sentido do movimento, e a grandeza do vector representa a velocidade à qual o objecto se desloca. Poderíamos dar outros exemplos, mas a velocidade é provavelmente o mais intuitivo. Na realidade, se pensarmos num fluxo como um movimento de partículas, então, os vectores do campo vectorial são os vectores de velocidade para essas partículas no espaço de fases.

Na figura 19.2 vemos que existe um único ponto de equilíbrio — um ponto onde os números de raposas e de coelhos permanecem inalterados com o tempo. O vector neste ponto de equilíbrio tem valor zero\*, e por isso, dizemos que o campo vectorial admite um zero neste ponto. De forma equivalente, o fluxo tem aqui um ponto fixo, ou ponto de equilíbrio. Os zeros dos campos vectoriais são frequentemente de grande importância, pois representam pontos de equilíbrio do sistema.

Dedicamos o resto do capítulo a uma investigação de campos vectoriais em superfícies, sem voltar às equações diferenciais que os definem. O nosso principal objectivo é compreender a relação entre os zeros de um campo vectorial e a topologia da superfície.

\* Quando um vector tem grandeza zero, não faz sentido falar-se da sua direcção; além disso, este é o único caso em que um vector não possui direcção. (N. do T.).

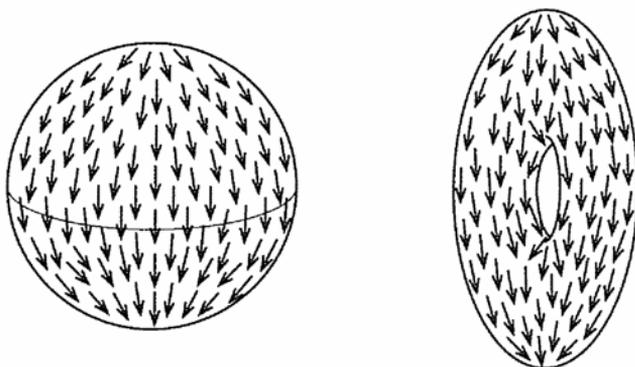


Figura 19.3. Campos gradientes numa esfera e num *toro*

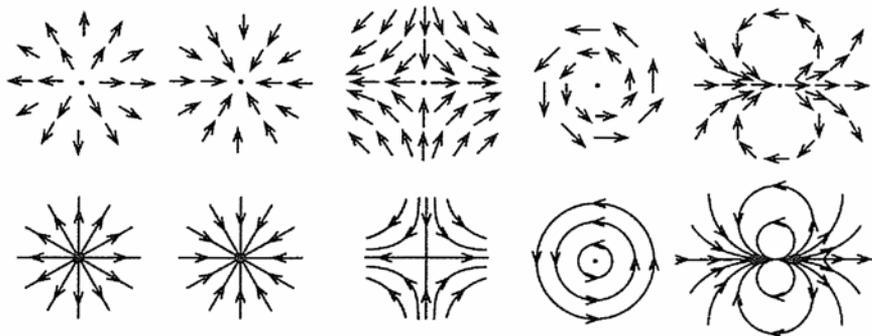


Figura 19.4. Campos de vectores próximos de um zero, e os seus fluxos correspondentes

Uma das maneiras mais fáceis de obter um campo vectorial sobre uma superfície é colocá-la no espaço tridimensional e pôr os vectores «a apontar para baixo» para que, quanto mais íngreme for a inclinação, maior será o vector. Este campo vectorial é chamado um *campo gradiente*. Na figura 19.3, mostramos o campo de vectores gradiente numa esfera e num *toro*. Uma maneira de pensar sobre o fluxo associado ao campo vectorial é imaginar a superfície coberta de melaço. As linhas de fluxo são simplesmente o trajecto do melaço viscoso ao escorrer para baixo ao longo da superfície.

Como podemos ver na figura 19.3, os campos gradiente sobre a esfera e sobre o *toro* têm zeros — a esfera tem dois (um no pólo norte e outro no pólo sul) e o *toro* tem quatro (na parte superior e inferior do *toro* e na parte superior e na parte inferior do túnel). Será que todos os campos vectoriais

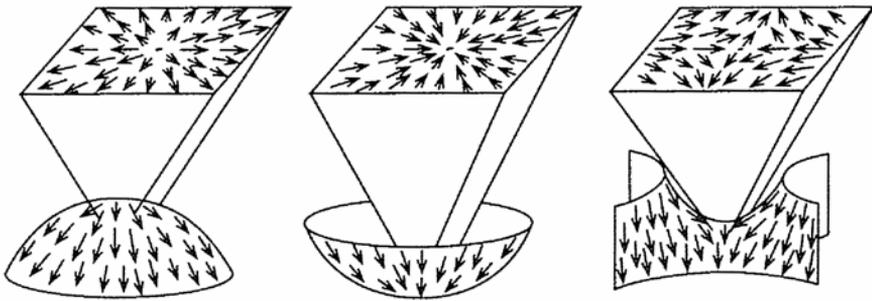


Figura 19.5. Uma fonte, um poço e uma sela de um campo gradiente

na esfera têm pelo menos um zero? Será que todos os campos vectoriais no *toro* têm um zero? Se conseguirmos responder a esta pergunta com um «sim» para alguma superfície  $S$ , então temos um resultado poderoso. Um resultado destes dirá que, sempre que o espaço de fase de um sistema seja  $S$ , então terá pelo menos um ponto de equilíbrio.

Como resposta parcial a estas perguntas, temos o belo teorema de Poincaré-Hopf. Ele estabelece uma relação surpreendente entre os zeros de um campo vectorial e o número de Euler. Para entender o teorema devemos olhar um pouco mais para os zeros de campos vectoriais.

Nem todos os zeros são análogos. Na figura 19.4, vemos cinco tipos de zeros de campos vectoriais diferentes, e os pontos fixos do fluxo correspondente. Os comportamentos na vizinhança dos zeros são, nos cinco casos, muito diferentes. Uma *fonte* repele todos os pontos próximos, um *poço* atrai-os, um *ponto de sela* faz as duas coisas (em direcções diferentes); temos também um *vórtice* em torno do qual os pontos vizinhos rodopiam, e finalmente um *dipolo* cujos pontos próximos primeiro se afastam para depois voltar novamente (lembrando as linhas do campo magnético de um íman).

As fontes, os poços e os pontos de sela são muito frequentes como zeros de fluxos de campos gradientes. Na figura 19.5, vemos uma fonte aparecer no topo de uma tigela virada para baixo, um poço surgir no fundo de uma tigela virada para cima, e um ponto de sela no centro de uma superfície em forma de sela de cavalo. Note-se que, na figura 19.3, o fluxo gradiente na esfera tem uma fonte e um poço, e o fluxo de gradiente do *toro* tem uma fonte, um poço e dois pontos de sela.

A nossa intuição diz-nos que poços, pontos de sela, e fontes são de alguma forma distintos, e que deve haver uma regra que governa as quantidades totais de cada tipo de zeros. Pelo exemplo do fluxo gradiente, vemos que uma esfera pode ter um campo vectorial com dois zeros, mas

é difícil imaginar um campo vectorial sobre a esfera que tenha apenas um poço e um ponto de sela. A ideia fundamental para distinguir os diferentes tipos de zeros é a noção de índice.

Calculamos o índice de um zero da seguinte forma. Desenhemos uma pequena curva simples e fechada à volta desse zero. As únicas condições que esta curva fechada devem satisfazer são: (1) ela deve conter apenas esse zero, e (2) deve ser a fronteira de um disco (por exemplo, se estivermos num *toro*, uma tal curva não pode dar a volta ao túnel central). Agora, coloquemos um mostrador imaginário com um único ponteiro num certo ponto dessa curva. O ponteiro do mostrador deve apontar na mesma direcção que o campo vectorial, em todos os pontos. (Se o campo vectorial representasse um campo magnético, então poderíamos usar uma bússola como ponteiro.) À medida que avançamos ao longo desta curva, o ponteiro deste mostrador vai mudando de direcção. Deslocamos o mostrador ao redor da curva uma volta no sentido oposto ao dos ponteiros dos relógios<sup>1</sup>. Começando no número zero, de cada vez que o ponteiro dá uma volta no sentido directo, adicionamos uma unidade ao índice, e de cada vez que dá uma volta no sentido indirecto, subtraímos um ao índice. O índice é muitas vezes também chamado o «número de voltas» do campo vectorial em torno desse zero.

Considere o poço da figura 19.6. Vemos o mostrador em oito posições ao redor de uma circunferência que encerra o zero. À medida que o mostrador percorre a circunferência uma volta no sentido directo, o ponteiro do mostrador dá, também ele, uma volta no sentido directo. Assim, o índice de um poço é 1. Para o ponto de sela, o ponteiro dá uma volta no sentido indirecto (o sentido horário), à medida que o mostrador dá uma volta ao ponto de sela no sentido directo. Assim, o índice de um ponto de sela é -1. De um modo análogo, podemos calcular os índices dos outros zeros na figura 19.4. As fontes e os vórtices têm índice 1, ao passo que os dipólos têm índice 2.

Vamos agora indicar uma segunda forma de calcular o índice de um zero de um campo vectorial. Esta abordagem ser-nos-á útil mais tarde. Suponha-se que colocamos o zero no interior de uma face poligonal (cujas lados podem ser curvos). Somos livres de escolher qualquer polígono, desde que sejam satisfeitos alguns critérios. Como antes, devemos escolher este polígono para que o nosso zero seja o único zero do campo vectorial no interior do polígono. Além disso, insistimos em que todos os vectores que se encontram num dos lados do polígono apontem ou para

---

<sup>1</sup> Convenciona-se chamar ao movimento de rotação no sentido oposto ao do sentido dos ponteiros dos relógios, o *sentido directo*, e ao sentido dos ponteiros do relógio, o *sentido indirecto*. (N. do T.)

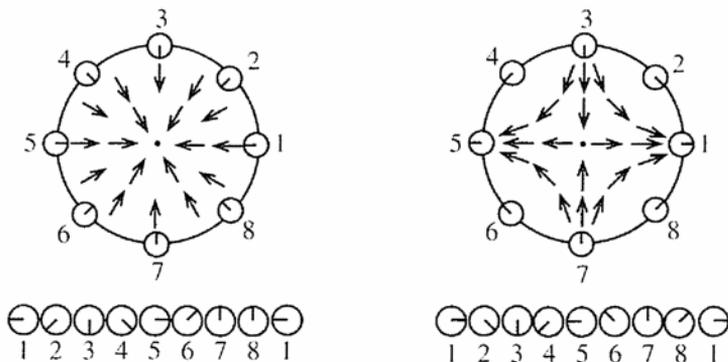


Figura 19.6. Um poço tem índice 1, e uma sela tem índice de  $-1$

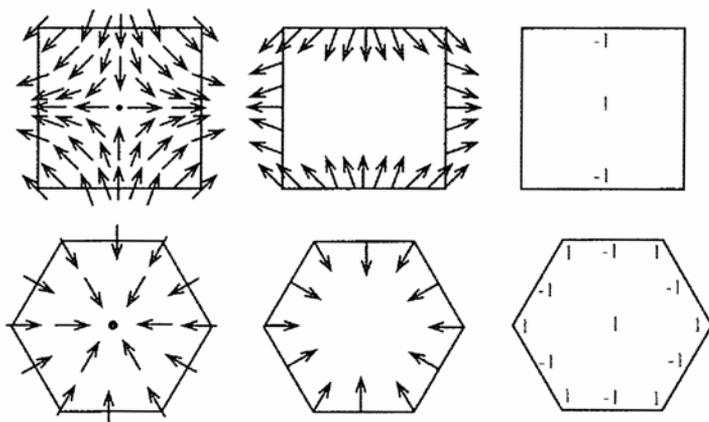


Figura 19.7. O índice de uma sela é  $2(-1) + 1 = -1$   
e o índice de um poço é  $6(-1) + 7(1) = 1$

dentro ou para fora. Não permitimos polígonos em que alguns vectores apontem numa direcção tangente ao seu bordo (tais polígonos existem sempre, embora isto não seja evidente). Na figura 19.7, vemos um ponto de sela colocado dentro de um quadrado, e um poço no interior de um hexágono, de tal maneira que todos os vectores ou estão direccionados para dentro ou para fora dos respectivos polígonos.

Vamos agora rotular as arestas e os vértices onde o campo vectorial aponta para dentro. Ao longo de cada tal aresta escrevemos  $-1$ , e em cada um desses vértices colocamos um  $1$ . Finalmente, colocamos o número  $1$  no interior do polígono. Acontece que a soma de todos estes números é o índice do zero. Vemos que isso é verdade para o ponto de sela e para o poço da figura 19.7.

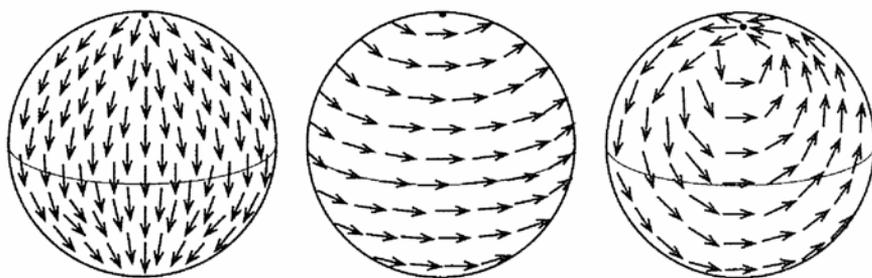


Figura 19.8. Três campos vectoriais na esfera

Estamos finalmente em condições de enunciar o teorema de Poincaré-Hopf. Este dá-nos uma forma topológica de determinar se um campo de vectores admite um zero (ou equivalentemente, se o respectivo fluxo tem um ponto fixo). Também nos dá informação sobre os números relativos de cada tipo de zeros numa superfície particular.

TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF

Para qualquer campo vectorial numa superfície fechada  $S$ , com apenas um número finito de zeros, a soma dos índices de todos os zeros é igual ao número de Euler da superfície,  $\chi(S)$ .

Antes de provar este teorema, vamos abordar alguns exemplos. Na figura 19.8, vemos três campos vectoriais diferentes na esfera e os respectivos zeros. O primeiro, um campo vectorial gradiente, tem um poço e uma fonte (cada um dos quais com índice 1), o segundo tem dois vórtices (cada um com índice 1), e o terceiro tem apenas um dipolo (cujo índice é 2). Em todos os três casos, a soma dos índices de todos os zeros é igual a 2, o número de Euler da esfera.

Anteriormente, considerámos um campo gradiente no *toro* (figura 19.3) com quatro zeros — uma fonte, dois pontos de sela, e um poço. A soma dos respectivos índices é  $1 + 2(-1) + 1 = 0$ , o número de Euler do *toro*.

Como bónus adicional, os campos vectoriais gradiente permitem-nos calcular o número de Euler de superfícies sem ter que desenhar vértices, arestas ou faces. Na figura 19.9 vemos uma esfera dobrada de modo a ficar em forma de  $U$ . O respectivo campo gradiente tem duas fontes, um ponto de sela, e um poço, assim a soma dos índices é  $2(1) + 1(-1) + 1(1) = 2$ . Na mesma figura, o duplo *toro* tem uma fonte, quatro pontos de sela, e um poço, pelo que  $\chi(\text{duplo toro}) = 1 + 4(-1) + 1 = -2$ .

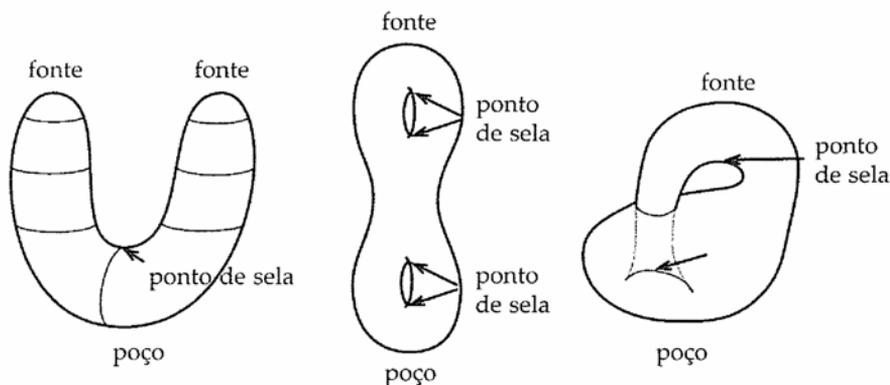


Figura 19.9. Os números de Euler de uma esfera, de um duplo *toro*, e de uma garrafa de Klein são 2, -2, e 0, respectivamente

A garrafa de Klein tem uma fonte, dois pontos de sela, e um poço, donde  $\chi(\text{garrafa de Klein}) = 1 + 2(-1) + 1 = 0$ . Resumimos essa situação da seguinte forma:

Se os zeros de um campo vectorial numa superfície  $S$  são constituídos por um número finito de fontes, poços e pontos de sela, então,

$$\chi(S) = (\#\text{fontes}) - (\#\text{pontos de sela}) + (\#\text{poços}).$$

O teorema de Poincaré-Hopf afirma que, se um campo de vectores sobre uma superfície tem um número finito de zeros, então a soma dos índices dos zeros é igual ao número de Euler da superfície. Daqui se conclui que, se um campo de vectores não tem nenhum zero, então o número de Euler da superfície deve ser zero. Assim, qualquer campo de vectores sobre uma superfície, cujo número de Euler é diferente de zero, deve ter pelo menos um zero! O número de Euler da esfera é 2; assim, qualquer campo vectorial numa esfera deve ter um zero. Este famoso teorema, demonstrado pela primeira vez por L. E. J. «Bertus» Brouwer (1881-1966) em 1911<sup>2</sup>, foi apelidado com a expressão, fácil de memorizar, «teorema da bola cabeluda». Se imaginarmos uma esfera com um campo vectorial, como uma bola com cabelo (por exemplo, uma bola de ténis ou um porco-espinho); então o teorema diz que é impossível penteá-la sem um ponto onde fica eriçado — um penacho. Também se exprime por vezes dizendo que «não se pode pentear o pêlo de um coco.»



Figura 19.10. Um campo vectorial representando o vento à superfície da Terra

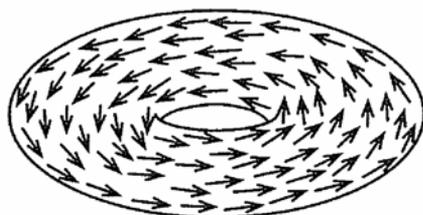


Figura 19.11. Um campo vectorial sem zeros no *toro*

#### TEOREMA DA BOLA CABELUDA

Qualquer campo vectorial numa esfera tem pelo menos um zero.

Dado este teorema, podemos concluir o que mencionámos na introdução: há sempre um ponto da Terra onde não há vento. Se visualizarmos a Terra como uma esfera, então os ventos à sua superfície formam um campo vectorial. Pelo teorema da bola cabeluda, há um ponto na Terra onde esse campo vectorial é zero. O exemplo mostrado na figura 19.10 tem um ponto sem vento, no centro de um ciclone ao largo da costa na América do Sul. (Na verdade, dado que este zero tem índice 1, deve haver pelo menos um outro ponto sem vento, que estará, portanto, no outro lado da Terra!)

Como o número de Euler do *toro* é zero, o teorema de Poincaré-Hopf não garante que todos os campos vectoriais num *toro* admitam um zero. De facto, na figura 19.11 vemos um exemplo de um campo vectorial que nunca se anula num *toro*.

O teorema da bola cabeluda é um exemplo de um «teorema de existência». Este tipo de teoremas estão omnipresentes na matemática teórica. Eles são resultados simultaneamente muito fortes e frustrantemente imprecisos. Por um lado, apenas a partir de um simples conjunto de hipóteses (um campo vectorial numa esfera), podemos fazer a afirmação confiante da existência de algum objecto (um vector nulo). No entanto, acontece frequentemente que nem o enunciado nem a demonstração rigorosa de um teorema de existência fornecem um método para encontrar este objecto cuja existência garantimos. Por exemplo, sabemos que há outro local sem vento, do outro lado do globo na figura 19.10, mas pode ser em qualquer parte e, além disso, pode haver um ou pode haver muitos. É como procurar o urso de peluche extraviado para uma criança à hora de dormir: sabemos que está em casa, mas pode estar em qualquer lugar — debaixo da cama, dentro do armário, ou no forno de micro-ondas. Embora precisemos de empregar técnicas adicionais para encontrar estes objectos, às vezes dá-se o caso afortunado de a existência do objecto ser suficiente para o objectivo pretendido.

O teorema de Poincaré-Hopf é referido com o nome dos dois matemáticos que mais contribuíram para o seu desenvolvimento, embora vários outros tenham também feito contribuições importantes.

Henri Poincaré nasceu em Nancy, França, em 1854, numa família de classe média-alta muito respeitada (o seu primo Raymond Poincaré tornar-se-ia, mais tarde, presidente da República Francesa).

O talento matemático de Henri cedo se tornou claro, tendo sido chamado «monstro da matemática» por um dos seus professores<sup>3</sup>. Começou a fazer importantes contribuições para a matemática logo na casa dos vinte anos, e foi eleito para a Académie des Sciences com a idade de trinta e três anos. Poincaré era o estereótipo do génio matemático: era desajeitado, tinha visão diminuída, era distraído. Possuía uma inteligência fora de série e tinha a capacidade de reter na cabeça e de manipular vários conceitos abstractos.

Poincaré é geralmente reconhecido como o matemático mais proeminente da sua época. Ele foi o último grande universalista. Como Euler e Gauss, Poincaré foi um especialista em quase todas as áreas da matemática, tanto pura como aplicada. Era um leitor voraz, sempre familiarizado com os mais recentes resultados. Tal como Euler (mas ao contrário de Gauss), Poincaré deixou uma grande obra. Escreveu quase quinhentos artigos, bem como muitos livros e colecções de sebatas e notas para as suas lições. Fez contribuições importantes e duradouras em campos tão diversos como a teoria das funções, geometria algébrica, teoria dos números, equações diferenciais ordinárias e parciais, mecânica

celeste, sistemas dinâmicos, e, claro, topologia. Também publicou muitos artigos em física teórica. Poincaré tinha uma curiosidade inquieta que o mantinha mudando de tópico em tópico. Ele abordava uma nova área da matemática, deixava nela marcas indeléveis, e de seguida, passava para a próxima. Um contemporâneo chamava-o «um conquistador, e não um colonizador».

De forma notável, não apenas era capaz de produzir matemática ao mais alto nível, como também teve sucesso comunicando a um nível acessível a não especialistas. Escreveu numerosas publicações lúcidas e fascinantes sobre a ciência e a matemática para um público leigo. Os seus escritos foram lidos e traduzidos em várias línguas.

A investigação de Poincaré abarcava toda a matemática, mas, ao longo da sua carreira, foi regressando recorrentemente ao estudo das equações diferenciais. Os seus sucessos nesta área foram profundos. De acordo com o matemático Jean Dieudonné (1906-1992) «A produção mais extraordinária de Poincaré ... é a teoria qualitativa das equações diferenciais. É um dos poucos exemplos de uma teoria matemática que surgiu aparentemente do nada e que quase imediatamente atingiu a perfeição pelas mãos do seu criador.<sup>4</sup>» O principal exemplo deste sucesso foi a descoberta da fórmula do índice.

A sua primeira contribuição para a fórmula data de 1881. Neste trabalho, Poincaré considerou uma equação diferencial e o correspondente campo vectorial na esfera. Definiu o índice de um zero e provou que a soma dos índices de todos os zeros era igual a 2.<sup>5</sup> Claro, já sabemos que não é por acaso que a soma é 2, pois é o número de Euler da esfera. Poincaré fez esta mesma observação em 1885, quando mostrou que a soma dos índices de um campo vectorial sobre uma superfície é o número de Euler dessa mesma superfície<sup>6</sup>. No ano seguinte, definido um índice para os zeros de um campo vectorial num espaço de  $n$  dimensões, ele indicou as ideias principais de um análogo teorema do índice para espaços  $n$ -dimensionais. A dificuldade em prosseguir com rigor este programa era devida à inexistência das técnicas topológicas na altura (e que seriam, como veremos no capítulo 23, mais tarde desenvolvidas por Poincaré).

Em 1911, Brouwer conseguiu generalizar correctamente o teorema do índice de Poincaré para uma esfera de  $n$  dimensões,  $S^n$ . Estamos familiarizados com  $S^1$ , a circunferência unitária no plano ( $x^2 + y^2 = 1$ ), e  $S^2$ , a esfera unitária no espaço de 3 dimensões ( $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ). De modo geral,  $S^n$  é o conjunto de pontos, num espaço euclidiano de  $n + 1$  dimensões, que distam uma unidade da origem (ou seja,  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1$ ). Brouwer demonstrou que, para qualquer campo vectorial em  $S^n$ , a soma dos índices dos zeros é 0, se  $n$  for ímpar, e 2, se  $n$  for par<sup>7</sup>.

Nos capítulos 22 e 23, vamos discutir o número de Euler em espaços de dimensões superiores. Quando o fizermos, vamos descobrir que  $\chi(S^n) = 0$  quando  $n$  é ímpar, e  $\chi(S^n) = 2$  quando  $n$  é par.

O próximo actor importante foi Heinz Hopf (1894-1971). Hopf nasceu em Breslau, Alemanha (hoje Wroclaw, Polónia). O seu trabalho em topologia teve um profundo impacto sobre a matemática do século xx. Um estudante de Hopf escreveu: «Hopf selecciona questões de grande profundidade com um instinto infalível, e deixa-as amadurecer. De seguida, apresenta de uma só vez uma solução que apresenta novas ideias e métodos<sup>8</sup>.»

Nas suas memórias, Hopf indica um momento crucial da sua carreira matemática como um período de duas semanas, em 1917, quando estava de licença do seu serviço militar durante a Primeira Guerra Mundial. Então, assistiu às aulas de matemática na Universidade de Breslau, onde foi apresentado um teorema topológico de Brouwer. Depois de servir na Frente Ocidental, ter sido ferido duas vezes, e de receber a Cruz de Ferro, retomou os seus estudos de matemática na Universidade de Breslau. A sua carreira matemática levou-o a várias universidades alemãs, à Universidade de Princeton, e finalmente para a *Eidgenössische Technische Hochschule* (ETH) em Zurique, na Suíça.

Dois anos após a sua chegada à Suíça, o partido nazi chegou ao poder na Alemanha. Embora ele tenha sido criado protestante, o seu pai era judeu. Solomon Lefschetz, e outros em Princeton, imediatamente pediram a Hopf para voltar aos EUA, mas ele e a sua esposa recusaram-se a deixar a Suíça e nesse tempo trabalhou para ajudar refugiados vindos da Alemanha. Mais tarde, o governo alemão ameaçou revogar a sua cidadania, se ele não regressasse. Relutantemente, Hopf renunciou à sua cidadania alemã e tornou-se suíço. Depois da guerra, Hopf permaneceu na Suíça, e trabalhou diligentemente para restabelecer a matemática na Alemanha.

Das muitas contribuições importantes de Hopf para a topologia, algumas das primeiras foram relativas à topologia dos campos vectoriais. Começando em 1925, publicou uma série de artigos generalizando o teorema do índice de Poincaré<sup>9</sup>. Nós enunciámos o teorema de Poincaré-Hopf para superfícies, mas Hopf mostrou que a fórmula análoga se aplica às generalizações das superfícies a dimensões superiores, aquilo a que se chama variedades (sobre as quais teremos algo mais a dizer no capítulo 22).

Embora o teorema de Poincaré-Hopf seja geralmente enunciado para superfícies fechadas, os matemáticos descobriram várias generalizações do teorema. Há uma versão extremamente geral para superfícies com bordo<sup>10</sup>, mas vamos enunciar apenas a seguinte versão mais simples.

#### TEOREMA DE POINCARÉ-HOPF PARA SUPERFÍCIES COM BORDO

Consideremos uma superfície com bordo  $S$ , e um campo vectorial em  $S$  com um número finito de zeros. Se o campo vectorial aponta para o interior em todas as componentes do bordo (ou para fora em todas as componentes do bordo), então a soma dos índices de todos os zeros é o número de Euler de superfície,  $\chi(S)$ .

O teorema da bola cabeluda não se aplica propriamente ao cabelo humano, uma vez que a região coberta por cabelos nas nossas cabeças não é topologicamente uma esfera — é um disco. Por isso, os estilos «penteado para trás» e «rabo-de-cavalo» não apresentam penacho. No entanto, com um «corte rente» podemos ver que as raízes do cabelo de uma pessoa frequentemente se inclinam cada vez mais a partir de um ponto no meio da cabeça — inclinam-se para baixo na parte de trás, em direcção às orelhas nos lados, e ao rosto na parte da frente. Como este disco cabeludo corresponde a um campo vectorial que aponta para fora ao longo de todo o seu bordo, a soma dos índices dos zeros deve ser igual a  $\chi(\text{disco}) = 1$ . Portanto, deve existir um penacho. A filha do autor (cujo cabelo é ainda um pêlo fininho) tem o indício de três penachos, duas espirais exteriores (cada uma com índice 1) e um ponto de sela entre eles (de índice  $-1$ ).

Vamos agora esboçar uma demonstração do teorema de Poincaré-Hopf para superfícies sem bordo (não é difícil modificar esta prova para lidar com as superfícies com bordo). A prova é baseada na fornecida por William Thurston (1946-2012)<sup>11</sup>.

Começamos com uma decomposição cuidadosamente escolhida da nossa superfície. Primeiro, colocamos cada zero do campo vectorial dentro de uma única face poligonal. Estas faces podem ter qualquer forma e qualquer número de lados, desde que nenhum vector que se encontra numa aresta seja paralelo (tangente) ao bordo. Isto é, todos os vectores na fronteira da face devem apontar ou para dentro ou para fora.

Temos então faces que encerram todos os zeros do campo vectorial. Completamos a decomposição por triangulação da restante superfície. Podemos fazer isto de qualquer forma que queiramos, mas, tal como anteriormente, insistimos para que todos os vectores sobre a fronteira dos triângulos apontem ou para dentro ou para fora, e nunca ao longo do bordo (ver a figura 19.12).

Agora, coloquemos um 1 em cada vértice, um  $-1$  em cada aresta, e um 1 no centro de cada face. Assim, quando adicionarmos estas quantidades

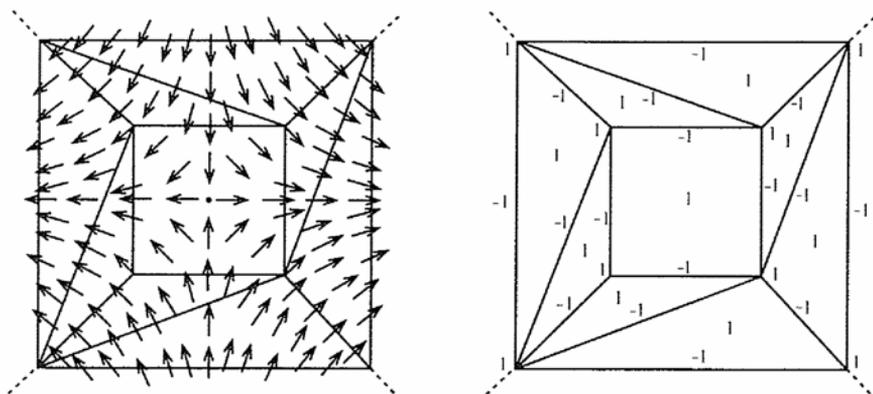


Figura 19.12. Uma decomposição de uma superfície onde, no máximo, um zero se encontra em cada face, com os vértices, arestas, e faces marcados de forma adequada

por toda a superfície, vamos obter  $V - A + F$ , ou, por outras palavras, a característica de Euler  $\chi(S)$ . Mais concretamente, como cada aresta delimita duas faces e os pontos do campo vectorial apontam para uma destas duas faces, vamos colocar o número  $-1$  ao longo da aresta, mas do lado da face para a qual os vectores apontam. Da mesma forma, todos os vértices estão localizados na intersecção de várias faces, mas há uma única face para o interior da qual esse vector aponta. Coloquemos o número  $1$  nesta face (ver figura 19.12).

Primeiro examinamos as faces triangulares que não contêm zeros do campo vectorial. Como podemos ver na figura 19.13, existem apenas duas situações possíveis. Uma delas é que os vectores apontem para dentro do triângulo ao longo de apenas um dos seus lados, com os vectores nos vértices a apontar para outras faces. A outra é a de que os vectores apontem para dentro do triângulo ao longo de dois dos lados, bem como no vértice entre esses 2 lados. Em ambos os casos, a soma dos valores  $1$  e  $-1$ , incluindo o  $1$  do meio da face, é zero. Assim, vemos que estas faces triangulares não contribuem para o número de Euler.

Por outro lado, recordemos que para as faces que contêm um zero, esta técnica de contagem pode ser usada para calcular o índice. Assim, todas as faces que contêm um zero contribuem para a soma um valor igual ao índice desse zero. Assim, como afirmado pelo teorema de Poincaré-Hopf, a soma de todos os valores  $1$  e  $-1$  é igual tanto ao número de Euler como à soma dos índices de todos os zeros.

Tal como enunciado, o teorema de Poincaré-Hopf é um teorema sobre campos vectoriais, mas dado que os campos vectoriais podem ser utiliza-

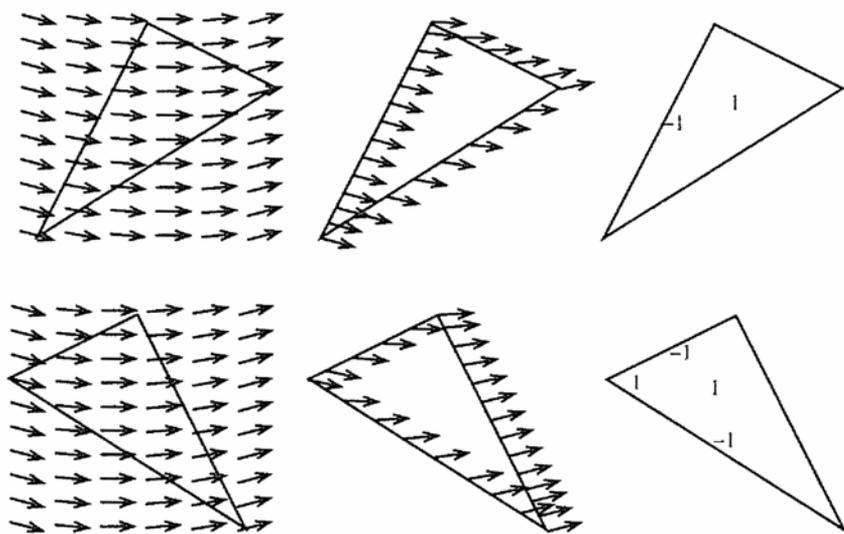


Figura 19.13. Os triângulos que não contêm zeros, em nada contribuem para o número de Euler



Figura 19.14. O ponto  $y$  é um ponto fixo de  $f$ , mas  $x$  não é fixo por  $f$

dos para definir os fluxos, este resultado pode também ser interpretado como um teorema de pontos fixos para sistemas dinâmicos contínuos. Concluimos este capítulo mencionando um outro famoso teorema de pontos fixos.

Um fluxo numa superfície é um modo matemático de descrever o movimento contínuo de partículas. Vamos agora olhar para uma situação relacionada, mas algo diferente. Suponhamos que em vez de fluir, cada ponto da superfície  $S$  salta para um novo local. Matematicamente, podemos descrever este movimento usando uma função contínua  $f$  com domínio  $S$  e contradomínio  $S$  (com a palavra contínua, queremos dizer simplesmente que dois pontos próximos saltam para outros dois pontos próximos). Se  $x$  é o ponto inicial, então o ponto para onde ele salta denota-se por  $f(x)$ . Tal como para os fluxos, estamos particularmente interessados nos pontos que não se movem. Um ponto  $y$  em  $S$  é chamado um *ponto fixo* para  $f$  se  $f(y) = y$  (ver a figura 19.14).

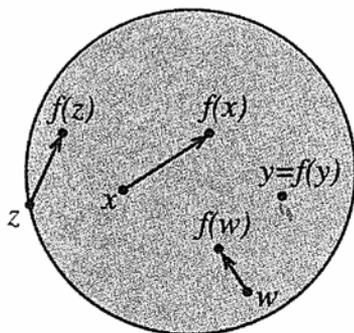


Figura 19.15. O campo vectorial associado a uma função de  $B^2$  para si próprio

Provavelmente o teorema de pontos fixos mais famoso é o *teorema do ponto fixo de Brouwer*. Este resultado aplica-se a funções contínuas da bola  $n$ -dimensional para si própria.

A bola  $n$ -dimensional, denotada por  $B^n$ , é o conjunto de todos os pontos no espaço euclidiano de  $n$  dimensões que se encontram a distância menor ou igual a uma unidade da origem. Ou seja, é o conjunto de pontos que satisfazem  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 \leq 1$ , ou, de forma equivalente,  $B^n$  é o conjunto de pontos contidos no espaço interior à esfera de dimensão  $n - 1$ ,  $S^{n-1}$ . Brouwer mostrou o resultado para  $B^3$  em 1909<sup>12</sup> e para  $B^n$  ( $n > 3$ ), em 1912<sup>13</sup>.

TEOREMA DO PONTO FIXO DE BROUWER

Qualquer função contínua de  $B^n$  para si própria tem pelo menos um ponto fixo.

Temos a seguinte forma de pensar sobre este teorema notável. Consideremos o caso  $n = 2$ .  $B^2$  é um disco plano, na região delimitada por  $S^1$ , a circunferência unitária. Imagine que é um prato de jantar. Cobrimos o prato com uma folha de papel que é pelo menos tão grande como o prato, e depois cortamos a parte do papel que fica de fora do bordo do prato. Agora, pegamos no papel, amachucamo-lo para formar uma bola (apenas com o cuidado de não o rasgar), e colocamo-lo de novo no prato. O teorema do ponto fixo de Brouwer diz que existe um ponto no papel que se situa exactamente por cima do mesmo ponto onde estava inicialmente. Este mesmo raciocínio explica como um *designer* de um centro comercial de um andar pode colocar um mapa em qualquer ponto do edifício, e ser capaz de colocar uma estrela no mapa que indica «você está aqui».

