Tangente

Bibliothèque Tangente
L'aventure mathématique

Jeux mathématiques

Casse-tête ou récréations ?

POLE

HS n° 20
ISSN 0987-0806

Bibliothèque Tangente

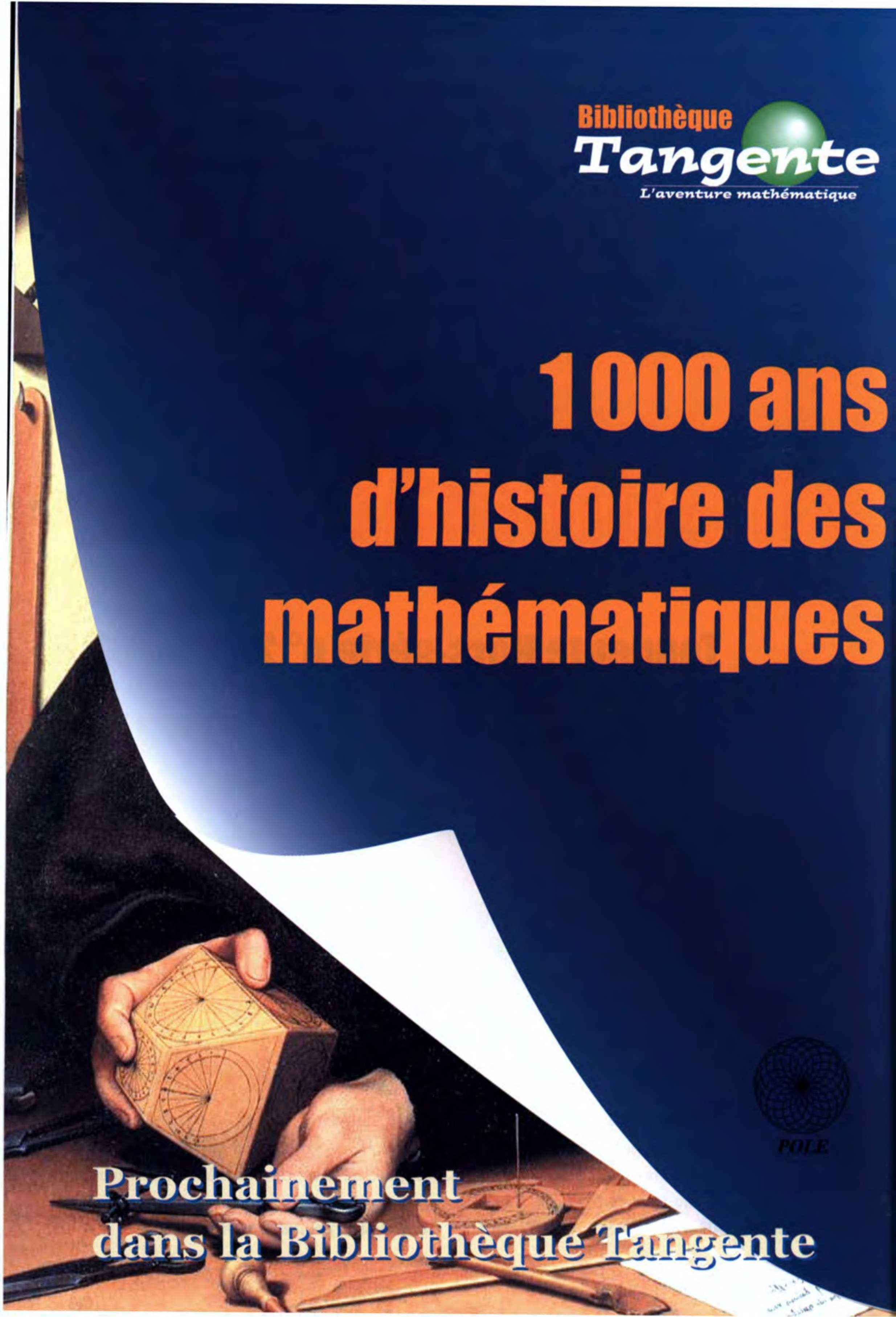
L'aventure mathématique

Jeux mathématiques

Tangente Hors-série n° 20

POLE

I.S.B.N. 2-84884-024-2 I.S.S.N. 0987-0806 Commission paritaire 1006 K 80883


Bibliothèque
Tangente
L'aventure mathématique
1000 ans
d'histoire des
mathématiques
POLE
Prochainement
dans la Bibliothèque Tangente

Jeux mathématiques

Sommaire

La théorie des jeux a l'ambition de modéliser toutes les situations où une décision est à prendre. Elle couvre un vaste champ mathématique qui inclut aussi bien les probabilités que la théorie des graphes, ou la recherche opérationnelle. Elle est donc loin de se limiter au jeu ! Pire, le jeu n'est qu'une petite partie de son champ d'application.

Si les problèmes liés à la numération et aux propriétés arithmétiques s'énoncent sous une forme accessible au grand public, leur résolution fait souvent appel à des mathématiques très spécialisées. Mais heureusement, même les plus simples constituent une mine inépuisable de jeux mathématiques capables de captiver l'amateur.

Si la géométrie d'Euclide peut inspirer des défis mathématiques, sa présentation austère n'incline guère au divertissement, sauf pour les amateurs éclairés. Il faut attendre Euler et sa "géométrie de situation", qui pose les bases de la topologie et de la théorie des graphes, pour se divertir avec des points et des lignes.

Les grands problèmes historiques

Jeux d'enfants de Pierre Bruegel l'Ancien, 1559-1560, Kunsthistorisches Museum, Vienne.

Aussi loin que l'on remonte dans l'Histoire, on trouve des signes qui prouvent que de tous temps, l'homme a joué. Le jeu a certes toujours été destiné à modéliser le monde réel afin d'essayer de mieux le dominer, mais on trouve aussi des jeux purement abstraits, dont l'habillage, lorsqu'il existe, n'est qu'un simple prétexte destiné à stimuler l'imagination. En effet, qui pourrait prétendre qu'un troupeau de plusieurs dizaines de millions de bœufs ou bien un homme faisant traverser une rivière à un loup dans une barque sont des situations plausibles ? Mais peu importe, le joueur de l'esprit est comme l'enfant qui écoute un conte de fées en sachant pertinemment qu'il n'en rencontrera jamais dans la réalité.

Tout peut constituer le point de départ d'un jeu-problème : les soixante-quatre cases d'un échiquier et la marche zigzagante de ses cavaliers, les quarante soldats défendant une ville fortifiée, ou encore les sept ponts d'une cité traversée par une rivière.

par M. Criton & G. Cohen

Trente siècles de jeux mathématiques

Toujours étonnants, souvent pervers, casse-tête pour les uns, récréations pour les autres, les jeux mathématiques sont des sortes de défis que les hommes se lancent les uns aux autres.

Bonheur de formuler une énigme, ou jubilation lorsqu'on trouve la solution : l'univers réputé froid de l'abstraction et du raisonnement est en réalité plein d'émotion et d'esthétisme.

Problèmes plaisants et délectables

L'inventeur du mot « casse-tête » n'était peut-être pas mal intentionné, mais il ne savait certainement pas de quoi il parlait. Chez aucun des amateurs, anciens et modernes, de divertissements mathématiques, on ne trouve de référence au désordre de l'esprit, ni aux nuisances implicites suggérées par ce mot. Bien au contraire, ce n'est partout que délectation, émerveillement, enthousiasme, et, prêtant le flanc à quelques reproches de l'entourage, oubli du temps. Ce n'est pas par hasard

Le problème des grains de blé sur l'échiquier

Selon la légende, le brahmane Sissa inventa le jeu d'échecs en Inde, il y a bien longtemps. Lorsque le roi lui demanda ce qu'il voulait pour le prix de son invention, Sissa répondit : « Je ne demande que quelques grains de blé, Sire. Un pour la première case de l'échiquier, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, huit pour la quatrième, et ainsi de suite, en doublant jusqu'à la soixante-quatrième. La modestie de cette demande parut telle au souverain qu'il ordonna immédiatement de la satisfaire. Mais il fut vite embarrassé ...
En effet, le nombre de grains de blé nécessaire est égal à $2^{64} - 1$, c'est-à-dire à environ 18 milliards de milliards de grains de blé, ce qui représente à peu près, si un mètre cube en contient environ 15 millions, six fois ce que la Terre, toute entière semée en blé, produirait par an !

Les bœufs du Soleil

Le dieu du Soleil possédait un troupeau de bétail composé de taureaux et de vaches : une partie des bêtes était blanche, une autre noire, une troisième était tachetée et une quatrième était brune.

Pour ce qui est des taureaux, le nombre de blancs surpassait le nombre des noirs d'un demi plus un tiers du nombre de bruns ; le nombre de noirs était plus grand que le nombre de bruns d'un quart plus un cinquième du nombre des tachetés ; le nombre des tachetés dépassait le nombre des bruns d'un sixième plus un septième du nombre de blancs.

En ce qui concerne les vaches, le nombre des blanches était égal à un tiers plus un quart du nombre total d'animaux noirs ; le nombre de noires égalait un quart plus un cinquième du nombre de bêtes tachetées. Le nombre de tachetées valait un cinquième plus un sixième du nombre d'animaux blancs ; le nombre de vaches brunes se montait à un sixième plus un septième du nombre total d'animaux blancs.

Quelle était la composition du troupeau ?

Ce problème conduit inévitablement à un système de sept équations à huit inconnues, dont les plus petits nombres-solutions sont les suivants : 10 366 482 pour les taureaux blancs, 7 460 514 pour les noirs, 7 358 060 pour les tachetés et 4 149 387 pour les bruns. Les vaches blanches seraient au nombre de 7 206 360, les noires 4 893 246, les tachetées 3 515 820 et les brunes 5 439 213.

si l'auteur d'un des premiers recueils de récréations mathématiques en langue française, Claude-Gaspar Bachet, sieur de Méziriac, l'a intitulé : *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* (1612). Le plaisir est en effet le mot-clé, celui qui explique pourquoi des générations de passionnés ont consacré des milliards d'heures à des recherches qui peuvent paraître stériles aux profanes.

Une tradition millénaire

L'histoire antique, voire la mythologie, fourmillent d'énigmes, véritables défis que se lançaient alors les grands de ce monde, rois, héros, et autres demi-dieux, qui après s'être combattus physiquement (ou au lieu de se combattre physiquement), aimaient à en découdre intellectuellement. Ainsi en est-il de l'énigme proposée par le Sphinx de Thèbes, qui serait vaincu par qui en donnerait la solution. De même, dans de nombreuses légendes, une ultime chance est toujours laissée à l'humble, face au puissant, sous la forme d'une énigme à résoudre. Un bel exemple en est le célèbre problème des grains de blé sur l'échiquier, qui est une excellente introduction à la notion mathématique de puissance.

Un autre exemple de problème antique est celui des « bœufs de Thrynacie » (ou bœufs du Soleil), proposé par Archimède à Eratosthène de Cyrène, chef de file de l'École d'Alexandrie, problème que les mathématiciens d'Alexandrie ne parvinrent pas à résoudre (Cf. encadré).

À cette époque lointaine, on ne distinguait pas les mathématiques proprement dites des jeux mathématiques : les mathématiques étaient un jeu intellectuel, et les jeux mathématiques un prétexte pour

80 % des amateurs de jeux mathématiques pensent qu'ils raisonnent mieux que la moyenne des amateurs de jeux mathématiques ...

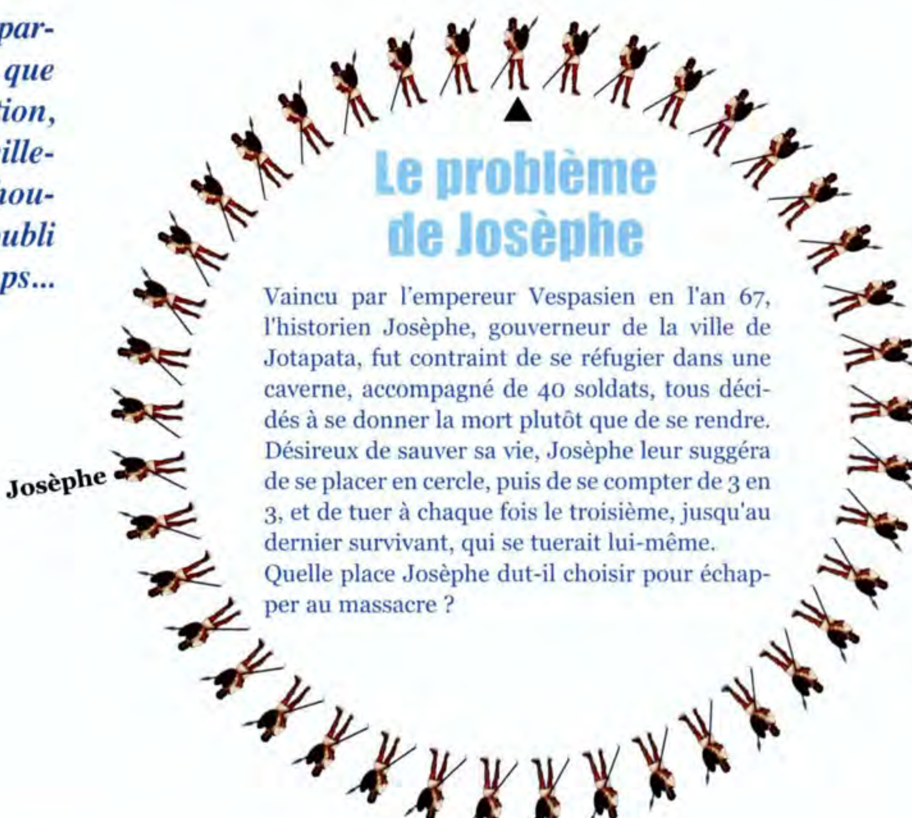
faire avancer la connaissance. De véritables problèmes de mathématiques étaient ainsi lancés comme des défis, problèmes qui se révèleront souvent par la suite comme les points de départ de futures théories. Citons le problème de la duplication du cube, proposé par l'oracle d'Apollon (à Delos ou à Chios, selon les versions), résolu successivement, d'une manière différente à chaque fois, par Menechme (IV^{e} siècle av. J.-C.), Nicomède et Dioclès (II^{e} siècle av. J.-C), puis, plus tard, par Descartes (XVII^{e} siècle).