A demonstração deste teorema decorre facilmente a partir do teorema de Poincaré-Hopf (a versão para superfícies com bordo). Consideremos o caso em que  $n = 2$ , embora o argumento para  $n$  superior seja idêntico. Começemos com uma função  $f$  de  $B^2$  para si próprio. Definimos então um campo vectorial em  $B^2$  da seguinte forma: a cada ponto  $x$  em  $B^2$  atribuímos o vector que tem o seu início em  $x$  e o seu fim em  $f(x)$  (ver figura 19.17).  $B^2$  é uma superfície com bordo e, desta forma, todos os vectores neste bordo apontam para dentro, pelo que podemos aplicar o teorema de Poincaré-Hopf. Como  $\chi(B^2) = 1 \neq 0$ , o campo de vectores deve ter pelo menos um zero. Neste caso, um vector zero corresponde a um ponto  $y$  para o qual  $f(y) = y$ . Por outras palavras,  $f$  deve ter pelo menos um ponto fixo.

Na verdade, o teorema do ponto fixo de Brouwer aplica-se igualmente a qualquer forma que seja homeomorfa a  $B^n$ . O café numa chávena de café forma um conjunto homeomorfo a  $B^3$ . Se agitarmos o café vigorosamente na chávena (sem o derramar!), então, de acordo com o teorema do ponto fixo de Brouwer, após voltar ao repouso, existe pelo menos uma molécula de café precisamente no mesmo local onde estava inicialmente.

Neste capítulo, observámos que a topologia de um objecto, medida apenas pelo seu número de Euler, pode forçar um comportamento global que não parecia ter qualquer relação com a topologia global — a existência de pontos fixos de fluxos ou de funções. Como veremos nos próximos dois capítulos, a topologia de um objecto pode também determinar algumas das suas propriedades geométricas globais.

---

\* De forma algébrica, o vector que colocamos em cada ponto é precisamente  $f(x) - x$ , pelo que o vector é nulo quando  $f(x) = x$ . (N. do T.)

## Capítulo 20

# Quando a Topologia Condiciona a Geometria

*E agora resta-nos,  
Descobrir a causa deste efeito,  
Ou melhor dizendo, a causa deste defeito,  
Pois este efeito defeituoso vem pela causa.  
E assim, continua a ser, portanto, o restante.*  
— William Shakespeare, *Hamlet*<sup>1</sup>

Ao longo da maior parte deste livro, fomos nos afastando das restrições rígidas da geometria trabalhando, pelo contrário, no ambiente mais flexível da topologia. Neste capítulo e no seguinte, vamos regressar à geometria. Examinaremos polígonos, poliedros, curvas e superfícies, feitas desta vez, não de borracha, mas do aço mais rijo. No entanto, estes objectos geométricos podem também ser vistos com um olhar topológico — polígonos e curvas são homeomorfos a uma circunferência, e os poliedros e as superfícies são homeomorfos a esferas ou a *toro* de  $g$  túneis.

Vamos apresentar um conjunto de resultados que mostram a surpreendente relação entre a topologia destas formas e a sua geometria. Veremos como o número de Euler consegue prever certas propriedades geométricas. O nosso objectivo final é apresentar três teoremas. Neste capítulo vamos abordar a fórmula de Descartes para poliedros e o teorema dos ângulos excedentes para superfícies, e no próximo capítulo vamos investigar o

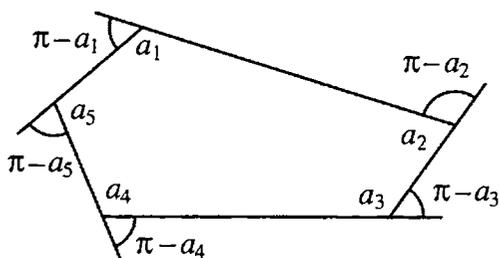


Figura 20.1. Os ângulos externos de um polígono

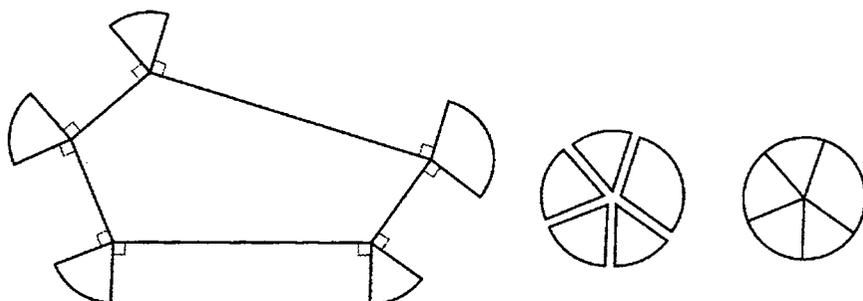


Figura 20.2. Os ângulos externos de um polígono somam  $2\pi$

teorema de Gauss-Bonnet para superfícies. Estes mostram que certas propriedades geométricas globais (relacionadas com ângulos e com curvatura) são completamente determinadas pela topologia (dada pelo número de Euler). Desta forma, vemos como a topologia pode controlar a geometria.

Antes de olhar para estes teoremas sobre poliedros e superfícies, vamos investigar os resultados análogos na dimensão 1. Os análogos unidimensionais dos poliedros e das superfícies são os polígonos e as curvas fechadas simples, respectivamente. O próximo teorema pode encontrar-se em cursos de geometria elementar (ver figura 20.1).

TEOREMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS  
A soma dos ângulos externos de um polígono é  $2\pi$ .

George Pólya (1887-1985) encontrou a seguinte curta e elegante demonstração do teorema dos ângulos externos para polígonos convexos<sup>2</sup>. Em cada vértice, desenhemos dois segmentos de recta apontando para fora, cada

um deles perpendicular a um dos dois lados que se unem nesse vértice (ver figura 20.2). Desenhemos um sector de um círculo em cada um dos vértices, tendo esses segmentos como lados. Observemos que o ângulo formado por esses dois segmentos é precisamente o ângulo exterior\*. Isto é verdade, porque a soma dos dois ângulos rectos é  $\pi$ , de modo que a soma do ângulo interno com o ângulo do sector desenhado é também igual a  $\pi$ . Como os lados de cada par destes sectores consecutivos são paralelos, podemos juntar todos os sectores de modo a formar um círculo completo. Assim, a soma dos ângulos externos é  $2\pi$ . Omitimos a prova para polígonos não convexos, mas esta é consequência da observação de que qualquer polígono não convexo pode ser decomposto em polígonos convexos.

Em certo sentido, o teorema dos ângulos externos não é surpreendente. Um carro conduzido ao longo de uma estrada poligonal teria que virar em cada canto dessa estrada, e o ângulo de cada viragem é o ângulo externo. De modo a voltar à posição de partida, o carro teria que virar um ângulo total de  $360^\circ$ .

Embora um adulto típico possa ter dificuldade para se lembrar da fórmula resolvente do segundo grau, ou do teorema de Pitágoras, há um resultado matemático que quase todos os adultos podem lembrar-se de cor: a soma dos ângulos internos de um triângulo é  $180^\circ$  (ou como dizemos,  $\pi$  radianos). Este teorema é uma simples consequência do teorema dos ângulos externos. Se  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os ângulos internos de um triângulo, então,  $\pi - a$ ,  $\pi - b$  e  $\pi - c$  são os ângulos externos. Pelo teorema dos ângulos externos  $(\pi - a) + (\pi - b) + (\pi - c) = 2\pi$ . Basta reorganizar termos para obter  $a + b + c = \pi$ .

Para polígonos que não sejam triângulos, os ângulos internos somam a mais de  $180^\circ$ , mas é ainda verdade que essa soma depende apenas do número de lados. Se  $a_1, \dots, a_n$  são os ângulos internos de um polígono, então, pelo teorema dos ângulos externos

$$2\pi = (\pi - a_1) + \dots + (\pi - a_n).$$

Rearranjando os termos obtemos o útil teorema que se segue.

#### TEOREMA DOS ÂNGULOS INTERNOS

A soma dos ângulos internos de um polígono com  $n$  lados é  $(n - 2)\pi$ .

---

\* Em cada vértice, a soma do ângulo exterior com o ângulo interior é  $180^\circ$ , ou  $\pi$  radianos, como indicado na figura 20.1. (N. do T.)

Para facilitar a transição para a fórmula de Descartes para poliedros, será útil olharmos para os ângulos externos de um polígono de uma forma ligeiramente diferente. Pensemos nos vértices de um polígono como sendo linhas rectas «imperfeitas». Olhando para cada vértice, podemos perguntar quão longe está a linha, nesse ponto, de ser uma recta. Se o ângulo interior do polígono é  $a$ , então a linha difere de uma linha recta pelo ângulo exterior  $\pi - a$ . Segundo este ponto de vista, vamos chamar ao ângulo exterior  $\pi - a$ , a *curvatura angular* desse vértice. Assim, podemos reformular o teorema dos ângulos externos como se segue.

TEOREMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS (REFORMULADO)  
A curvatura angular total de qualquer polígono é  $2\pi$ .

Há um análogo suave do teorema dos ângulos externos. Consideremos, novamente, a analogia do carro. Uma pista de automóveis de corrida é uma estrada sinuosa, cheia de curvas, que forma um circuito, voltando ao seu ponto de partida. À medida que um carro de Fórmula 1 percorre a pista, desvia-se para a direita e para a esquerda várias vezes, mas no momento em que regressa à linha de partida, deu uma volta completa num dos sentidos (por exemplo, o anti-horário). Por outras palavras, uma vez que as voltas completas para a esquerda e para a direita se cancelam, o carro faz sempre uma volta total de  $360^\circ$  no sentido directo.

Mais precisamente, consideremos uma curva fechada simples e suave no plano (a pista de corrida; veja-se a figura 20.3). Escolhamos um sentido de percurso na curva (por exemplo, o anti-horário), e coloquemos vectores tangentes à curva que em cada ponto têm o sentido escolhido (o sentido para onde apontam os faróis do automóvel). Estamos interessados no comportamento destes vectores tangentes à medida que percorremos a curva uma vez. Se a curva for uma circunferência, então, à medida que avançamos à sua volta no sentido anti-horário, os vectores também vão girando no mesmo sentido — e, no final, giraram um ângulo total de  $2\pi$ . Como anteriormente, pode ser útil pensar num vector tangente como a agulha de um mostrador. À medida que avançamos à volta da circunferência, a agulha do mostrador vai girar exactamente uma volta no sentido directo. Para uma curva mais complicada, à medida que a percorremos e transportamos o mostrador, apesar de a agulha se mover para um e para o outro lado, no final deu exactamente uma volta no sentido directo.

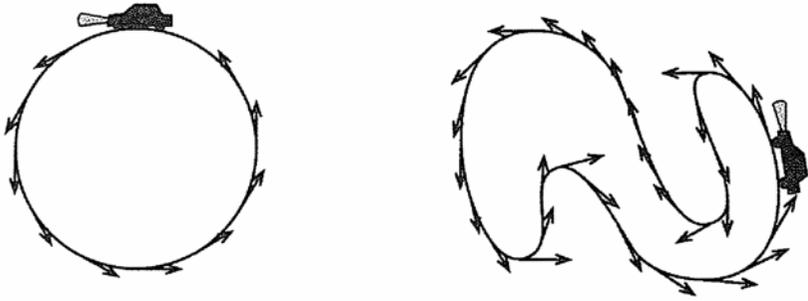


Figura 20.3. Os vectores tangentes em curvas fechadas simples, dão uma volta total de  $2\pi$

Embora esta observação possa parecer clara (como se acreditou durante muito tempo), não é fácil de mostrar. Em 1935, Hopf provou este resultado<sup>3</sup>. É conhecido como o *Umlaufsatz* de Hopf, ou mais simplesmente, o *teorema das tangentes giratórias*.

TEOREMA DAS TANGENTES GIRATÓRIAS

Os vectores tangentes a uma curva suave, fechada e simples, no plano giram um ângulo total de  $2\pi$ .

Não é difícil ver a relação entre o teorema dos ângulos externos e o teorema das tangentes que rodam. Na verdade, é possível enunciar um teorema que é um híbrido destes dois em que a curva é suave, excepto num número finito de cantos pontiagudos. Um carro conduzido por esta estrada curvilínea, que ocasionalmente apresenta curvas bruscas, dá uma volta total de  $360^\circ$  no momento em que regressa à sua posição inicial.

Regressando à afirmação original, perguntamos, em que sentido é que estes teoremas constituem uma ponte entre dois assuntos matemáticos? Eles indicam uma das formas através das quais a topologia pode condicionar a geometria. Um topólogo não liga à diferença entre polígonos fechados e curvas fechadas suaves. Para ele, todos estes são curvas fechadas. Um topólogo não fala acerca de ângulos, linhas rectas, vectores tangentes, e assim por diante. Para um geómetra, todos os polígonos e todas as curvas fechadas simples são diferentes das demais, e descreve esses objectos enunciando os seus cantos, a sua curvatura, e outras propriedades. O teorema dos ângulos externos e o teorema das tangentes que rodam afirmam que o facto de ser homeomorfa a uma circunferência

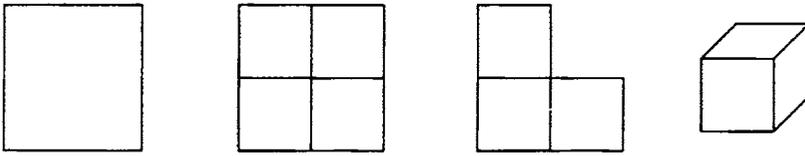


Figura 20.4. Cada vértice de um cubo tem curvatura angular  $\pi/2$

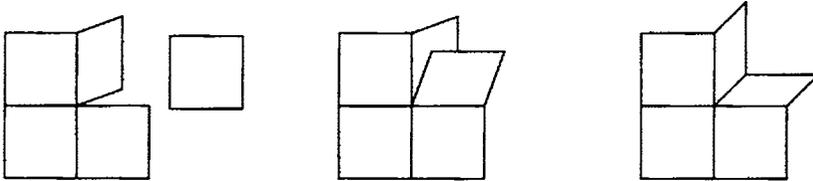


Figura 20.5. Este vértice tem curvatura angular  $-\pi/2$

determina completamente uma propriedade geométrica, nomeadamente a curvatura angular total dessa curva fechada. Independentemente de quantas voltas ela dá, a curvatura angular total é  $2\pi$ .

Vamos agora investigar como estes dois teoremas se generalizam de modo a dar a fórmula de Descartes para poliedros e o teorema da curvatura angular para superfícies.

Peguemos num pedaço de papel quadrado, numa tesoura e em fita-cola. Desenhamos duas linhas que o dividem em quatro quadrantes iguais, e usamos a tesoura para cortar um destes quadrantes (guardamos este pedaço para mais tarde). De seguida, usamos a fita-cola para unir as duas arestas do corte e obter um objecto que se parece com o canto de um cubo (veja a figura 20.4).

Definimos acima a curvatura angular num vértice dum polígono como o valor segundo o qual a curva se afasta de uma linha recta. Da mesma forma, vamos definir a curvatura angular de um ângulo sólido como o valor pelo qual ele difere de ser uma superfície plana. No nosso exemplo, quatro ângulos rectos ( $2\pi$ ) encontravam-se no centro do nosso quadrado antes de cortar, e retirámos um desses ângulos rectos (ficando com  $3\pi/2$ ). Assim, a curvatura angular num vértice de um cubo é  $2\pi - 3\pi/2 = \pi/2$ .

Peguemos noutra pedaço de papel quadrado. Como antes, dividimo-lo em 4 quadrantes. Cortemos agora uma das linhas somente até ao centro (ver figura 20.5). Peguemos no pedaço descartado da primeira construção e colemos com fita-cola duas arestas deste pequeno quadrado ao corte recém-efectuado. Para o fazermos, temos que dobrar para trás um dos

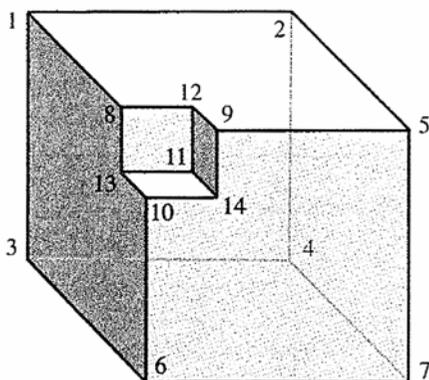


Figura 20.6. Um poliedro convexo com curvatura angular total  $4\pi$

quatro quadrantes. Obtemos uma configuração que se assemelha a uma parede de tijolos com um tijolo removido. O vértice central, inicialmente com ângulo total  $2\pi$ , passou a ter ângulo total  $5\pi/2$ , um *excesso* de  $\pi/2$  relativamente a uma superfície plana. Dizemos que o vértice tem uma curvatura angular de  $2\pi - 5\pi/2 = -\pi/2$ .

Um poliedro tem muitos vértices, cada qual com a sua própria curvatura angular. A *curvatura angular total* de um poliedro é a soma de todas as suas curvaturas angulares.

Vejam os exemplos. Cada um dos oito cantos do cubo tem uma curvatura angular de  $\pi/2$ , de modo que a curvatura angular total é  $4\pi$ . As quatro faces de um tetraedro são triângulos equiláteros. Como se encontram em todos os vértices três triângulos equiláteros, a curvatura angular de cada vértice é  $2\pi - 3(\pi/3) = \pi$ . Há quatro vértices, pelo que a curvatura angular total é  $4\pi$ . Finalmente, consideremos o poliedro convexo da figura 20.6: um grande cubo com um cubo menor removido de um dos seus cantos (pense num cubo de Rubik com uma peça do canto retirada). Os vértices marcados com os números de 1 a 10 têm curvatura angular  $\pi/2$ . O vértice 11 está virado para o «lado errado», mas vemos que, tal como os anteriores, tem curvatura angular  $2\pi - 3(\pi/2) = \pi/2$ . Os três vértices restantes (12, 13 e 14) têm curvaturas angulares de  $-\pi/2$  (como na figura 20.5). Assim, a curvatura angular total é  $11(\pi/2) + 3(-\pi/2) = 4\pi$ .

Na versão original, o autor usou os termos «angle deficit» e «angle excess» para designar o caso em que a curvatura angular de um vértice é positiva ou negativa, respectivamente. Esta distinção parece-nos desnecessária, sendo o sinal de curvatura suficiente para fornecer uma intuição correcta de geometria envolvida; por outro lado, a opção aqui usada está mais próxima da terminologia usada pelo próprio Descartes, que menciona, no seu artigo em latim, a palavra «curvatura». (N. do T.)

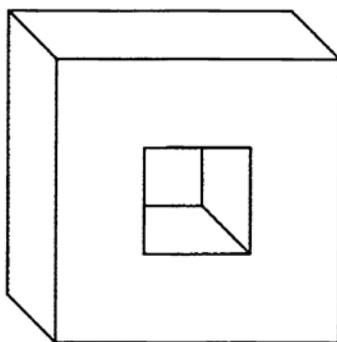


Figura 20.7. A curvatura angular total do *toro* é zero

Neste momento o padrão é claro, e podemos conjecturar que todos os poliedros têm curvatura angular total de  $4\pi$ . Esta observação foi feita pela primeira vez por Descartes nas suas notas não publicadas que discutimos no capítulo 9, os *Elementos dos Sólidos*. O terceiro parágrafo destas notas de Descartes afirma:

Tal como numa figura plana [polígono] todos os ângulos externos, em conjunto, formam quatro ângulos rectos [ $2\pi$ ], da mesma forma, num corpo sólido [poliedro] todos os ângulos externos sólidas [curvaturas angulares], em conjunto, somam oito ângulos rectos sólidos [ $4\pi$ ].

Como Descartes apontou, as analogias com o teorema dos ângulos externos são evidentes. Da mesma forma que a soma das curvaturas angulares de um polígono somam  $2\pi$ , a soma das curvaturas angulares num poliedro é igual a  $4\pi$ .

Uma ligeira variação deste teorema foi redescoberta por Euler e apareceu nos seus trabalhos sobre a fórmula dos poliedros<sup>5</sup>. Euler mostrou que a soma de todos os ângulos planos num poliedro com  $V$  vértices é igual a  $2\pi(V - 2)$ . Da mesma forma que a fórmula de Descartes generaliza o teorema dos ângulos externos para polígonos, a fórmula de Euler generaliza o teorema dos ângulos internos. É fácil de ver que o resultado de Euler é equivalente ao de Descartes. Da forma que a definimos, a curvatura angular total é simplesmente  $2\pi V$  subtraída da soma de todos os ângulos planos, ou seja  $2\pi V - 2\pi(V - 2) = 4\pi$ .

Naturalmente, tanto Euler como Descartes consideraram poliedros convexos. No entanto, basta uma pequena modificação para poder aplicar o teorema a todos os poliedros, mesmo aqueles que não são

topologicamente equivalentes a esferas. A curvatura angular total é um invariante topológico, e tem uma relação simples com o número de Euler do poliedro.

FÓRMULA DE DESCARTES  
 A curvatura angular total de qualquer poliedro  $P$  é  $2\pi\chi(P)$ .

O cubo, o tetraedro, e o cubo quebrado da figura 20.6 são esferas topológicas, pelo que têm número de Euler 2; assim, a curvatura angular total é  $2\pi\chi(P) = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$ . Para dar um exemplo não esférico, consideremos o *toro* poliédrico mostrado na figura 20.7. Tem o total de dezasseis vértices, oito dos quais têm curvatura angular  $\pi/2$  e oito têm curvatura angular  $-\pi/2$ . Desta forma, a curvatura angular total é zero, o número de Euler do *toro*. O leitor é convidado a verificar a fórmula de Descartes para os poliedros de papel no apêndice A.

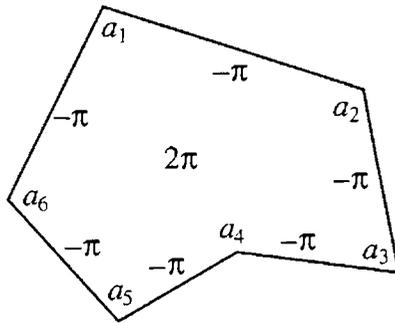


Figura 20.8. Para um polígono de  $n$  lados, temos  $(a_1 + \dots + a_n) - n\pi + 2\pi = 0$

Vamos agora demonstrar a fórmula de Descartes. Seja  $P$  um poliedro com  $V$  vértices,  $A$  arestas e  $F$  faces, e seja  $T$  a curvatura angular total de  $P$ . Devemos mostrar que  $T = 2\pi\chi(P) = 2\pi V - 2\pi A + 2\pi F$ .

Escolhemos uma face do poliedro. Consideremos que os seus ângulos planos internos são  $a_1, \dots, a_n$ . Pelo teorema dos ângulos internos,

$$a_1 + \dots + a_n = (n - 2) \pi.$$

Reorganizando os termos obtemos

$$a_1 + \dots + a_n - n\pi + 2\pi = 0.$$

Podemos visualizar esta igualdade da seguinte forma. Se marcarmos com  $-\pi$  em cada lado do polígono, a medida do ângulo em cada vértice, e colocarmos  $2\pi$  no meio da face (veja a figura 20.8), então a soma de todas estas quantidades é zero.

Agora, fazemos o mesmo para todas as faces de  $P$ , e somamos todas as quantidades envolvidas. Cada face contribui com  $2\pi$  e cada aresta contribui com  $-2\pi$  ( $-\pi$  em cada lado). Assim,

$$S - 2\pi A + 2\pi F = 0,$$

onde  $S$  representa a soma de todos os ângulos planos em  $P$ . Agora adicionamos  $T$ , a curvatura angular total, a cada membro da igualdade,

$$(T + S) - 2\pi A + 2\pi F = T.$$

Como  $T$  é a curvatura angular total, ao adicionarmos  $T$ , estamos a somar o que é necessário para que a soma dos ângulos planos em cada vértice passe a ser novamente  $2\pi$ . Por outras palavras,  $T + S$  é  $2\pi V$ . Logo,  $T = 2\pi V - 2\pi A + 2\pi F = 2\pi\chi(P)$ .

A fórmula de Descartes é uma elegante ilustração da relação surpreendente entre a topologia e a geometria. Uma vez que a curvatura angular total está relacionada com o número de Euler, podemos ver como a topologia do poliedro determina completamente um aspecto da sua geometria global.

Como aplicação deste teorema, o leitor é encorajado a encontrar uma nova demonstração de que há apenas cinco sólidos platónicos.

Na maior parte deste livro, assumimos que as linhas usadas na decomposição de uma superfície em faces são entidades topológicas. Estas podem contorcer-se arbitrariamente e criar faces muito disformes. Neste capítulo, estamos concentrados na área muito menos selvagem da geometria. Idealmente, gostaríamos que as faces fossem polígonos com lados rectilíneos. Numa superfície curva, é impossível que as arestas sejam segmentos de recta, e por isso vamos exigir que sejam *curvas geodésicas*.

No capítulo 10, introduzimos o conceito de geodésica numa esfera. Nesse contexto, uma geodésica é qualquer segmento de um círculo máximo. Na verdade, podemos definir curva geodésica em qualquer

superfície rígida. Uma geodésica é caracterizada por minimizar o comprimento — o caminho mais curto entre dois pontos sobre uma superfície, é obtido deslocando-se ao longo de uma curva geodésica. A conhecida expressão «o percurso mais curto entre dois pontos é uma linha recta» devia ser: «O percurso mais curto entre dois pontos é uma curva geodésica.» Na restante parte deste capítulo, vamos supor que as linhas ao longo das quais decomparamos as superfícies são curvas geodésicas, o que faz com que as faces sejam polígonos geodésicos.

Uma das vantagens de trabalhar com polígonos geodésicos é que podemos medir os ângulos nos vértices. As arestas estão curvadas, mas quando ampliamos um dos vértices com um microscópio potente (figurativamente falando), as arestas que nele incidem aparentam ser linhas rectas, e por isso podemos medir os ângulos.

Os triângulos no plano obedecem ao teorema dos  $180^\circ$ , mas numa superfície típica, este teorema não é aplicável. Recorde-se que Harriot e Girard provaram que a soma dos ângulos internos de um triângulo geodésico numa esfera excede  $180^\circ$  (capítulo 10). Há outras superfícies, tais como superfícies em forma de sela, onde a soma dos ângulos internos de certos triângulos geodésicos é inferior a  $180^\circ$  (ver figura 20.9).

Assim, podemos definir o excesso angular e o défice angular de um triângulo geodésico como a quantidade que a soma dos ângulos internos desse triângulo difere daquela soma para um triângulo no plano. Isto é, o excesso angular de um triângulo geodésico com ângulos internos  $a$ ,  $b$  e  $c$  é  $(a + b + c) - \pi$ . Se  $(a + b + c) - \pi$  for negativo, dizemos que o triângulo tem um *défice angular*.

Da mesma forma, podemos definir o excesso angular ou défice angular de um polígono geodésico com  $n$  lados. Pelo teorema dos ângulos internos, a soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados no plano é  $(n - 2)\pi$ . Assim, o excesso angular de um polígono geodésico cujos ângulos interiores medem  $a_1, a_2, \dots, a_n$  é  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - (n - 2)\pi$ .

É importante não confundir esta definição de excesso e défice angular para superfícies decompostas em polígonos geodésicos, com a curvatura angular nos poliedros. Um poliedro tem uma curvatura angular nos seus vértices, mas é nas faces poligonais geodésicas que temos o excesso ou défice angular, no caso das superfícies. No entanto, como podemos ver na abordagem seguinte, estes conceitos estão intimamente relacionados.

Peguemos num pedaço de plasticina e construamos um octaedro. Cada face é um triângulo equilátero, de modo que a curvatura angular em cada vértice é  $2\pi - 4(\pi/3) = 2\pi/3$ . Como há seis vértices, a curvatura angular total é  $6(2\pi/3) = 4\pi$ , tal como garantido pela fórmula de Descartes.

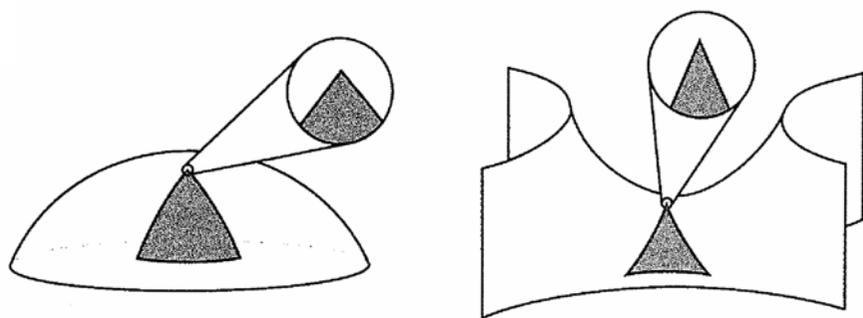


Figura 20.9. Um triângulo com excesso angular (esquerda) e outro com um déficit angular (direita)

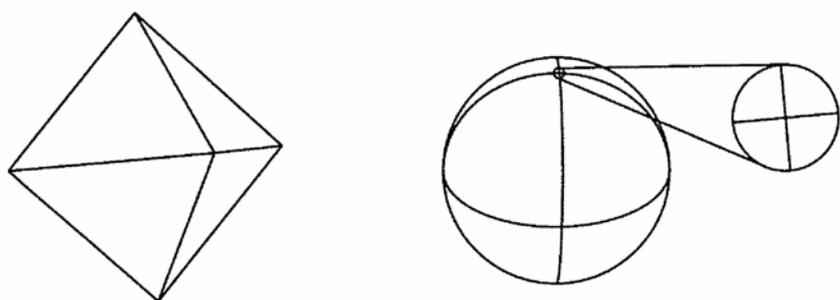


Figura 20.10. Um octaedro rolado para formar uma bola

Agora, pintamos cada uma das arestas com um marcador de cor escura. De seguida, colocamo-lo numa mesa e rolamos o octaedro até ficar esférico (figura 20.10). As faces triangulares do octaedro transformaram-se em linhas curvas. Se rolarmos o poliedro com cuidado, as arestas transformaram-se em segmentos geodésicos, e as faces tornaram-se triângulos geodésicos.

Depois de rolarmos o octaedro numa bola, já não existe curvatura angular nos vértices. Os vértices foram achatados de modo que os ângulos nas quatro faces somam agora  $2\pi$ . Para onde foi a curvatura angular?

Não é difícil de perceber que, durante este processo, os ângulos internos dos triângulos aumentaram de tamanho. Os quatro ângulos que se uniam em cada vértice, e mediam  $60^\circ$  antes, agora são ângulos rectos. Cada triângulo na bola de plasticina tem agora três ângulos rectos, pelo que a soma dos ângulos internos é  $3\pi/2$ . Assim, as faces triangulares ficaram com um excesso angular. A curvatura angular nos vértices do octaedro foi distribuída pelas faces da bola e transformando-se em excessos

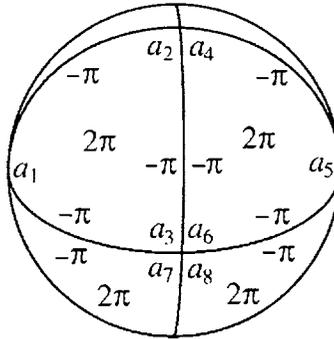


Figura 20.11. Marcamos os componentes desta decomposição da superfície, colocando  $2\pi$  em cada face,  $-\pi$  em cada lado das arestas, e a medida de cada ângulo nos vértices

angulares nos triângulos. Da mesma forma, para qualquer decomposição de uma superfície em polígonos geodésicos, os vértices não apresentam curvatura, mas as faces possuem excesso ou déficit angular.

Para uma superfície dividida em vértices, arestas e polígonos geodésicos, definimos o *excesso angular total* como a soma dos excessos angulares de todas as faces. Tal como a curvatura angular total de um poliedro está relacionada com o seu número de Euler (fórmula de Descartes), o excesso angular total de uma superfície está relacionado com o número de Euler. Temos o seguinte análogo da fórmula de Descartes, para superfícies.

TEOREMA DO EXCESSO ANGULAR PARA SUPERFÍCIES  
 O excesso angular total para uma superfície  $S$  é  $2\pi\chi(S)$ .

Chegados aqui, a demonstração deste teorema já deve parecer familiar. Seja  $S$  uma superfície decomposta em vértices, arestas geodésicas e polígonos geodésicos. Decoremos a superfície colocando  $2\pi$  no centro de cada face,  $-\pi$  em cada lado de cada aresta geodésica, e a medida dos ângulos internos em cada vértice (ver figura 20.11). Se somamos estas quantidades numa face de  $n$  lados, com ângulos internos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  obtemos o excesso angular da face,

$$2\pi - n\pi + (a_1 + \dots + a_n) = (a_1 + \dots + a_n) - (n - 2)\pi.$$

Assim, a adição de todas as quantidades por toda a superfície dá-nos o excesso angular total de  $S$ .

Por outro lado, para esta soma, cada vértice contribui  $2\pi$ , cada aresta contribui  $-2\pi$ , e cada polígono geodésico contribui  $2\pi$ . Somando todos os valores obtemos  $2\pi V - 2\pi A + 2\pi F = 2\pi\chi(P)$ , e temos o resultado pretendido.

A fórmula de Descartes e o teorema do excesso angular são dois belos teoremas que exibem formas pelas quais a topologia pode influenciar a geometria. No próximo capítulo, veremos outro exemplo relacionado. Usando a definição apropriada de curvatura, vamos mostrar que a curvatura total, não de um poliedro, mas desta vez de uma superfície, depende da topologia da superfície, e que esta dependência está, novamente, intimamente relacionada com a característica de Euler da superfície.

## Capítulo 21

# A Topologia das Superfícies Curvas

*Se outros tivessem reflectido sobre as verdades matemáticas de forma tão profunda e tão continuada quanto eu, teriam feito as minhas descobertas.*

— Carl Friedrich Gauss<sup>1</sup>

Um dos temas mais fundamentais no estudo da geometria das curvas planas é a curvatura. A *curvatura* num ponto  $x$  de uma curva plana é um número,  $k$ , que mede quão apertada é essa curva em  $x$  — mede a «rapidez» com que os vectores tangentes mudam de direcção nesse ponto. Em termos gerais, dado um vector  $\vec{n}$ , normal a uma curva no ponto  $x$ , se a curva se vira no mesmo sentido de  $\vec{n}$ , então  $k > 0$ ; quando gira para o lado oposto tem-se  $k < 0$ , e se não curva ou a curva muda de sentido,  $k = 0$  nesse ponto (ver a figura 21.1). Quanto mais acentuada for a curva, maior (em valor absoluto) será a curvatura  $k$ .

Pelo teorema da curva de Jordan, uma curva fechada simples no plano tem uma região interior e outra exterior. Assim, podemos escolher vectores normais ao longo de toda a curva, e conseguimos garantir que todos eles apontam para o interior, por exemplo. Desta forma, podemos calcular a curvatura em todos os pontos da curva. Normalmente, a curvatura varia de ponto para ponto (ver figura 21.2). É possível «somar» a curvatura ao longo de toda a curva de modo a obter a *curvatura total*. Os detalhes deste processo estão para além do âmbito deste livro, mas um estudante de cálculo deve reconhecer que, dado

que a curvatura varia continuamente, a «soma» em questão traduz-se no *integral* da curvatura sobre a curva dada. Temos o seguinte teorema\*.

TEOREMA DA CURVATURA TOTAL PARA CURVAS  
 A curvatura total de qualquer curva plana fechada simples e suave é  $2\pi$ .

Por outras palavras, a curvatura total é o mesmo número para todas as curvas fechadas simples e suaves! Se pegarmos num colar e o deixarmos cair sobre uma mesa de modo que ele não se cruze sobre si mesmo, então as regiões de curvatura negativa são de tal forma que cancelam parte da curvatura positiva, de modo a que, no final, a curvatura total é exactamente  $2\pi$ . Isto é, o facto de ser homeomorfo a uma circunferência determina completamente a curvatura total. Mais uma vez vemos como a topologia controla a geometria.

Não vamos demonstrar este teorema, mas ele está intimamente relacionado com o teorema das tangentes giratórias, tratado no capítulo anterior. Novamente, um estudante de cálculo compreenderá que, como

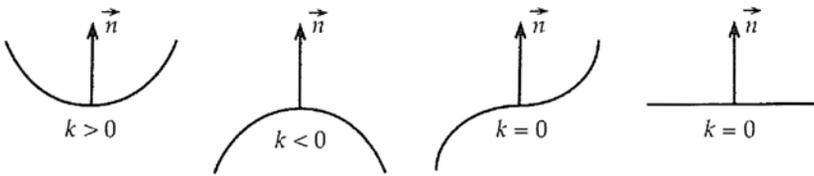


Figura 21.1. Curvas com  $k > 0$ ,  $k < 0$ ,  $k = 0$  e  $k = 0$  (da esquerda para a direita)

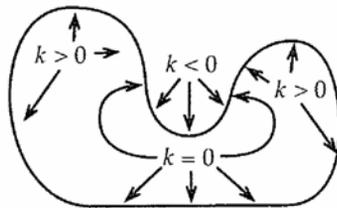


Figura 21.2. Uma curva com regiões de curvatura positiva, negativa e zero considerando vectores normais apontando para o interior

\* Um matemático enunciaria este teorema na forma  $\int_C k ds = 2\pi$ , onde  $C$  é uma curva fechada e suave.

estamos a «somar» as taxas de variação dos vectores tangentes, a curvatura total é então a variação total das direcções tangentes, ou seja  $2\pi$ .

Podemos também pensar neste teorema como outra generalização do teorema dos ângulos externos para polígonos. Um polígono não tem curvatura nenhuma ao longo dos seus lados, e adquire toda a sua curvatura nos vértices, na forma de ângulos exteriores. A curvatura total, medida como a soma desses ângulos, é então  $2\pi$ .

Agora vamos passar das curvas para as superfícies. Como estamos a estudar propriedades geométricas das superfícies, devemos assumir que as superfícies são rígidas, e não de borracha como eram as nossas superfícies topológicas. Mas também assumimos que as superfícies são *suaues*, sem arestas cortantes ou cantos afiados.

Assim, tal como fizemos para as curvas no plano, vamos investigar a curvatura das superfícies no espaço tridimensional. Novamente, escolhamos um vector  $\vec{n}$ , normal à superfície num dado ponto  $x$ . Depois, consideramos um plano que passa através do ponto  $x$  e é paralelo a  $\vec{n}$ . A intersecção da superfície com o plano é uma curva, pelo que podemos calcular a sua curvatura. Tipicamente, a curvatura destas curvas de intersecção será diferente para diferentes planos que passam por  $x$ . O maior destes valores de curvatura, bem como o menor,  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente, são chamados as *curvaturas principais* da superfície no ponto  $x$  (ver figura 21.3). Em 1760, Euler provou que as curvaturas principais ocorrem para planos perpendiculares entre si<sup>2</sup>.

Era deste modo que os géometras mediam a curvatura das superfícies, até Gauss ter feito uma modificação simples, mas crucial. Multiplicou as curvaturas principais para formar um único valor de curvatura, a que agora se chama a *curvatura gaussiana*, ou *curvatura escalar*:  $k = k_1 k_2$ . Esta operação aparentemente trivial, que encerra menor informação do que as duas curvaturas principais em separado, produziu um valor numérico fundamental na compreensão da curvatura das superfícies.

Parecendo surpreendente, a maioria dos grandes matemáticos não foi criança-prodígio; o seu génio necessitou de crescer e amadurecer, tendo-se manifestado em fases posteriores da vida. No entanto, desde cedo ficou claro que Gauss tinha uma habilidade excepcional para a matemática. Nasceu em 1777 em Brunswick, na Alemanha. Com apenas três anos de idade, Gauss chocou o seu pai, Gerhard, ao apontar um erro aritmético nos seus livros de contabilidade. Nos sábados posteriores, Gauss sentar-se-ia numa cadeira a ajudar o seu pai.

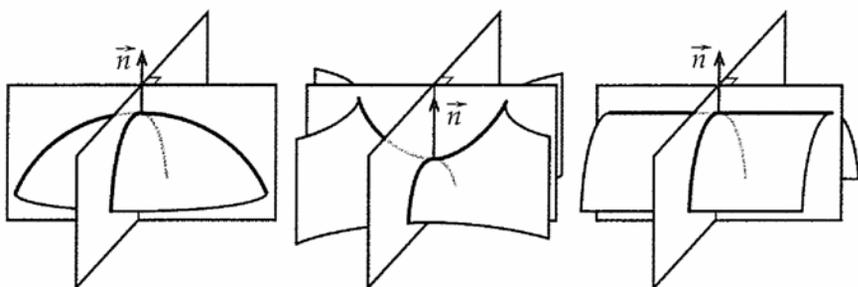


Figura 21.3. Superfícies para as quais  $k_1, k_2 < 0$  (à esquerda),  $k_1 > 0$  e  $k_2 < 0$  (ao centro), e  $k_1 = 0$  e  $k_2 < 0$  (à direita)

Na sua velhice, Gauss gostava de contar como, quando tinha sete anos de idade, impressionou um dos seus professores brutos e arrogantes. O professor pediu à turma para somar uma série aritmética (vamos supor que pediu o valor de  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$ , para sermos concretos<sup>3</sup>). Gauss quase imediatamente escreveu o número 5050 no seu quadro de ardósia, e colocou-o sobre a mesa, à frente do professor céptico, e anunciou «*ligget se*» (aí está). Em vez de realizar a entediante soma, Gauss tinha notado que, adicionando o primeiro número ao último, o segundo ao penúltimo, e assim por diante, cada uma das somas parciais dá 101 (isto é,  $1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, \dots$ ). Uma vez que há cinquenta tais pares de parcelas, o total terá que ser  $50 \times 101 = 5050$ .

Este incidente na sala de aula colocou em marcha uma sucessão de eventos que, em 1791, chamou a atenção de Carl Wilhelm Ferdinand, Duque de Brunswick. O duque encontrou-se com o menino de catorze anos de idade, e prometeu pagar a sua educação. O generoso duque financiou a educação de Gauss no Collegium Carolinum e na Universidade de Göttingen, tendo-lhe continuado a pagar um salário até à sua morte pelas mãos do exército de Napoleão, em 1807.

A intuição do duque acerca da criança estava correcta. O primeiro resultado importante de Gauss, a demonstração da lei da reciprocidade quadrática, surgiu quando ele tinha 19 anos de idade. Este teorema, ao qual ele chamou *Theorema aureum* (o teorema dourado), tinha escapado tanto a Euler como a Legendre.

Gauss escolheu como seu timbre uma árvore com apenas algumas peças de fruta, e com as palavras *Pauca sed matura* (poucos, mas maduros). Este lema encarna perfeitamente a carreira de Gauss. Ao contrário do prolífico Euler, Gauss não era lesto a publicar. Nunca publicou trivialidades, insistindo que todos os seus artigos deveriam ser obras-primas. Tal como ele disse: «Sabem que escrevo devagar. Isto é principalmente porque nunca estou satisfeito até conseguir dizer tanto quanto possível»

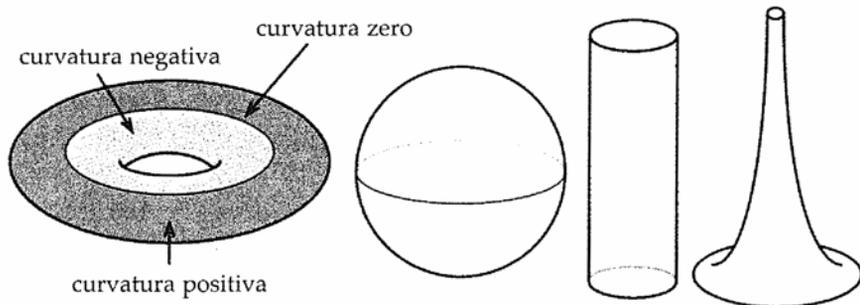


Figura 21.4. Uma superfície (*toro*) com curvatura variável: positiva, negativa e zero. Três superfícies com curvatura constante: curvatura positiva (esfera), curvatura zero (cilindro) e curvatura negativa constante (pseudo-esfera)

usando poucas palavras, e escrever menos leva muito mais tempo do que escrever textos longos<sup>4</sup>.» Entre as muitas áreas nas quais Gauss deixou a sua marca estão a astronomia, a geodesia, a teoria das superfícies, aplicações conformes, física-matemática, teoria dos números, probabilidade, topologia, geometria diferencial e análise complexa.

Devido à sua demanda pela perfeição, Gauss deixou uma grande quantidade de resultados sem publicar. O seu diário matemático (*Notizenjournal*), descoberto quarenta e três anos depois da sua morte, contém preciosidades matemáticas. Tivesse Gauss publicado alguns destes resultados e seria ainda mais recordado como matemático influente. É frustrante perceber que vários matemáticos trabalharam durante anos apenas para descobrir ideias já conhecidas de Gauss. Podemos questionar-nos quanto poderia ainda ter progredido a matemática do século XIX se Gauss tivesse mais vontade de publicar os seus resultados.

Após a morte do duque, Gauss foi forçado a aceitar uma posição como director do Observatório de Göttingen, dedicando grande parte dos últimos vinte anos da sua vida lidando com assuntos de astronomia no observatório. Viveu até aos 78 anos de idade, vindo a falecer pacificamente em 23 de Fevereiro de 1855.

Utilizando a abordagem de Gauss para medir a curvatura através do parâmetro único  $k = k_1 k_2$ , podemos dizer que a curvatura num ponto é positiva, negativa ou zero. Regressando à figura 21.3, vemos que, como no caso do fundo de uma tigela, quando as duas curvas se inclinam na direcção do vector normal (ou ambas na direcção oposta), então os sinais de  $k_1$  e  $k_2$  são o mesmo, pelo que a curvatura escalar é positiva. Por outro lado, quando, como no caso de uma sela, uma curva se dobra na direcção

do vector normal e outra para o lado oposto, os sinais de  $k_1$  e de  $k_2$  são opostos, e a curvatura gaussiana é negativa. Se uma ou ambas as curvaturas principais são nulas, como no caso de um cilindro ou de um plano, a curvatura é igual a zero.

É importante salientar que a curvatura difere de ponto para ponto. Uma superfície típica terá regiões de curvatura positiva, outras onde é negativa, e outras onde é nula. Por exemplo, o *toro* da figura 21.4 tem curvatura positiva na região mais distante do centro do «túnel», curvatura negativa na região mais próxima desse centro, e curvatura zero nas linhas fronteiras entre estas duas regiões. Existem também superfícies com curvatura constante. A esfera (não uma qualquer esfera topológica, mas uma verdadeira superfície esférica) tem curvatura constante positiva; um plano e um cilindro têm curvatura zero. O exemplo mais conhecido de uma superfície com curvatura constante negativa é a superfície em forma de trompete conhecida como pseudo-esfera, assim chamada não por causa da semelhança com uma esfera, mas por causa da sua curvatura constante, embora negativa.

A curvatura gaussiana, a área e o excesso angular são grandezas intimamente relacionadas, cuja relação queremos entender. Já vimos que o excesso angular e a curvatura estão relacionados. A figura 20.9 mostrava um triângulo geodésico numa esfera, com um excesso angular, e uma sela com défice angular. Quando mais plana for uma superfície, mais se assemelha ao próprio plano, e mais se parecem os triângulos aos triângulos do plano. A curvatura positiva produz um excesso angular, e a curvatura negativa provoca um défice angular.

Também deve ser claro que o tamanho é relevante. Os triângulos muito pequenos contribuem pouco para a curvatura total da superfície (pensemos em dois triângulos equiláteros sobre a Terra, um com lados de 1000 quilómetros de comprimento, e outro com lados de 1 centímetro de comprimento). À medida que nos aproximamos de uma superfície, ela parece cada vez mais plana. Quanto menor for o triângulo, mais próximo estará o excesso angular de zero.

Mostremos ainda outro exemplo da relação entre curvatura e área. Suponhamos que temos uma parte duma superfície com curvatura positiva como, por exemplo, um pedaço de casca de cebola, ou de uma folha de couve. Ao tentar achatá-la sobre uma mesa, vemos que há muita área na parte central. Sem dúvida, a parte exterior da casca de cebola rasgar-se-ia ao ser pressionada para tornar-se plana. É também por isto que na habitual projecção (de Mercator) da superfície da Terra usada em mapas, a Gronelândia parece maior do que o território continental dos Estados Unidos, quando na verdade, três ilhas do tamanho da Gronelândia caberiam confortavelmente

dentro dos quarenta e oito estados inferiores. Vamos encontrar o problema oposto para superfícies com curvatura negativa. Se fôssemos cortar um pequeno disco de uma superfície em forma de sela, haveria muita área nas extremidades para que pudéssemos achatar o disco em cima de uma mesa. O bordo externo do disco iria dobrar-se e formar rugas.

Podemos explorar a relação entre a curvatura, área e excesso angular para obter uma definição alternativa da curvatura de Gauss. Consideremos um triângulo geodésico  $\Delta$  contendo o ponto  $x$ , e com ângulos internos  $a$ ,  $b$  e  $c$ . O excesso angular deste triângulo,  $E(\Delta) = a + b + c - \pi$ , é uma boa medida da curvatura em  $x$ . O problema é que, como já notámos, à medida que o triângulo fica menor,  $E(\Delta)$  vai-se aproximando de zero. Isto sugere que devemos escalar o excesso angular pela área. Em vez de trabalhar com a quantidade  $E(\Delta)$  vamos usar  $E(\Delta)/A(\Delta)$ , onde  $A(\Delta)$  é a área do triângulo  $\Delta$ . Pode mostrar-se rigorosamente que, à medida que se diminui  $\Delta$  até  $x$ , a quantidade  $E(\Delta)/A(\Delta)$  aproxima-se da curvatura gaussiana no ponto  $x$ .

Em termos da presente formulação, a curvatura de Gauss é particularmente fácil de calcular para superfícies de curvatura constante. Como a curvatura é constante, em qualquer ponto vale simplesmente  $E(\Delta)/A(\Delta)$ , onde  $\Delta$  é qualquer triângulo geodésico (não precisamos de fazer o triângulo reduzir-se a um ponto). Por exemplo, seja  $\Delta$  um octante de uma esfera de raio  $r$ . Este triângulo tem três ângulos rectos, pelo que tem um excesso angular de  $E(\Delta) = 3(\pi/2) - \pi = \pi/2$  e a sua área é  $A(\Delta) = (1/8)4\pi r^2 = \pi r^2/2$ . Assim, em qualquer ponto da esfera, a curvatura gaussiana é  $(\pi/2)/(\pi r^2/2) = 1/r^2$ . Isto mostra que, à medida que o raio da esfera aumenta, a sua curvatura diminui. De facto, é fácil identificar a curvatura de uma bola de bilhar, mas não é tão fácil detectar a curvatura da Terra.

Há outra interessante conclusão que podemos extrair desta definição da curvatura gaussiana. Consideremos uma folha de papel repousando em cima de uma mesa. É evidente que tem curvatura gaussiana nula. Se a enrolarmos formando um cilindro, a geometria foi alterada, mas a curvatura de Gauss continua a ser zero. Por mais que tentemos, nunca seremos capazes de transformar a folha de papel numa superfície esférica, curvada positivamente, ou numa superfície em forma de sela, de curvatura negativa. A folha de papel manterá a sua curvatura nula, independentemente da forma como a deformarmos. Em linguagem mais técnica, neste exemplo, podemos alterar a *curvatura extrínseca* da folha de papel, mas nunca seremos capaz de mudar a sua *curvatura intrínseca*.

As duas curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$  medem a curvatura extrínseca de uma superfície — elas dependem da maneira como a superfície está contida no espaço tridimensional. Uma folha de papel tem  $k_1 = k_2 = 0$ ,

mas para um cilindro, vamos ter ou  $k_1$  ou  $k_2$  não nulos. As curvaturas principais são extrínsecas, uma vez que os habitantes da superfície não as poderiam calcular, fazendo apenas medições ao longo da superfície. Esses habitantes teriam que se afastar da superfície, e examinar de que forma está posicionada no espaço ambiente. Como a curvatura de Gauss é o produto das duas curvaturas principais,  $k = k_1 k_2$ , também  $k$  é uma medida da curvatura extrínseca.

Por outro lado, as medidas das áreas e dos ângulos são propriedades intrínsecas de uma superfície, uma vez que podem ser determinadas por um habitante vivendo na superfície. Para calcular estes valores, não temos de colocar a superfície rigidamente no espaço. As medidas da área e ângulos internos de um triângulo desenhado na folha de papel não mudam, mesmo se enrolarmos o papel num cilindro. Portanto, como podemos definir a curvatura gaussiana em termos daquelas quantidades, esta realmente determina a curvatura intrínseca da superfície!

Foi Gauss quem pela primeira vez descobriu que o produto das duas curvaturas principais extrínsecas produzia uma medida da curvatura intrínseca da superfície. Reconhecendo a beleza desta sua descoberta, deu-lhe o grandioso nome *theorema egregium*, ou seja, o teorema excelente.

Dado que a curvatura de Gauss é intrínseca, não é uma propriedade tão rígida que obrigue o objecto a ficar imóvel no espaço. No entanto, também não é uma propriedade topológica. Se o nosso pedaço de papel fosse simplesmente uma superfície topológica (feito de borracha ou plastilina), então poderíamos alterar drasticamente a sua curvatura e distorcer completamente um triângulo desenhado sobre ela.

Em 1827, Gauss demonstrou um outro importante teorema que ainda explora mais profundamente a relação entre curvaturas, áreas e o excesso angular de polígonos geodésicos<sup>5</sup>. Tal como podemos calcular a curvatura total de uma curva fechada simples, Gauss pretendia calcular a curvatura total de uma região de uma superfície. No caso de uma superfície de curvatura constante, este cálculo é simples. Se a curvatura gaussiana é  $k$ , então, a curvatura total para uma região  $R$  é  $k \cdot A(R)$ , em que  $A(R)$  é a área de  $R$ . Quando esta região é um triângulo geodésico  $\Delta$ , a curvatura total é, portanto,  $k \cdot A(\Delta) = [E(\Delta) / A(\Delta)] A(\Delta) = E(\Delta)$ , que coincide com o excesso angular do triângulo.

O maravilhoso teorema de Gauss afirma que isto ainda é verdade para triângulos geodésicos em superfícies cuja curvatura não é constante<sup>7</sup>.

---

<sup>5</sup> Mais precisamente, o teorema de Gauss-Bonnet local afirma que  $\int_{\Delta} k \, dA = a + b + c - \pi$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os ângulos internos do triângulo geodésico  $\Delta$ , e  $k$  é a curvatura de Gauss.

TEOREMA DE GAUSS-BONNET LOCAL

A curvatura total de um triângulo geodésico numa superfície é precisamente o excesso angular desse triângulo.

Por outras palavras, este teorema indica que a curvatura total de um triângulo geodésico  $\Delta$  é  $a + b + c - \pi$ , onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  são os seus ângulos internos.

O outro matemático cujo nome está associado a este teorema é o géometra francês Pierre Ossian Bonnet (1819-1892). Em 1848, Bonnet generalizou o teorema de Gauss, provando uma versão, que não enunciaremos aqui, válida para regiões cujos lados não são necessariamente geodésicos<sup>6</sup>. Desta forma, Gauss foi capaz de calcular a curvatura total de qualquer triângulo geodésico, enquanto Bonnet conseguiu determinar a curvatura total de qualquer região limitada numa superfície.

Surpreendentemente, nem Gauss nem Bonnet se questionaram sobre o que, para nós, parece ser uma pergunta natural: qual é a curvatura total de *toda* a superfície? Eles nem sequer quiseram determinar a curvatura total de uma esfera. É simples calcular a curvatura total de uma superfície combinando o teorema local de Gauss-Bonnet e o teorema do excesso angular (por razões técnicas temos que exigir que as superfícies sejam orientáveis).

Primeiro, decompomos uma superfície em triângulos geodésicos. Pelo teorema de Gauss-Bonnet local, a curvatura total de cada um dos triângulos é o seu excesso angular. Assim, a curvatura total de uma superfície fechada  $S$  é o excesso angular total da superfície, que sabemos ser  $2\pi\chi(S)$ . Isto é o que hoje designamos por *teorema de Gauss-Bonnet global*<sup>7</sup>.

TEOREMA DE GAUSS-BONNET GLOBAL

A curvatura total de uma superfície orientável  $S$  é  $2\pi\chi(S)$ .

De forma geral, o teorema de Gauss-Bonnet global mostra que, se esticarmos e puxarmos uma dada superfície topológica, poderemos alterar a sua curvatura local, mas a curvatura total não se altera. Quaisquer novas

---

<sup>7</sup> Tal como acima, o teorema de Gauss-Bonnet global afirma que a curvatura total de uma superfície  $S$  é  $\int_S k \, dA = 2\pi\chi(S)$ .

regiões de curvatura positiva serão contrabalançadas por novas regiões de curvatura negativa. A única propriedade importante é a topologia global da superfície.

Podem parecer estranho que a curvatura pontual (de Gauss) de uma bola de bilhar seja diferente da curvatura pontual da superfície da Terra, uma vez que têm a mesma forma, apenas tamanhos diferentes. É o teorema de Gauss-Bonnet global que valida esta intuição. A curvatura da Terra é muito menor do que a curvatura de uma bola de bilhar, mas a Terra tem uma área muito maior do que a bola de bilhar. Assim, a curvatura total é a mesma para ambos. A soma de uma pequena quantidade, muitas vezes, pode resultar no mesmo que a soma de poucas parcelas de um valor grande.

Se combinarmos o teorema de Gauss-Bonnet global com o teorema da classificação de superfícies orientáveis (capítulo 17), podemos retirar algumas conclusões interessantes. Por exemplo, a esfera é a única superfície orientável fechada com número de Euler positivo. Assim, se temos uma destas superfícies com curvatura total positiva, a superfície tem que ser homeomorfa a uma esfera. Da mesma forma, se a curvatura total de uma superfície fechada é nula, então ela deve ser homeomorfa a um *toro*. Qualquer outra superfície orientável fechada (as superfícies de género  $g$ , com  $g > 1$ ) deverá ter curvatura total negativa.

Embora nem Gauss nem Bonnet tenham notado esta versão global do teorema, Wilhelm Blaschke (1885-1962) decidiu homenageá-los designando o teorema com os seus nomes, num livro escrito em 1921<sup>7</sup>. Foi neste seu livro que a prova do teorema global surgiu como consequência do teorema local. A primeira demonstração do teorema de Gauss-Bonnet global remonta a 1888, quando Dyck o provou usando técnicas completamente diferentes<sup>8</sup>. Uma vez mais, vemos a forma inesperada de como os nomes são atribuídos aos teoremas.

Nestes dois últimos capítulos, abordamos a relação bela e inesperada entre a topologia e geometria. Não apenas é o número de Euler um invariante topológico, mas é precisamente a noção que liga estas duas diferentes áreas. Assim, temos ainda outra razão pela qual a fórmula de Euler é uma relação fundamental na matemática. Nos próximos dois capítulos, veremos que podemos generalizar o número de Euler para objectos de dimensão superior.

## Capítulo 22

### Navegando em $n$ Dimensões

*Lisa — Onde está o meu pai?*

*Professor Frink — Bem, deveria ser óbvio mesmo para o indivíduo menos iluminado com um diploma avançado em topologia hiperbólica que Homer Simpson caiu na terceira dimensão ... [desenhando num quadro negro]*  
*Aqui temos um quadrado simples*

*Chefe Wiggum — Ei, ei. Mais devagar, cabeça-de-ovo!*

*Professor Frink — mas suponhamos que estendemos o quadrado além das duas dimensões do nosso universo, ao longo do hipotético eixo dos  $z$ , assim [todos engolem em seco]. Isto forma um objecto tridimensional que é conhecido como «cubo», ou como «Frinkaedro» em homenagem ao seu descobridor.*

—The Simpsons, «Treehouse of Horror, VI»

Até agora, os objectos topológicos considerados têm sido curvas ou superfícies — objectos que são localmente unidimensionais ou bidimensionais, e que vivem em espaços de dimensão 2, 3 ou 4. As superfícies são a generalização topológica dos poliedros, e a fórmula de Euler para poliedros foi generalizada dando lugar ao número de Euler para superfícies. Chegados aqui, é natural que se pergunte o que podemos dizer sobre as formas topológicas de dimensão superior. Como são elas? Será que existe um número de Euler também para elas?

Como veremos no capítulo 23, Poincaré definiu o número de Euler para espaços topológicos de dimensões superiores, e provou que é um

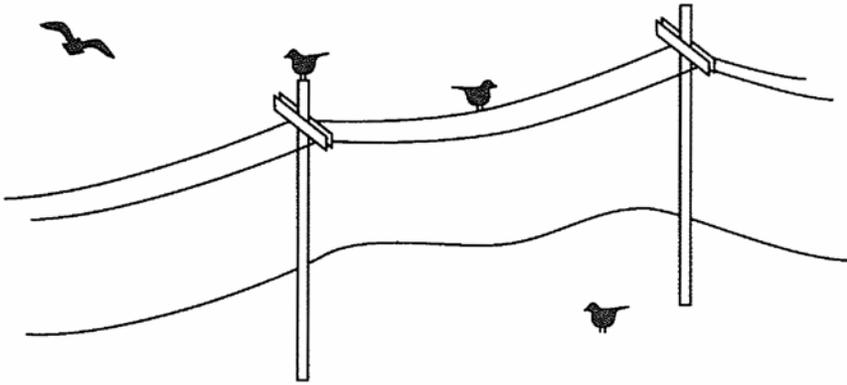


Figura 22.1. Pássaros que experimentam as dimensões 0, 1, 2 e 3

invariante topológico. Mas, antes de discutir as contribuições de Poincaré, devemos abordar o conceito de dimensão e algumas das primeiras tentativas de generalizar a característica de Euler.

Estamos todos familiarizados com espaços de dimensão 0, 1, 2 e 3. O espaço tridimensional é o ambiente em que vivemos. As árvores, as casas, as pessoas e os cães são todas entidades tridimensionais. O espaço tridimensional contém objectos bidimensionais. Um quadro, um pedaço de papel e um ecrã de televisão são objectos de 2 dimensões. Uma corda, uma trave de equilibrista, e um fio de telefone enrolado são objectos unidimensionais. O ponto final desta frase tem dimensão zero.

É comum associar o conceito de dimensão a figuras geométricas como pontos, linhas e planos. No entanto, tal como vimos nos capítulos anteriores, queremos maior flexibilidade do que a permitida pelas rígidas figuras geométricas para definir dimensão. A maneira mais conveniente de pensar em dimensões é em termos de *graus de liberdade* — a dimensão de um objecto é o número de direcções independentes segundo as quais um ponto nesse objecto se pode mover.

Consideremos o bando de pássaros mostrado na figura 22.1. Cada uma das aves tem limitações no espaço onde se move — cada uma possui um número diferente de graus de liberdade. O pássaro no topo do poste de electricidade não se pode mover. Encontra-se num espaço de dimensão zero. O pássaro pousado no fio pode mover-se para trás e para a frente ao longo do fio. Tem um grau de liberdade, de modo que habita um espaço unidimensional. O pássaro no chão vive no espaço bidimensional, e o pássaro que voa está num espaço tridimensional. Repare que não mencionámos linhas rectas nem superfícies planas, apenas graus de liberdade. O fio pendurado não é certamente uma linha recta, e o chão tem montes e vales.

Como vivemos num mundo tridimensional, é-nos fácil conceber as dimensões 0, 1, 2 e 3. A quarta dimensão, e as dimensões superiores estão fora do alcance da nossa experiência quotidiana. Quando investigámos chapéus cruzados, garrafas de Klein, e planos projectivos, reconhecemos a necessidade de uma quarta dimensão. Embora não seja fácil de imaginar este salto para a quarta dimensão, não é muito difícil visualizar estas superfícies. Afinal de contas, estas superfícies em espaços de dimensão quatro vivem, quase na sua totalidade, em três dimensões. As entidades topológicas que precisam mais do que um pequeno desvio na quarta dimensão são outra história.

É comum ouvir-se dizer que o tempo é a quarta dimensão. Esta perspectiva é devida a Joseph-Louis Lagrange e tem sido difundida desde 1788<sup>1</sup>. O tempo é uma quantidade com a qual estamos familiarizados, e pode ajudar a obter uma noção sobre o espaço de 4 dimensões. Mas há um lado negativo. Não podemos ignorar a chamada «seta do tempo». As três dimensões físicas que experimentamos não têm nenhuma direcção privilegiada. Uma partícula pode mover-se para trás e para a frente ao longo de uma linha sem contradizer as leis da física. No entanto, essa mesma partícula não pode ir para a frente e para trás no tempo. Há algo inerentemente diferente acerca do tempo, que contrasta com as outras três dimensões. Em geral, não queremos que a nossa quarta dimensão tenha esta propriedade restritiva.

Na prática, os espaços de dimensão superior aparecem naturalmente. A previsão do movimento de uma nave espacial requer seis dimensões — três dimensões para a sua posição e três dimensões para a sua velocidade. Para identificar as posições e velocidades do Sol, da Terra e da Lua, precisamos de dezoito dimensões. Um modelo financeiro de um economista, um estudo populacional de um ecologista, e a teoria quântica de um físico podem possuir um elevado número de variáveis (cada uma das quais contribuindo com uma dimensão). De um ponto de vista estritamente matemático, podemos acrescentar tantas dimensões quantas necessárias.

Independentemente da interpretação do nosso espaço de muitas dimensões, na nossa abordagem vamos supor que todas as dimensões são reais, no sentido em que são todas como uma das três dimensões do espaço físico. Não estamos a afirmar que existem mais do que três dimensões físicas. Talvez existam, talvez não (os físicos que estudam a teoria das cordas alegam que existem pelo menos dez dimensões). Do ponto de vista matemático, isso é irrelevante.

Denotamos o espaço euclidiano de dimensão  $n$  por  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathbb{R}^1$  é o conjunto dos números reais — a linha que representa os números que estudamos na escola. Cada ponto desta linha pode ser representado por um único

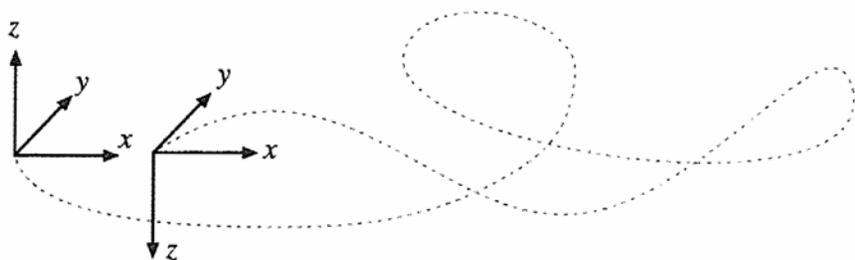


Figura 22.2. Eixos coordenados numa variedade tridimensional não orientável.

valor de uma variável,  $x$ .  $\mathbb{R}^2$  é o plano infinito. Tem um valor no eixo dos  $x$ , e outro valor no eixo dos  $y$ , e utilizando estes eixos de coordenadas, todos os pontos podem ser representados por um par ordenado  $(x, y)$ . O espaço euclidiano tridimensional é denotado por  $\mathbb{R}^3$ , e cada ponto em  $\mathbb{R}^3$  é representado unicamente por um triplo ordenado de números reais  $(x, y, z)$ . Matematicamente, é assim trivial estender estas noções ao espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Cada ponto em  $\mathbb{R}^n$  pode, então, ser descrito, de forma única, por um  $n$ -tuplo ordenado,  $(x_1, \dots, x_n)$ . Podemos, assim, trabalhar com estes espaços de grande dimensão quer eles existam fisicamente ou não.

Passámos muito tempo a analisar as superfícies. Descrevemo-las como sendo objectos localmente bidimensionais. Uma formiga vivendo numa superfície tem dois graus de liberdade. Podemos generalizar esta mesma ideia para objectos de dimensão superior. Uma *variedade de dimensão  $n$* , ou  *$n$ -variedade*, é um objecto topológico que localmente se parece com um espaço euclidiano de dimensão  $n$ . Um habitante de uma destas variedades tem  $n$  graus de liberdade. Da mesma forma que no caso das superfícies, as variedades apresentam simplicidade local, mas complexidade global. Estas podem ter «buracos» ou outra topologia não trivial. Mas, independentemente das características globais, todas as variedades de dimensão  $n$ , parecem-se, quando observadas de perto, com  $\mathbb{R}^n$ .

Tal como no caso das superfícies, as  $n$ -variedades podem ser orientáveis ou não. A maneira mais fácil de testar a orientabilidade de uma variedade é usar os critérios de Dyck (capítulo 16). Suponhamos que temos dois referenciais de coordenadas, iguais, numa  $n$ -variedade não orientável. Então, é possível movermos um destes sistemas de coordenadas ao longo de um caminho de tal forma que, quando ele regresse ao ponto inicial, não podemos alinhar correctamente todos os eixos dos dois sistemas. Por exemplo, numa 3-variedade não orientável se, depois de efectuar o tal trajecto, alinharmos os eixos dos  $x$  e dos  $y$ , o eixo dos  $z$  de um dos referenciais aponta na direcção oposta ao do outro (ver figura 22.2).



Figura 22.3. Símplices de dimensões 0, 1, 2 e 3

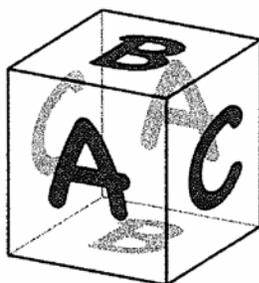


Figura 22.4. Podemos colar as faces correspondentes de modo a obter um *toro* tridimensional

As variedades de qualquer dimensão podem ter bordos ou fronteiras, e o bordo de uma  $n$ -variedade é uma variedade de dimensão  $n - 1$ . A fronteira de uma 1-variedade é uma 0-variedade (dois pontos), o bordo de uma 2-variedade (superfície) é uma 1-variedade (uma ou mais curvas), e o bordo de uma 3-variedade (um sólido) é uma superfície. Por exemplo, a fronteira de um *toro* sólido é o *toro* usual (oco). A fronteira de uma bola sólida é uma esfera e, mais geralmente, a  $n$ -bola,  $B^n$ , é uma  $n$ -variedade cujo bordo é a  $(n - 1)$ -esfera,  $S^{n-1}$  (recorde as definições de  $S^n$  e  $B^n$ , no capítulo 19).

A história das variedades remonta a Riemann e ao seu estudo das funções complexas multi-valoradas e as respectivas *superfícies de Riemann* associadas. Mas foi perto do início do século xx que Poincaré argumentou que as variedades eram um importante objecto de estudo, tendo indicado diversas maneiras de as descrever. Provavelmente, a forma mais simples é exprimindo-as como subconjuntos do espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ , usando uma ou várias equações. Por exemplo,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  representa uma esfera e  $(3 - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = 1$  é um *toro*. Ambos são subconjuntos de  $\mathbb{R}^3$ .

Por vezes, Poincaré apresentava as variedades como «poliedros» de  $n$ -dimensões a que chamou *complexos simpliciais*. Num complexo simplicial, a generalização dos conceitos de vértice, aresta e face, é designado por *simplex*. Podemos assumir que todos os simplices são triângulos, ou os respectivos análogos de dimensão superior. Como podemos ver

na figura 22.3, um  $k$ -símplice é a figura  $k$ -dimensional determinada por exactamente  $k + 1$  pontos. Um 0-símplice é um ponto, um 1-símplice é um segmento de recta, um 2-símplice é um triângulo, um 3-símplice é uma pirâmide triangular, e assim por diante. Num complexo simplicial, assumimos que quando dois símplices vizinhos se intersectam, esta união é feita ao longo de símplices de menor dimensão (repare-se que, tal como os poliedros de Hessel [capítulo 15] não eram superfícies, nem todos os complexos simpliciais são variedades).

Uma outra forma que Poincaré usou para descrever variedades foi generalizando a construção de Klein das superfícies. Tal como Klein construía superfícies colando os lados, dois a dois, de certos polígonos, Poincaré criou  $n$ -variedades colando as «faces» de poliedros  $n$ -dimensionais. Obtemos um *toro* quando colamos os lados opostos, sem torções, de um quadrado. Do mesmo modo, construímos um 3-*toro* (o análogo tridimensional de um *toro*) colando os lados opostos de um cubo aos pares e sem torções (ver figura 22.4). Um 3-*toro* é um exemplo de uma 3-variedade fechada orientável.

A definição abstracta de variedade não especifica onde a variedade «vive». Fomos capazes de definir e compreender as propriedades da garrafa de Klein, sem nos preocuparmos em saber que não podia existir em  $\mathbb{R}^3$ . Podemos perguntar: dada uma  $n$ -variedade genérica, é sempre possível colocá-la nalgum espaço euclidiano,  $\mathbb{R}^m$ , de modo a não ter auto-intersecções? Nesse caso, quão grande tem que ser o valor de  $m$ ? Hassler Whitney mostrou que qualquer  $n$ -variedade pode ser colocada nalgum espaço euclidiano de dimensão, no máximo,  $2n$ . Isto tornou-se conhecido como o *teorema do mergulho de Whitney*.

No capítulo 17, abordámos o teorema de classificação das superfícies. Todas as superfícies são esferas às quais colamos alças ou esferas com chapéus cruzados. É razoável perguntar se é possível classificar  $n$ -variedades para  $n$  superior a dois. Acontece que este é um problema extremamente difícil. No capítulo 17, afirmámos que a dimensão de uma  $n$ -variedade é um invariante topológico, que é impossível, por exemplo, uma 5-variedade ser homeomorfa a uma 7-variedade. No entanto, até isto foi um resultado difícil de justificar. Foi somente em 1911 que Brouwer provou o teorema da invariância de dimensão<sup>2</sup>, que afirma que  $\mathbb{R}^n$  não é homeomorfo a  $\mathbb{R}^m$  quando  $m \neq n$ . Mais tarde, vamos encontrar uma das questões de classificação mais famosas, e cuja solução correcta vale 1 milhão de dólares.

A importância deste problema de classificação não deve ser subestimado. Uma das questões básicas em aberto é: qual a forma do universo? Pondo os físicos que trabalham em teorias de cordas de lado, vivemos

aparentemente num gigantesco universo tridimensional, uma 3-variedade (presumivelmente sem bordo!). Quais são as propriedades desta variedade? É o seu diâmetro finito, ou prolonga-se para sempre? É topologicamente o mesmo que  $\mathbb{R}^3$  ou tem algumas características topológicas não triviais? Ainda mais bizarro, podemos perguntar se o universo é orientável. Seria possível que um astronauta destro voasse para longe da Terra e regressasse canhoto?

Agora que temos a noção de variedades de todas as dimensões, é natural perguntar se podemos aplicar-lhes uma fórmula de Euler. Para isso, devemos regressar aos poliedros. Cauchy foi o primeiro a vislumbrar a generalização da fórmula de Euler para dimensões superiores<sup>3</sup>. No mesmo artigo em que prova a fórmula de Euler, projectando os poliedros num plano, também enuncia e demonstra um análogo de dimensão superior desta fórmula. Ele afirmou que se tivermos vértices, arestas e faces inseridos no interior de um dado poliedro convexo, de modo a dividi-lo em  $S$  outros poliedros convexos, e se o número total de vértices, arestas e faces (incluindo aquelas situadas no interior do poliedro subdividido) são  $V$ ,  $A$  e  $F$ , respectivamente, então

$$V - A + F - S = 1.$$

Para ilustrar este teorema de Cauchy, consideremos as decomposições do octaedro e do cubo na figura 22.5. Uma nova face no interior do octaedro divide-o em dois poliedros, pelo que  $S = 2$ . Há 6 vértices, 12 arestas e 9 faces. Como afirmado por Cauchy,  $6 - 12 + 9 - 2 = 1$ . Da mesma forma, o cubo está dividido em três poliedros com um total de 12 vértices, 22 arestas e 14 faces, e temos  $12 - 22 + 14 - 3 = 1$ .

Em 1852, Ludwig Schläfli descobriu uma versão da fórmula de Euler que se verifica para poliedros convexos de qualquer dimensão, mas o seu trabalho não foi publicado na íntegra antes de 1901, e até então os seus resultados já tinham sido também redescobertos por outros<sup>4</sup>. Suponhamos que  $P$  é um poliedro  $n$ -dimensional com  $b_0$  vértices,  $b_1$  arestas,  $b_2$  faces e, em geral,  $b_k$  faces de dimensão  $k$ . Schläfli imaginava estes poliedros  $n$ -dimensionais como conjuntos oclos delimitados por faces de dimensão  $n - 1$  — o que, neste caso, significa que  $b_n = 0$ . Podemos então definir a

---

<sup>3</sup> Por conveniência, estamos a generalizar a definição de face, de modo a chamar uma face de dimensão 0 a um ponto, e face de dimensão 1 a uma aresta. Assim, as faces usuais serão chamadas faces de dimensão 2, uma face de dimensão 3 será um subpoliedro tridimensional, e assim por diante. (N. do T.)

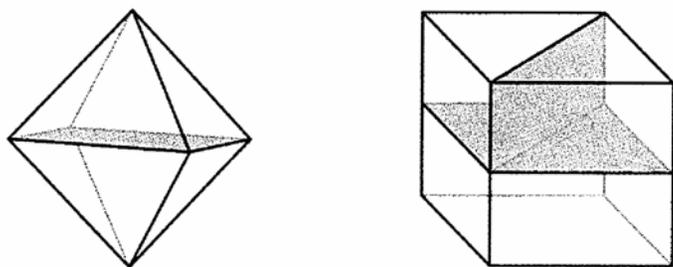


Figura 22.5. Decomposições de um octaedro e de um cubo

característica de Euler, generalizando a usual soma alternada para as faces de dimensões superiores:  $\chi(P) = b_0 - b_1 + b_2 - \dots \pm b_{n-1}$ . Schläfli observou que  $\chi(P) = 0$  sempre que  $n$  é ímpar, e que  $\chi(P) = 2$  quando  $n$  é par.