Paradoxes et traversées

Les Anciens avaient également le goût des paradoxes, qui exerçaient alors une véritable fascination. Citons le paradoxe d'Achille et de la Tortue, ou son autre version, celui de la flèche de Zénon d'Elée, qui n'atteint jamais son but.

Un exemple plus proche de problème classique de jeux mathématiques est celui du problème de Josèphe, que Bachet cite dans la préface de la seconde édition de ses « Problèmes plaisants... ». Ce problème, qui remonte au début de notre ère, serait parvenu jusqu'à nous grâce à Hégésippus, qui le relate dans le troisième livre de sa *Guerre de Jérusalem*. Ce problème, inspiré par une histoire vraie, est aussi appelé *problème de Caligula* et attribué à Abraham ben Ezra (1092-1167). Cette tradition a traversé tout le Moyen-Âge. Charlemagne, grand amateur de jeux mathématiques, proposa une bourse

Ce n'est partout que délectation, émerveillement, enthousiasme, oubli du temps...

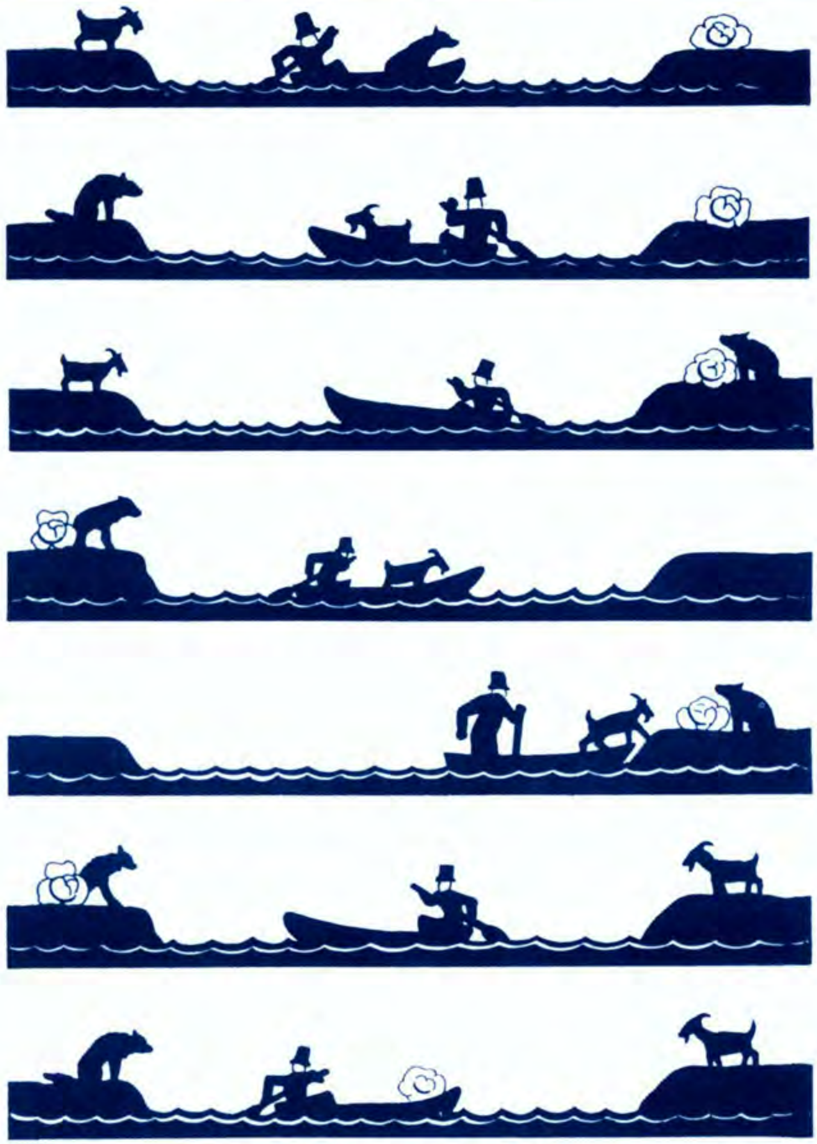


Le problème de Josèphe

Vaincu par l'empereur Vespasien en l'an 67, l'historien Josèphe, gouverneur de la ville de Jotapata, fut contraint de se réfugier dans une caverne, accompagné de 40 soldats, tous décidés à se donner la mort plutôt que de se rendre. Désireux de sauver sa vie, Josèphe leur suggéra de se placer en cercle, puis de se compter de 3 en 3, et de tuer à chaque fois le troisième, jusqu'au dernier survivant, qui se tuerait lui-même.
Quelle place Josèphe dut-il choisir pour échapper au massacre ?

Le loup, la chèvre et le chou

Un homme possédant un loup, une chèvre et un chou veut traverser une rivière. Il dispose d'une barque si petite, qu'elle ne peut contenir, en plus de sa personne, que l'un des trois éléments cités. Comment doit-il procéder, sachant que le loup n'attend que le moment où il tournera le dos pour dévorer la chèvre, et la chèvre pour dévorer le chou ?



© Scientific American

à qui résoudrait le problème célèbre de la quadrature du cercle. C'est d'ailleurs Alcuin, précepteur et ami de Charlemagne, qui serait l'inventeur du premier problème de traversée : *le problème du loup, de la chèvre et du chou.*

Un autre problème classique, qui remonte aux Grecs, et a traversé tout le Moyen-Age, pour venir jusqu'à nous après avoir passionné des milliers de chercheurs, est celui des *carrés magiques*. Le thème est d'ailleurs loin

d'être épuisé puisque des ouvrages sur le sujet paraissent encore régulièrement de nos jours.
Un autre grand nom des jeux mathématiques est le fameux Léonard de Pise dit Fibonacci (1175-1250). C'est pour l'éprouver que l'empereur Frédéric II organise en 1225 un tournoi de mathématiques à Pise. Fibonacci remporte la compétition en résolvant haut la main tous les problèmes posés, alors qu'aucun des autres spécialistes en lice n'arrive à en résoudre un seul.

Les carrés magiques

Un carré magique de côté n contient les n^2 premiers entiers non nuls, de telle sorte que la somme des nombres situés dans les cases d'une même ligne, d'une même colonne, ou d'une même diagonale, soit constante.
Le carré ci-dessus figure dans une gravure d'Albrecht Dürer (1471-1528) intitulée *Melencolia*. L'artiste a fait apparaître la date de réalisation de la gravure, 1514, sur la dernière ligne du carré.

Un de ces problèmes consistait à trouver un nombre tel que son carré augmenté ou diminué de cinq reste un carré. Le théorème de Fermat nous dira par la suite que ce nombre ne peut être entier ; c'est en fait 41/12.
Un autre problème consistait à résoudre une méchante équation du troisième degré que le célèbre mathématicien dompta sans difficulté. Autant dire qu'à l'époque, on ne badinait pas avec les jeux mathématiques !

Époque moderne

Les mathématiciens de la Renaissance furent très friands de défis. Adrianus Romanus lance un défi « à tous les mathématiciens du monde ». Quelque temps auparavant, Nicolas Chuquet avait publié le premier traité moderne sur les récréations mathématiques. Au XVII^e siècle, Pascal, Descartes, Mersenne, Fermat, et d'autres, se lancent mutuellement des défis. C'est ainsi que le « grand théorème de Fermat », que celui-ci annonça avoir démontré en marge des œuvres de Diophante, n'a été démontré que plus de trois siècles plus tard par Andrew Wiles, après que des milliers de mathématiciens, professionnels ou amateurs, s'y sont essayés.
Au siècle suivant, d'autres continuèrent la tradition, parmi lesquels on peut surtout citer Euler. Celui-ci posa le problème des « trente-six officiers », mais il jeta aussi les bases de la topologie et de la théorie des graphes avec le *problème des ponts de Königsberg*.
Au XIX^e siècle, les mathématiciens Hamilton, Cayley, Bertrand, puis Edouard Lucas perpétuèrent ces défis ludiques. Ce dernier publia d'ailleurs un ouvrage de référence : *Récréations Mathématiques* (4 volumes), qui fait encore autorité. Lucas (1842-1891), bien connu pour le problème des reines



© Paul de Sèze

Duel mathématique

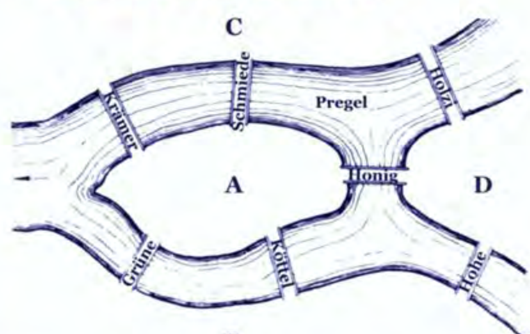
Pierre et Serge sont deux mathématiciens géniaux que leur concierge tente constamment de coller. Pierre et Serge descendent en même temps les escaliers, et tombent nez à nez avec le concierge.
— J'ai choisi deux nombres entre 2 et 200, dit le concierge. Voici leur somme, dit-il à Serge en lui donnant un papier.
Et voici leur produit, dit-il en tendant un autre papier à Pierre. Lequel d'entre vous devinera ces deux nombres ?
— Ce produit ne me suffit pas, dit Pierre.
— Je le savais, dit Serge.
— Alors, je connais ces deux nombres, dit Pierre.
— Alors, moi aussi, dit Serge.
Pourriez-vous donner ces deux nombres entiers ?

sur l'échiquier, est aussi, ne l'oublions pas, l'inventeur génial du casse-tête *le baguenaudier*, et surtout des fameuses *Tours de Hanoï*, qu'il créa d'abord comme un canular. Il l'attribua à N. Claus de Siam, du collège Li Lou Stian… qui n'est rien d'autre qu'un anagramme de Lucas, Lycée Saint-Louis, où notre facétieux amateur de jeux mathématiques était à l'époque professeur !

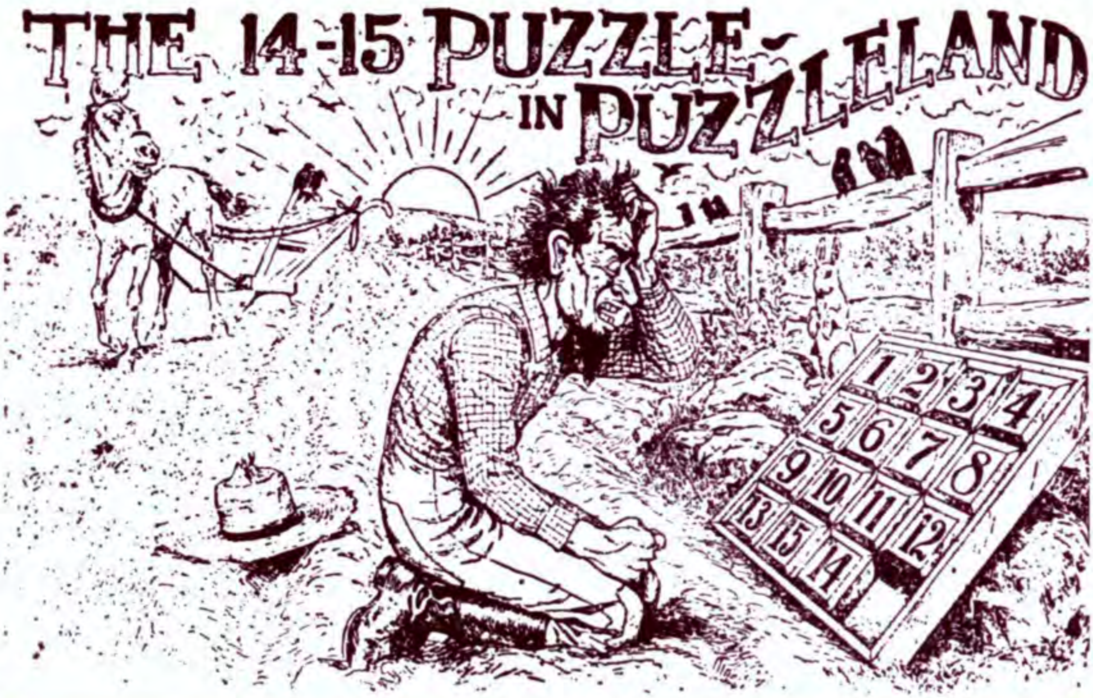
À la fin du XIX^{e} siècle, outre Lucas, trois autres noms se détachent au firmament des jeux mathématiques : Lewis Carroll, Sam Loyd et Henri Ernest Dudeney.