Vamos examinar os resultados de Cauchy e Schläfli do ponto de vista da topologia moderna. Em primeiro lugar, tanto Cauchy como Schläfli consideraram poliedros convexos, que não têm buracos ou túneis. Topologicamente, os poliedros  $n$ -dimensionais ocus de Schläfli são homeomorfos à esfera  $(n - 1)$ -dimensional,  $S^{n-1}$ . Assim, o teorema de Schläfli mostra que  $\chi(S^n) = 0$  quando  $n$  é ímpar e  $\chi(S^n) = 2$ , quando  $n$  é par. Por outro lado, Cauchy supôs que os seus poliedros convexos eram sólidos, pelo que são topologicamente equivalentes a uma bola tridimensional,  $B^n$ . Cauchy mostrou que  $\chi(B^3) = 1$ , e hoje em dia é sabido que  $\chi(B^n) = 1$  para qualquer dimensão  $n$ . Para verificar isto, podemos construir  $B^n$  «preenchendo» um poliedro de Schläfli oco com a face  $n$ -dimensional que lhe falta para ficar sólido. Assim,  $\chi(B^n) = \chi(S^{n-1}) + (-1)^n$ . Para  $n$  par,  $\chi(B^n) = 0 + 1 = 1$ , e para  $n$  ímpar,  $\chi(B^n) = 2 - 1 = 1$ .

A próxima generalização para dimensão superior foi obtida por Listing. Já por diversas vezes nos cruzámos com Listing. Ele contribuiu para a teoria dos grafos (capítulo 11), foi o primeiro matemático a estudar nós (capítulo 18), descobriu a banda de Möbius antes de Möbius, e inclusivamente cunhou o termo topologia (capítulo 16). Na verdade, ele foi o primeiro a enquadrar a fórmula de Euler num ponto de vista verdadeiramente topológico, e foi um dos primeiros matemáticos a *raciocinar* como topólogo. Podíamos esperar que fosse considerado um dos gigantes da topologia. Na realidade, ele foi largamente ignorado em vida e permaneceu como uma figura obscura ao longo de muitos anos após a sua morte. Até na actualidade, o *Dicionário de Biografias Científicas*, um conjunto de dezoito volumes contendo pequenas biografias dos mais importantes cientistas e matemáticos da história, não contém uma entrada para Listing.

Não é clara a razão pela qual ele nunca ganhou o seu lugar na história. O seu *pedigree* académico era excelente. Foi estudante de doutoramento de Gauss, e permaneceu no círculo íntimo do seu mentor até ao dia da sua morte (de facto, Listing estava presente no momento da sua morte). Durante oito anos foi vizinho de Riemann (surpreendentemente, não há nenhuma evidência de colaboração ou de conversa significativa entre estes dois matemáticos, que tanto poderiam ter compartilhado. Foi sugerido que Listing poderia ter tido receio que a tuberculose que havia devastado a família de Riemann fosse contagiosa<sup>5</sup>). Listing fez igualmente importantes contribuições nalgumas áreas da ciência, tal como a óptica. Ele deu nome a vários outros termos além da topologia, que subsistiram até hoje, tal como «mícron», a unidade de um milionésimo de um metro.

Talvez a sua falta de visibilidade se deva às suas características pessoais. Embora fosse uma pessoa sociável e amável, sofria de psicose maníaco-depressiva, estava sempre em dificuldades financeiras devido a dívidas excessivas, e a sua esposa esteve várias vezes em conflito com a lei. Talvez tenha sido também o seu espírito inquieto que o afastava da matemática por vezes durante vários anos, as suas más decisões de carreira, ou a sua recusa em jogar os jogos políticos do meio académico. Também pode ter sido a sua forma de apresentar a matemática. A sua escrita foi sempre muito focada nos detalhes, tornando difícil perceber a importância e profundidade da matemática que descobriu.

Listing escreveu duas monografias sobre topologia, uma em 1847 e outra em 1861<sup>6</sup>. A primeira, chamada *Topologie*, que foi mencionada anteriormente, consistia principalmente nas suas reflexões sobre a topologia. A segunda, com o longo título de *Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern* (O Censo de complexos espaciais ou a generalização do Teorema de Euler para poliedros), continha as suas generalizações da fórmula de Euler para objectos tridimensionais não convexos. Em 1884 P. G. Tait lamentou-se de que os escritos de Listing sobre topologia ainda não tivessem sido resgatados da sua obscuridade muito imerecida e publicados na roupagem da língua inglesa, especialmente quando tantas coisas relativamente menos úteis, ou pelo menos não tão dignas, tenham já assegurado essas honras<sup>7</sup>.

No *Census*, Listing abandonou a visão poliédrica rígida destas formas; em vez disso, deu ao problema um tratamento topológico. Listing também contava o número de vértices, arestas, faces e regiões (tridimensionais), mas permitia que estas entidades tivessem topologia não trivial, ou *cyclosis* (como ele a chamava). Por exemplo, ele contava uma circunferência como uma aresta e uma esfera como uma face, mas alterava estes

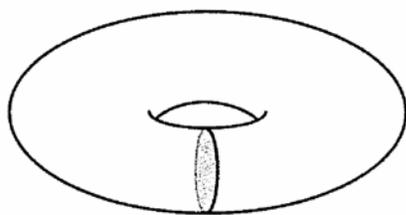


Figura 22.6. Uma decomposição de um *toro* sólido

números tendo em conta a sua topologia intrínseca. Contava um cilindro como uma face, mas uma vez que o cilindro contém um lacete não trivial, subtraía uma unidade. Assim, se  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ , são os números de vértices, arestas, faces, e regiões, cada um deles convenientemente subtraído das suas *cyclosis*, então  $A - B + C - D = 0$ .

Para dar uma ideia de como funciona a decomposição de Listing, vamos aplicá-la ao *toro* sólido com a decomposição mostrada na figura 22.6. Esta decomposição não tem vértices, tem uma única aresta circular, tem duas faces (uma em forma de cilindro e outra em forma de disco) e tem duas regiões (o interior do cilindro e o espaço ambiente, que ele sempre contou). Como esta decomposição não tem vértices,  $A = 0$ . Existe uma aresta, mas sendo um circuito fechado, pomos  $B = 1 - 1 = 0$ . Há duas faces, mas uma vez que a face cilíndrica contém um circuito fechado em torno da sua circunferência de rotação, temos que subtrair 1 a  $C$ . Assim,  $C = 2 - 1 = 1$ . Por último, existem duas regiões, mas uma vez que o espaço exterior contém um lacete não trivial, temos  $D = 2 - 1 = 1$ . Como previsto por Listing,  $A - B + C - D = 0 - 0 + 1 - 1 = 0$ .

A abordagem de Listing a este problema foi notável e perspicaz. Foi a primeira tentativa de tratar a fórmula de Euler 3-dimensional de uma forma verdadeiramente topológica. No entanto, está longe de ser perfeita. No mínimo, esta forma de calcular  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  era confusa. Listing abandonava toda a bela simplicidade dos vértices, arestas e faces de Euler. Em contrapartida, devemos entender a topologia de cada bloco de construção da decomposição de Listing.

A próxima grande contribuição para a topologia em dimensão superior seria levada a cabo por Riemann e pelo matemático italiano Enrico Betti (1823-1892). A fim de entender estas contribuições, devemos regressar ao estudo das superfícies de Riemann.

Na sua dissertação de doutoramento de 1851, Riemann tinha apresentado um invariante topológico que conta o número de «túneis» numa superfície orientável. Ele deu-lhe o nome de *número de conectividade* da

superfície<sup>8</sup>. Uma superfície (com ou sem bordo) tem número de conectividade  $n$ , ou é  $n$ -conexa<sup>9</sup>, se  $n$  é o maior número de cortes que se pode fazer sem desconectar a superfície<sup>10</sup>. Se a superfície tem bordo, então os cortes devem começar e terminar nalguma parte desse bordo. Se a superfície não tem bordo, então o primeiro corte deve começar e terminar no mesmo ponto (e a partir daqui, a superfície passa a ter bordo).

Na figura 22.7 ilustramos três superfícies com bordo: um cilindro, um disco com três buracos e uma banda de Möbius. As linhas tracejadas representam os cortes. O cilindro e o disco com buracos têm números de conectividade 1 e 3, respectivamente. O trabalho de Riemann sobre os números de conectividade antecede a descoberta, por Möbius, das superfícies não orientáveis, mas podemos calcular os números de conectividade para superfícies não orientáveis exactamente da mesma forma que para as orientáveis. Assim, a banda de Möbius é 1-conexa.

A superfície fechada mais simples é a esfera. Qualquer corte ao longo de uma curva fechada irá desconectar a esfera. Por isso, ela é 0-conexa. Se cortarmos um *toro* à volta da sua circunferência menor, ele transforma-se num cilindro. Podemos então cortá-lo uma segunda vez ao longo do comprimento do cilindro, obtendo um rectângulo. O número de conectividade do *toro* é então 2. Da mesma forma, podemos calcular os números de conectividade de outras superfícies. O duplo *toro* é 4-conexo, o plano projectivo é 1-conexo e a garrafa de Klein é 2-conexa.

Embora possa parecer que o número de conectividade é um novo e importante invariante topológico, na verdade é o número de Euler de forma disfarçada. O leitor astuto deve ter reparado na relação entre o número de conectividade e o género para superfícies fechadas orientáveis. De facto, Riemann também reparou neste facto — o número de conectividade é simplesmente o dobro do género. Se soubermos apenas um dos invariantes: género, número de Euler ou o número de conectividade, então saberemos os outros dois.

Vamos ser mais precisos sobre a relação entre o número de conectividade e o número de Euler. Imagine que antes de efectuar os cortes, desenhemos linhas tracejadas ao longo das linhas de corte numa superfície  $n$ -conexa,  $S$ . Isto dá-nos uma decomposição muito simples da superfície. Por simplicidade, podemos supor que cada corte começa e termina no mesmo ponto, de modo a que  $V = 1$ . No final dos nossos cortes, ficamos

---

<sup>8</sup> Hoje em dia, o termo  $n$ -conexo tem um significado semelhante, mas distinto.

<sup>10</sup> Na verdade, o número de conectividade definido por Riemann era uma unidade superior ao que definimos aqui, mas vamos manter esta definição para ser consistente com a terminologia moderna.

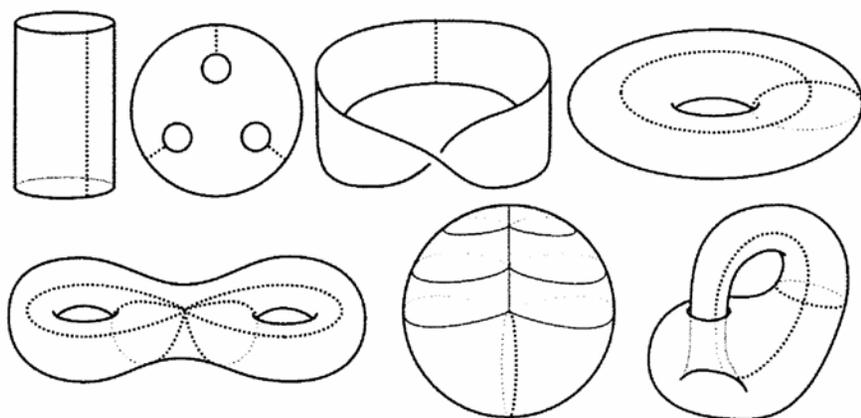


Figura 22.7. Cortes para determinar os números de conectividade de várias superfícies

com uma única face, e por isso  $F = 1$ . Além disso, cada linha de corte é uma aresta, pelo que  $A = n$ . Isto dá-nos a seguinte relação simples entre o número de conectividade e o número de Euler:

$$\chi(S) = 1 - n + 1 = 2 - n.$$

Perto do fim da sua vida, a saúde de Riemann começou a declinar. Entre 1862 e sua morte em 1866, Riemann fez várias viagens a Itália para convalescença. Enquanto lá esteve, visitava com frequência o seu amigo Betti, com quem se cruzou em Göttingen em 1858. Betti foi professor universitário na Universidade de Pisa. Ele também tinha leccionado no liceu, foi membro do parlamento e prestou serviço como senador. Foi um matemático famoso e um professor dotado, tendo sido parcialmente responsável pelo renascimento da matemática em Itália, após a reunificação.

Durante as suas visitas a Itália, Riemann conversou com Betti sobre a forma de estender os números de conectividade a variedades de maior dimensão. É difícil dizer de que forma cada um deles contribuiu para a teoria. Foi Betti, que, em 1871, publicou estas generalizações, mas as cartas e apontamentos provam que Riemann tinha elaborado os fundamentos desta teoria a partir de 1852.

A ideia por trás das generalizações é que, tal como Riemann contou o número máximo de cortes ao longo de linhas unidimensionais desenhadas na superfície, numa variedade de  $n$  dimensões podemos também contar o número máximo de variedades  $m$ -dimensionais (sujeitos a crité-

rios um tanto complicados) para cada inteiro  $m \leq n$ . Isto dá um número de conectividade  $b_m$  para cada  $m$  de 0 a  $n$ . Nesta notação,  $b_1$  é o número de conectividade de Riemann.

Betti provou que estes  $b_m$  eram invariantes topológicos da variedade. No entanto, trabalhar com variedades de grande dimensão torna-se complicado, e mais tarde ficou manifesto que havia erros subtis presentes nos argumentos e nas definições de Betti. No entanto, o trabalho de Betti representou um passo extremamente importante para a compreensão da topologia das variedades de dimensão  $n$ .

Foi Henri Poincaré quem tomou como objectivo corrigir as falhas de Betti. Poincaré fez isso e muito mais.

## Capítulo 23

# Henri Poincaré e o Desenvolvimento da Topologia

*Os padrões de um matemático, tal como os de um pintor ou de um poeta, têm que ser belos; as ideias, tal como as cores ou as palavras, devem encaixar-se de forma harmoniosa. A beleza é o primeiro teste: não há, neste mundo, lugar permanente para a matemática feia.*

— G. H. Hardy<sup>1</sup>

Se considerarmos que os teoremas de Euler sobre as pontes de Königsberg e os poliedros marcam o nascimento da topologia, e as contribuições de Listing, Möbius, Riemann, Klein e outros matemáticos do século XIX representam a adolescência da topologia, então a sua maturidade é assinalada pela obra de Henri Poincaré. Antes desta, havia teoremas que agora classificamos como topológicos, mas foi apenas nos derradeiros anos do século XIX que Poincaré sistematizou esta área.

Analisando a totalidade do seu trabalho, encontramos um tema comum: a sua visão topológica da matemática. Talvez essa abordagem qualitativa do assunto tenha resultado da sua aversão a (ou, como ele dizia, pela sua dificuldade em) realizar cálculos matemáticos. Talvez fosse uma resposta à sua notória falta de talento artístico (recordemos que ele chamava à geometria «a arte de raciocinar correctamente sobre figuras mal desenhadas»). Independentemente da razão, Poincaré chegou a reconhecer este traço comum, tendo escrito: «Todos os problemas sobre os quais trabalhei me conduziram à *Analysis Situs*<sup>2</sup>.»

Poincaré referia-se ao artigo seminal de 123 páginas *Analysis Situs*<sup>3</sup> que escreveu em 1895. Na década seguinte produziu mais cinco inovadoras continuações deste trabalho, ou complementos, como lhes chamou<sup>4</sup>. Acerca destes seis artigos, Jean Dieudonné escreveu:

Como em muitos dos seus trabalhos, ele deu rédea solta aos seus poderes criativos e à sua extraordinária «intuição», que só muito raramente o traiu; em quase todas as secções há ideias originais. Mas não devemos procurar definições precisas, sendo muitas vezes necessário adivinhar o que ele tinha em mente, interpretando o contexto. Relativamente a muitos resultados, ele simplesmente não deu nenhuma demonstração, e quando se dedicava a escrever uma prova, quase não há argumentos que não levantem dúvidas. O artigo representa realmente um modelo para futuros desenvolvimentos destas ideias completamente novas, pois cada uma delas exigiria a criação de uma nova técnica para ficar colocada em base sólida<sup>5</sup>.

Imaginemos um Johnny Appleseed<sup>6</sup> da matemática, vagueando por uma terra estéril, espalhando sementes que mais tarde se transformarão em árvores repletas de frutos. Não é exagerado dizer-se que praticamente toda a investigação em topologia até ao início da década de 1930 derivou do trabalho de Poincaré.

Um dos seus contemporâneos escreveu: «No domínio da *Analysis Situs*, Poincaré deixou-nos recentemente uma abundância de novos resultados, mas que, ao mesmo tempo, levantam uma abundância de novas questões que ainda aguardam tratamento<sup>6</sup>.» Algumas lacunas e imprecisões nos argumentos de Poincaré eram importantes, e tardaram a ser resolvidas. A abordagem intuitiva do tema levada a cabo por Poincaré e pelos seus antecessores precisava de ser apoiada por argumentos matemáticos sólidos. Os padrões e métodos rigorosos de demonstração apareceram na topologia por volta de 1910 e demoraram várias décadas até se construir uma estrutura sólida para fundamentar os artigos de Poincaré.

Uma das muitas contribuições importantes de Poincaré foi a invenção do conceito de «homologia». Poincaré apresentou uma forma engenhosa de formalizar o estudo dos números de conectividade de Riemann e as generalizações de Betti para dimensão superior. Actualmente, a homo-

---

<sup>6</sup> Johnny Appleseed é a alcunha de John Chapman, lendário pioneiro norte-americano do século XIX, responsável por grandes plantações de macieiras em vários estados norte-americanos. (N. do T.)

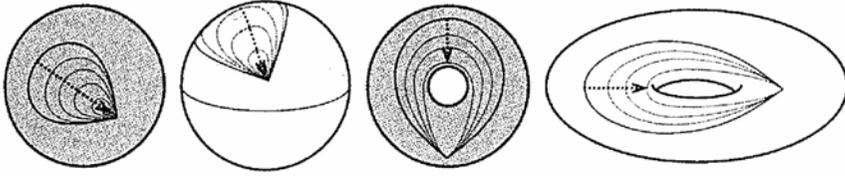


Figura 23.1. Um disco e uma esfera são simplesmente conexos, mas uma coroa circular e um *toro* não o são

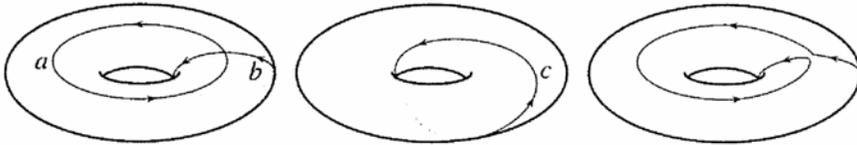


Figura 23.2. O ciclo  $c$  pode ser deformado no ciclo  $a + b$

logia é o principal ingrediente no estudo da topologia das variedades. Poincaré introduziu a homologia no livro *Analysis situs* e refinou a sua abordagem em cada um dos respectivos complementos. A teoria da homologia levou cerca de 30 anos a tomar a sua forma moderna.

Está para além do âmbito deste livro descrever a teoria da homologia, tanto em termos modernos como na terminologia de Poincaré. Em alternativa, vamos contentar-nos com um tratamento superficial, focado em aspectos intuitivos. Em vez de fornecer a versão  $n$ -dimensional discutiremos apenas a homologia unidimensional, em superfícies.

Uma maneira de entender a homologia para dimensão 1 é considerar curvas fechadas desenhadas numa superfície. Vamos considerar que estas curvas não estão fixas, e vamos deixá-las movimentar-se sobre a superfície. Uma tal curva pode alongar-se, encurtar e contorcer-se, sempre que necessário, desde que não se rompa ou saia da superfície.

As curvas fechadas mais simples são aquelas que são topologicamente triviais — uma tal curva fechada pode ser continuamente encolhida até se tornar num único ponto. Pode zigzaguear sem rumo ao longo da superfície, mas não pode romper-se, nem saltar para fora da superfície. Por exemplo, dado que uma esfera não tem túneis, qualquer curva fechada desenhada na sua superfície pode ser encolhida continuamente até se reduzir a um ponto. As superfícies mais simples são aquelas para as quais, tal como na esfera, todas as curvas fechadas são topologicamente triviais. Uma tal superfície é chamada *simplesmente conexa*. Como podemos ver na figura 23.1, um disco e uma esfera são simplesmente conexos, mas um anel e um *toro* não o são.

Desta forma, de acordo com a classificação de superfícies, concluímos que a esfera é a única superfície fechada simplesmente conexa. Todas as outras têm um número infinito de curvas fechadas não triviais. Poincaré percebeu que, embora seja incomportável considerar todos esses circuitos fechados, era importante enumerar as curvas fechadas essenciais, ou seja independentes e não-triviais, para cada superfície. Para as superfícies orientáveis, chamou a este número (que resulta ser finito) o primeiro número de Betti, em honra de Betti. Para determinar esse número, definiu uma curiosa aritmética no conjunto das curvas fechadas, que se escreve tal como a adição usual.

Em homologia, as curvas fechadas incluem uma orientação (um sentido determinado para o seu percurso) e denominam-se *ciclos*. Assim, os ciclos  $a$  e  $-a$  (o *simétrico* do ciclo  $a$ ), embora representem a mesma curva fechada, têm orientações opostas. A soma de dois ciclos  $a$  e  $b$  é a união desses dois ciclos preservando as respectivas orientações, assim,  $a + b$  e  $b + a$  representam o mesmo ciclo em homologia, ou com a notação que usaremos,  $a + b \equiv b + a$ . Às vezes, podemos pensar em  $a + b$  como uma nova curva fechada. De acordo com a nossa aritmética, podemos começar por percorrer a curva  $a$ , e depois a curva  $b$ , ou começar por percorrer  $b$ , e depois  $a$ . Estritamente falando, estas curvas são diferentes, mas elas representam o mesmo ciclo em homologia. Dois ciclos com orientações opostas cancelam-se, de modo que, por exemplo  $a + (-a) + b \equiv b$ . Além disso, se o ciclo  $a$  pode ser deformado para o ciclo  $b$ , então  $a \equiv b$ .

Para melhor entender o funcionamento desta adição, consideremos os três ciclos  $a$ ,  $b$  e  $c$  do *toro* na figura 23.2. Como se pode ver, é possível deformar o ciclo  $c$  de modo a coincidir com a curva fechada  $a$ , seguida do circuito  $b$ . Assim,  $c$  e  $a + b$  representam o mesmo ciclo, ou seja  $c \equiv a + b$ .

Se esta operação é realmente como uma soma, deve haver um ciclo que corresponde ao zero\*. Qual será o aspecto de um ciclo zero? O ciclo zero mais natural será aquele que pode ser reduzido a um ponto. Numa superfície simplesmente conexa, concluímos então que todos os ciclos são ciclos 0. Mas serão estes, os ciclos topologicamente triviais, os únicos ciclos 0? Vamos ver que não. O circuito fechado  $w$  na figura 23.3 dá uma volta à «cintura» do duplo *toro* e pode verificar-se que não pode ser encolhido por forma a reduzir-se a um ponto. No entanto, podemos deformá-lo continuamente até se transformar numa curva que percorre o ciclo  $u$ , depois o  $v$ , seguidamente o  $-u$ , e finalmente o  $-v$  (note-se as orientações). Portanto,  $w \equiv u + v + (-u) + (-v) \equiv 0$ .

---

\* Um ciclo 0, para fazer o papel do número zero, deve ter a propriedade de que,  $a + 0 \equiv 0 + a \equiv a$  para qualquer outro ciclo  $a$ . Em particular, para qualquer ciclo  $a$ , o ciclo  $a + (-a)$  é um ciclo zero, ou seja  $a + (-a) \equiv 0$ , de acordo com as operações descritas acima. (*N. do T.*)

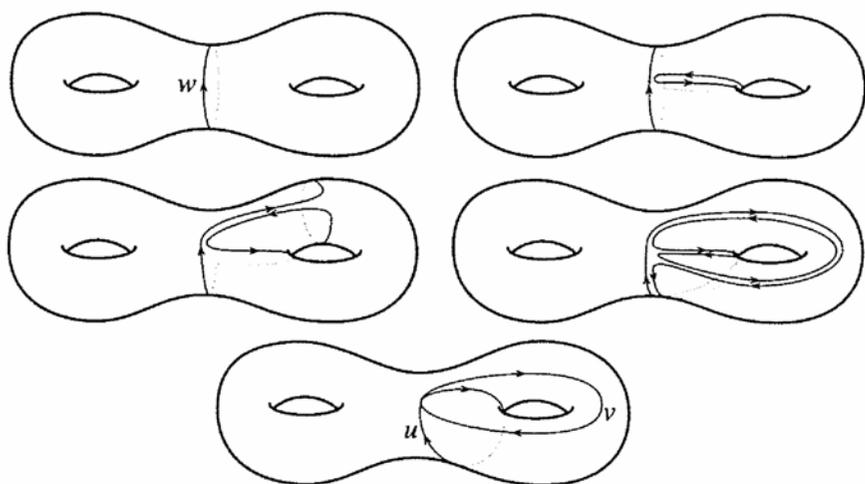


Figura 23.3. Um ciclo homólogo a zero, no duplo *toro*, que não pode ser encolhido até se tornar num ponto

Observemos, agora, que o ciclo  $c$  na figura 23.2 pode ser escrito como uma soma dos ciclos  $a$  e  $b$ . De facto, pode provar-se que qualquer ciclo num *toro* se pode escrever como uma soma repetida de ciclos  $a$  e de ciclos  $b$  (ou dos respectivos simétricos). Por outras palavras, dado um qualquer ciclo  $d$  no *toro*, é possível encontrar números inteiros  $m$  e  $n$ , de modo a que  $d = ma + nb$ . Desta forma,  $a$  e  $b$  são, em essência, os únicos ciclos a ter em conta; assim, de acordo com Poincaré, o primeiro número de Betti do *toro* é 2. Da mesma forma, para o duplo *toro* na figura 23.3, os ciclos  $u$  e  $v$  são essenciais, e há outros dois que rodeiam a outra alça de forma análoga. Assim, o primeiro número de Betti do *toro* duplo é 4.

Para superfícies orientáveis, o número destes «ciclos essenciais» é o primeiro número de Betti, mas para superfícies não orientáveis ocorre algo estranho. A nossa experiência diz-nos que, quando encontramos a equação  $a + a = 0$ , podemos concluir que  $a = 0$ . Isto verifica-se sempre com os números reais. No entanto, usando ciclos pode dar-se o caso de  $a \neq 0$ , mas  $a + a = 0$ . Na verdade, esta situação não é assim tão estranha. Muitos carros têm conta-quilómetros que vão desde 0 até 99 999 km. De acordo com um tal conta-quilómetros, verifica-se que  $50\,000 + 50\,000 = 0$ . Um outro exemplo são os relógios digitais. À meia-noite indicam 00:00, e o meio-dia é às 12:00, mas imediatamente antes da meia-noite temos a hora 23:59. Assim, 12 horas após a hora 12:00 volta a ser 00:00, ou seja  $12 + 12 = 0$ .

Para observar esta estranha aritmética com ciclos em acção, voltamos ao plano projectivo e à garrafa de Klein. Vimos na figura 22.7 que o número

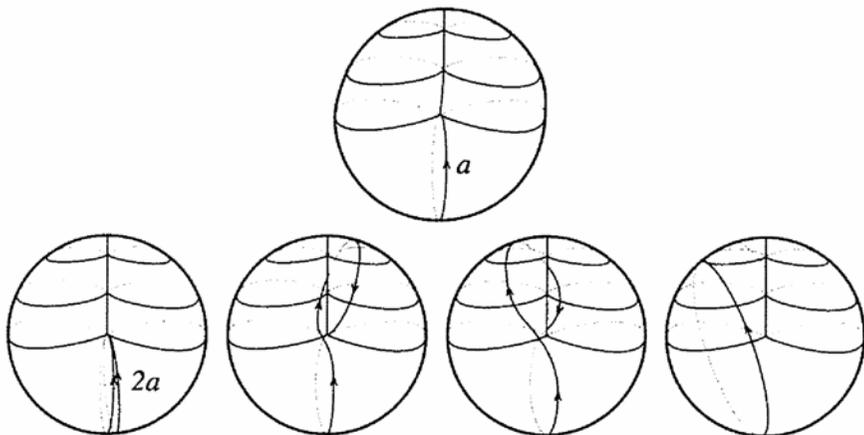


Figura 23.4. Para o plano projectivo,  $2a \equiv 0$

de conectividade do plano projectivo é 1. Vamos denotar o ciclo correspondente por  $a$ , e dar-lhe uma orientação, como na figura 23.4. Agora,  $a + a$ , ou  $2a$  para abreviar, é o ciclo  $a$  percorrido duas vezes, no mesmo sentido. É um facto notável, como podemos ver na figura, que este ciclo duplicado resulta ser topologicamente trivial — através da manipulação deste ciclo é possível reduzi-lo até ficar um ponto. Portanto,  $2a \equiv 0$ .

Uma situação semelhante ocorre para a garrafa de Klein, com uma ligeira diferença no método. Anteriormente, vimos que o número de conectividade da garrafa de Klein é 2. Designemos os ciclos correspondentes (orientados) por  $b$  e  $c$ , como na figura 23.5. Como podemos ver, o ciclo duplicado  $2b$  é equivalente a  $b + c + (-b) + (-c)$ . Por outras palavras, embora  $2b$  não seja, neste caso, topologicamente trivial (não se pode reduzir até um único ponto),  $2b \equiv 0$ .

Assim, podemos separar os ciclos essenciais em duas classes, dependendo se apresentam, ou não, este comportamento. Continuamos a chamar ao número de ciclos que têm o comportamento usual o primeiro número de Betti. Mas, se a superfície tem um ciclo  $a$  para o qual  $na \equiv 0$  (e  $n$  é o menor número inteiro positivo para o qual esta equação é válida), então chamamos a  $n$  um coeficiente de torção da superfície em causa. Assim, para o plano projectivo, o primeiro número de Betti é 0, e 2 é um coeficiente de torção, enquanto para a garrafa de Klein este número de Betti é 1, e 2 é igualmente um coeficiente de torção.

De modo semelhante, Poincaré definiu o segundo, e todos os outros números de Betti de dimensão superior, bem como os respectivos coeficientes de torção, usando como ciclos, em lugar de caminhos fechados,

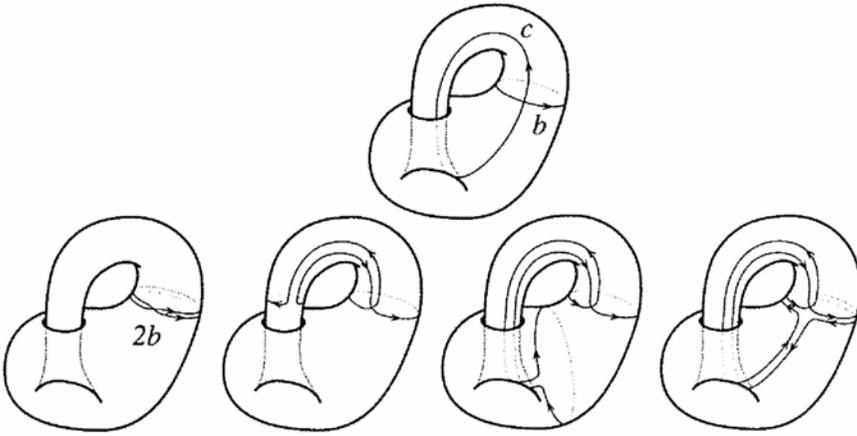


Figura 23.5. Para a garrafa de Klein,  $2b \equiv b + c + (-b) + (-c) \equiv 0$

Tabela 23.1: Números de Betti e coeficientes de torção de algumas superfícies

Superfície $S$	$\chi(S)$	$b_0$	$b_1$	Coeficientes de torção	
				$b_2$	(em dimensão 1)
Esfera	2	1	0	1	não existem
Toro	1	1	2	1	não existem
Duplo toro	-2	1	4	1	não existem
Toro com $g$ túneis	$2 - 2g$	1	$2g$	1	não existem
Garrafa de Klein	0	1	1	0	2
Plano projectivo	1	1	0	0	2
Esfera com $c$ chapéus cruzados	$2 - c$	1	$c - 1$	0	2

variedades de dimensão superior. Poincaré mostrou que, tanto os números de Betti bem como os coeficientes de torção, são invariantes topológicos das variedades. Na tabela 23.1 mostramos os números de Betti e os coeficientes de torção para as superfícies fechadas. Nesta tabela,  $b_i$  denota o  $i$ -ésimo número Betti, ou o número de Betti de dimensão  $i$ .

Na sua *Analysis Situs*, Poincaré deu continuidade às ideias de Riemann e de Betti. Como resposta à crescente necessidade de rigor, alterou o seu rumo nos trabalhos posteriores. Foi nesta altura que começou a trabalhar com complexos simpliciais, a generalização  $n$ -dimensional dos poliedros.

\* Poincaré seguiu a convenção de Riemann, definindo o número  $b_i$  como uma unidade superior ao valor que aqui indicamos; mas, por simplicidade, utilizamos a convenção moderna.

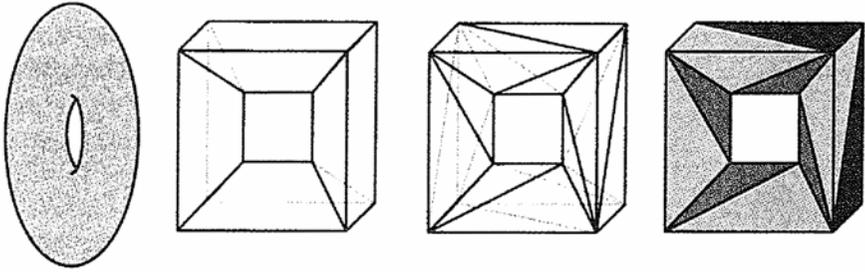


Figura 23.6. Um complexo simplicial definido num *toro* sólido

Neste contexto, os ciclos em homologia foram definidos a partir dos blocos de construção destes complexos. Por exemplo, um ciclo de dimensão 1 não podia ser uma curva fechada arbitrária no  $n$ -poliedro, mas tinha que seguir uma sequência de arestas neste complexo, terminando no ponto inicial.

Na prática, trabalhar com complexos simpliciais é muito mais simples do que trabalhar com o primeiro modelo de Poincaré. Poincaré notou que todo o complexo pode ser descrito em termos de uma matriz de incidência, uma matriz rectangular, cujas entradas indicam quais os simplices que são vizinhos. Usando estas matrizes, o cálculo dos números de Betti e dos coeficientes de torção torna-se um processo automático.

Com esta noção de poliedros de dimensão superior, é natural perguntarmos se o número de Euler se pode generalizar a variedades de maior dimensão. Com efeito, tal como Cauchy e Schläfli antes dele, Poincaré generalizou o número de Euler, considerando a soma alternada do número de  $k$ -simplices (ou seja, os simplices de dimensão  $k$ ). Por outras palavras, definiu o número de Euler como sendo:

$$\chi(M) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots \pm a_n$$

sempre que uma  $n$ -variedade  $M$  pode ser decomposta como um complexo simplicial contendo  $a_k$  simplices de dimensão  $k$ . Esta generalização do número de Euler (ou característica de Euler) para espaços  $n$ -dimensionais, chama-se actualmente a *característica de Euler-Poincaré* de  $M$ .

Por exemplo, um *toro* sólido é uma 3-variedade com bordo (o bordo é o *toro* usual, uma 2-variedade). Na figura 23.6, mostramos uma decomposição deste *toro* sólido como um complexo simplicial. Esta tem 12 vértices (0-simplices), 36 arestas (1-simplices), 36 faces (2-simplices), e 12 pirâmides triangulares (3-simplices). Assim,  $a_0 = 12$ ,  $a_1 = 36$ ,  $a_2 = 36$ , e  $a_3 = 12$ , e a característica de Euler-Poincaré é então  $\chi(\text{toro sólido}) = 12 - 36 + 36 - 12 = 0$ .

Tabela 23.2: A simetria dos números de Betti

Variedade	Números de Betti: $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$
$S^1$	1, 1
$S^2$	1, 0, 1
$S^n$	1, 0, ..., 0, 1
Toro	1, 2, 1
Duplo toro	1, 4, 1
Toro com $g$ túneis	1, $2g$ , 1

Tal como o número de Euler é um invariante topológico de superfícies, a característica de Euler-Poincaré é um invariante de  $n$ -variedades. Para demonstrar isto, Poincaré provou algo ainda mais interessante. Ele demonstrou que, se o número Betti de dimensão  $k$  é  $b_k$ , então, para uma  $n$ -variedade  $M$ ,

$$\chi(M) = b_0 - b_1 + b_2 - \dots \pm b_n.$$

Isto significa que, para calcular a característica de Euler-Poincaré, podemos deitar fora os coeficientes de torção, e tomar apenas a soma alternada dos números de Betti! Na tabela 23.1, podemos ver que esta igualdade se verifica para os números de Betti das superfícies. Dado que cada um dos  $b_k$  é um invariante topológico, então também o é a sua soma alternada. Desta forma fica provado que a característica de Euler-Poincaré é um invariante topológico.

Em 1895, Poincaré descobriu uma elegante relação simétrica entre os números de Betti<sup>7</sup>. A sequência dos números de Betti de algumas variedades está indicada na tabela 23.2. Poincaré observou que os números de Betti ocorrem aos pares, sendo que, para uma  $n$ -variedade, os primeiros números de Betti são iguais aos últimos:  $b_0 = b_n$ ,  $b_1 = b_{n-1}$  etc. Isto tornou-se o célebre teorema da dualidade de Poincaré.

TEOREMA DA DUALIDADE DE POINCARÉ

Se  $b_0, b_1, \dots, b_n$ , são os números de Betti de uma  $n$ -variedade fechada e orientável, então  $b_i = b_{n-i}$  para todo  $i$  entre 0 e  $n$ .

<sup>7</sup> Podemos mostrar que, pela forma como são definidos, numa variedade de dimensão  $n$ , ou num  $n$ -poliedro, apenas podem ser não nulos os números de Betti desde o  $b_0$  ao  $b_n$ . (N. do T.)