Le premier, bien connu pour son *Alice au Pays des Merveilles*, et ses autres livres pour enfants, enseignait les mathématiques, et se passionnait pour la logique, qui lui inspira plusieurs ouvrages, que

Les ponts de Königsberg



En 1750, le jeu à la mode dans cette ville de Poméranie consistait à parcourir la ville en traversant une fois et une seule chacun des sept ponts qui étaient alors jetés sur la rivière Pregel. Qu'en pensez-vous ?



Le *taquin* (appelé aussi jeu de « 14-15 » ou plus communément « pousse-pousse ») est constitué de 15 petits carrés numérotés de 1 à 15, qui peuvent glisser librement dans un plan, à l'intérieur d'un carré de 4 sur 4, l'emplacement du 16e petit carré étant vide, permettant ainsi les déplacements. Ce casse-tête, créé par Sam Loyd en 1870, était vendu avec les carrés numérotés dans l'ordre naturel, sauf les carrés 14 et 15 dont les positions étaient inversées. Loyd offrit un prix de 1000 dollars à qui saurait remettre les carrés dans le bon ordre. Il pouvait être tranquille, car il savait le problème insoluble. En effet, pour des raisons de parité, seulement la moitié des arrangements possibles sont effectivement réalisables, et la configuration demandée n'en faisait pas partie !

l'on peut ranger dans la catégorie des jeux mathématiques. Le second, autodidacte américain, inventa des milliers de problèmes qu'il proposa pendant plusieurs décennies aux lecteurs de divers journaux et revues. Le problème qui l'a rendu célèbre est celui du *taquin* appelé encore 14-15. Ce problème connut une diffusion mondiale, comparable à celle que connaîtra le Rubik's cube près d'un siècle plus tard.

Henri Ernest Dudeney, quant à lui, fut le plus grand inventeur anglais de problèmes, au début du vingtième siècle. Il publia des centaines de problèmes dans diverses revues. Le plus connu est celui de *la mouche et de l'araignée*.

Ce plaisir d'inventer des problèmes se perpétua, et prit même une certaine ampleur puisqu'un congrès international de récréations mathématiques eut lieu en 1935. Des journalistes scientifiques continuèrent à tenir des rubriques de jeux mathématiques dans diverses publications. Le plus célèbre d'entre eux est l'américain Martin

Gardner, qui, par sa rubrique dans la revue *Scientific American*, passionna des milliers de lecteurs pendant plusieurs décennies et publia des dizaines de recueils de jeux mathématiques. Martin Gardner, qui cultiva toute sa vie son goût pour les énigmes, collabora également à la revue « Le Sphinx », tout un programme !
D'autres auteurs prennent la relève. Ainsi, Raymond Smullyan, spécialiste des casse-tête logiques, dont un livre a pour titre : *Quel est le titre de ce livre ?*, ce qui constitue déjà en soi un joli paradoxe. Parmi les auteurs français, citons, outre Pierre Berloquin, qui fut un précurseur, Jean-Pierre Alem, Jean-Claude Baillif et Marie Berrondo (alias Eurêka).

M. C. et G. C.

Les 36 officiers

Trente-six officiers de six régiments différents et de six grades différents doivent se ranger en carré de façon à ce que sur chaque ligne et chaque colonne ne figurent jamais deux officiers du même grade ou deux officiers du même régiment. Combien y a-t-il de solutions distinctes ?
L'illustration donne une solution du problème analogue pour 25 officiers.

par Pierre Berloquin

Futiles mais fascinants : les carrés magiques

Néophytes, votre talent est exceptionnel si vous arrivez à construire un carré 3 × 3 en moins d'une heure, un 4 × 4 en moins de trois jours (vous avez le choix... il en existe 880). Pour un carré 5 × 5 on n'exigera pas de limite de temps, et pour un 6 × 6, si vous en trouvez un, vous êtes anormalement génial !

***Melancholia* de A. Dürer (détail).**

Irréductible carré de résistance, bastion ludique rebelle depuis des millénaires à toute forme de détournement vers une quelconque utilisation pratique, le carré magique fascine toujours les amateurs de jeux mathématiques.

Etapes historiques

Les premières traces de carrés magiques sont d'ordre 3 : elle remontent à 2200 avant J.-C., en Chine. On les dote de pouvoirs magiques et ils apparaissent en liaison avec des objets religieux. Ils ne se débarrasseront d'ailleurs pas complètement de cette connotation sacrée puisqu'aujourd'hui encore on leur consacre maints ouvrages ésotériques.

De Chine, les carrés magiques vont voyager au Japon et en Inde. C'est à Khajuraho en Inde qu'apparaît la première trace de carré magique d'ordre 4, déjà très sophistiqué puisque ses diagonales brisées en chevrons présentent elles aussi la somme magique.

L'introduction en Europe de ces carrés très particuliers semble être due à Emmanuel Moschopoulos en 1420 et ils changent de statut : de simple curiosité arithmétique ils passent au rang d'êtres mathématiques à part entière en s'accompagnant de méthodes de construction. Au XVI^e siècle, ils vont même flirter avec l'art, tel le célèbre carré d'Albrecht Dürer

« Ils ne peuvent être d'aucun usage ; ce n'est qu'un jeu, dont la difficulté fait le mérite et qui peut seulement faire naître sur les nombres quelques vues nouvelles dont les mathématiciens ne veulent pas perdre l'occasion. »
Fontenelle.

Définition d'un carré magique

Un carré est ***magique*** lorsque :

- **ses cases sont occupées par des entiers qui se suivent à partir de 1**
- **ses lignes, ses colonnes et ses deux diagonales ont une somme égale (somme magique).**

Si vous découvrez ici pour la première fois les carrés magiques ou si, connaissant leur existence, vous ne les avez jamais attaqués de front, n'hésitez pas, papier, crayon et surtout gomme en main, à en construire un vous-même. Vous entrerez de plain-pied au cœur de la pensée et des méthodes mathématiques et l'expérience ne vous décevra pas. D'ailleurs les mathématiciens ne s'y sont pas trompés : même les plus chevronnés se sont passionnés pour ces fascinants carrés. « *Ils ne peuvent être d'aucun usage ; ce n'est qu'un jeu, dont la difficulté fait le mérite et qui peut seulement faire naître sur les nombres quelques vues nouvelles dont les mathématiciens ne veulent pas perdre l'occasion* » écrit Fontenelle en 1705.

dans sa gravure *Melancholia*, où figure en plus la date de l'œuvre, 1514. C'est dire que l'artiste réalise plus une prouesse ludique qu'un rite sacré.