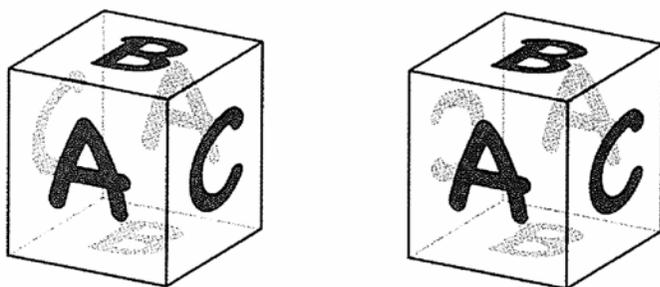


Figura 23.7. O *toro* tridimensional e uma variedade tridimensional não orientável

Encontrámos esta dualidade anteriormente, quando discutimos a simetria nos sólidos platónicos (capítulo 6) observada por Kepler. O uso do termo «dualidade», em ambos os casos, não é uma coincidência; a observação de Kepler é, de facto, a dualidade de Poincaré disfarçada. A dualidade de Poincaré afirma que, ao calcular números de Betti de uma variedade, podemos trocar os papéis dos simplices de dimensão  $i$  com os de dimensão  $(n - i)$ . A dualidade dos sólidos platónicos ilustra esta propriedade. Por exemplo, um icosaedro fornece uma decomposição da esfera em vértices, arestas e faces. Quando usamos a noção da dualidade de Kepler para transformar cada vértice do icosaedro numa face, e cada face num vértice, obtemos um dodecaedro, uma outra decomposição da esfera.

Na *Analysis Situs* Poincaré escreveu: «Este teorema não foi, creio eu, alguma vez escrito; é, no entanto, conhecido por muitos, que inclusive encontraram algumas aplicações do mesmo<sup>8</sup>.» Não sabemos quem eram estes outros, nem como usaram esta relação, mas o primeiro uso que Poincaré fez desta dualidade, foi na prova do facto surpreendente de que a característica de Euler-Poincaré de qualquer variedade orientável fechada de dimensão ímpar é zero!

De facto, consideremos o *3-toro*, a 3-variedade obtida colando os lados do cubo da esquerda na figura 23.7. Esta variedade tem números de Betti  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 3$ ,  $b_2 = 3$  e  $b_3 = 1$  (não vamos provar isto aqui), pelo que a sua característica de Euler-Poincaré é

$$\chi(3\text{-toro}) = 1 - 3 + 3 - 1 = 0.$$

Em geral, seja  $M$  uma qualquer variedade orientável fechada de dimensão ímpar  $n$ . A dualidade de Poincaré aplicada à soma alternada que determina a característica de Euler-Poincaré fornece pares de números de Betti iguais, mas com sinais opostos. Estes cancelam-se de modo a dar zero:

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= b_0 - b_1 + b_2 - \dots - b_{n-2} + b_{n-1} - b_n \\
&= (b_0 - b_n) - (b_1 - b_{n-1}) + \dots \pm [b_{(n-1)/2} - b_{(n+1)/2}] \\
&= 0 - 0 + 0 - \dots \pm 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Acontece que a característica de Euler-Poincaré de qualquer variedade fechada, de dimensão ímpar, mesmo não orientável, é igualmente zero. Omitimos aqui a justificação complexa deste facto, mas vamos ilustrá-la com um exemplo. A 3-variedade obtida colando os lados do cubo da direita da figura 23.7 não é orientável. Tem números Betti  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 2$ ,  $b_2 = 1$  e  $b_3 = 0$  (para esta variedade, há também torção em dimensões 1 e 2). Podemos ver que a dualidade de Poincaré não se aplica a este caso; no entanto, a característica de Euler-Poincaré é ainda zero:

$$\chi(M) = 1 - 2 + 1 - 0 = 0.$$

Devemos salientar que as variedades de dimensão ímpar com bordo (não fechadas) não precisam de ter característica de Euler-Poincaré zero. Por exemplo, a característica de Euler-Poincaré da bola  $n$ -dimensional,  $B_n$ , é 1 para qualquer valor de  $n$ .

Foi durante as três primeiras décadas do século xx que a topologia fez a transição de uma disciplina construída sobre argumentos intuitivos para uma teoria baseada nas demonstrações rigorosas. Ou seja, foi durante esse tempo que vários topólogos trabalharam de modo a remover as passagens obscuras, imprecisões, hipóteses infundadas, e outras falhas no brilhante trabalho de Poincaré.

Por exemplo, consideremos as duas hipóteses seguintes assumidas por Poincaré. Em primeiro lugar, ele supôs que todas as variedades podem ser expressas como complexos simpliciais, ou de forma mais concisa, que todas as variedades podem ser *trianguladas*. Em segundo lugar, admitiu que o *Hauptvermutung* se verificava para variedades arbitrárias (recorde-se que o *Hauptvermutung* afirma que, dadas duas partições de uma variedade, existe um refinamento de ambas, obtido acrescentando símlices, de modo a que, topologicamente, as partições são equivalentes). Acontece que, em geral, nenhuma destas hipóteses é verdadeira para variedades gerais. No entanto, mais tarde, os matemáticos mostraram que as conclusões de Poincaré são ainda válidas.

---

\* Note-se que, também para as superfícies não orientáveis, a dualidade de Poincaré não é válida em geral. Por exemplo, tanto a garrafa de Klein como o plano projectivo verificam  $b_0 \neq b_2$  (veja-se a tabela 23.1). (*N. do T.*)

A matemática alemã Emmy Noether (1882-1935) levou a cabo uma melhoria significativa das ideias de Poincaré. Noether, filha de um matemático, teve um percurso notável dados os preconceitos que foi forçada a superar. Ela era uma mulher no meio de uma área dominada por homens. Apenas em 1904 a Universidade de Erlangen permitiu a inscrição de mulheres, e até esta data ela apenas podia assistir às aulas. Completou o seu doutoramento em 1907. Em 1915, depois de começar a espalhar-se a sua reputação como matemática de primeira classe, Klein e David Hilbert (1862-1943) conduziram-na para Göttingen, com a intenção de a admitir como professora na faculdade. Mas somente em 1919 foi autorizada a ocupar esta posição; durante estes anos, as disciplinas que leccionou eram anunciadas sob o nome de Hilbert, sendo Noether indicada como assistente. Quando os nazis chegaram ao poder, a vida mudou para muitos alemães. Em 1933, a judia Noether foi forçada a deixar Göttingen e mudou-se para Bryn Mawr College, nos Estados Unidos. Morreu dois anos depois.

Noether é mais conhecida pelo seu trabalho pioneiro no campo da álgebra abstracta. Em termos gerais, a álgebra abstracta é o estudo de conjuntos munidos com uma ou mais operações binárias (sendo a adição, a multiplicação e os seus inversas, a subtracção e divisão, protótipos para operações com outros tipos de objectos).

Até meados da década de 1920, a homologia tinha sido descrita em termos dos números de Betti e dos coeficientes de torção. Foi necessário que Noether usasse a sua aptidão algébrica para reconhecer que havia significativamente mais estrutura na homologia. Ela compreendeu que o elemento-chave na homologia era a capacidade de somar e subtrair ciclos. Focando-se sobre esta aritmética, observou que a homologia era um caso particular de uma entidade algébrica chamada *grupo*, e que os *grupos de Betti*, ou *grupos de homologia* como são agora chamados, eram a forma certa de compreender a homologia. Na sua autobiografia, Pavel Aleksandrov escreveu: «Lembro-me de um jantar na casa de Brouwer em honra [de Noether], durante o qual ela explicou a definição dos grupos de Betti de complexos, ideia que se espalhou rapidamente e transformou completamente toda a topologia<sup>9</sup>.»

De repente, os topólogos dispunham de um novo conjunto de ferramentas que podiam usar. Todas as técnicas e teoremas da teoria dos grupos ficaram à sua disposição. Os teoremas profundos podiam ser provados sem ter que reinventar a roda. Os números de Betti e os coeficientes de torção saíam desta máquina de forma automática, e a invariância da característica de Euler-Poincaré tornou-se uma demonstração simples. No artigo de Aleksandrov em memória de Noether, ele escreveu:

Hoje em dia, não ocorre a ninguém definir a topologia combinatória, de uma forma que não seja através da teoria dos... grupos; é, por isso, de todo apropriado recordar que foi Emmy Noether quem primeiro teve a ideia de tal construção. Ao mesmo tempo, ela percebeu como se torna simples e transparente a prova da fórmula de Euler-Poincaré, fazendo um uso sistemático do conceito de grupo de Betti<sup>10</sup>.

Uma vez mais, percebemos a importância da fusão de diferentes ramos da matemática. Descartes usou a análise para compreender a geometria. Riemann e Poincaré usaram a topologia para aprofundar a análise. Gauss e Bonnet abordaram a topologia para melhor compreender a geometria. Agora, os topólogos estavam à vontade para usar a álgebra de modo a aprofundar o estudo da topologia. Esta fertilização cruzada tem sido extremamente proveitosa.

A incorporação da álgebra na topologia é tão importante que toda esta área da topologia — praticamente toda a topologia que temos discutido neste livro — é designada, actualmente, pelo termo *Topologia Algébrica*. Nas décadas seguintes ao trabalho de Poincaré, a topologia algébrica expandiu-se para além dos grupos de homologia, tendo passado a incluir muitas outras estruturas algébricas. Hoje, a maioria dos topólogos trabalha em topologia algébrica.

## Epílogo

### O Problema que Vale um Milhão de Dólares

*A matemática, vista de forma correcta, não contém apenas a verdade, mas também a beleza suprema — uma beleza fria e austera, como a da escultura, sem recurso a qualquer parte da nossa mais fraca natureza, sem os belos enfeites da pintura ou da música, mas sublimemente pura, e capaz de uma perfeição, como só a melhor arte pode apresentar.*

— Bertrand Russell, «O estudo da Matemática»<sup>1</sup>

No século xx, a topologia cresceu até se tornar um dos pilares da matemática, e ocupar um lugar ao lado da geometria, da álgebra e da análise. Muitos matemáticos que não se consideram topólogos, usam a topologia diariamente. É praticamente inevitável. Nos dias de hoje, exige-se à maioria dos estudantes do primeiro ano de mestrado em matemática (segundo ciclo) uma disciplina anual dedicada à topologia.

Uma forma de medir a importância de uma área académica é analisar o conjunto de prémios e distinções por conquistas obtidas nessa disciplina. Não existe um prémio Nobel na Matemática. O equivalente matemático é a chamada *medalha Fields*. A medalha Fields é atribuída uma vez de quatro em quatro anos desde 1936 (exceptuando o período da II Guerra Mundial). Em todos os Congressos Internacionais de Matemática, estas medalhas são atribuídas, no máximo, a quatro notáveis matemáticos com menos de quarenta anos, que tenham dado um contributo excepcional

para a matemática. Dos quarenta e oito contemplados até hoje, cerca de um terço destes foram honrados pelo seu trabalho em topologia, e contam-se ainda mais, se considerarmos as contribuições em áreas afins.

Um problema notável em topologia é, ele próprio, responsável por três medalhas Fields. Foi um dos mais famosos problemas que estavam em aberto no final do século xx — um problema tão importante, e tão difícil, que a sua resolução garantia a quantia de 1 milhão de dólares ao primeiro matemático que o resolvesse. O nome deste exigente problema é a *conjectura de Poincaré*.

O teorema da classificação de superfícies é um dos teoremas mais elegantes de toda a matemática. Afirma que todas as superfícies são determinadas exclusivamente pela sua orientabilidade, o seu número de Euler, e o número de componentes do bordo. Obviamente, seria óptimo dispor de um teorema semelhante para variedades de todas as dimensões, mas é uma tarefa muito difícil. É claro que, se existir uma tal classificação, a mesma lista de invariantes não será suficiente, pois já vimos que a característica de Euler-Poincaré de todas as variedades de dimensão ímpar fechada é igual a zero (capítulo 23).

Poincaré sonhou em classificar as variedades de dimensão superior, mas até a classificação das 3-variedades se revelou fora do seu alcance. A conjectura de Poincaré constitui apenas o primeiro passo neste processo de classificação.

A mais simples  $n$ -variedade fechada é a esfera de dimensão  $n$ ,  $S^n$ . Poincaré pretendia encontrar um teste simples para determinar se uma determinada  $n$ -variedade era homeomorfa a  $S^n$ . Em 1900, ele pensou que tinha encontrado um tal teste. Ele tinha mostrado que todas as  $n$ -variedades que tinham a mesma homologia que  $S^n$  tinham que ser homeomorfas a  $S^n$ .<sup>2</sup> A homologia da  $n$ -esfera é particularmente simples. Os respectivos números de Betti são 1, nas dimensões  $n$  e 0, e são 0 em todas as outras dimensões, sendo que não têm torção.

Quatro anos mais tarde, descobriu que a sua demonstração estava errada<sup>3</sup>. Não apenas descobriu o seu próprio erro, como encontrou um notável contra-exemplo para a sua afirmação. Ele tinha concebido uma 3-variedade patológica que tinha a mesma homologia que  $S^3$ , mas não era homeomorfa a  $S^3$ . Ele concebeu esta variedade colando faces opostas de um dodecaedro sólido, cada colagem após uma torção de  $36^\circ$  no sentido horário.

Uma característica interessante e surpreendente deste *espaço dodecaédrico de Poincaré* é que, embora o seu primeiro número de Betti seja zero, não é simplesmente conexo. Mais precisamente, todos os ciclos são zero em homologia (capítulo 23), mas existem curvas fechadas na

variedade de que não podem ser encolhidas até um ponto. Na figura 23.3 vimos um exemplo de um ciclo não trivial no duplo *toro* que é zero em homologia, mas no espaço dodecaédrico *todos* os ciclos, mesmo os que não podem ser reduzidos a um ponto, são triviais em homologia.

Com este exemplo exótico, Poincaré percebeu que, contando apenas com a homologia, não podíamos caracterizar as esferas  $S^n$ , nem mesmo a esfera  $S^3$ . Então, abandonou a questão geral para dimensão  $n$ , e concentrou-se nas 3-variedades. Ele suspeitava que, se numa 3-variedade, todas as curvas fechadas fossem topologicamente triviais, então talvez a variedade tivesse que ser homeomorfa a  $S^3$ . Este problema tornou-se a famosa conjectura de Poincaré<sup>4</sup>.

#### A CONJECTURA DE POINCARÉ

Qualquer 3-variedade fechada e simplesmente conexa é homeomorfa à 3-esfera  $S^3$ .

De facto, no artigo de Poincaré esta afirmação não foi apresentada como conjectura, mas apenas como uma questão em aberto. Ele não especificou qual seria a sua inclinação relativamente à resposta. A resolução deste problema estaria ainda muito longe de significar a classificação de todas as 3-variedades, mas seria um primeiro passo fundamental.

Todos gostamos de um bom desafio, mas será difícil imaginar o grau de dificuldade envolvido na conjectura de Poincaré. Esta conjectura tornou-se parte de uma pequena lista de problemas — incluindo também o teorema das quatro cores, o último teorema de Fermat e a hipótese de Riemann — que atingiram um estatuto mítico. Tal como estes, a conjectura de Poincaré consumiu aqueles que trabalharam nela. Inúmeros jovens matemáticos entraram na «competição». Tal como um jornalista escreveu: «Os matemáticos falam da conjectura de Poincaré como Ahab da Baleia Branca.» A partir de 1904 muitos foram os que alegaram ter encontrado uma demonstração. Até recentemente, todos os argumentos tinham falhas — por vezes, erros subtis mergulhados no meio de centenas de páginas de matemática profunda.

Mais tarde, a conjectura foi generalizada a  $n$ -variedades — todas as  $n$ -variedades que sejam semelhantes à  $n$ -esfera, em termos topológicos,

---

<sup>4</sup> O capitão Ahab é uma personagem da história da baleia branca *Moby Dick* que vive obcecada com a sua captura. (*N. do T.*)

devem ser homeomorfas a  $S^n$ . Esta generalização pode parecer ridiculamente ambiciosa. Como poderemos provar isto para  $n = 100$ , se não fomos capazes de o provar para  $n = 3$ ? Se eu não consigo levantar 80 quilos, como poderia pensar em levantar 200? Surpreendentemente, a conjectura é mais fácil para valores elevados de  $n$ ! Acontece frequentemente que a topologia de baixa dimensão é mais complicada do que a topologia de dimensões superiores. *Grosso modo*, ter mais dimensões para se mover dá mais liberdade para alterar uma dada configuração, evitando colisões.

O brilhante jovem topólogo Stephen Smale (n. 1930), da Universidade da Califórnia em Berkeley forneceu a primeira prova da conjectura de Poincaré generalizada. Em 1960, verificou a conjectura para uma importante classe de variedades de dimensão  $n \geq 5$ , as chamadas variedades suaves<sup>6</sup>.

Smale é um personagem castiço. Foi um duro crítico da Guerra do Vietname, e activo defensor da liberdade de expressão. Os seus protestos, que incluíram críticas à política externa norte-americana numa visita a Moscovo, valeram-lhe uma intimação pelo Comité de Actividades Anti-Americanas da Casa Branca. Mais tarde, foi posto em causa devido a uma viagem de seis meses ao Brasil, paga pela *National Science Foundation*. O conselheiro científico do presidente Johnson escreveu: «Este espírito jovial convence os matemáticos a propor seriamente que o homem comum, que paga os seus impostos, concorde em apoiar, com fundos públicos, a criação matemática nas praias do Rio de Janeiro<sup>7</sup>.»

A razão para este apontamento surgiu da, agora famosa, citação de Smale: «O meu trabalho mais conhecido foi feito nas praias do Rio de Janeiro<sup>8</sup>.» Durante a sua estadia no Brasil, Smale não só demonstrou a conjectura de Poincaré em dimensões altas, mas também descobriu a chamada *ferradura de Smale*, um modelo para sistemas dinâmicos caóticos.

Passados dois anos, os resultados de Smale para  $n \geq 5$  tinham sido generalizados para outras variedades, agora sem assumir a hipótese da suavidade<sup>9</sup>. Chegou a parecer que os casos restantes iam suceder-se rapidamente. Mas pelo contrário, o progresso parou. O caso  $n = 4$  foi resolvido apenas em 1982, com uma demonstração obtida pelo matemático de trinta anos Michael Freedman, da Universidade da Califórnia, em São Diego<sup>10</sup>. Depois, o progresso parou novamente. Cada dimensão era bem

---

<sup>6</sup> Usando a linguagem matemática, a conjectura de Poincaré generalizada afirma que, qualquer variedade homotopicamente equivalente a uma esfera é homeomorfa a uma esfera. A equivalência homotópica é uma noção extremamente importante em topologia, mas uma sua exposição sairia do âmbito deste livro. (N. do T.)

mais difícil do que a anterior. O caso de dimensão 3, o da conjectura inicial de Poincaré, mantinha-se impenetrável. Mais demonstrações erradas surgiam e desapareciam. O problema parecia insondável.

Em 1998, Smale publicou uma lista dos dezoito problemas mais importantes não resolvidos em matemática<sup>11</sup> (imitando a célebre lista de David Hilbert, elaborada um século antes). O caso clássico da conjectura de Poincaré estava nesta lista.

Nesse mesmo ano, o Clay Mathematics Institute decidiu oferecer um prêmio de 1 milhão de dólares para cada um dos sete mais importantes problemas em aberto na área da matemática. A conjectura de Poincaré também ficou nesta lista de elite. Para ganhar este prêmio, o vencedor teria que fornecer a prova escrita do teorema, e superar o intenso escrutínio da comunidade matemática durante dois anos após o trabalho ter aparecido numa revista da especialidade.

Em 1982, Bill Thurston anunciou um ambicioso projecto para classificar completamente a geometria de todas as 3-variedades. Ele admitia que qualquer 3-variedade poderia ser dividida em regiões, cada uma das quais, tinha que possuir uma, de oito possíveis, estruturas geométricas padrão<sup>12</sup>. Este programa ficou conhecido como a *conjectura da geometrização* de Thurston. Com estes oito blocos de construção seria possível compreender a geometria e a topologia de todas as 3-variedades. Em particular, o programa implicava que a única 3-variedade fechada e simplesmente conexa era a 3-esfera. Ou seja, esta conjectura bastaria para provar a conjectura de Poincaré.

No mesmo ano, Richard Hamilton, matemático da Universidade de Cornell, iniciou um programa que, segundo acreditava, levaria à demonstração da conjectura de geometrização de Thurston<sup>13</sup>. Introduziu um método para, começando com qualquer 3-variedade, a deformar continuamente, como se enchêssemos um balão, até obter uma forma que, segundo esperava, se encaixaria perfeitamente no modelo de Thurston. Hamilton conseguiu um progresso substancial em direcção a este objectivo. A maioria dos especialistas acreditava que as suas técnicas iriam funcionar, mas nem Hamilton nem outros matemáticos conseguiram remover ou lidar adequadamente com as singularidades — os subconjuntos da variedade que, durante a deformação, em vez de se tornarem mais suaves, evoluíam no sentido de se tornarem localmente mais complexos.

Em 2002, um desprezioso matemático russo chamado Grigori «Grisha» Perelman (nascido em 1966), do Instituto Steklov, em São Petersburgo, surpreendeu a comunidade matemática ao colocar na Internet o primeiro de três curtos, mas extremamente densos, artigos. Estes artigos,

totalizando apenas sessenta e oito páginas, alegavam a conclusão das duas décadas de investigação dedicadas ao programa de Hamilton<sup>14</sup>. Neles, Perelman mostrava que algumas das singularidades nunca poderiam ocorrer e as outras poderiam ser cuidadosamente eliminadas. Juntos, estes artigos provavam a conjectura da geometrização de Thurston e, conseqüentemente, a conjectura de Poincaré clássica.

A comunidade matemática estava céptica — já se tinham escutado este tipo de alegações várias vezes e os artigos de Perelman eram extremamente parcos em detalhes — mas também estava cautelosamente optimista. Perelman era um matemático respeitado, e estava a levar a cabo o bem reputado programa de Hamilton.

Muitos dos argumentos de Perelman não eram totalmente explícitos. Até mesmo os maiores especialistas em geometria e topologia tinham dificuldade em avaliar a legitimidade das demonstrações. De forma independente, três grupos de matemáticos debruçaram-se, passando os seus argumentos a pente fino, e preenchendo a os detalhes em falta<sup>15</sup>. O tamanho médio dos relatórios escritos por estes grupos ultrapassava as trezentas páginas. Mas não descobriram nenhum erro significativo.

Até ao final de 2006, era geralmente aceite que a demonstração de Perelman estava correcta. Nesse ano, a revista *Science* designou a demonstração de Perelman como o «Breakthrough of the Year» (o acontecimento científico do ano)<sup>16</sup>. Tal como Smale e Freedman, já premiados pelas suas contribuições para a conjectura de Poincaré, Perelman, não tendo completado quarenta anos, estava encaminhado para receber uma das Medalhas Fields (na verdade, Thurston tinha também recebido uma medalha Fields pelo seu trabalho que, indirectamente, conduziu à prova final). A contagem decrescente para o prémio de um milhão de dólares tinha começado (alguns matemáticos pensavam que talvez fosse oferecido o prémio em conjunto a Perelman e Hamilton).

Um dos grandes picos matemáticos tinha sido alcançado, tal como tinha acontecido com o último teorema de Fermat, uma década antes. A bandeira tinha sido plantada. Podíamos pensar que este feito representava a sentença de morte para uma área da matemática. Mas não é certamente o caso. Do alto deste cume matemático, contempla-se uma vista deslumbrante de outros picos desconhecidos, todos à espera de ser escalados. Tal como acontece no caso do último teorema de Fermat, o resultado em si pode não ser tão importante quanto o enorme corpo de matemática que foi criado no esforço colectivo para o demonstrar.

Matemática grandiosa gera nova matemática grandiosa. A solução de Euler para o problema das pontes de Königsberg e a sua prova da fórmula dos poliedros colocaram em marcha uma viagem de descoberta através de

muitas áreas de bela matemática, conduzindo à criação de topologia. A conjectura de Poincaré é apenas um ponto de passagem nesta emocionante jornada. A topologia mantém-se ainda uma área de investigação viva e vibrante.

Nesta história maravilhosa, o efeito que a demonstração de Perelman teve na sua vida é uma adenda bizarra e infeliz. Tinha começado bem. Em Abril de 2003, ele fez uma breve viagem para proferir uma sequência de palestras. As suas palestras foram presenciadas por Andrew Wiles, John Forbes Nash Jr. (o personagem principal do filme de Hollywood «Uma Mente Brilhante»), John Conway, e outros matemáticos famosos. Mas, no seu regresso à Rússia, o intenso escrutínio da comunidade matemática e a postura de outros matemáticos que pretendiam receber uma parte do crédito relativo à demonstração teve nele um pesado efeito<sup>17</sup>.

O solitário Perelman tornou-se ainda mais recluso. Ele achava que o seu trabalho falava por si mesmo e não queria ser parte do processo de verificação. A certa altura, o seu desencanto com a comunidade matemática tornou-se opressivo e renunciou à sua posição académica, parou de responder a correspondência e, de acordo com vários relatos, abandonou inteiramente a matemática. Numa situação sem precedentes, que chocou a comunidade científica, recusou-se a aceitar a Medalha Fields.

No final do Verão de 2006, Perelman estava desempregado e vivia apenas com a sua mãe, e com a sua pensão de reforma, num pequeno apartamento em São Petersburgo. Quando lhe perguntaram se aceitaria o dinheiro do prémio do Instituto Clay de Matemática, ele respondeu: «Não vou decidir se aceito ou não o prémio até que ele seja oferecido<sup>18</sup>.»

Para muitos, é chocante que Perelman se recuse a aceitar a medalha Fields e, previsivelmente, também o prémio monetário. Mas, para ele, a resolução do problema representa a recompensa final, a fama e o dinheiro são irrelevantes. Como ele disse: «Se a demonstração está correcta, então não é necessário nenhum outro reconhecimento<sup>19</sup>.» Qualquer verdadeiro investigador entende o amor puro de Perelman pela sua área e pelo seu trabalho, e a enorme satisfação de conseguir uma descoberta revolucionária. Não é impossível imaginar que a grande atenção de que foi alvo, e a presença mediática tenham perturbado a sua forma de encarar essa conquista.

---

<sup>17</sup> De facto, depois de ter recusado a medalha Fields, Grigori Perelman recusou igualmente o prémio do Instituto Clay, que lhe foi concedido em 2010, já após a primeira edição americana deste livro. Segundo uma notícia do *New York Times*, de 1 de Junho desse ano, James Carlson, o presidente do instituto, referiu que Perelman recusou o prémio «de forma simpática, mas bastante firme na sua decisão», durante uma conversa telefónica. De acordo com uma agência de notícias russa, Perelman disse: «O principal motivo [para a recusa] é o meu desacordo com a forma como a comunidade matemática está organizada. Não gosto das suas decisões, e considero-as injustas.» (*N. do T.*)

Certamente foi o mesmo amor puro pela matemática que levou Pitágoras, Kepler, Euler, Riemann, Gauss, Poincaré, e os outros que labutaram horas incontáveis em busca do teorema perfeito e da prova perfeita. É difícil imaginar a dimensão da euforia de Perelman quando percebeu que tinha demonstrado a conjectura de Poincaré, ou a alegria de Euler quando descobriu que  $V - A + F = 2$ .

Tal como Poincaré tão eloquentemente escreveu: «O cientista não estuda a natureza pela sua utilidade, estuda-a porque se deleita com ela, e deleita-se porque ela é bela. Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena conhecê-la, e se a natureza não valesse a pena conhecer, a vida não valeria a pena viver<sup>20</sup>.»

## Agradecimentos

É o meu nome que figura na capa deste livro, mas há muitas outras pessoas, para além de mim, sem as quais este livro não existiria. Gostaria de aproveitar esta oportunidade para lhes agradecer.

Em primeiro lugar, um agradecimento especial à editora, Vickie Kearn. A sua calma presença e palavras de incentivo, ao longo da escrita deste meu primeiro livro, tiveram grande significado para mim. Ela, bem como toda a equipa da *Princeton University Press*, criaram um maravilhoso ambiente de trabalho.

Teria sido impossível escrever este livro sem saber exactamente o que Euler escreveu. Estou extremamente grato a Chris Francese pela ajuda na tradução do artigo de Euler a partir do seu original em latim. Para além dela, Anne Maiale, Tony Mixell, Sandra Alfes, Wolfgang Müller e Lucile Duperron foram muito prestáveis na obtenção de outras traduções de grande qualidade.

Agradeço a Rich Klein, Ed Sandifer, Paul Nahin, Klaus Peters, Karl Qualls, aos meus pais Gail e Frank Richeson, e aos leitores anónimos escolhidos pelo editor para lerem a totalidade ou parte do meu manuscrito. Os comentários perspicazes destes especialistas e não-especialistas fizeram dele um livro muito melhor. Quero também agradecer à assistente de edição Lyman Lyons pela sua cuidadosa edição do manuscrito, e as suas muitas sugestões para melhorar a escrita.

Finalmente, queria agradecer à minha mulher Becky e aos meus filhos Ben e Nora, por terem aturado as muitas horas extraordinárias que dediquei a trabalhar neste livro.

## Apêndice A

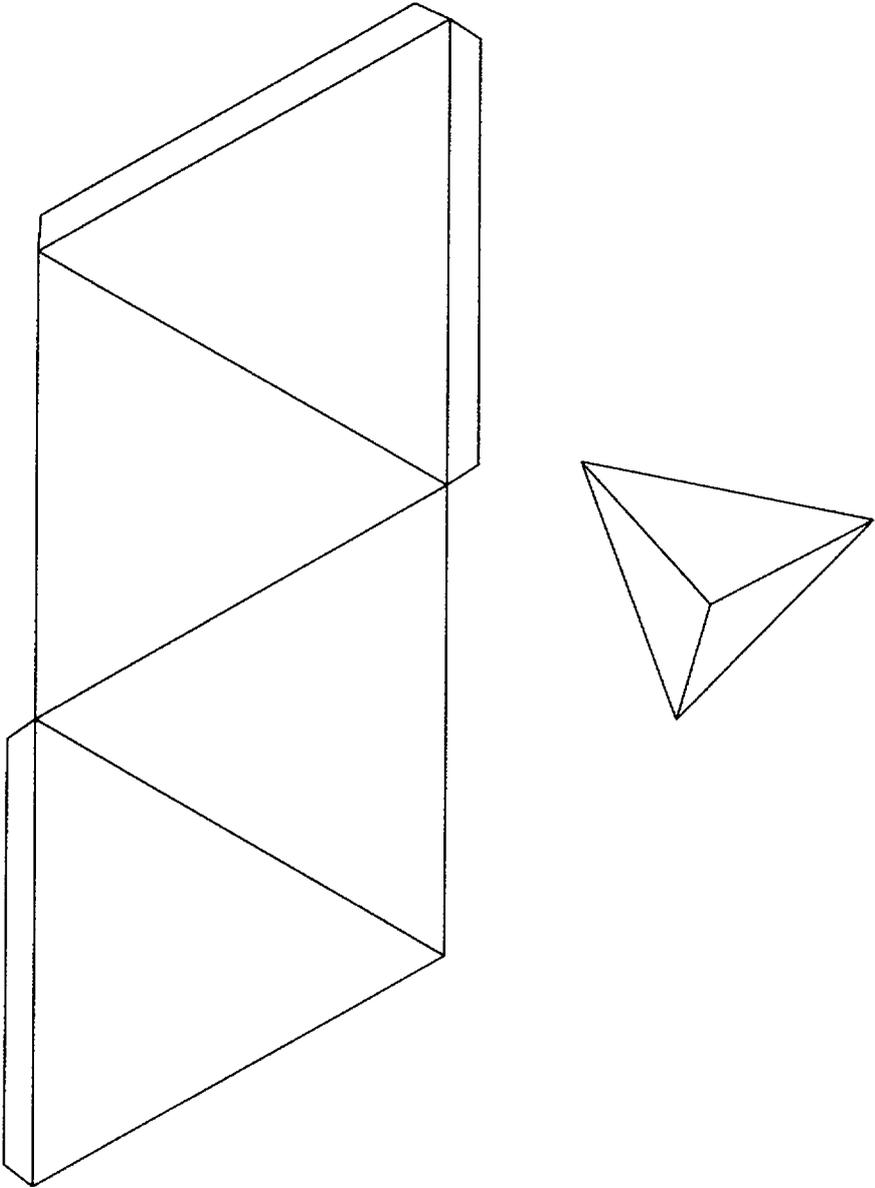
# Construa os seus Próprios Poliedros e Superfícies

Uma excelente forma de entender melhor os poliedros e as superfícies topológicas é construí-los à mão. Nas páginas que se seguem, apresentam-se alguns modelos para construir os cinco sólidos platónicos, o *toro*, o cilindro, a faixa de Möbius, a garrafa de Klein e o plano projectivo.

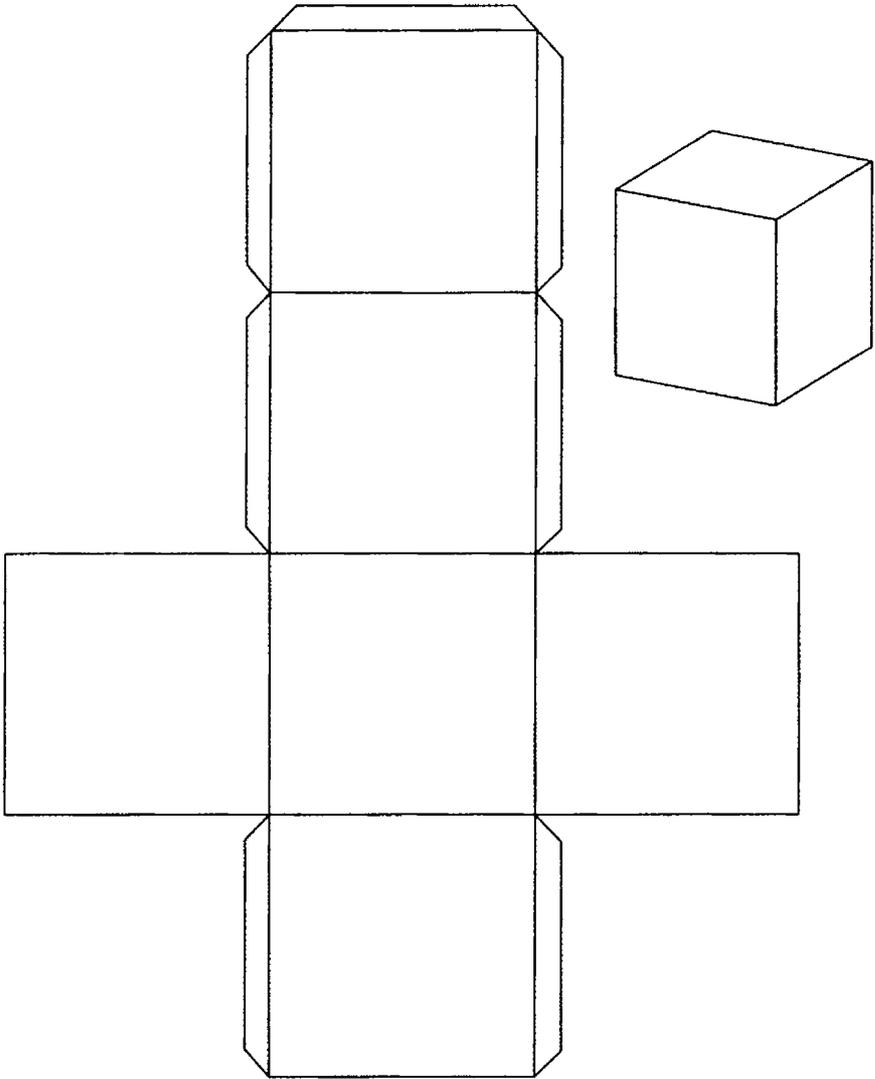
Alguns conselhos para a montagem dos modelos em papel:

1. Fotocopie os modelos do livro. Amplie as fotocópias, de modo a obter modelos maiores.
2. Se possível, faça as fotocópias para papel de elevada gramagem ou cartão. Em alternativa, copie para papel auto-adesivo e depois cole-o num pedaço de cartolina ou cartão.
3. Recorte cuidadosamente os modelos utilizando um bisturi (x-acto) ou faca afiada e uma régua.
4. Marque as dobragens com uma faca sem serrilha para conseguir vincos precisos.
5. Use as abas caso pretenda colar o sólido. Corte as abas, caso pretenda usar fita-cola para unir as arestas do sólido.

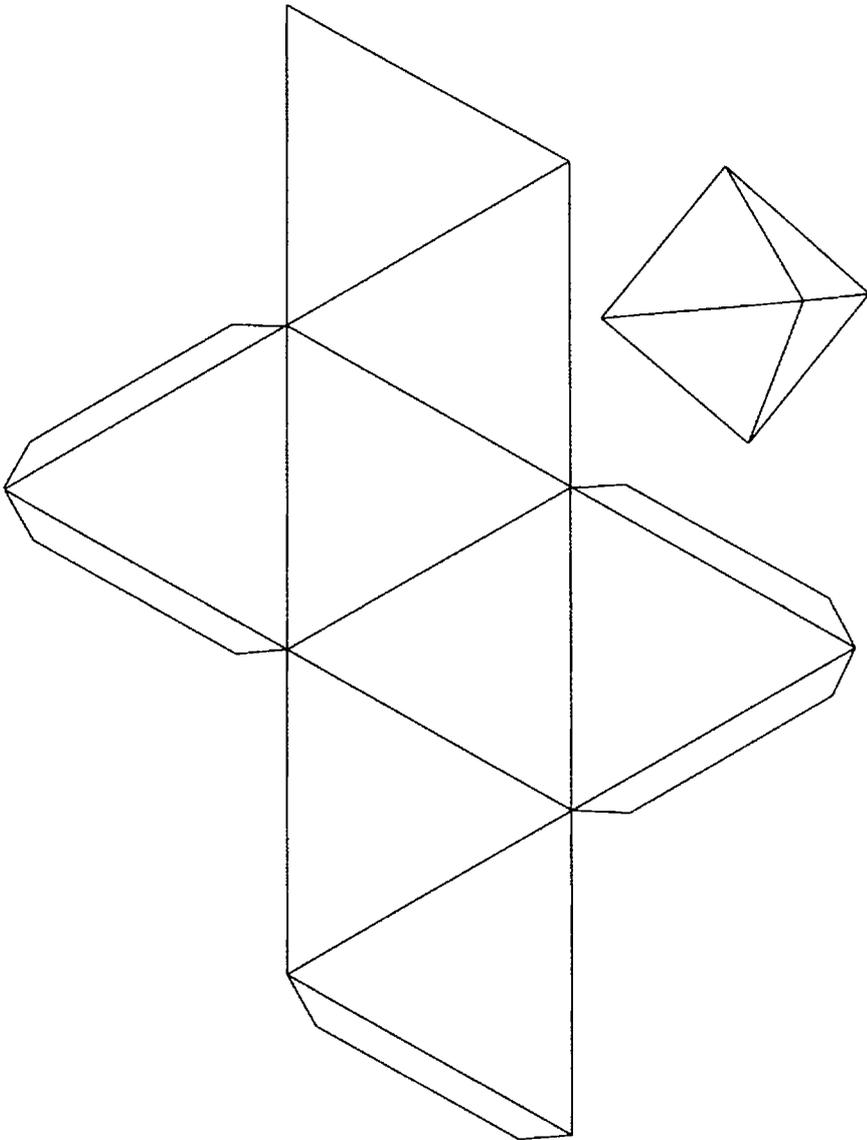
# Tetraedro



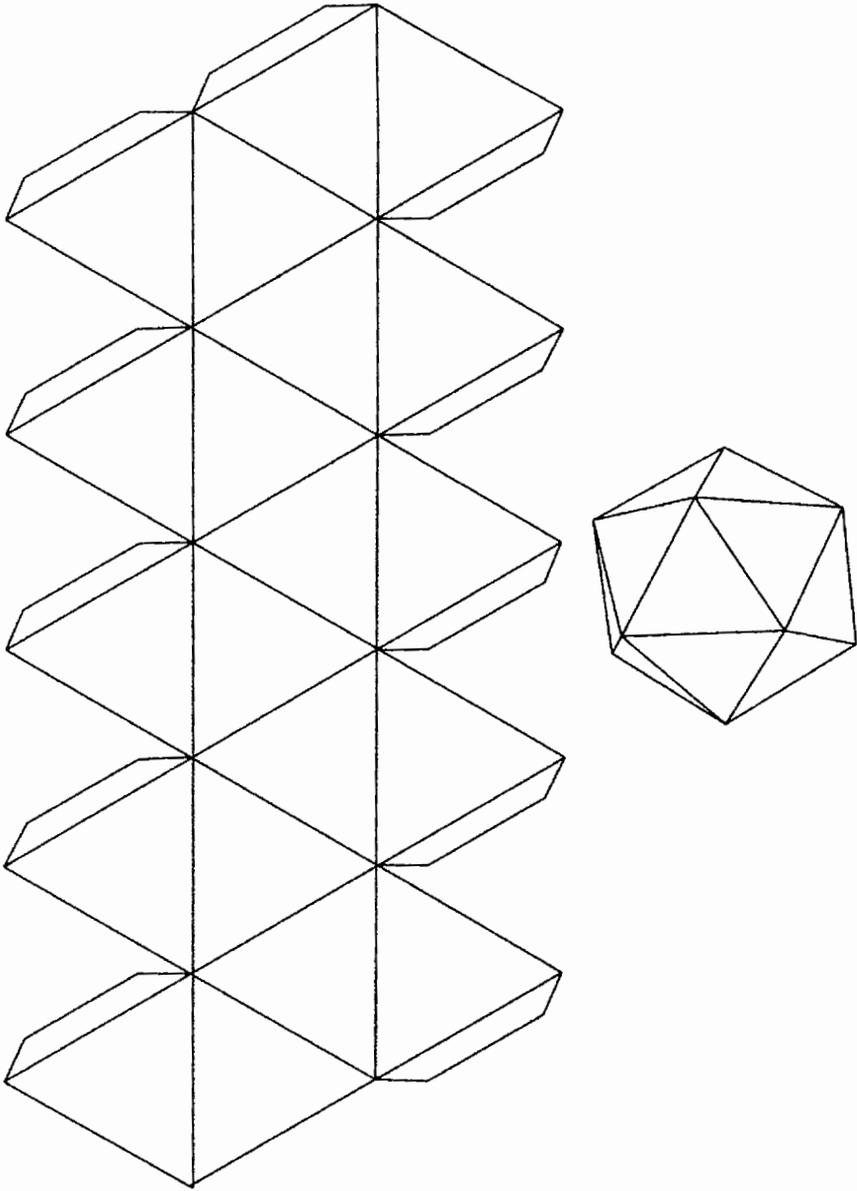
# Cubo



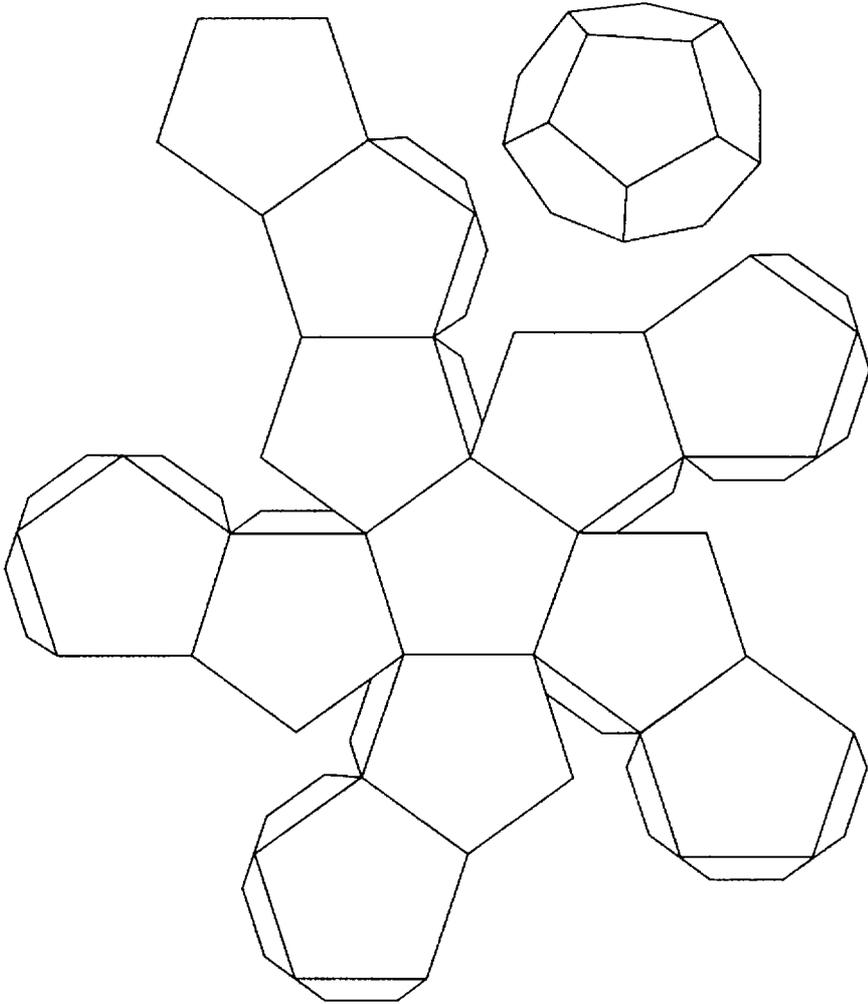
# Octaedro



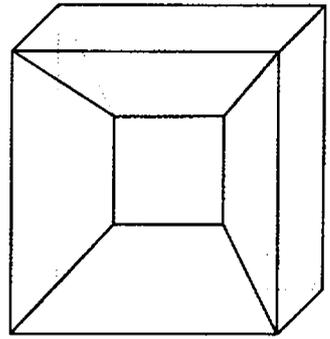
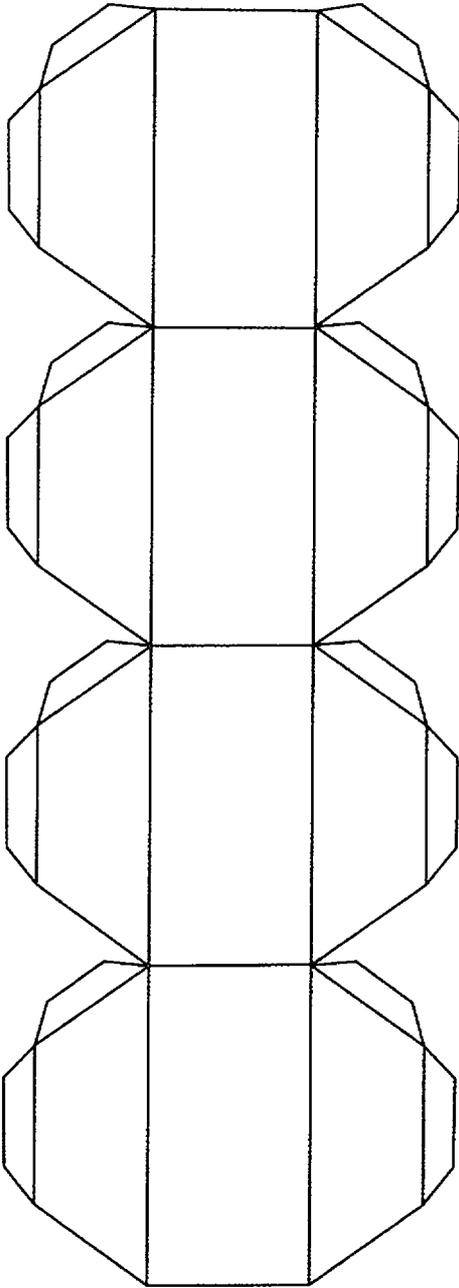
# Icosaedro



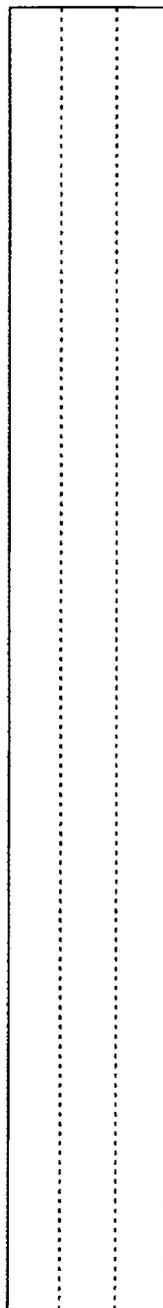
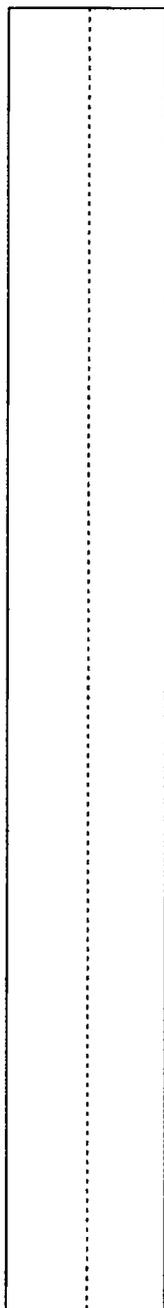
# Dodecaedro



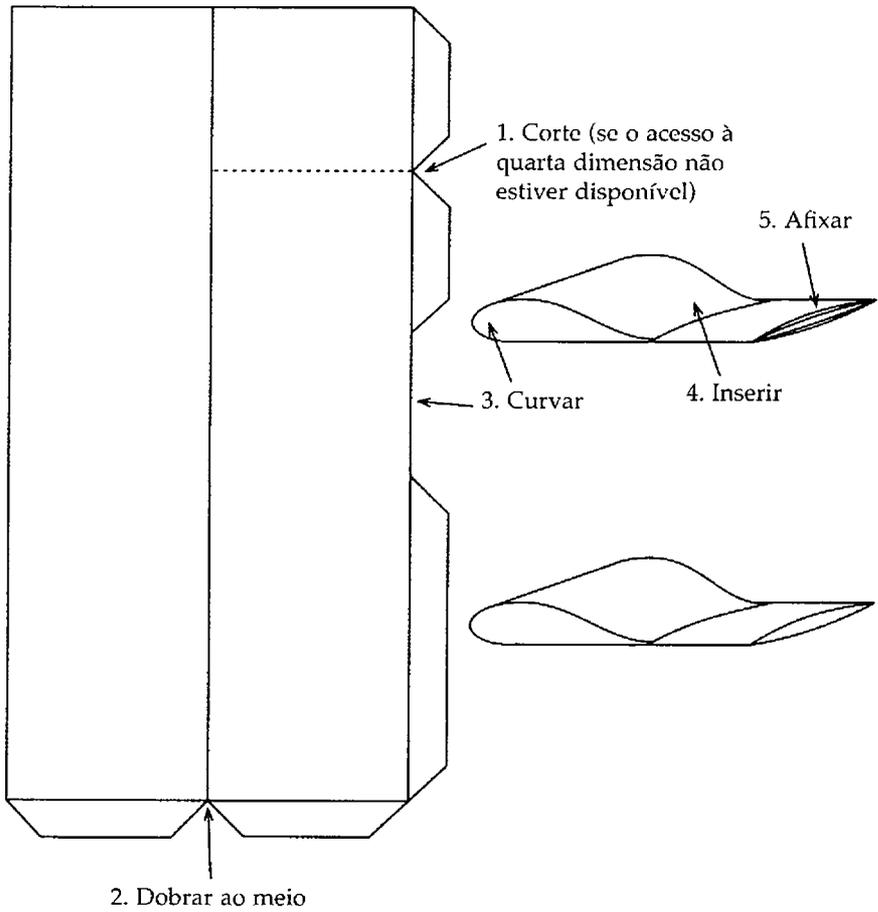
*Toro*



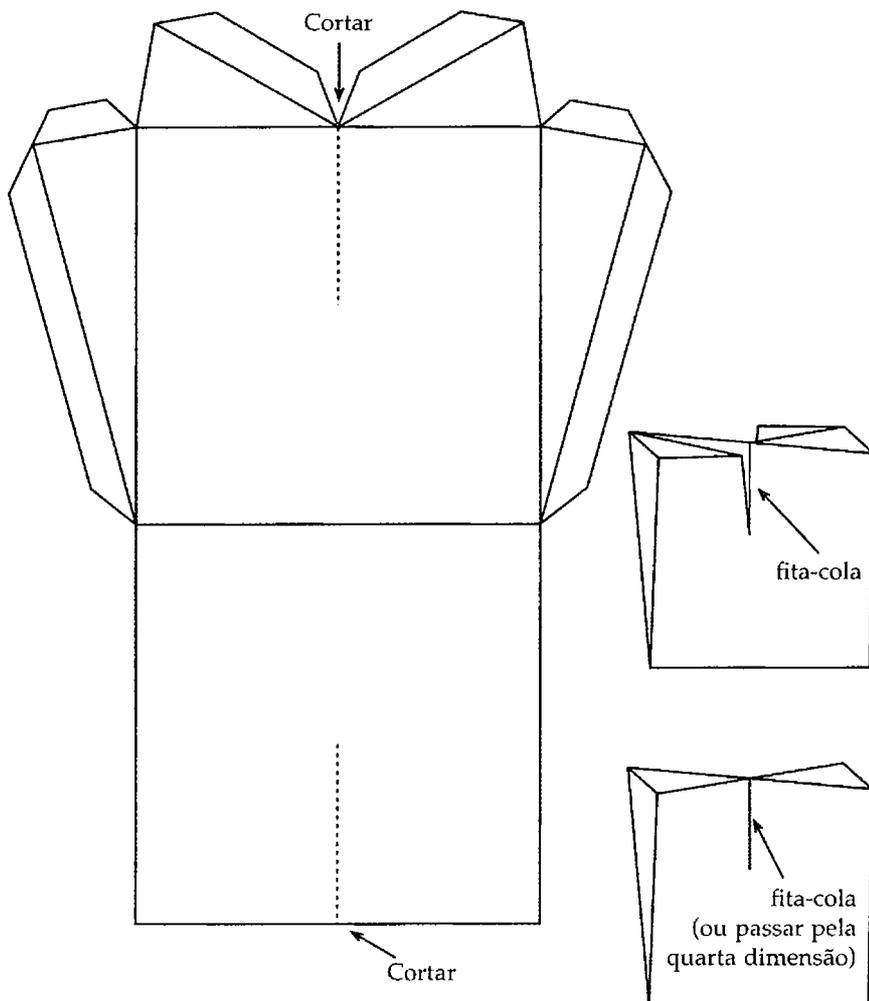
Faixas de Möbius (ou cilindros)



# Garrafa de Klein



# Plano projectivo



## Apêndice B

### Leituras Recomendadas

Incluimos uma bibliografia completa no final deste livro. A bibliografia contém todas as fontes utilizadas na escrita do livro, bem como as fontes primárias para os teoremas que foram mencionados. Gostaria de destacar alguns destes livros e artigos, para o benefício daqueles leitores que pretendem aprofundar os temas deste livro. Aqui, indicamos o título e o autor. Para saber a referência bibliográfica completa, consulte a secção «Bibliografia».

Existem muitos bons livros de referência sobre a História da Matemática. A minha primeira escolha é o de Carl Boyer e Uta Merzbach *A História da Matemática*. Para biografias, recomendo os dezoito volumes do *Dictionary of Scientific Biography*, que deverá ser encontrado nas secções de referência das bibliotecas. Este dicionário contém biografias de grande qualidade, escritas por especialistas em cada área. Para biografias mais divertidas, mas nem sempre historicamente precisas, pode ler o livro clássico de 1937, *Men of Mathematics*, de Eric Temple Bell. Um outro recurso muito útil é o arquivo *online* «MacTutor — História da Matemática» de John O'Connor e Edmund Robertson. Este portal é pesquisável e contém inúmeras biografias, bem como várias outras valiosas informações históricas.

Há muitas boas referências sobre Euler, incluindo muitas novas obras que apareceram em 2007, celebrado mundialmente como «o ano de Euler». Recomendo dois volumes recentemente editados, *The Genius of Euler: Reflections on His Life and Work*, editado por William Dunham, e *Leonhard Euler: Life, Work and Legacy*, editado por Robert Bradley e Edward Sandifer. As obras completas de Euler estão disponíveis na obra *Opera Omnia*, de setenta e seis volumes, e a maioria está disponível *online* no *Euler Archive* de Dominic Klyve e de Lee Stemkoski. A tradução completa para inglês do artigo de Euler «*Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*» por Chris Francese e pelo autor está disponível neste *Euler Archive*.

Para um estudo mais aprofundado sobre os poliedros, consulte o livro *Polyhedra* de Cromwell. Muitos dos tópicos deste livro podem ser lá encontrados. Neste maravilhoso livro, Cromwell aborda tanto a história como a teoria dos poliedros.

Uma abordagem detalhada do desenvolvimento da fórmula de Euler encontra-se em *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery* de Imre Lakatos. Neste trabalho clássico, Lakatos, um filósofo da matemática, usa a fórmula de Euler e as suas inúmeras demonstrações, exceções e generalizações para apresentar a sua teoria sobre a descoberta matemática. As suas detalhadas notas de rodapé foram extremamente úteis para mim, na pesquisa para este livro.

Para mais detalhes sobre a história e o conteúdo do manuscrito perdido de Descartes *Os Elementos dos Sólidos*, consulte o artigo de P. J. de Federico «Descartes on Polyhedra: A Study of the De Solidorum Elementis». Para além dos comentários, contém reproduções das cópias, feitas por Leibniz, das notas de Descartes, e as respectivas traduções para inglês.

Para os tópicos de teoria de grafos o melhor conselho são os maravilhosos livros e artigos de Robin Wilson e seus co-autores. Sobre a história da teoria de grafos, leia *Graph Theory, 1736–1936* por Norman Biggs, Keith Lloyd e Robin Wilson. É um recurso bem escrito e completo, com traduções de vários artigos importantes. Para uma desmistificação da história do problema das pontes de Königsberg, consulte «The Truth about Königsberg», por Brian Hopkins e Robin Wilson. É uma narrativa cativante da prova do teorema das quatro cores encontra-se no livro *Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved*, de Wilson.

Há duas excelentes referências disponíveis sobre a história da topologia. Um deles é o enorme livro (com mais de mil páginas) *History of Topology* editado por I. Marcus James, e o outro é o livro *A History of Algebraic and Differential Topology: 1900–1960*, de Jean Dieudonné. Estes textos de elevada qualidade foram escritos por matemáticos profissionais.

Algumas obras acessíveis sobre o número de Euler, topologia combinatória, geometria e variedades de dimensão superior incluem os livros *An Introduction to the Geometry of  $n$  dimensions*, de D. Marcus e Y. Sommerville, *Geometry and the Imagination*, de David Hilbert e Stephan Cohn-Vossen, *Initiation to Combinatorial Topology*, de Maurice Fréchet e Ky Fan e *The Shape of Space* de Jeffrey Weeks. Para os que lêem francês, recomendo *La topologie algébrique des origines à Poincaré*, de Jean-Claude Pont.

Para quem gosta da construção de superfícies topológicas em papel e outras actividades, recomendo a leitura de *Experiments in Topology*, de Stephen Barr. Todos os entusiastas da matemática deveriam procurar os muitos livros maravilhosos de Martin Gardner. Estão cheios de fascinantes pedras preciosas matemáticas. A Associação Matemática da América lançou recentemente quinze destes livros num CD-Rom intitulado *Martin Gardner's Mathematical Games: The Entire Collection of his Scientific American Columns*.

Consulte *Proofs from The Book* de Martin Aigner e Günter Ziegler, para encontrar outras interessantes aplicações da fórmula de Euler. Eles incluem uma

demonstração elementar do teorema de rigidez de Cauchy para poliedros convexos. Para uma demonstração visual do teorema de classificação das superfícies, consulte *Conway's ZIP proof*, de George Francis e Jeffrey Weeks. No clássico de 1884 *Flatland: O País Plano*, por Edwin Abbott, pode encontrar uma sátira social, juntamente com a investigação na noção de dimensão em matemática, misturados num romance.

Para uma introdução à teoria dos nós, aconselho a leitura de *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*, de Colin Adams. Este pode ser usado como referência para uma disciplina universitária, mas lê-se como um livro de divulgação.

Sylvia Nasar e David Gruber escreveram um artigo para a revista *New Yorker* intitulado «Manifold Destiny: A Legendary Problem and the Battle Over Who Solved it». Neste, são detalhadas as controvérsias em redor da prova da conjectura de Poincaré e da conjectura de geometrização de Thurston.

Por votação, os matemáticos deram à fórmula de Euler para poliedros o segundo lugar na lista dos mais belos teoremas matemáticos. Neste livro, encontramos outros teoremas nos 10 primeiros lugares desta lista: a existência de cinco poliedros regulares (o 4.º classificado), o teorema dos pontos fixos de Brouwer (o 6.º), a irracionalidade de  $\sqrt{2}$  (o 7.º), e o teorema das quatro cores (o 9.º). Para a descrição dos restantes resultados desta lista, consulte o artigo de David Wells «Are These the Most Beautiful?»

## Créditos das Ilustrações

Fig. 6.3 (superior esquerdo) Cortesia de Peter Cromwell

Fig. 8.2 Cortesia de Mark Richeson

Fig. 16.7 (esquerda) «Moebius Strip II», de M. C. Escher, © 2007. The M. C. Escher Company-Holland. Todos os Direitos Reservados. [www.mcescher.com](http://www.mcescher.com)

# Notas

## PREFÁCIO

1. Citado em Schechter (1998), 155.

## INTRODUÇÃO

1. Citado em Machamer (1998).
2. Juškevic e Winter (1965), 333.

## CAPÍTULO 1. LEONHARD EULER E OS SEUS TRÊS «GRANDES» AMIGOS

1. Citado em Dunham (1999), xiii.
2. Citado em Youschkevitch (1971).
3. Riasanovsky (1993), 285.
4. Vucinich (1963), 69.
5. Citado em Condorcet (1786).
6. Citado em Eves (1969b), 48.
7. Citado em Boyer e Merzbach (1991), 440.
8. Citado em Cajori (1927).
9. Citado em Calinger (1996).
10. Citado em Cajori (1927).
11. Riasanovsky (1993), 248.
12. Citado em Alexander (1989), 173.
13. Weil (1984).

14. Hartley (2003).
15. Hardy (1992), 70.
16. Vucinich (1963), 146–47.
17. Condorcet (1786).
18. Wells (1990).

## CAPÍTULO 2. O QUE É UM POLIEDRO?

1. Hemingway (1932), 122.
2. Francese e Richeson (2007).
3. Poincaré (1913), 434.

## CAPÍTULO 3. OS CINCO SÓLIDOS PERFEITOS

1. McEwan (1997), 20.
2. Plato (1972), 244.
3. Waterhouse (1972).
4. *Ibid.*

## CAPÍTULO 4. A FRATERNIDADE PITAGÓRICA E A TEORIA ATÔMICA DE PLATÃO

1. Simmons (1992), 20.
2. Burkert (1972), 109.
3. Citado em van der Waerden (1954), 94.
4. Citado em Euclid (1926) vol. 3, 438.
5. Citado em van der Waerden (1954), 165.
6. Taylor (1929), 5.
7. Boyer e Merzbach (1991), 84.
8. Allan (1975).
9. Plato (2000), 46.

## CAPÍTULO 5. EUCLIDES E O SEU *ELEMENTOS*

1. Russell (1967), 37–38.
2. Citado em Bulmer-Thomas (1976).
3. *Ibid.*
4. van der Waerden (1954), 173.
5. Euler (1862).
6. Cauchy (1813a).
7. Connelly (1977).
8. Citado em Bulmer-Thomas (1967), 195.

## CAPÍTULO 6. O UNIVERSO POLIÉDRICO DE KEPLER

1. Simmons (1992), 69.
2. Koestler (1963), 262.
3. *Ibid*, 252.
4. Kepler (1596), tradução inglesa em Kepler (1981).
5. Kepler (1596), citado em Gingerich (1973).
6. Kepler (1981), 107.
7. Citado em Martens (2000), 146.
8. Kepler (1938), tradução inglesa em Kepler (1997).
9. Citado em Emmer (1993).

## CAPÍTULO 7. A PÉROLA DE EULER

1. Bell (1987), 16.
2. Jučkevič e Winter (1965), 333.
3. Euler (1758b).
4. Legendre (1794).
5. Juškevic e Winter (1965), 333.
6. *Ibid.*, 334.
7. Euler (1758b).
8. *Ibid*.
9. Euler (1758a), tradução inglesa em Euler (1758c).
10. Legendre (1794).
11. Euler (1758a), tradução inglesa em Euler (1758c).
12. Lebesgue (1924).
13. Francese e Richeson (2007); Samelson (1996).

## CAPÍTULO 8. SÓLIDOS PLATÓNICOS, BOLAS DE GOLFE, FULLERENOS E CÚPULAS GEODÉSICAS

1. Bell (1945), 211.
2. Poincaré (1913), 44.

## CAPÍTULO 9. ULTRAPASSADO POR DESCARTES?

1. Descartes (1965), 259.
2. Citado em Bell (1937), 35.
3. Descartes (1965).
4. Kuhn (1970), 54.
5. Citado em Federico (1982), 76.
6. Lebesgue (1924).
7. Kuhn (1970), 55.

## CAPÍTULO 10. A DEMONSTRAÇÃO DE LEGENDRE

1. Albers (1994).
2. Lohne (1972).
3. Citado em Itard (1972).
4. Girard (1629).
5. Citado em Itard (1972).
6. Poinot (1810).
7. *Ibid.*

## CAPÍTULO 11. UM PASSEIO POR KÖNIGSBERG

1. Thoreau (1894), 419.
2. Citado em Sachs, Stiebitz e Wilson (1988).
3. *Ibid.*
4. Citado em Hopkins e Wilson (2004).
5. Euler (1736), tradução inglesa em Biggs, Lloyd e Wilson (1986), 3–8.
6. Ball (1892).
7. Hierholzer (1873).
8. Barabási (2002), 12.
9. Listing (1847).
10. Terquem (1849).

## CAPÍTULO 12. OS POLIEDROS ACHATADOS DE CAUCHY

1. Abel (1881), 259.
2. Freudenthal (1971).
3. *Ibid.*
4. Simmons (1992), 186.
5. Cauchy (1813a).
6. Lhuillier (1813).
7. *Ibid.*
8. Hadamard (1907).
9. Listing (1861–62); Jordan (1866b).

## CAPÍTULO 13. GRAFOS, GEOPLANOS E COUVES-DE-BRUXELAS

1. Hankel (1884).
2. Hardy (1992), 94.
3. Pick (1899).
4. DeTemple (1989).

5. Gardner (1975a), 8.
6. Applegate, Jacobson e Sleator (1991).

#### CAPÍTULO 14. É UM MUNDO COLORIDO

1. Twain (1894), 42–43.
2. May (1965).
3. Graves (1889), 423.
4. *Ibid.*
5. Cayley (1878).
6. Citado em Dudley (1992).
7. Gardner (1975b); Gardner (1988).
8. Baltzer (1885), citado em Coxeter (1959).
9. *Ibid.*
10. Kempe (1879).
11. Citado em Wilson (2002), 119.
12. Gardner (1995).
13. Appel e Haken (1977); Appel, Haken e Koch (1977).
14. Hales (2005).

#### CAPÍTULO 15. NOVOS PROBLEMAS E NOVAS DEMONSTRAÇÕES

1. Citado em Federico (1982), 71.
2. Sommerville (1958), 143–44.
3. de Jonquières (1890).
4. Speziali (1973).
5. Pont (1974), 24.
6. Lhuillier (1813).
7. Hessel (1832).
8. Poincaré (1810).
9. Cauchy (1813a).
10. Lhuillier (1813).
11. Steiner (1826).
12. von Staudt (1847), 18–23.
13. Hoppe (1879).

#### CAPÍTULO 16. MEMBRANAS DE BORRACHA, DONUTS OCOS E GARRAFAS LOUCAS

1. Listing (1847).
2. Tait (1883).
3. Lefschetz (1970).

4. Entrevista a Maurer (1983).
5. Klein (1882/83).
6. Brahana (1921).
7. Clarke (2000).
8. Gardner (1990).
9. Gardner (1956).
10. Listing (1861–62).
11. Möbius (1865).
12. Introdução em Abbott (2005), xxix.
13. Klein (1882).

#### CAPÍTULO 17. SÃO IGUAIS, OU SÃO DIFERENTES?

1. Poincaré (1895).
2. Möbius (1863).
3. Radó (1925).
4. Papakyriakopoulos (1943).
5. Citado em Freudenthal (1975).
6. Riemann (1851); Riemann (1857).
7. Möbius (1863).
8. Jordan (1866a).
9. Dyck (1888).
10. Dehn e Heegaard (1907).
11. Francis e Weeks (1999).
12. *Ibid.*

#### CAPÍTULO 18. UM PROBLEMA ENREDADO

1. Shakespeare (2002), 82.
2. Vandermonde (1771).
3. Gauss (1877).
4. Listing (1847).
5. Seifert (1934).
6. Sequência número A002864 em Sloane (2007).
7. Crowell (1959).
8. Sequência número A002863 em Sloane (2007).
9. Kauffman (1987b); Murasugi (1987); Thistlethwaite (1987).

#### CAPÍTULO 19. PENTEANDO O PÊLO DE UM COCO

1. Frost (2002), 308.
2. Brouwer (1912).

3. Citado em Dieudonné (1975).
4. Dieudonné (1975).
5. Poincaré (1881).
6. Poincaré (1885).
7. Brouwer (1912).
8. Beno Eckmann, citado em Frei e Stambach (1999).
9. Hopf (1925); Hopf (1926a); Hopf (1926b).
10. Morse (1929).
11. Thurston (1997).
12. Brouwer (1909).
13. Brouwer (1912).

## CAPÍTULO 20. QUANDO A TOPOLOGIA CONDICIONA A GEOMETRIA

1. Shakespeare (1992), 36.
2. Pólya (1954), 57–58.
3. Hopf (1935).
4. Citado em Federico (1982), 43.
5. Euler (1758b); Euler (1758a).

## CAPÍTULO 21. A TOPOLOGIA DAS SUPERFÍCIES CURVAS

1. Bell (1937), 254.
2. Euler (1760).
3. Consultar Hayes (2006) para uma discussão desta história.
4. Citado em Simmons (1992), 177.
5. Gauss (1828); tradução inglesa e comentários em Dombrowski (1979).
6. Bonnet (1848).
7. Blaschke (1921).
8. Dyck (1888).

## CAPÍTULO 22. NAVEGANDO EM $n$ DIMENSÕES

1. Scholz (1999).
2. Brouwer (1911).
3. Cauchy (1813a).
4. Schläfli (1901).
5. Breitenberger (1999).
6. Listing (1847), Listing (1861–62).
7. Tait (1884).
8. Riemann (1851).

## CAPÍTULO 23. HENRI POINCARÉ E O DESENVOLVIMENTO DA TOPOLOGIA

1. Hardy (1992), 85.
2. Citado em Dieudonné (1975).
3. Poincaré (1895).
4. Poincaré (1899); Poincaré (1900); Poincaré (1902a); Poincaré (1902b); Poincaré (1904).
5. Dieudonné (1989), 17.
6. Heinrich Tietze (1880–1964), citado em James (2001).
7. Poincaré (1895).
8. Poincaré (1895), citado em Sarkaria (1999).
9. Citado em James (1999).
10. *Ibid.*

## EPÍLOGO: O PROBLEMA QUE VALE UM MILHÃO DE DÓLARES

1. Russell (1957).
2. Poincaré (1900).
3. Poincaré (1904).
4. *Ibid.*
5. Taubes (1987).
6. Smale (1961).
7. Smale (1990).
8. *Ibid.*
9. Stallings (1962); Stallings (1960); Zeeman (1961); Zeeman (1962).
10. Freedman (1982).
11. Smale (1998).
12. Thurston (1982).
13. Hamilton (1982).
14. Perelman (2002); Perelman (2003b); Perelman (2003a).
15. Cao e Zhu (2006a); Cao e Zhu (2006b); Kleiner e Lott (2006); Morgan e Tian (2006).
16. Mackenzie (2006).
17. Consultar Nasar e Gruber (2006) para mais detalhes.
18. Nasar e Gruber (2006).
19. Citado em Nasar e Gruber (2006).
20. Poincaré (1913), 366.

## Bibliografia

- Abbott, E. A. (2005). *Flatland: A romance of many dimensions*. Princeton, NJ: Princeton University Press. Com introdução de Thomas Banchoff.
- Abel, N. H. (1881). *Oeuvres complètes de Niels Henrik Abel*, Vol. 2. Cristiânia, Noruega: De Grondahl & Son.
- Adams, C. C. (1994). *The knot book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots*. Nova Iorque: W. H. Freeman.
- Aigner, M. e G. M. Ziegler (2001). *Proofs from The Book* (2.<sup>a</sup> ed.). Incluindo ilustrações de Karl H. Hofmann. Berlim: Springer-Verlag.
- Albers, D. J. (1994). Freeman Dyson: Mathematician, physicist, and writer. *The College Mathematics Journal* 25(1), January, 2-21.
- Alexander, J. T. (1989). *Catherine the Great: Life and legend*. Nova Iorque: Oxford University Press.
- Allan, D. J. (1975). Plato. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 11, 22-31. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Andrews, P. (1988). The classification of surfaces. *Amer. Math. Monthly* 95(9), 861-67.
- Appel, K., e W. Haken (1977). Every planar map is four colorable. I. *Discharging*. *Illinois J. Math.* 21(3), 429-90.
- Appel, K., W. Haken e J. Koch (1977). *Every planar map is four colorable*. II. Reducibility. *Illinois J. Math.* 21(3), 491-567.
- Applegate, D., G. Jacobson e D. Sleator (1991). *Computer analysis of sprouts*. Technical Report CMU-CS-91-144, Carnegie Mellon University.
- Asimov, I. (1965). *A short history of chemistry: An introduction to the ideas and concepts of chemistry*. Science Study Series. Garden City, NY: Anchor Books, Doubleday.
- Ball, W. W. R. (1892). *Mathematical recreations and problems of past and present times*. Londres: MacMillan.

- Baltzer, R. (1885). Eine Erinnerung an Möbius und seinen Freund Weiske. *Ber. Verh. K. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig* 37, 1-6.
- Barabási, A.-L. (2002). *Linked: How everything is connected to everything else and what it means*. Cambridge, MA: Perseus.
- Barnette, D. (1983). *Map coloring, polyhedra, and the four-color problem*. Washington DC: Mathematical Association of America.
- Barr, S. (1964). *Experiments in topology*. Nova Iorque: Dover.
- Baxter, M. (1990). Unfair games. *Ureka: The Journal of the Archimedeans* 50, 60-68.
- Becker, J. C. e D. H. Gottlieb (1999). A history of duality in algebraic topology. In I. M. James (ed.), *History of topology*, 725-45. Amsterdão: North-Holland.
- Bell, E. T. (1937). *Men of Mathematics*. Nova Iorque: Simon and Schuster.
- . (1945). *The development of mathematics*. Nova Iorque: McGraw-Hill.
- . (1987). *Mathematics: Queen and servant of science*. MAA Spectrum series. Washington DC: Mathematical Association of America.
- Biggs, N. (1993). *The development of topology*. In J. Fauvel, R. Flood e R. Wilson (eds.), *Möbius and his band: Mathematics and astronomy in nineteenth-century Germany*, 105-19. Nova Iorque: The Clarendon Press, Oxford University Press.
- Biggs, N. L., E. K. Lloyd e R. J. Wilson (1986). *Graph theory, 1736-1936*. Oxford: Clarendon Press.
- Blaschke, W. (1921). *Vorlesungen über Differentialgeometrie*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.
- Bonnet, O. (1848). Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *J. Éc. Polytech.* 19, 1-146.
- Boyer, C. B. (1951). The foremost textbook of modern times. *Amer. Math. Monthly* 58, April, 223-26.
- Boyer, C. B. e U. Merzbach (1991). *A History of Mathematics* (2.<sup>a</sup> ed.). Nova Iorque: John Wiley & Sons.
- Boyle, R. (1937). *The Sceptical Chymist, with an introduction by M. M. Pattison Muir*. Everyman's Library. Londres: J. M. Dent and Sons.
- Bradley, R. e E. Sandifer (eds.) (2007). *Leonhard Euler: Life, work and legacy*. Vol. 5 of *Studies in the history and philosophy of mathematics*. Amsterdão: Elsevier.
- Brahana, H. R. (1921). Systems of circuits on two-dimensional manifolds. *Ann. of Math.* (2) 23(2), 144-68.
- Breitenberger, E. (1999). Johann Benedict Listing. In I. M. James (ed.), *History of topology*, 909-24. Amsterdão: North-Holland.
- Brewster, D. (1833). The life of Euler. In *Letters of Euler on different subjects in natural philosophy addressed to a German princess*, 15-28. Nova Iorque: J. and J. Harper.
- Brisson, L. e F. W. Meyerstein (1995). *Inventing the universe: Plato's «Timaeus», the big bang, and the problem of scientific knowledge*. Albany, NY: State University of New York Press.
- Brouwer, L. E. J. (1909). On continuous one-to-one transformations of surfaces to themselves. *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A* 11, 788-98.
- . (1911). Beweis der Invarianz der Dimensionzahl. *Mathematische Annalen* 69, 169-75.