Bachet fait des carrés magiques au XVII^e siècle un véritable objet de recherche arithmétique. De la Loubère rapporte de Siam un procédé très spécial de construction des carrés magiques d'ordre impair. On imagine le carré comme un tore, le bord droit enroulé sur le gauche et celui du bas sur celui du haut, on commence par inscrire le 1 au milieu de la première ligne et on complète les cases en diagonale avec des entiers consécutifs comme sur la figure.

11	18	25	2	9
10	12	19	21	3
4	6	13	20	22
23	5	7	14	16
17	24	1	8	15

Carré complété avec la méthode de De la Loubère.

Avec la publication en 1693 par Frenicle de Bessy d'une exploration systématique des carrés d'ordre 4, les travaux sur les carrés magiques prennent un tour de plus en plus mathématique. On y trouve entre autres l'une des rares méthodes de construction des carrés d'ordre pair : la *méthode des bordures*. Elle laisse, vous allez le voir, une certaine initiative à l'opérateur. On part d'un carré d'ordre n et on le modifie petit à petit pour en faire un carré d'ordre $n + 2$:

- On commence par ajouter $2n + 2$ à tous ses termes.

- On garnit ensuite les bordures avec les entiers de 1 à $2n + 2$ et de $(n + 1)^2 + 2$ à $(n + 2)^2$.

C'est dans cette dernière étape que le constructeur est livré à lui-même. Il doit parvenir à la fois à :

- opposer diamétralement des nombres de somme $(n + 2)^2 + 1$ pour assurer la somme magique sur les lignes, les colonnes et les diagonales.
- obtenir la somme magique sur

les bordures, comme dans l'exemple ci-dessous.

Le carré :

11	18	20	25
22	23	13	16
17	12	26	19
24	21	15	14

donne :

1	34	3	32	9	2
29	11	18	20	25	8
30	22	23	13	16	7
6	17	12	26	19	31
10	24	21	15	14	27
35	3	4	5	28	36

Au XVIII[e] siècle les travaux se développent dans de nouvelles directions. Poignard apporte en 1704 une méthode dérivant de celle des carrés latins pour les constructions des carrés d'ordre 4, 8, 16 et 32, La Hire développe en 1705 la méthode de superposition et propose des carrés faits de nombres non consécutifs.

Benjamin Franklin relate vers 1750 combien il a passé de temps à développer une grande dextérité dans la construction de carrés magiques. En 1768, Euler produit les carrés panmagiques où les diagonales brisées exhibent elles aussi la somme magique. Par la suite, de nombreux mathématiciens apportent leur contribution au développement des méthodes de construction. Plus récemment encore, Maurice Kraitchik, rédacteur de la section des *Récréations mathématiques* dans la revue l'*Échiquier* publie en 1930 un *Traité des Carrés Magiques* de 108 pages qui fait encore autorité aujourd'hui.

Carrés magiques, combien ?

L'étude des carrés magiques comporte plus d'un problème ouvert, en particulier celui de trouver le nombre de carrés magiques d'un ordre donné. On connaît juste celui des carrés d'ordre 3 (il n'y en a qu'un, comme nous venons de le voir), d'ordre 4 (880, et c'est Frenicle de Bessy qui l'a trouvé au XVII[e] siècle), d'ordre 5 (275 305 224, calculé par Schroeppel en 1973).

Le nombre des carrés magiques d'ordre 6 est inconnu ce jour, mais Pinn et Wieczerkowski l'ont estimé en 1998 à environ $1{,}7 \times 10^{19}$ en utilisant des méthodes statistiques.

Pour les ordres supérieurs, tout reste à faire...

E. B.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Le carré de Lo Shu, le seul carré magique d'ordre 3.

Records d'aujourd'hui

On peut demander encore plus aux créateurs de carrés magiques, en exigeant de ceux-ci des propriétés de plus en plus extraordinaires, par exemple d'être multimagiques.
Un carré, déjà magique, est dit bimagique s'il reste magique lorsqu'on élève au carré tous ses éléments. Il est dit *p*-magique s'il reste magique
lorsqu'on élève tous ses nombres à la puissance 2, 3, ..., *p*.
C'est autour de 1900 qu'on découvre en France les premiers carrés bimagiques (Pfeffermann, 1890 ; Tarry, 1905).
Pfeffermann a su attiser la curiosité de ses lecteurs en ne publiant que partiellement son carré dans *Les tablettes du chercheur* du 15 janvier 1891. Vous pouvez toujours essayer de le compléter !
Ce carré a d'ailleurs valu à son auteur les compliments du célèbre créateur de jeux mathématiques Edouard Lucas, qui le considérait comme « un véritable tour de force ».

On a construit ensuite des carrés trimagiques, le dernier en date étant celui de l'allemand Walter Trump en 2002.
Dans la course aux carrés multimagiques, les Français Christian Boyer et André Viricel se sont spécialement distingués, et nous rendons particulièrement hommage à ce dernier, fidèle collaborateur de ***Tangente***. Ils ont en effet inventé, en 2001 un carré tétramagique d'ordre 512, et la même année un carré pentamagique d'ordre 1024.
D'autres records sont nés en Chine, avec le carré pentamagique d'ordre 729 de Li Wen, en juin 2003 et le carré hexamagique d'ordre 4026 de Pan Fengchu en décembre 2003.
Il reste malgré ces prouesses d'autres records à battre : à quand un carré heptamagique ?
À quand un carré hexamagique d'ordre inférieur à 4096 ?

E. B.

56		8		18		9	
	20		48		29		10
26		13		64		4	
	5		30		12		60
15		63		41		50	
	55		11		58		45
61		42		27		39	
	62		37		51		3

Promenade dans l'univers des carrés magiques

Vous pouvez retrouver Pierre Berloquin sur crealude.net

La dimension 3 tranche considérablement avec les ordres supérieurs en ce qu'elle ne livre qu'un seul carré magique qui, en plus, peut se construire entièrement logiquement.

Raisonnons à une rotation ou une symétrie près. On constate alors successivement que la somme magique est 15, que le nombre 5 est nécessairement au centre, que 1 est au centre d'un côté, avec forcément le 9 en face. La ligne du 9 ne peut être complétée que par 4 et 2, ce qui conditionne la place de 8 et 6. On complète alors par 3 et 7. On peut aussi appliquer à ce carré les transformations géométriques qui n'altéreront pas ses propriétés : rotations de 90°, symétries par rapport aux médianes et aux diagonales, remplacement de chaque nombre par son complément à 10. Vous vérifierez que malgré tout cet arsenal, le carré magique d'ordre 3 ne peut prendre que huit apparences différentes.

Pour le carré d'ordre 4, la situation est moins simple : il n'y a pas un seul carré possible, mais plusieurs, connus depuis le XVIII^e siècle : Frenicle en a répertorié 880 dès 1693.