- . (1912). Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten. *Mathematische Annalen* 71(1), 97-115.
- Bulmer-Thomas, I. (1967). *Selections illustrating the history of Greek mathematics with an English translation by Ivor Thomas*, Vol. 2 da Loeb Classical Library. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- . (1971). Euclid. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 4, 414-37. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- . (1976). Theaetetus. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 13, 301-7. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Bureau, W. (1976). Staudt, Karl Georg Christian von. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 8, 4-6. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Burckhardt, J. J. (1983). Leonhard Euler, 1707-1783. *Math. Mag.* 56(5), 262-73.
- Burde, G. e H. Zieschang (1999). Development of the concept of a complex. In *History of topology*, 103-10. Amsterdão: North-Holland.
- Burke, J. G. (1972). Hessel, Johann Friedrich Christian. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 6, 358-59. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Burkert, W. (1972). *Love and science in ancient Pythagoreanism*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Cajori, F. (1927). Frederick the Great on mathematics and mathematicians. *Amer. Math. Monthly* 34, 122-30.
- Calinger, R. (1968). Frederick the Great and the Berlin Academy of Sciences (1740-1766). *Annals of Science* 24(3), 239-49.
- . (1996). Leonhard Euler: The first St. Petersburg years (1727-1741). *Historia Math.* 23(2), 121-66.
- Cao, H.-D. e X.-P. Zhu (2006a). A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures — application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow. *Asian Journal of Mathematics* 10(2), June, 165-492.
- . (2006b). Erratum to «A complete proof of the Poincaré and geometrization conjectures — application of the Hamilton-Perelman theory of the Ricci flow.» *Asian Journal of Mathematics* 10(4), December, 663-64.
- Carruccio, E. (1970). Betti, Enrico. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 2, 104-6. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Casselman, B. (2004). *Mathematical illustrations: A manual of geometry and Post-Script*. Nova Iorque: Cambridge University Press.
- Cauchy, A. L. (1813a). Recherches sur les polyèdres. *Journal de l'École Polytechnique* 9, 68-86.
- . (1813b). Sur les polygones et les polyèdres. *Journal de l'École Polytechnique* 9, 87-98.
- Cayley, A. (1861). On partitions of a close. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 4th Series 21, 424-28.
- . (1873). On Listing's theorem. *Messenger of Mathematics* II, 81-89.
- . (1878). On the coloring of maps. *Proceedings of the London Mathematical Society* IX, 14.

- Chambers, M., R. Grew, D. Herlihy, T. Rabb e I. Woloch (1987). *The Western experience, Vol. 2: The early modern period* (4.<sup>a</sup> ed.). Nova Iorque: Alfred A. Knopf.
- Clarke, A. C. (2000). The wall of darkness. In *The Collected Stories of Arthur C. Clarke*, 104-18. Nova Iorque: Tom Doherty Associates.
- Collingwood, S. D. (1898). *The life and letters of Lewis Carroll* (Rev. C. L. Dodgson). Londres: T. Fisher Unwin.
- Condorcet, M. J. (1786). Eulogy to Mr. Euler (traduzido por John S. D. Glaus, Euler Society, 2005). In *History of the Royal Academy of Sciences 1783*, 37-68. Paris: Imprimerie Royale.
- Connelly, R. (1977). A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* 47, 333-38.
- Conway, J., P. Doyle, J. Gilman e B. Thurston (1994). Geometry and the imagination. <http://www.geom.uiuc.edu/docs/education/institute91>.
- Coolidge, J. L. (1963). *A history of geometrical methods*. Nova Iorque: Dover.
- Copper, M. (1993). Graph theory and the game of sprouts. *Amer. Math. Monthly* 100(5), 478-82.
- Coxeter, H. S. M. (1959). The four-color map problem, 1840-1890. *Mathematics-Teacher* 52, 283-89.
- . (1988). Regular and semiregular polyhedra. In M. Senechal e G. Fleck (eds.), *Shaping space: A polyhedral approach*, acta da conferência de Northampton de 1984, MA, 67-79. Boston, Design Science Collection, Birkhäuser Boston.
- Crombie A. C., (1971). Descartes, Réne du Perron. In Charles C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*, vol. 4, 51-55. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Cromwell, P. R. (1995). Kepler's work on polyhedra. *Math. Intelligencer* 17(3), 23-33.
- . (1997). *Polyhedra*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Crowe, M. J. (1974). Möbius, August Ferdinand. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 9, 429-31. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Crowell, R. (1959). Genus of alternating link types. *Ann. of Math.* (2) 69, 258-75.
- D'Alarcao, H. e T. E. Moore (1976-77). Euler's formula and a game of Conway's. *Journal of Recreational Mathematics* 9(4), 149-251.
- de Jonquières, E. (1890). *Note sur un point fondamental de la théorie des polyèdres*. *Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences* 110, 110-15.
- Dehn, M. e P. Heegaard (1907). Analysis situs. In *Enzyklopädie Mathematische Wissenschaft*. Vol. 3, 153-220. Leipzig: Teubner.
- Descartes, R. (1965). *Discourse on method, Optics, geometry, and meteorology*. Tradução e introdução de Paul J. Olscamp. Indianapolis: Bobbs-Merrill.
- DeTemple, D. (1989). Pick's theorem: A retrospective. *Mathematics Notes From Washington State University* 32(3 e 4), November, 1-4.
- DeTemple, D. e J. M. Robertson (1974). The equivalence of Euler's and Pick's theorems. *Math. Teacher* 67(3), 222-26.
- Dieudonné, J. (1975). Poincaré, Henri Jules. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 11, 51-61. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.

- . (1989). *A history of algebraic and differential topology: 1900-1960*. Boston: Birkhäuser Boston.
- Dombrowski, P. (1979). *150 years after Gauss' «Disquisitiones generales circa superficies curvas.»* Com o texto original de Gauss. Vol. 62 of *Astérisque*. Paris: Société Mathématique de France.
- Doyle, P. H. e D. A. Moran (1968). A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Invent. Math.* 5, 160-62.
- Dudley, U. (1992). *Mathematical cranks*. MAA Spectrum series. Washington DC: Mathematical Association of America.
- Dunham, W. (1990). *Journey through genius: The great theorems of mathematics*. Nova Iorque: John Wiley & Sons.
- . (1999). *Euler: The master of us all*. Vol. 22 of The Dolciani Mathematical Expositions. Washington DC: Mathematical Association of America.
- . (ed.) (2007). *The genius of Euler: Reflections on his life and work*. MAA Spectrum series. Washington DC: Mathematical Association of America.
- Dyck, W. (1888). Beiträge zur Analysis situs. *Math. Ann.* XXXII, 457-512.
- Emmer, M. (1993). Art and mathematics: The Platonic solids. In M. Emmer (ed.), *The visual mind*, Leonardo Book Ser., 215-20. Cambridge, MA: MIT Press.
- Epple, M. (1999). Geometric aspects in the development of knot theory. In *History of topology*, 301-57. Amsterdão: North-Holland.
- Euclid (1926). *The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg*. Vol. I: Introduction and Books I, II. Vol. II: Books III-IX. Vol. III: Books X-XIII and Appendix. Tradução, introdução e comentários de Thomas L. Heath, 2.<sup>a</sup> ed. Cambridge: Cambridge University Press.
- Euler, L. (1736). *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* 8, 128-40. Also in *Opera Omnia series 1*, vol. 7, 1-10.
- . (1758a). *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 4, 94-108. Also in *Opera Omnia series 1*, vol. 26, 94-108.
- . (1758b). *Elementa doctrinae solidorum*. *Novi Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae* 4, 72-93. Also in *Opera Omnia series 1*, vol. 26, 71-93.
- . (1758c). Proof of some notable properties with which solids enclosed by plane faces are endowed. Traduzido por Chris Francese e David Richeson. <http://www.eulerarchive.org>.
- . (1760). *Recherches sur la courbure des surfaces*. *Mém. Acad. Sci. Berlin* 16, 119-43.
- . (1862). *Continuatio fragmentorum ex adversariis mathematicis depromptorum*. In P. H. Fuss e N. Fuss (eds.), *Opera postuma mathematica et physica*, Vol. 1, 487-518. São Petersburgo: St. Petersburg Academy of Sciences.
- . (1911-). *Opera Omnia*. Basel: Birkhäuser. Euler Archive, <http://www.eulerarchive.org>. Criado por D. Klyve e L. Stemkoski.
- Eves, H. (1990). *An introduction to the history of mathematics*. 6.<sup>a</sup> ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole.

- . (1969a). *In mathematical circles, quadrants I and II*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt.
- . (1969b). *In mathematical circles, quadrants III and IV*. Boston: Prindle, Weber & Schmidt.
- Federico, P. J. (1982). *Descartes on polyhedra: A study of the De Solidorum Elementis*. Vol. 4 of *Sources in the history of mathematics and physical sciences*. Nova Iorque: Springer-Verlag.
- Field, J. V. (1979). Kepler's star polyhedra. *Vistas Astronom.* 23(2), 109-41.
- . (1988). *Kepler's geometrical cosmology*. Chicago: University of Chicago Press.
- Francesca, C. e D. Richeson (2007). The flaw in Euler's proof of his polyhedral formula. *Amer. Math. Monthly* 114, April, 286-96.
- Francis, G. K. (1987). *A topological picturebook*. Nova Iorque: Springer-Verlag.
- Francis, G. K. e J. R. Weeks (1999). Conway's ZIP proof. *Amer. Math. Monthly* 106(5), 393-99.
- Fréchet, M. e K. Fan (1967). *Initiation to combinatorial topology*. Traduzido do francês com algumas notas, por H. W. Eves. Boston: Prindle, Weber & Schmidt.
- Freedman, M. H. (1982). The topology of four-dimensional manifolds. *J. Differential Geom.* 17(3), 357-453.
- Frei, G. e U. Stambach (1999). Heinz Hopf. In I. M. James (ed.), *History of Topology*, 991-1008. Amsterdão: North-Holland.
- Freudenthal, H. (1971). Cauchy, Augustin-Louis. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 3, 131-48. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- . (1972). Hopf, Heinz. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 6, 496-97. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- . (1975). Riemann, Georg Friedrich Bernhard. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 11, 447-56. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Fritsch, R. e G. Fritsch (1998). *The four-color theorem: History, topological foundations, and idea of proof*. Traduzido do original alemão, de 1994, por: Julie Peschke. Nova Iorque: Springer-Verlag.
- Frost, R. (2002). *The poetry of Robert Frost: The collected poems*. Nova Iorque: Henry Holt.
- Funkenbusch, W. W. (1974). Classroom notes: From Euler's formula to Pick's formula using an edge theorem. *Amer. Math. Monthly* 81(6), 647-48.
- Gardner, M. (1956). The Afghan bands. In *Mathematics, Magic and Mystery*, 70-73. Nova Iorque: Dover.
- . (1975a). *Mathematical Carnival*. Nova Iorque: Knopf.
- . (1975b). Mathematical games: Six sensational discoveries that somehow or another have escaped public attention. *Scientific American* 232, April, 127-31.
- . (1988). Six sensational discoveries. In *Time Travel and Other Mathematical Bewilderments*, 125-38. Nova Iorque: W. H. Freeman.
- . (1990). Möbius bands. In *Mathematical Magic Show*, 123-36. Washington DC: Mathematical Association of America.

- . (1995). The four-color map theorem. In *New Mathematical Diversions*, 113-23. Washington DC: Mathematical Association of America.
- . (2005). *Martin Gardner's mathematical games: The entire collection of his Scientific American columns*. MAA Spectrum series (em CD). Mathematical Association of America.
- Gaskell, R. W., M. S. Klamkin e P. Watson (1976). Triangulations and Pick's theorem. *Math. Mag.* 49(1), 35-37.
- Gaukroger, S. (1995). *Descartes: An intellectual biography*. Oxford: Clarendon Press.
- Gauss, C. F. (1828). *Disquisitiones generales circa superficies curvas*. Göttingen: Dieterich.
- . (1877). Zur mathematischen Theorie der electrodynamischen Wirkungen. In *Werke*, vol. 5. Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.
- Gillispie, C. C. (ed.) (1970-1990). *Dictionary of Scientific Biography*, Volumes 1-16. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Gingerich, O. (1973). Kepler, Johannes. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 7, 289-312. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Girard, A. (1629). *Invention nouvelle en algèbre*. Amsterdão: Guillaume Jansson Blaeuw.
- Gluck, H. (1975). Almost all simply connected closed surfaces are rigid. In *Geometric topology (Proc. Conf., Park City, Utah, 1974)*, 225-39. Lecture Notes in Math., Vol. 438. Berlin: Springer.
- Gorman, P. (1979). *Pythagoras: A life*. Londres: Routledge & Kegan Paul.
- Gottlieb, D. H. (1996). All the way with Gauss-Bonnet and the sociology of mathematics. *Amer. Math. Monthly* 103(6), 457-69.
- Graham, L. R. (1993). *Science in Russia and the Soviet Union: A short history*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Graves, R. P. (1889). *Life of Sir William Rowan Hamilton*, vol. 3. Dublin: Hodges, Figgis, & Co.
- Grünbaum, B. (2003). *Convex polytopes* (2.<sup>a</sup> ed.). Vol. 221 of *Graduate texts in mathematics*. Preparação e prefácio de Volker Kaibel, Victor Klee e Günter M. Ziegler. Nova Iorque: Springer-Verlag.
- Grünbaum, B. e G. C. Shephard (1993). Pick's theorem. *Amer. Math. Monthly* 100(2), 150-61.
- Guillemin, V. e A. Pollack (1974). *Differential topology*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall.
- Guthrie, W. (1962). *A history of Greek philosophy: The earlier presocratics and the Pythagoreans*, vol. 1. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hadamard, J. (1907). *Erreurs de mathematicians*. *L'intermédiaire des mathématiciens* 14, 31.
- Hales, T. C. (2005). A proof of the Kepler conjecture. *Ann. of Math. (2)* 162(3), 1065-185.
- Hamilton, R. S. (1982). Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.* 17(2), 255-306.
- Hankel, H. (1884). *Die Entwicklung der Mathematik in den letzten Jahrhunderten*. Tübingen: Verlag und Druck von Franz.

- Harcave, S. (1964). *Russia: A history* (5th ed.). Philadelphia: J. B. Lippincott.
- Hardy, G. H. (1992). *A mathematician's apology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hartley, J. M. (2003). *Governing the city: St. Petersburg and Catherine II's reforms*. In A. Cross (ed.), *St. Petersburg: 1703-1825*, 99-118. Londres: Palgrave Macmillan.
- Hatcher, A. (2002). *Algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Hayes, B. (2006). Gauss's day of reckoning: A famous story about the boy wonder of mathematics has taken on a life of its own. *American Scientist* 94(3), 200-5.
- Heath, T. (1981). *A history of Greek mathematics: From Aristarchus to Diophantus*, vol. II. Corrected reprint of the 1921 original. Nova Iorque: Dover.
- Hemingway, E. (1960). *Death in the afternoon*. Nova Iorque: Charles Scribner & Sons.
- Hessel, J. F. (1832). Nachtrag zu dem Eulerschen Lehrsatz von Polyëdern. *Journal für die Reine und Angewandte mathematik* 8, 13-20.
- Hierholzer, C. (1873). Über die möglichkeit, einen linienzug ohne wiederholung und ohne unterbrechnung zu umfahren. *Mathematische Annalen* 6, 30-32.
- Hilbert, D. e S. Cohn-Vossen (1952). *Geometry and the imagination*. Traduzido por P. Neményi. Nova Iorque: Chelsea Publishing Company.
- Hollingdale, S. (1989). *Makers of mathematics*. Londres: Penguin Books.
- Hopf, H. (1925). Über die curvatura integra geschlossener Hyperflächen. *Math. Ann.* 95, 340-67.
- . (1926a). Abbildungsklassen n-dimensionaler Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 96, 209-24.
- . (1926b). Vectorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten. *Math. Ann.* 96, 225-49.
- . (1935). Über die Drehung der Tangenten und Sehnen ebener Kurven. *Comp. Math.* 2, 50-62.
- Hopkins, B. e R. Wilson (2004). The truth about Königsburg. *Col. Math. J.* 35(3), May, 198-207.
- Hoppe, R. (1879). Ergänzung des Eulerschen Satzes von den Polyedern. *Archiv der Mathematik und Physik* 63, 100-103.
- Itard, J. (1972). Girard, Albert. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 5, 408-10. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- . (1973). Legendre, Adrien-Marie. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 8, 135-43. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Jackson, A. (2006). Conjectures no more? Consensus forming on the proof of the Poincaré and geometrization conjectures. *Notices Amer. Math. Soc.* 53(8), 897-901.
- James, I. M. (1999). From combinatorial topology to algebraic topology. In *History of topology*, 561-73. Amsterdão: North-Holland.
- . (2001). Combinatorial topology versus point-set topology. In *Handbook of the history of general topology*, Vol. 3 of History of Topology Series, 809-34. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ.
- Jones, P. S. (1994). Irrationals or incommensurables I: Their discovery and a «logical scandal.» In F. J. Swetz (ed.), *From five fingers to infinity: A journey through the history of mathematics*, 172-75. Chicago: Open Court.

- Jordan, C. (1866a). Des contours tracés sur les surfaces. *J. Math. Pures Appl.* (2) 11, 110-30. See also *Oeuvres*, vol. 4, 91-112, Paris: Gauthier-Villars et cie, 1964.
- . (1866b). Recherches sur les polyèdres. *Comptes rendus des Séances de l'Académie des Sciences* 62, 1339-41.
- Juškevič, A. P. e E. Winter (1965). *Leonhard Euler und Christian Goldbach: Briefwechsel 1729-1764*. Berlin: Akademie-Verlag.
- Katz, V. J. (1993). *A history of mathematics: An introduction*. Nova Iorque: Harper Collins College Publishers.
- Kauffman, L. H. (1987a). *On knots*, vol. 115 of *Annals of mathematics studies*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- . (1987b). State models and the Jones polynomial. *Topology* 26(3), 395-407.
- Kempe, A. B. (1879). On the geographical problem of four colors. *American Journal of Mathematics II*, 193-204.
- Kepler, J. (1596). *Mysterium cosmographicum*. Tübingen.
- . (1938). Harmonice mundi. In M. Caspar (ed.), *Johannes Kepler Gesammelte Werke*, vol. 6. Munique: Beck.
- . (1981). *Mysterium cosmographicum: The secret of the universe*. Tradução de A. M. Duncan, introdução e notas de E. J. Aiton, prefácio de I. Bernard Cohen. Nova Iorque: Abaris Books.
- . (1997). The harmony of the world, vol. 209 of *Memoirs of the American Philosophical Society*. Tradução do Latim, introdução e notas de E. J. Aiton, A. M. Duncan, e J. V. Field, prefácio de Duncan e Field. Filadélfia: American Philosophical Society.
- Klein, F. (1882). *Über Riemanns Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale*. Leipzig: B. G. Teubner.
- . (1882/83). Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie. *Math. Ann.* 21, 141-218.
- Kleiner, B. e J. Lott (2006). *Notes on Perelman's papers*. <http://www.math.lsa.umich.edu/~lott/ricciflow/perelman.html>.
- Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Nova Iorque: Oxford University Press.
- Knobloch, E. (1998). *Mathematics at the Prussian Academy of Sciences 1700-1810*. In H. G. W. Begehr, H. Koch, J. Kramer, N. Schnappacher e E.-J. Thiele (eds.), *Mathematics in Berlin*, 1-8. Berlin: Birkhäuser.
- Koestler, A. (1963). *The sleepwalkers: A history of man's changing vision of the universe*. Nova Iorque: The Universal Library.
- Kuhn, T. S. (1970). *The structure of scientific revolutions* (2.<sup>a</sup> ed.). Chicago: University of Chicago Press.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Lebesgue, H. (1924). Remarques sur les deux premières démonstrations du théorème d'Euler relatif aux polyèdres. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 52, 315-36.

- Lefschetz, S. (1970). The early development of algebraic topology. *Bol. Soc. Brasil. Mat.* 1(1), 1-48.
- Legendre, A. M. (1794). *Éléments de géométrie*. Paris: Firmin Didot.
- Lhuillier, S. (1811). Démonstration immédiate d'un théorème fondamental d'Euler sur les polyèdres. *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de Saint-Petersbourg* 4, 271-301.
- . (1813). Mémoire sur la polyédrométrie. *Annales de Mathématiques* 3, 169-89.
- Listing, J. B. (1847). Vorstudien zur Topologie. *Göttinger studien* (Abtheilung 1) 1, 811-75.
- . (1861-62). Der Census räumlicher Complexe oder Verallgemeinerung des Euler'schen Satzes von den Polyedern. *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 10, 97-182.
- Liu, A. C. F. (1979). Lattice points and Pick's theorem. *Math. Mag.* 52(4), 232-35.
- Livingston, C. (1993). *Knot theory*, vol. 24 of *Carus Mathematical Monographs*. Washington DC: Mathematical Association of America.
- Lobastova, N. e M. Hirst (2006). World's top maths genius jobless and living with mother. *Daily Telegraph*. August 20.
- Lohne, J. A. (1972). Harriot, Thomas. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 6, 124-29. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- . (1979). Essays on Thomas Harriot. I. Billiard balls and laws of collision; II. Ballistic parabolas; III. A survey of Harriot's scientific writings. *Arch. Hist. Exact Sci.* 20(3-4), 189-312.
- Machamer, P. (1998). Galileo's machines, his mathematics, and his experiments. In P. Machamer (ed.), *The Cambridge Companion to Galileo*, Cambridge Companions to Philosophy, 53-79. Nova Iorque: Cambridge University Press.
- Mackenzie, D. (2006). Breakthrough of the year: The Poincaré conjecture — proved. *Science* 314(5807), December 22, 1848-49.
- MacTutor History of Mathematics Archive, <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history>. Criado por J. J. O'Connor e E. F. Robertson.
- Malkevitch, J. (1984). The first proof of Euler's formula. *Mitt. Math. Sem. Giessen* 165, 77-82.
- . (1988). Milestones in the history of polyhedra. In M. Senechal e G. Fleck (eds.), *Shaping space: A polyhedral approach, proceedings of 1984 conference held in Northampton, MA*, 80-92. Boston: Design Science Collection, Birkhäuser Boston.
- Martens, R. (2000). *Kepler's philosophy and the new astronomy*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Maurer, S. B. (1983). An interview with Albert W. Tucker. *Two-Year College Mathematics Journal* 14(3), 210-24.
- May, K. O. (1965). The origin of the four-color conjecture. *Isis* 56(3), 346-48.
- McClellan III, J. E. (1985). *Science reorganized: Scientific societies in the eighteenth century*. Nova Iorque: A Columbia University Press.
- McEwan, I. (1997). *O Fardo do Amor*, Gradiva, Lisboa.

- Milnor, J. (1963). Morse theory. Based on lecture notes by M. Spivak and R. Wells. *Annals of Mathematics Studies*, no. 51. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- . (2003). Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. *Notices Amer. Math. Soc.* 50(10), 1226-33.
- Möbius, A. F. (1863). Theorie der elementaren Verwandtschaften. *Abhandlungen Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften* 15, 18-57. Also in *Gesammelte Werke*, vol. 2, Leipzig, 1886, 433-71.
- . (1865). Ueber die Bestimmung des Inhaltes eines Polyeders. *Abhandlungen Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften* 17, 31-68. Also in *Gesammelte Werke*, vol. 2, Leipzig, 1886, 473-512.
- Morgan, J. W. e G. Tian (2006). *Ricci flow and the Poincaré conjecture*. <http://arXiv.org/abs/math.DG/0607607>.
- Morse, M. (1929). Singular points of vector fields under general boundary conditions. *Amer. J. Math.* 41, 165-78.
- Murasugi, K. (1958). On the genus of the alternating knot. I, II. *J. Math. Soc. Japan* 10, 94-105, 235-48.
- . (1987). Jones polynomials and classical conjectures in knot theory. *Topology* 26(2), 187-94.
- Nasar, S. e D. Gruber (2006). Manifold destiny: A legendary problem and the battle over who solved it. *The New Yorker*, August 28, 44-57.
- Nash, C. (1999). Topology and physics — a historical essay. In I. M. James (ed.), *History of topology*, 359-415. Amsterdão: North-Holland.
- Papakyriakopoulos, C. (1943). A new proof for the invariance of the homology groups of a complex. *Bull. Soc. Math. Grèce* 22, 1-154.
- Perelman, G. (2002). *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0211159>.
- . (2003a). Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0307245>.
- . (2003b). Ricci flow with surgery on three-manifolds. <http://arxiv.org/abs/math.DG/0303109>.
- Peterson, I. (2003). Recycling topology. *Science News Online* 163(17), April 26.
- Pick, G. (1899). *Geometrisches zur Zahlenlehre. Sitzungber. Lotos, Naturwissen Zeitschrift*, Prague 19, 311-19.
- Plato (1921). *Theaetetus. Sophist*. Tradução para inglês de H. N. Fowler. Nova Iorque: G. P. Putnam's Sons.
- . (1972). *Philebus and Epinomis*. Tradução para inglês e introdução de A. E. Taylor. Londres: Dawsons of Pall Mall.
- . (2000). *Timaeus*. Tradução para inglês e introdução de, Donald J. Zeyl. Indianapolis: Hacket Publishing.
- Poincaré, H. (1881). Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *J. de Math.* 7, 375-422.
- . (1885). Sur les courbes définies par les équations différentielles. *Journal de mathématiques* 1(4), 167-244.
- . (1895). Analysis situs. *J. Ec. Polytech ser. 2* 1, 1-123.

- . (1899). Complément à l'analysis situs. *Rend. Circ. Math. D. Palermo* 13, 285-343.
- . (1900). Second complément à l'analysis situs. *Proc. Lond. Math. Soc.* 32, 277-308.
- . (1902a). Sur certaines surfaces algébriques; troisième complément à l'analysis situs. *Bull. Soc. Math. France* 30, 49-70.
- . (1902b). Sur les cycles algébriques; quatrième complément à l'analysis situs. *J. de Math.* 8, 169-214.
- . (1904). Cinquième complément à l'analysis situs. *Rend. Circ. Math. D. Palermo* 18, 45-110.
- . (1913). The foundations of science: Science and hypothesis, the value of science, science and method. *Science and Education*. Nova Iorque: The Science Press.
- Poinsot, L. (1810). Mémoire sur les polygones et les polyèdres. *Journal de l'école polytechnique* 4, 16-48.
- Pólya, G. (1954). Induction and analogy in mathematics. Vol. 1 of *Mathematics and plausible reasoning*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Pont, J.-C. (1974). *La topologie algébrique des origines à Poincaré*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Przytycki, J. (1992). A history of knot theory from Vandermonde to Jones. *Aportaciones Matemáticas Comunicaciones* 11, 173-85.
- Radó, T. (1925). Über den Begriff von Riemannsche fläche. *Acta Univ. Szeged* 2, 101-20.
- Ranicki, A. A., A. J. Casson, D. P. Sullivan, M. A. Armstrong, C. P. Rourke e G. E. Cooke (1996). The Hauptvermutung book, volume 1 of *K-Monographs in Mathematics. A collection of papers of the topology of manifolds*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Read, J. (1966). *Prelude to chemistry: An outline of alchemy, its literature and relationships*. Cambridge, MA: The M.I.T. Press.
- Riasanovsky, N. V. (1993). *A History of Russia* (5th ed.). Nova Iorque: Oxford University Press.
- Richeson, D. (2007). The polyhedral formula. In R. Bradley e E. Sandifer (eds.), *Leonhard Euler: Life, work and legacy*. Vol. 5 of *Studies in the history and philosophy of mathematics*, 421-39. Amsterdão: Elsevier.
- Riemann, G. F. B. (1851). *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse*. PhD thesis, Göttingen.
- . (1857). Theorie der Abel'schen Functionen. *Journal für Mathematik* 54, 101-55. Also in *Gesammelte Mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, Berlin: Springer, 1990, 88-142.
- Russell, B. (1957). The study of mathematics. In *Mysticism and Logic*, 55-69. Garden City, NY: Doubleday.
- . (1967). *The autobiography of Bertrand Russell*, vol. 1. Boston: Little, Brown.
- Sachs, H., M. Stiebitz e R. J. Wilson (1988). An historical note: Euler's Königsberg letters. *Journal of Graph Theory* 12(1), 133-39.

- Salzberg, H. W. (1991). *From caveman to chemist: Circumstances and achievements*. Washington DC: American Chemical Society.
- Samelson, H. (1995). Descartes and differential geometry. In *Geometry, topology, & physics*, Conf. Proc. Lecture Notes in *Geometry and Topology*, IV, 323-28. Cambridge, MA: Internat. Press.
- . (1996). In defense of Euler. *Enseign. Math.* (2) 42(3-4), 377-82.
- Sandifer, E. (2004). *How Euler did it: V, E and F*, partes 1 e 2. Mathematical Association of America Online. <http://www.maa.org/news/howeulerdidit.html>.
- Sarkaria, K. S. (1999). The topological work of Henri Poincaré. In *History of topology*, 123-67. Amsterdão: North-Holland.
- Schechter, B. (1998). *My brain is open: The mathematical journeys of Paul Erdős*. Nova Iorque: Touchstone.
- Schläfli, L. (1901). Theorie der vielfachen Kontinuität. *Denkschr. Schweiz. naturf. Ges.* 38, 1-237.
- Scholz, E. (1999). The concept of manifold, 1850-1950. In I. M. James (ed.), *History of topology*, 25-64. Amsterdão: North-Holland.
- Seifert, H. (1934). Über das Geschlecht von Knotten. *Math. Ann.* 110, 571-92.
- Seifert, H. e W. Threlfall (1980). *Seifert and Threlfall: A textbook of topology*, vol. 89 of *Pure and Applied Mathematics*. Traduzida da edição alemã, de 1934, por Michael A. Goldman, com prefácio de Joan S. Birman. With «Topology of 3-dimensional fibered spaces» by Seifert, traduzido do alemão por Wolfgang Heil. Nova Iorque: Academic Press (Harcourt Brace Jovanovich Publishers).
- Senechal, M. (1988). A visit to the polyhedron kingdom. In M. Senechal e G. Fleck (eds.), *Shaping space: A polyhedral approach, proceedings of 1984 conference held in Northampton, MA*, 3-43. Boston, Design Science Collection, Birkhäuser Boston.
- Shakespeare, W. (1992). *Hamlet*. Nova Iorque: Dover.
- . (2002). *Twelfth night*. Woodbury, CT: Barron's Educational Series.
- Simmons, G. F. (1992). *Calculus gems: Brief lives and memorable mathematics*. With portraits by Maceo Mitchell. Nova Iorque: McGraw-Hill.
- Simpson, J. e E. Weiner (eds.) (1989). *Oxford English Dictionary* (2.<sup>a</sup> ed.). Oxford: Clarendon Press.
- Sloane, N. J. A. (2007). *The online encyclopedia of integer sequences*. <http://www.research.att.com/~njas/sequences>.
- Smale, S. (1961). Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four. *Ann. of Math.* (2) 74, 391-406.
- . (1990). The story of the higher dimensional Poincaré conjecture (what really actually happened on the beaches of Rio). *Math. Intelligencer* 12(2), 44-51.
- . (1998). Mathematical problems for the next century. *Math. Intelligencer* 20(2), 7-15.
- Sommerville, D. M. Y. (1958). *An introduction to the geometry of n dimensions*. Nova Iorque: Dover.
- Speziali, P. (1973). L'huillier, Simon-Antoine-Jean. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 8, 305-7. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Stallings, J. (1960). Polyhedral homotopy-spheres. *Bull. Amer. Math. Soc.* 66, 485-88.

- Stallings, J. (1962). The piecewise-linear structure of Euclidean space. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 58, 481-88.
- Steiner, J. (1826). Leichter Beweis eines stereometrischen Satzes von Euler. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 1, 364-67.
- Steinitz, E. (1922). Polyeder und Raumeinteilungen. In W. F. Meyer e H. Mohrmann (eds.), *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*. Vol. 3 (Geometrie), 1-139. Leipzig: Teubner.
- Stillwell, J. (2002). Mathematics and its history (2.<sup>a</sup> ed.). *Undergraduate Texts in Mathematics*. Nova Iorque: Springer-Verlag.
- Struik, D. J. (1972). Gergonne, Joseph Diaz. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 5, 367-69. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Tait, P. G. (1883). Johann Benedict Listing. *Nature* 28, February 1, 316. Also in *Scientific Papers of Peter Guthrie Tate*, vol. 2, Cambridge: Cambridge University Press, 81-84.
- . (1884). Listing's Topologie. Introductory address to the Edinburgh Mathematical Society, November 9, 1883. *Philosophical Magazine* 17(5), January, 30-46.
- Taubes, G. (1987). What happens when hubris meets nemesis. *Discover* 8, July, 66-77.
- Taylor, A. E. (1929). *Plato: The man and his work*. Nova Iorque: The Dial Press.
- . (1962). *A commentary on Plato's Timaeus*. Londres: Oxford University Press.
- Terquem, O. (1849). Sur les polygones et les polyèdres étoilés, polygones funiculaires. *Nouv. Ann. Math.* 8, 68-74.
- Terrall, M. (1990). The culture of science in Frederick the Great's Berlin. *Hist. Sci.* 28, 333-64.
- Thistlethwaite, M. B. (1987). A spanning tree expansion of the Jones polynomial. *Topology* 26(3), 297-309.
- Thomassen, C. (1992). The Jordan-Schönflies theorem and the classification of surfaces. *Amer. Math. Monthly* 99(2), 116-30.
- Thoreau, H. D. (1894). In F. B. Sanborn (ed.), *Familiar Letters of Henry David Thoreau*. Boston: Houghton, Mifflin and Co.
- Thurston, W. P. (1982). Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* 6(3), 357-81.
- . (1997). Three-dimensional geometry and topology, vol. 1. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press.
- Tucker, A. W. e F. Nebeker (1990). Lefschetz, Solomon. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. vol. 18, 534-39. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Turnbull, H. W. (1961). *The great mathematicians*. Nova Iorque: New York University Press.
- Twain, M. (1894). *Tom Sawyer abroad*. Nova Iorque: Jenkins & Mccowan.
- van der Waerden, B. L. (1954). *Science awakening*. Tradução inglesa de Arnold-Dresden. Groningen, Netherlands: P. Noordhoff.
- Vanden Eynde, R. (1999). Development of the concept of homotopy. In *History of topology*, 65-102. Amsterdão: North-Holland.

- Vandermonde, A.-T. (1771). Remarques sur les problèmes de situation. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Paris* 15, 566-74.
- Varberg, D. E. (1985). Pick's theorem revisited. *Amer. Math. Monthly* 92(8), 584-87.
- von Fritz, K. (1975). Pythagoras of Samos. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 11, 219-25. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- von Staudt, K. G. C. (1847). *Geometrie der Lage*. Nürnberg: Bauer und Raspe.
- Vucinich, A. (1963). *Science in Russian culture: A history to 1860*. Stanford, CA: Stanford University Press.
- Waterhouse, W. C. (1972). The discovery of the regular solids. *Arch. Hist. Exact Sci.* 9, 212-21.
- Weeks, J. R. (2002). *The shape of space*, 2.<sup>a</sup> ed. Nova Iorque: Marcel Dekker.
- Weibel, C. A. (1999). History of homological algebra. In *History of topology*, 797-836. Amsterdão: North-Holland.
- Weil, A. (1984). Euler. *Amer. Math. Monthly* 91(9), 537-42.
- Wells, D. (1990). Are these the most beautiful? *Math. Intelligencer* 12(3), 37-41.
- Weyl, H. (1989). *Symmetry*. Reprint of the 1952 original. Princeton Science Library. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Wilson, R. J. (1986). An Eulerian trail through Königsberg. *Journal of Graph Theory* 10(3), 265-75.
- . (2002). *Four colors suffice: How the map problem was solved*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Youschkevitch, A. P. (1971). Euler, Leonhard. In C. C. Gillispie (ed.), *Dictionary of scientific biography*. Vol. 4, 467-84. Nova Iorque: Charles Scribner's Sons.
- Zeeman, E. C. (1961). The generalised Poincaré conjecture. *Bull. Amer. Math. Soc.* 67, 270.
- . (1962). The Poincaré conjecture for  $n \geq 5$ . In *Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961)*, 198-204. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall.

## Índice Remissivo

- Academia das Ciências de São Petersburgo, 27-31, 35, 113  
Academia de Ciências de Berlim, 26, 27, 31, 36  
Académie des Sciences (Academia das Ciências de França), - 25, 26, 34, 100, 232  
Académie Royale des Sciences et Belles Lettres, *ver* Academia de Ciências de Berlim  
*acies*, 76, 78  
Aleksandrov, Pavel, 288  
Alekseyevna, Catherine, *ver* Catarina Segunda da Rússia  
álgebra, 11, 56, 62, 95, 104, 105, 116, 127, 149, 163, 288, 289, 290  
alternado *ver* nó alternado  
alça, 188, 189, 190, 198, 199, 200, 203, 204, 269, 281  
American Mathematical Society (Sociedade Americana de Matemática), 159, 175  
análise, 24, 38, 116, 127, 201, 202, 207, 220, 258, 289, 290  
Anderson, Gary, 180  
anel, 164, 177, 178, 196, 201, 279  
ângulo plano, 58, 59, 75, 97, 98, 110, 247, 248, 249  
*angulus solidus*, ângulo sólido, 77, 78  
Apolônio, 43, 62  
Appel, Kenneth, 22, 159-160  
Arago, François, 30  
aresta, 14, 15, 16, 17, 38, 41, 59, 60, 71, 72, 75, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 89, 90, 91, 92, 97, 98, 109, 110, 111, 113, 116, 118, 119, 120, 122, 124, 129, 130, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 142, 143, 144, 145, 150, 151, 152, 153, 154, 156, 158, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 192, 196, 197, 198, 199, 204, 211, 228, 229, 235, 236, 245, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 256, 268, 270, 272, 273, 275, 284, 286  
Aristóteles, 55, 63, 70  
Arquimedes, 13, 23, 39, 43, 61, 62, 70, 192, 200  
arquimediano, *ver* sólido arquimediano  
árvore, 135, 170, 171  
astronomia geocêntrica (ou Ptolemaica), 67  
astronomia heliocêntrica (ou Copernicana), 67  
Ball, W. W. Rouse, 117  
Baltzer, Richard, 150  
banda, 180-183, 185, 187, 188, 210, 212, 215  
banda de Möbius, *ver* faixa de Möbius  
bandas afegãs, 181, 182, 195  
Barbari, Jacopo de, 64  
Barbaro, Daniele, 64  
Barr, Stephen, 155, 181, 311  
Basílica de São Marcos, 64  
Bernoulli, Daniel, 28, 29

Bernoulli, Jacob, 24  
 Bernoulli, Johann, 24, 25, 27  
 Bernoulli, Nicolaus, 28  
 Berthollet, Claude Louis, 126  
 Betti, Enrico, 273, 275, 276, 278, 280  
 Biggs, Henry, 105  
 Billingsley, Henry, 39  
 Birkhoff, George D., 158  
 Biron, Earnst-Johann, 28, 29, 30, 31  
 Blaschke, Wilhelm, 263  
 bola, 263, 268, 271, 287  
 bola  $n$ -dimensional, 238, 287  
 Bonnet, Pierre Ossian, 262, 263  
 bordo, *ver* superfície com bordo, variedade com bordo  
 Boyer, Carl, 38, 310  
 Boyle, Robert, *O Químico Céptico*, 55, 70  
 Brahe, Tycho, 69  
 Brouwer, Luitzen Egbertus Jan, 230, 233, 234, 238, 239, 269, 288, 312  
 Burkert, Walter, 48  
  
 cadeia de Kempe, 155, 156, 158  
 cálculo, 9, 22, 24, 26, 30, 37, 38, 64, 68, 104, 127, 149, 150, 159, 164, 202, 204, 207, 223, 254, 255, 261, 277, 284  
 campo vectorial, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 233, 235, 236, 238, 239  
 campo vectorial gradiente, 225, 226, 229  
 característica de Euler, 17-20, 196-201, 204, 206, 208, 210-212, 221, 226, 229-231, 233-237, 239, 240, 241, 248, 249, 252, 253, 263, 264, 265, 271, 274, 275, 284, 285, 291, 311  
 característica de Euler-Poincaré, 265, 284, 285, 286, 287, 288, 291  
 Carlos X de França, 127  
 Carroll, Lewis, 146  
 Catarina I da Rússia, 27, 28  
 Catarina II da Rússia, 24, 27, 34-36  
 Catarina, *a Grande*, *ver* Catarina II da Rússia  
 Cauchy, Augustin-Louis, 11, 61, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 135, 161, 168, 270, 271, 284, 312  
 Cayley, Arthur, 132, 149, 154, 173  
 Challenger, HMS, 46  
 Chanut, Hector-Pierre, 96  
 chapéu cruzado, 189, 190, 199, 204  
 Christina, rainha da Suécia, 95, 96  
 ciclo, 11, 21, 49, 182, 279, 280, 281, 282, 284, 288, 290, 291, 292  
 cilindro, 176, 177, 178, 179, 180, 186, 187, 188, 194, 195, 196, 198, 199, 200, 201, 203, 258, 259, 260, 261, 273, 274, 300, 307  
 cinco-folhas, *ver* nó de cinco-folhas  
 circuito de Euler, *ver* passeio de Euler  
 círculo máximo, 101, 102, 109  
 Clarke, Arthur C., *The Wall of Darkness*, 180  
 classificação de superfícies, 190, 200, 263, 269, 280, 291, 312  
 Clay Mathematics Institute, 22, 294, 296  
 Clerseley, Claude, 96  
 coeficiente de torção, 282, 283, 284, 285, 288  
*Collegium Carolinum*, 257  
 colorabilidade, *ver* colorável  
 colorável (grafo, mapa), 152, 154, 156  
 colorável (nós), 216, 217, 219  
 compacto(a), *ver* superfície compacta ou variedade compacta  
 complexo, *ver* complexo simplicial  
 complexo simplicial, 268, 269, 283, 284, 287  
 componentes, 76, 145, 195, 196, 200, 201, 203, 208, 235, 252, 291  
 conectividade, *ver* número de conectividade  
 conexo, 118, 119, 120, 135, 145, 147, 152, 174, 189, 274, 279, 291, 294, 295, 312  
 configuração redutível, 158  
 conjectura de geometrização de Thurston, 294, 295, 312  
 conjectura de Kepler, 160  
 conjectura de Poincaré, 22, 291, 292, 293, 294, 295, 297  
 conjunto inevitável, 158, 159  
 Connelly, Robert, 61  
 convexidade, *ver* convexo  
 convexo, 46, 55, 58, 60, 61, 85, 86, 87, 130, 131, 162, 166, 167, 169, 192, 242, 272  
 Conway, John Horton, 143, 203, 296, 312  
 prova ZIP, 203  
 coordenadas cartesianas, 95  
 Copérnico, Nicolau, 67, 68, 69  
 couves-de-bruxelas, 133, 143, 144, 145  
 Coxeter, Harold Scott MacDonald, 149  
 criminoso mínimo, 153, 154, 156, 158  
 Crístias, 54  
 Crowell, Richard Henry, 214  
 cruzamentos, 136, 208, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220  
 cubo, 14, 39, 41, 44, 46, 47, 49, 52, 54, 58, 59, 67, 69, 70, 71, 72, 73, 77, 79, 80, 81, 89, 90, 91, 97, 130, 131, 164, 170, 192, 245, 246, 248, 264, 269, 270, 271, 286, 287, 302  
 cúpula geodésica, 21, 88, 93  
 Curl, Robert Jr., 20, 21  
 curva de Jordan, *ver* curva fechada simples  
 curva fechada simples, 185, 189, 227, 243, 245, 254, 255, 261, 274, 279, 280, 284  
 curvas de Seifert, 209, 210  
 curvatura; curvatura angular, 243, 245, 246, 247, 248, 250, 251, 252; curvatura de curva plana, 254, 255; curvatura de

- Gauss (ou gaussiana), 256, 259, 260, 261; curvatura extrínseca, 260, 261; curvatura intrínseca, 260, 261; curvaturas principais, 256, 259, 260, 261; curvatura total, 253, 254, 255, 256, 259, 261, 262, 263
- Czartoryski, Príncipe Adam, 163
- D'Alembert, Jean, 34
- de Careil, Foucher, 96
- De Morgan, Augustus, 148, 149
- déficit angular: em polígonos geodésicos, 250, 251, 252, 259; em poliedros, 250, 251, 252, 259
- Dehn, Max Wilhelm, 203
- Descartes, René 11, 13, 74, 94-99, 240, 246, 247, 289, 311; *Discurso do Método*, 95; *Elementos dos Sólidos*, 96, 247, 311
- Diderot, Denis, 35
- Dieudonné, Jean Alexandre Eugène, 233, 278, 311
- dimensão, 74, 77, 98, 176, 186, 193, 195, 196, 238, 241, 265, 267, 268, 269, 270, 271, 276, 279, 283, 284, 285, 286, 287, 291, 292, 293, 294
- Diófanto, 62
- dipolo (campo vectorial), 226, 227, 229
- disco, 176, 177, 178, 185, 190, 197, 201, 204, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 227, 235, 238, 260, 273, 274, 279
- dodecaedro, 44, 46, 47, 49, 51, 52, 54, 58, 59, 65, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 89, 90, 91, 166, 167, 168, 204, 286, 291, 305
- dualidade de Kepler, 72, 286
- dualidade de Poincaré, 285, 286, 287
- Dürer, Albrecht, 64
- Dyck, Walther von, 183, 184, 203, 204, 263, 267
- École Polytechnique, 126, 127
- Ehler, Carl, 114, 115
- Einstein, Albert, 221
- Elementos de Euclides*, 39, 44, 52, 53, 56-62, 89
- Empédocles, 54
- equação diferencial, 223, 224, 233
- equilíbrio, 223, 224, 226
- Erdős, 160
- Escher, Maurits Cornelis, 180, 181
- esfera, 15, 16, 17, 42, 51, 58, 67, 68, 69, 73, 80, 93, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 132, 134, 135, 160, 172, 173, 174, 175, 176, 184, 187, 188, 189, 190, 192, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 210, 213, 225, 226, 227, 229, 230, 231, 232, 233, 235, 238, 240, 248, 249, 250, 258, 259, 260, 262, 263, 268, 269, 271, 272, 274, 279, 280, 283, 286, 291, 292, 293, 294
- espaço dodecaédrico de Poincaré, 292
- espaço euclidiano, 205, 266, 267, 269
- espaço de fases, 223, 224
- esterioisómero, 60, 61
- Euclides, 11, 13, 39, 43, 44, 52, 53, 56, 57, 58, 60, 61, 62, 63, 89, 90, 100, 102, 138
- Eudoxo, 57
- Euler, Leonhard, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 22, 23-38, 39, 410, 41, 44, 60, 74, 45-87, 94, 97, 100, 104, 111, 113, 114, 115, 116, 117, 119, 126, 127, 168, 232, 247, 256, 295, 297; «*Demonstratio non-nullarum insignium proprietatum quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita*», 79; «*Elementa doctrinae solidorum*», 79
- Euler, Marguerite Brucker, 24
- Euler, Paul, 10, 24, 25
- excesso angular: em polígonos, 250, 251, 252, 253, 259, 260, 261, 262; em polígonos geodésicos, 107, 109, 110, 250, 252, 261
- face, 14, 15, 16, 17, 21, 38-42, 44-46, 51, 54, 58, 59, 61, 72, 85, 83, 89, 90, 92, 93, 109, 110, 112, 113, 128, 129, 130, 132, 133-136, 138, 139, 142, 145, 153, 164, 165, 170, 171, 199, 212, 227, 235, 236, 248, 249, 250, 252, 268, 270, 271, 272, 273, 275, 286
- faixa de Möbius, 15, 173, 180, 182, 195, 199, 201, 209
- Ferdinand, Carl Wilhelm, Duque de Brunswick, 257
- Fermat, Pierre de, 22, 38, 95, 292, 295
- fluxo, 29, 52, 223, 224, 225, 226, 229, 237; fluxo gradiente, 226
- fórmula de Descartes, 97, 98, 240, 243, 245, 247, 248, 249, 250, 252, 253
- fórmula de Descartes-Euler, *ver* fórmula de Euler para poliedros
- fórmula de Euler para poliedros, 10, 12, 14, 15, 16, 17, 19, 21, 22, 38, 40, 42, 44, 58, 70, 77-79, 86-89, 91-94, 96, 97-100, 108, 109-113, 125, 126, 128-131, 133, 135, 136, 138, 139, 141, 145, 152, 153, 161-165, 167-170, 172, 173, 174, 190, 192, 196, 198, 212, 247, 263, 264, 270, 273, 289, 295, 311, 312
- fórmula quadrática, 257 *ver também* fórmula resolvente
- fórmula resolvente, 22, 242
- Francesca, Piero della, 64
- Frederico II da Prússia, 24, 26, 28, 29, 31, 35, 36, 38

- Frederico, *o Grande*, *ver* Frederico II da Prússia,  
 Frederico Guilherme I da Prússia, 31  
 Freedman, Michael, 293, 295  
 Freudenthal, Hans, 127, 201  
 fronteira, 14, 19, 76, 106, 133, 135, 140, 145, 146, 148, 150, 151, 172, 187, 188, 189, 190, 195, 200, 203, 204, 208, 209, 210, 212, 213, 227, 235, 259, 268  
 fulereno, 20, 21, 88, 92
- Galilei, Galileu, 13, 68  
 Gardner, Martin, 143, 149, 151, 311  
 garrafa de Klein, 185, 186, 187, 190, 196, 197, 201, 230, 266, 269, 274, 281, 282, 283, 287, 300, 308  
 Gattegno, Caleb, 140  
 Gauss, Carl Friedrich, 11, 23, 38, 88, 150, 169, 201, 207, 232, 241, 254, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 272, 289, 297,  
 Gauss, Gerhard, 256  
 género, 72, 188, 189, 200, 202, 203, 212, 213, 214, 216, 217-220, 263, 274 de nó, 208, 213, 215, 216, 217, 218, 219, 220  
 geodésica, 21, 88, 93, 102, 103, 104, 106, 108, 109, 173, 249, 250, 251, 252, 253, 259, 260, 261, 262 *ver também* polígono geodésico  
 geometria, 10, 11, 12, 14, 15, 17, 22, 43, 44, 53, 56, 61, 62, 63, 77, 80, 91, 95, 100, 101, 102, 105, 111, 116, 117, 128, 140, 150, 163, 169, 173, 174, 187, 191, 202, 221, 232, 240, 241, 244, 246, 249, 253, 254, 255, 258, 260, 263, 277, 289, 290, 294, 295, 311  
 geoplano, 133, 140, 141  
 Gergonne, Joseph Diaz, 34, 126, 128, 129, 131, 163, 164, 169, 266  
 Girard, Albert, 103, 104, 105, 108, 110, 250  
 Goldbach, Christian, 14, 75, 78, 114  
 gradiente, *ver* campo vectorial gradiente  
 grafo, 10, 12, 17, 112, 113, 114, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123-125, 128-139, 145, 150-159, 171, 173, 174, 271, 311  
 grafo bipartido completo, 137, 138, 139  
 grafo completo, 136, 139, 150  
 grafo de adjacência, 151, 152, 154, 156, 158  
 grafo simples, 152  
 grande dodecaedro, 70, 166, 167, 168, 204  
 grande dodecaedro estrelado, 166, 167  
 grande icosaedro, 166, 167, 168, 204  
 grau de liberdade, 202, 265, 267  
 grupo de Betti, *ver* grupo de homologia  
 grupo de homologia, 278, 279, 280, 284, 288, 289, 291, 292  
 Gsell, Georg, 29  
 Gsell, Katharina, 29, 36
- Gsell, Salome Abigail, 36  
 Guarda-chuva de Whitney, 190  
 Guthrie, Francis, 148, 149  
 Guthrie, Frederick, 148
- Hacken, Wolfgang, 22, 159  
 Hadamard, Jacques Salomon, 132  
 Haeckel, Ernst, 46  
 Hales, Thomas C., 160  
 Hamilton, Richard, 294, 295  
 Hamilton, William Rowen, 148, 149  
 Hardy, Godfrey Harold, 36, 138, 277  
 Harriot, Thomas, 103, 104, 105, 108  
 Hauptvermutung, 197, 287  
 Heawood, Percy John, 155  
*hedra*, 39, 77, 78  
 Heegaard, Paul, 203  
 Hermócrates, 54  
 Hessel, Johann Friedrich Christian, 162, 164, 165, 166, 172, 192, 198, 269  
 Hierholzer, Carl, 119  
 Hilbert, David, 288, 294, 311  
 Hípaso, 50, 51, 52  
 hipótese de Riemann, 292  
 homeomorfismo, 195, 197, 202, 203 *ver também* homeomorfo  
 homeomorfo, 194, 295, 196, 197, 200, 202, 203, 204, 205, 206, 210, 239, 240, 244, 255, 263, 269, 271, 291, 292, 293  
 homologia, 278, 279, 280, 284, 288, 289, 291, 292  
 Hopf, Heinz, 234, 244  
 Hoppe, R., 172
- icosaedro, 39, 44, 47, 49, 52, 54, 55, 58, 59, 60, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 89, 90, 91, 166, 167, 168, 204, 286, 304  
 icosaedro truncado, 14, 39, 65  
 ilimitado, 134, 135, 138, 142, 177  
 indicatriz, 183  
 índice (de um zero de um campo vectorial), 227, 228, 229, 230, 231, 233, 234, 235, 236  
 inteiro, 45, 90, 124, 214, 276, 281, 282  
 invariante, *ver* invariante topológico  
 invariante de nós, 208, 213, 215, 217  
 invariante topológico, 195, 196, 197, 198, 248, 263, 265, 269, 273, 274, 285  
 irracional, 50, 51, 52  
 Isabel I da Rússia, 31, 33  
 isotopia, 193, 206  
 Ivan VI da Rússia, 31  
 Ivanovna, Anna, 28
- Jamnitzer, Wentzel, 64, 66, 166  
 Jonquières, Ernest de, 97, 98, 162  
 Jordan, Marie Ennemonde Camille, 132, 203

- Kant, Immanuel, 114  
 Kauffman, Louis, 218  
 Kelvin, Lord, *ver* Thomson, William  
 Kempe, Alfred Bray, 154, 155  
 Kepler, Johannes, 11, 13, 21, 44, 62, 63-74, 105, 112, 160, 166, 167, 204, 286, 297; *Mistério Cósmico*, 67, 68, 69; *A Harmonia do Mundo*, 69, 70, 71, 72  
 Klein, Felix, 178, 179, 183, 184, 186, 187, 269, 277, 288  
 Koch, John, 159  
 Koestler, Arthur, 65, 67  
 Kroto, Harold, 20, 21  
 Kuhn, Thomas, 97, 99
- Lagrange, Joseph-Louis, 34, 126, 266  
 Lakatos, Imre, 129, 130, 131, 165  
 Laplace, Pierre-Simon, 23, 126  
 Lebesgue, Henri, 86, 98, 158, 161  
 Lefschetz, Solomon, 175, 234  
 Legendre, Adrien-Marie, 77, 80, 100-112, 161, 162, 166, 168, 173, 257; *Elementos de Geometria*, 100  
 lei da reciprocidade quadrática, 257  
 Leibniz, Gottfried, 26, 27, 31, 96, 104, 116, 127, 311  
 Leonard, K. C. von, 165  
 Leonardo da Vinci, 64, 65  
 Lhuillier, Simon-Antoine-Jean, 162, 163, 164, 165, 168, 169, 171, 172, 189, 192, 198  
 Listing, Johann Benedict, 121, 122, 132, 174, 182, 207, 271, 272, 273, 277  
 Little, Charles Newton, 208  
 limitado, 34, 136, 142, 176, 177, 262  
*luna*, 105, 106, 107
- Medalha Fields, 290, 291, 295, 296  
 mapa, 18, 19, 20, 30, 140, 146, 147, 148, 149, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 159, 238, 259  
 Marinoni, Giovanni, 116  
 Marquês de Condorcet, 37  
 Mathematical Association of America, 159  
 May, Kenneth O., 148  
 Menelau de Alexandria, 102, 103; *Sphaerica*, 102  
 Möbius, August, 149, 150, 151, 182, 194, 202, 271, 274, 277  
 Murasugi, Kunio, 214, 218  
 música das esferas, 50
- não-orientável, 183  
 Nash, John Forbes Jr., 296  
 $n$ -colorável, 152  
 Newton, Isaac, 23, 26, 28, 37, 69, 127  
 Nó: nó alternado, 213, 214, 216, 218, 219; nó composto, 215; nó cinco-folhas, 205, 206, 212, 214, 216, 217, 219; nó de trevo, 204, 205, 219 ; nó figura-oito, 205, 206, 212, 213, 214, 216, 217, 219; nó homem-biscoito, 205, 206, 212-217, 219, 220; nó primo, 214, 215, 217-220; nó quadrado, 205, 206, 210-217, 219; nó trivial, 205, 206, 208, 209, 213-219  
 Noether, Emmy Amalie, 288, 289  
 número de Betti, 280-289, 291  
 número de conectividade, 273-276, 278, 282  
 número de cruzamento, 214, 217-219, 220  
 número de Euler, *ver* característica de Euler  
 número de ouro, 51  
 $n$ -variedade, 267, 268, 269, 284, 285, 291, 292
- octaedro, 44, 46, 47, 49, 52, 54, 58, 59, 68-73, 89-91, 250, 251, 270, 271, 303  
 óptica, 24, 65, 104, 272  
 orientável, 188, 189, 195, 200, 201, 202, 203, 204, 209, 210, 212, 262, 263, 269, 270, 273, 285, 286
- Pacioli, Fra Luca, *De Divina Proportione*, 64  
 Pappus, 61, 62  
 passeio de Euler, 118, 119-121  
 Paterson, Michael, 143  
 Pedro I da Rússia, *ver* Pedro, o Grande  
 Pedro II da Rússia, 28  
 Pedro III da Rússia, 34  
 Pedro, o Grande, 24, 26, 28, 29, 31, 34-36  
 pentagrama, 51, 52, 167  
 pequeno dodecaedro estrelado, 166, 167, 168  
 Perelman, Grigori, 294, 296  
 perspectiva (na arte), 63  
 Pick, Georg Alexander, 139, 140, 141, 142  
 pirâmide, 39, 44, 52, 80 *ver também* tetraedro  
 Pitágoras, 11, 13, 22, 43, 48, 49, 50, 51, 57, 63, 140, 242, 297,  
 pitagóricos, 48, 49, 50, 51, 52, 167  
 plano projectivo, 187, 190, 199, 201, 274, 281, 282, 283, 287, 300, 309  
 Platão, 13, 21, 43, 44, 48, 52, 53, 54, 55, 56, 62, 63, 70; Academia de Platão, 53-56; *Epinomis*, 43; *O sofista*, 52; *Teeteto*, 52; *Timeu*, 54, 55  
 poço (de um campo vectorial), 226, 227, 228, 229, 230  
 Poincaré, Henri, 172, 175, 191, 226, 229, 230, 231, 232, 233-236, 239, 264, 265, 268, 269, 276, 277-289, 291-297, 311, 312; *Analysis Situs*, 15, 116, 132, 175, 191, 277, 278, 279, 283, 286  
 Poincaré, Raymond, 232  
 Poinot, Louis, 111, 112, 161, 166, 167, 168, 169, 204

- poliedro, 12, 13, 15, 16, 21, 22, 38, 39-42, 44-47, 52, 53, 55, 58, 59-67, 69  
 poliedro de Euler, 10, 14  
 poliedro de Kepler-Poinsot, 111, 112, 162, 166, 167, 168, 204, 286  
 poliedros em estrela ou poliedros estrelados, *ver* poliedro de Kepler-Poinsot  
 poliedro regular, 44, 45, 59, 71, 167  
 poliedro semi-regular, 61, 62, 69  
 polígono, 14, 19, 76, 97, 108, 140, 142, 178, 179, 241, 243, 247, 248, 249, 256  
 polígono geodésico, 21, 88, 93, 102, 103, 104, 106, 108, 109, 110, 173, 249, 250, 251, 252, 253, 259, 260, 261, 262  
 polígono regular, 44, 45, 59, 61, 89, 91, 167  
 Pólya, George, 241  
 Pont, Jean-Claude, 163, 311  
 ponto de sela, *ver* sela  
 ponto fixo, 224, 229, 237, 238, 239  
 prêmio Nobel, 21, 25, 290  
 primo (número e nó), 22, 214, 215, 217, 218, 219, 220, 221, 232  
 problema das pontes de Königsberg, 113, 114, 115-118, 121, 151, 174, 207, 277, 295, 311  
 problema dos cinco príncipes, 150, 151  
 Proclus, 52  
 produto de nós, 219  
 pseudo-esfera, 258, 259  
 Ptolomeu, 62
- quatro elementos primordiais, 54, 55, 70
- racional, 50  
 radiolaria, 46  
 Rafael, *Escola de Atenas*, 63, 64  
 Raleigh, Sir Walter, 104  
 razão de ouro, *ver* número de ouro real  
 rede, 10, 113, 125, 137, 140, 207  
 Riemann, George Friedrich Bernhard, 11, 132, 201, 202, 268, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 283, 289, 292, 297  
 Royal Society of London, 26, 34, 100, 155
- Schläfli, Ludwig, 187, 270, 271, 284  
 Seifert, Herbert, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215  
 sela (ponto de sela), 226, 227, 228, 229, 230, 235, 250  
 simplesmente conexo, 279, 291  
 símlice, 268, 269, 284, 286, 287  
 sistemas dinâmicos, 11, 12, 17, 22, 233, 237, 293  
 Smale, Stephen, 293, 294, 295, 321  
 Smalley, Richard, 20, 21  
 Sociedade Matemática de Londres, 149
- Sócrates, 52, 53, 54, 63  
 sólido arquimediano, *ver* poliedro semi-regular  
 sólido platônico, 7, 44, 45, 55, 56, 57, 58, 59-62, 67, 69, 70, 71, 88-91, 97, 167, 192, 249, 286, 300  
 Sommerville, D. M. Y., 162, 311  
 Staudt, Karl Georg Christian von, 169-172; *Geometrie der Lage*, 169  
 Steinitz, Ernst, 131  
 sucessão de Fibonacci, 22  
 superfície, 59, 70, 73, 76, 92, 101, 102, 104, 106, 109, 110, 111, 128, 131, 169, 172-180, 182-190, 194-204, 206, 208-216, 224, 225, 226, 229, 230, 231, 234, 235, 236, 237, 239, 240-242, 245, 246, 249, 250, 252-254, 256-269, 273-275, 279, 280-283, 285, 287, 291  
 superfície com bordo, 176, 200, 211, 235, 239  
 superfície de Dyck, 183, 184, 203, 204, 263, 267  
 superfície de Riemann, 201, 202, 268, 273, 274-278, 283, 289, 292, 297  
 superfície de Seifert, 209, 210-215  
 superfície não-orientável, 186, 187, 200, 209
- Tait, Peter Guthrie, 208, 218, 272  
 Tales de Mileto, 43  
 Teeteto de Atenas, 13, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 62, 99, 168, 200  
 Teodoro de Cirene, 52  
 teorema da bola cabeluda, 18, 230, 231, 232, 235  
 teorema da curva de Jordan, 185, 189, 254  
 teorema da invariância da dimensão, 269, 288  
 teorema da rigidez de Cauchy, 61, 312  
 teorema das cinco cores, 155, 156, 157  
 teorema das quatro cores, 155, 157, 158, 159, 160, 292, 311, 312  
 teorema das seis cores, 153, 156  
 teorema das tangentes giratórias, 244, 255  
 teorema de Euler, 22, 132, 162, 164, 272  
 teorema de Gauss-Bonnet: local, 241, 263; global, 261, 262  
 teorema de Harriot-Girard, 103, 105, 108  
 teorema de Kuratowski, 139  
 teorema de Pick, 139-142  
 teorema de Pitágoras, 22, 49, 140, 242  
 teorema de Poincaré-Hopf, 226, 229, 230, 231, 232, 234-236, 239  
 teorema do excesso angular, 250-253, 259-262  
 teorema do mergulho de Whitney, 269

- teorema do ponto fixo de Brouwer, 238, 239, 269, 312
- teorema dos  $180^\circ$ , 250
- teorema dos ângulos externos, 97, 241, 242, 243, 244, 256
- teorema dos ângulos internos, 44, 59, 101, 102, 103, 104, 106, 108, 110, 242, 247, 248, 250, 251, 252, 260, 261, 262
- teorema dos cinco vizinhos, 152, 153, 154, 156, 158
- Terquem, Orly, 123
- tetraedro, 39, 44, 46, 47, 49, 52, 54, 55, 58, 59, 68-73, 77, 79, 80, 89-91, 246, 248, 301
- Thistlethwaite, Morwen, 218
- Thomson, William, 207, 208, 235; vórtice, 18, 207, 220, 226, 227, 229; modelo atômico, 54, 55, 220
- Thurston, William, 235
- topologia, 221, 224, 233, 234, 239-241, 244, 249, 253, 254, 255, 258, 263, 264, 267, 271-273, 276-279, 287-291, 293-296, 311
- toro, 15, 16, 17, 42, 164, 165, 171, 173, 175, 176, 177, 178, 179, 195, 187, 189, 190, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 200, 201, 202, 203, 204, 210, 212, 225, 226, 227, 229, 230, 231, 240, 247, 248, 258, 259, 263, 268, 269, 273, 274, 279, 280, 281, 283, 284, 285, 286, 292, 300, 306 ; duplo toro, 189, 193, 201, 202, 212, 229, 230, 274, 280, 281, 283, 285, 292; 3-toro, 269, 286
- triangulação, 129, 183, 235
- triangular, *ver* triangulação,
- triângulo, 10, 13, 38, 45-46, 49, 54, 59, 60, 76, 93, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 129, 130, 141, 167, 178, 183, 191, 198, 199, 203, 235, 236, 237, 242, 246, 250, 251, 259, 260, 261, 268, 269
- triângulo geodésico, 108, 109, 110, 250, 253 *ver também* polígono geodésico
- triângulo primitivo, 141-142
- Tucker, Albert, 175
- túnel, 41, 165, 172, 198, 225, 227, 259
- Uccello, Paolo, 64, 66, 166
- Último teorema de Fermat, 22, 292, 295
- Universidade de Basileia, 24, 25, 28
- Universidade de Berlim, 201
- Universidade de Breslau, 234
- Universidade de Cambridge, 143
- Universidade de Erlangen, 169, 288
- Universidade de Göttingen, 150, 169, 201, 257, 258, 275, 288
- Universidade de Halle, 150
- Universidade de Leipzig, 150
- Universidade de Pisa, 275
- Universidade de Princeton, 175, 234
- Universidade de Würzburg, 169
- Vandermonde, Alexandre-Théophile, 207
- variedade, 234, 267, 268, 269, 270, 275, 276, 279, 283, 284, 285, 286, 287, 291, 292, 293, 311
- variedade com bordo, 19, 76, 77, 139, 140, 142, 173, 176, 177, 178, 180, 182, 186, 188, 189, 190, 194, 195, 196, 198, 199, 200, 201, 203, 204, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 228, 234, 235, 238, 239, 260, 268, 270, 274, 284, 287, 291
- Veblen, Oswald, 158, 175
- vector normal, 184-185, 256, 258-259
- vector tangente, 235, 243-244, 254, 256
- Verona, Fra Giovanni da, 64
- vértice, 14, 15, 16, 17, 19, 38, 41, 45, 46, 51, 58, 59, 60, 61, 69, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 97, 98, 109, 110, 111, 113, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 124, 128, 129, 130, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 141, 142, 143, 145, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 162, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 174, 196, 197, 198, 199, 204, 212, 228, 229, 235, 236, 241, 242, 243, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 256, 268, 270, 272, 284, 286
- Voltaire, 32
- Waterhouse, William, 47, 52, 99
- Weber, Wilhelm Eduard, 201
- Whitney, Hassler, 158, 190, 269
- Wiles, Andrew, 22, 296
- Zenão, 43
- zero (de um campo vectorial), 224-231, 233, 235-239

- poliedro, 12, 13, 15, 16, 21, 22, 38, 39-42, 44-47, 52, 53, 55, 58, 59-67, 69  
 poliedro de Euler, 10, 14  
 poliedro de Kepler-Poinsot, 111, 112, 162, 166, 167, 168, 204, 286  
 poliedros em estrela ou poliedros estrelados, *ver* poliedro de Kepler-Poinsot  
 poliedro regular, 44, 45, 59, 71, 167  
 poliedro semi-regular, 61, 62, 69  
 polígono, 14, 19, 76, 97, 108, 140, 142, 178, 179, 241, 243, 247, 248, 249, 256  
 polígono geodésico, 21, 88, 93, 102, 103, 104, 106, 108, 109, 110, 173, 249, 250, 251, 252, 253, 259, 260, 261, 262  
 polígono regular, 44, 45, 59, 61, 89, 91, 167  
 Pólya, George, 241  
 Pont, Jean-Claude, 163, 311  
 ponto de sela, *ver* sela  
 ponto fixo, 224, 229, 237, 238, 239  
 prêmio Nobel, 21, 25, 290  
 primo (número e nó), 22, 214, 215, 217, 218, 219, 220, 221, 232  
 problema das pontes de Königsberg, 113, 114, 115-118, 121, 151, 174, 207, 277, 295, 311  
 problema dos cinco príncipes, 150, 151  
 Proclus, 52  
 produto de nós, 219  
 pseudo-esfera, 258, 259  
 Ptolomeu, 62  
  
 quatro elementos primordiais, 54, 55, 70  
  
 racional, 50  
 radiolaria, 46  
 Rafael, *Escola de Atenas*, 63, 64  
 Raleigh, Sir Walter, 104  
 razão de ouro, *ver* número de ouro real  
 rede, 10, 113, 125, 137, 140, 207  
 Riemann, George Friedrich Bernhard, 11, 132, 201, 202, 268, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 283, 289, 292, 297  
 Royal Society of London, 26, 34, 100, 155  
  
 Schläfli, Ludwig, 187, 270, 271, 284  
 Seifert, Herbert, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215  
 sela (ponto de sela), 226, 227, 228, 229, 230, 235, 250  
 simplesmente conexo, 279, 291  
 símlice, 268, 269, 284, 286, 287  
 sistemas dinâmicos, 11, 12, 17, 22, 233, 237, 293  
 Smale, Stephen, 293, 294, 295, 321  
 Smalley, Richard, 20, 21  
 Sociedade Matemática de Londres, 149  
  
 Sócrates, 52, 53, 54, 63  
 sólido arquimediano, *ver* poliedro semi-regular  
 sólido platônico, 7, 44, 45, 55, 56, 57, 58, 59-62, 67, 69, 70, 71, 88-91, 97, 167, 192, 249, 286, 300  
 Sommerville, D. M. Y., 162, 311  
 Staudt, Karl Georg Christian von, 169-172; *Geometrie der Lage*, 169  
 Steinitz, Ernst, 131  
 sucessão de Fibonacci, 22  
 superfície, 59, 70, 73, 76, 92, 101, 102, 104, 106, 109, 110, 111, 128, 131, 169, 172-180, 182-190, 194-204, 206, 208-216, 224, 225, 226, 229, 230, 231, 234, 235, 236, 237, 239, 240-242, 245, 246, 249, 250, 252-254, 256-269, 273-275, 279, 280-283, 285, 287, 291  
 superfície com bordo, 176, 200, 211, 235, 239  
 superfície de Dyck, 183, 184, 203, 204, 263, 267  
 superfície de Riemann, 201, 202, 268, 273, 274-278, 283, 289, 292, 297  
 superfície de Seifert, 209, 210-215  
 superfície não-orientável, 186, 187, 200, 209  
  
 Tait, Peter Guthrie, 208, 218, 272  
 Tales de Mileto, 43  
 Teeteto de Atenas, 13, 52, 53, 54, 56, 57, 58, 62, 99, 168, 200  
 Teodoro de Cirene, 52  
 teorema da bola cabeluda, 18, 230, 231, 232, 235  
 teorema da curva de Jordan, 185, 189, 254  
 teorema da invariância da dimensão, 269, 288  
 teorema da rigidez de Cauchy, 61, 312  
 teorema das cinco cores, 155, 156, 157  
 teorema das quatro cores, 155, 157, 158, 159, 160, 292, 311, 312  
 teorema das seis cores, 153, 156  
 teorema das tangentes giratórias, 244, 255  
 teorema de Euler, 22, 132, 162, 164, 272  
 teorema de Gauss-Bonnet: local, 241, 263; global, 261, 262  
 teorema de Harriot-Girard, 103, 105, 108  
 teorema de Kuratowski, 139  
 teorema de Pick, 139-142  
 teorema de Pitágoras, 22, 49, 140, 242  
 teorema de Poincaré-Hopf, 226, 229, 230, 231, 232, 234-236, 239  
 teorema do excesso angular, 250-253, 259-262  
 teorema do mergulho de Whitney, 269

- teorema do ponto fixo de Brouwer, 238, 239, 269, 312  
 teorema dos  $180^\circ$ , 250  
 teorema dos ângulos externos, 97, 241, 242, 243, 244, 256  
 teorema dos ângulos internos, 44, 59, 101, 102, 103, 104, 106, 108, 110, 242, 247, 248, 250, 251, 252, 260, 261, 262  
 teorema dos cinco vizinhos, 152, 153, 154, 156, 158  
 Terquem, Orly, 123  
 tetraedro, 39, 44, 46, 47, 49, 52, 54, 55, 58, 59, 68-73, 77, 79, 80, 89-91, 246, 248, 301  
 Thistlethwaite, Morwen, 218  
 Thomson, William, 207, 208, 235; vórtice, 18, 207, 220, 226, 227, 229; modelo atômico, 54, 55, 220  
 Thurston, William, 235  
 topologia, 221, 224, 233, 234, 239-241, 244, 249, 253, 254, 255, 258, 263, 264, 267, 271-273, 276-279, 287-291, 293-296, 311  
*toro*, 15, 16, 17, 42, 164, 165, 171, 173, 175, 176, 177, 178, 179, 195, 187, 189, 190, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 200, 201, 202, 203, 204, 210, 212, 225, 226, 227, 229, 230, 231, 240, 247, 248, 258, 259, 263, 268, 269, 273, 274, 279, 280, 281, 283, 284, 285, 286, 292, 300, 306; duplo *toro*, 189, 193, 201, 202, 212, 229, 230, 274, 280, 281, 283, 285, 292; 3-*toro*, 269, 286  
 triangulação, 129, 183, 235  
 triangular, *ver* triangulação,  
 triângulo, 10, 13, 38, 45-46, 49, 54, 59, 60, 76, 93, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 129, 130, 141, 167, 178, 183, 191, 198, 199, 203, 235, 236, 237, 242, 246, 250, 251, 259, 260, 261, 268, 269  
 triângulo geodésico, 108, 109, 110, 250, 253 *ver também* polígono geodésico  
 triângulo primitivo, 141-142  
 Tucker, Albert, 175  
 túnel, 41, 165, 172, 198, 225, 227, 259  
  
 Uccello, Paolo, 64, 66, 166  
 Último teorema de Fermat, 22, 292, 295  
 Universidade de Basileia, 24, 25, 28  
 Universidade de Berlim, 201  
 Universidade de Breslau, 234  
 Universidade de Cambridge, 143  
 Universidade de Erlangen, 169, 288  
 Universidade de Göttingen, 150, 169, 201, 257, 258, 275, 288  
 Universidade de Halle, 150  
 Universidade de Leipzig, 150  
 Universidade de Pisa, 275  
 Universidade de Princeton, 175, 234  
 Universidade de Würzburg, 169  
  
 Vandermonde, Alexandre-Théophile, 207  
 variedade, 234, 267, 268, 269, 270, 275, 276, 279, 283, 284, 285, 286, 287, 291, 292, 293, 311  
 variedade com bordo, 19, 76, 77, 139, 140, 142, 173, 176, 177, 178, 180, 182, 186, 188, 189, 190, 194, 195, 196, 198, 199, 200, 201, 203, 204, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 228, 234, 235, 238, 239, 260, 268, 270, 274, 284, 287, 291  
 Veblen, Oswald, 158, 175  
 vector normal, 184-185, 256, 258-259  
 vector tangente, 235, 243-244, 254, 256  
 Verona, Fra Giovanni da, 64  
 vértice, 14, 15, 16, 17, 19, 38, 41, 45, 46, 51, 58, 59, 60, 61, 69, 71, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 89, 90, 91, 92, 93, 97, 98, 109, 110, 111, 113, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 124, 128, 129, 130, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 141, 142, 143, 145, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 162, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 174, 196, 197, 198, 199, 204, 212, 228, 229, 235, 236, 241, 242, 243, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 256, 268, 270, 272, 284, 286  
 Voltaire, 32  
  
 Waterhouse, William, 47, 52, 99  
 Weber, Wilhelm Eduard, 201  
 Whitney, Hassler, 158, 190, 269  
 Wiles, Andrew, 22, 296  
  
 Zenão, 43  
 zero (de um campo vectorial), 224-231, 233, 235-239