Les choses s'aggravent pour ce qui est des dimensions supérieures ou égales à 5 :

• ou bien l'ordre est impair et l'on possède un certain nombre de méthodes permettant d'obtenir beaucoup de solutions, sans toutefois les obtenir toutes ni même savoir combien il en existe au total,

• ou bien l'ordre est pair et l'on possède moins de méthodes, avec beaucoup moins de connaissances sur l'ensemble de la situation.

Quant à fabriquer des carrés magiques à partir de constructions déjà faites, c'est évidemment possible : il existe des techniques pour multiplier entre eux deux carrés magiques de dimensions quelconques et produire automatiquement un nouveau carré dont la dimension est le produit des deux premières. Rien n'empêche également de multiplier un carré par lui-même.

Autant de méthodes de production qui ont passionné les mathématiciens de toutes les époques. Ceux-ci furent nombreux à apporter leur contribution tant au développement de ces méthodes qu'à la création d'extensions, de variantes ou de curiosités, comme Beverly qui en 1848 a produit le premier carré magique en sauts de cavalier sur l'échiquier.

P. B.

Bachet de Méziriac

François Bachet, sieur de Meziriac (1581-1638), est une personnalité mythique dans l'univers des jeux mathématiques. Il est l'auteur de l'incontournable livre-culte « *Problèmes plaisants et délectables qui se font par les nombres* ». La première édition a vu le jour en 1612 et a été augmentée en 1624. Le livre a été obligeamment réédité par Albert Blanchard en 1959.

La cinquantaine de problèmes que Bachet a accumulés sont des références et près de quatre siècles plus tard, une bonne quantité des problèmes présentés ici et là comme jeux mathématiques n'en sont en fait que des adaptations.

On ne peut pas exactement créditer Bachet de l'invention des jeux mathématiques puisqu'on lui connaît au moins un prédécesseur français. Cent vingt-huit ans plus tôt, en 1484, Nicolas Chuquet inclut dans un ouvrage d'arithmétique un chapitre intitulé « *Jeux et esbatements qui par la science des nombres se font* ». Chuquet ne prétend d'ailleurs pas être le créateur de ce qu'il publie. Il est vraisemblable qu'il s'agisse d'un trésor de problèmes fondamentaux dûs aux mathématiciens arabes qui l'ont peu à peu créé, amassé puis transmis, au cours des siècles précédents.

Bachet apporte néanmoins une innovation importante : il est le premier à publier un ouvrage exclusivement dévolu aux jeux mathématiques. Ceux-ci ne sont plus livrés en annexe pour accompagner une œuvre sérieuse. Ils ne sont pas non plus assaisonnés d'une caution éducative, où des digressions bien senties orientent les dignes intelligences vers la véritable mathématique. Non, l'honnêteté intellectuelle a enfin le droit de se manifester, les jeux sont là pour eux-mêmes, pour la bonne raison, définitivement affichée qu'ils sont délectables et plaisants. S'installe désormais du même coup un droit essentiel : celui d'user de son esprit pour le simple et pur plaisir que cela procure.

C'est bien sûr la philosophie que nous adoptons et comptons développer ici. C'est cependant une attitude difficilement acceptée, sans cesse remise en question jusqu'à nos jours, et aussi délicate à tenir que du temps de Bachet. Celui-ci éprouve le besoin, dans sa préface, de prouver que ce livre n'est point du tout inutile.

Heureusement, Bachet nous révèle qu'il ne fait ici que feindre le sérieux. Il ne peut espérer convaincre personne de l'historicité de l'exemple qu'il fournit, où Josèphe échappe à un massacre par ses propres soldats grâce à une habile utilisation des sauts entiers autour d'un cercle.

Réciproquement, cet humour est mis en défaut par la présence, en face de chaque problème, d'une proposition mathématique qu'elle illustre. Sera-t-il toujours aussi peu aisé de maintenir un cap solidement ludique entre les Charybde et Scylla du pédagogique et de l'utile ?

Reconnaissons donc à Bachet la qualité de premier ludographe. Dans une vie bien remplie de travaux érudits, entre des ouvrages de mathématiques, des poésies en français, en latin et en italien et des traductions brillantes (dont *Les Arithmétiques* de Diophante), il a donné une part importante à la pratique délibérée du jeu. Bravo !

Voici l'un des problèmes « *plaisants et délectables* » tels que proposés par Bachet : Trois maris jaloux se trouvent de nuit avec leurs femmes au passage d'une rivière où ils ne rencontrent qu'un petit bateau sans batelier, si étroit qu'il n'est capable que de contenir deux personnes, on demande comme ces six personnes passeront deux à deux, de telle sorte que jamais aucune femme ne demeure en compagnie d'un ou de deux hommes si son mari n'est présent. *Il paraît qu'on peut y arriver en 6 traversées (et 5 retours)* !

P. B.

par A. Calame & M. Criton

Les problèmes de l'échiquier

Si l'origine du jeu d'échecs est ancienne et incertaine, ses liens avec les mathématiques et plus particulièrement les jeux mathématiques semblent avoir toujours existé. L'échiquier lui-même et les pièces du jeu d'échecs avec leur règles de déplacement et de prise, sont un matériau de choix pour poser des problèmes variés à l'infini.

Parmi les pièces du jeu d'échecs, le cavalier est celle dont les mouvements sont les plus inattendus. Il est naturel que cette pièce ait très tôt attiré l'attention des mathématiciens.

Le problème de Guarini

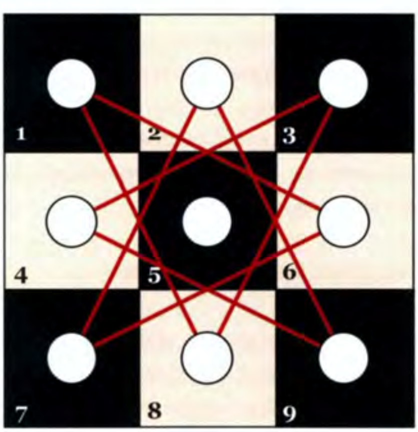
Ce problème, qu'Edouard Lucas cite dans le tome IV de ses *Récréations Mathématiques* trouve son origine, semble-t-il, dans un manuscrit de 1512 dû à R. Guarini di Forli.

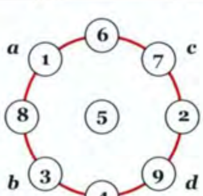
Il s'agit du problème suivant : sur un mini-échiquier de 9 cases (3 sur 3), on dispose 2 cavaliers blancs en *a* et *b*, et 2 cavaliers noirs en *c* et *d*. *Peut-on échanger les cavaliers blancs et les cavaliers noirs ? Si oui, en combien de mouvements (au minimum) ?*

Le ludologue anglais Henri Ernest Dudeney (1847-1930) en a donné une élégante solution, où il utilise ce qu'il

Leonhard Euler, mathématicien prolifique à l'œuvre considérable, s'est également attaqué à la marche du cavalier d'échecs.

appelle sa méthode « des boutons et des fils ».





Sur chaque case de notre mini-échiquier, posons un bouton. Puis relions ces boutons par des fils selon les mouvements autorisés du cavalier d'échecs. En tendant les fils, on obtient le diagramme ci-dessous.

On observe tout d'abord que la case 5 n'intervient pas dans le problème, puisqu'un cavalier ne peut l'atteindre à partir d'aucune des autres cases. Les cavaliers, figurés par les lettres *a*, *b*, *c*, *d*, peuvent seulement se déplacer sur le cercle d'un emplacement (figuré par un bouton) à un emplacement immédiatement adjacent.

Une solution est alors facile à trouver, par exemple :

1-8 ; 7-6 ; 6-1; 9-2 ; 2-7 ; 7-6 ; 3-4 ; 4-9 ; 9-2 ; 2-7 ; 8-3; 3-4 ; 4-9 ; 1-8 ; 8-3 ; 6-1 (solution en 16 mouvements).

En observant le graphe de Dudeney, on se convainc facilement que 16

RÉFÉRENCES :

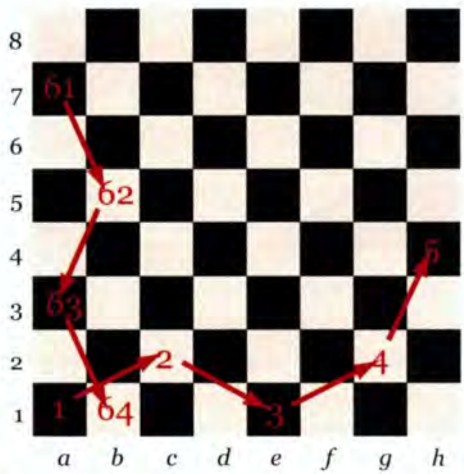
- **Édouard Lucas** *Récréations Mathématiques* Tome IV (1894, réédité en 1975 par Blanchard)
- **H. E. Dudeney** *Amusements in Mathematics* (1917, réédité depuis, en langue anglaise uniquement)
- **Martin Gardner** *Problèmes et Divertissements Mathématiques* Tome II (1965 Dunod)
- **M. Gardner**, *Wheels, Life and others Mathematical Amusements*, Freeman, 1983
- **W. W. Rouse Ball & H. S. M. Coxeter** *Mathematical Recreations & Essays* (1892, réédité depuis, en français, aux Editions Gabay)

déplacements est un minimum, puisque le cavalier situé en 1 doit venir en 9, celui situé en 3 se rendre en 7, etc.

Les parcours du cavalier

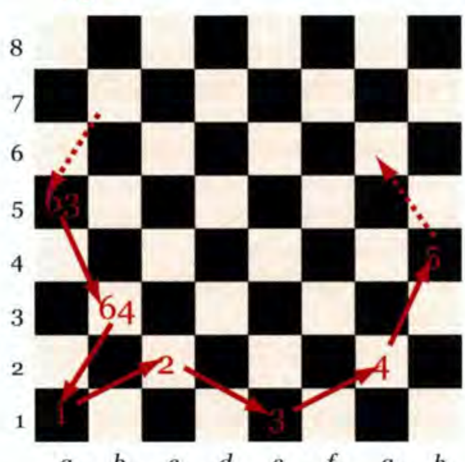
Leonhard Euler (1707-1783), mathématicien prolifique à l'œuvre considérable, s'est également attaqué à la marche du cavalier d'échecs. Voici par exemple une de ses recherches telle qu'il la présente lui-même.

fig. 1



Essayez de compléter les figures 1 et 2.

fig. 2



« Je me trouvai un jour dans une compagnie où, à l'occasion du jeu d'échecs, quelqu'un proposa cette question : De parcourir avec un cavalier toutes les cases d'un échiquier, sans parvenir jamais deux fois à la même, et en commençant par une case donnée.
On mettait pour cette fin des jetons sur toutes les 64 cases de l'échiquier, à exception de celle où le cavalier devait commencer sa route ; et de chaque case où le cavalier passait conformément à sa marche, on ôtait le jeton, de sorte qu'il s'agissait d'enlever de cette façon successivement tous les jetons. Il fallait donc éviter d'un côté que le cavalier ne revînt jamais à une case vide, et d'un autre côté il fallait diriger en sorte sa course, qu'il parcourût enfin toutes les cases ».

Dans son étude, Euler distingue deux sortes de routes :

1• les routes ouvertes où il n'est pas possible de sauter de la dernière case à la première (voir la figure 1).

2• les routes rentrantes où la dernière case communique avec la première (voir la figure 2).
Dans ce cas, il est évident qu'on peut commencer le parcours en n'importe quelle case.

Les reines non dominatrices

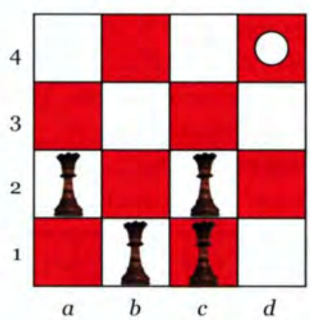
Si le cavalier du jeu d'échecs a toujours été la pièce favorite des amateurs de jeux mathématiques, en raison de la « bizarrerie » de la règle de son déplacement, et de la richesse qu'elle engendre, la reine se prête également à de nombreux problèmes, grâce à ses possibilités de prise et de déplacement, qui sont de loin les plus importantes de celles de toutes les pièce d'échecs.

Un problème classique, et célèbre, est celui de la domination de toutes les cases de l'échiquier par le plus petit nombre possible de reines.

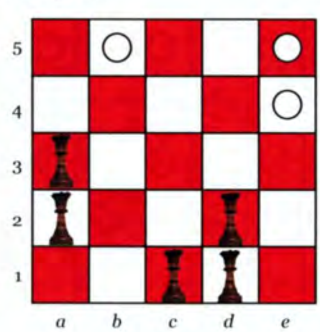
Mais le problème inverse a également fait l'objet de recherches consistant, avec un nombre de reines donné, à dominer le moins de cases possibles sur l'échiquier.

Si l'on place N reines sur un échiquier d'ordre N (c'est-à-dire un échiquier de N cases sur N cases), quel est le plus grand nombre possible de cases non menacées par une des reines ? Donnez une configuration correspondant à ce nombre maximum de cases non menacées.

Pour N = 1, 2 et 3, la réponse est 0 de manière évidente. Pour N = 4 et 5, on peut trouver la réponse dans l'ouvrage *Wheels, Life and Other Mathematical Amusements* (Freeman 1983) du célèbre ludologue américain Martin Gardner.

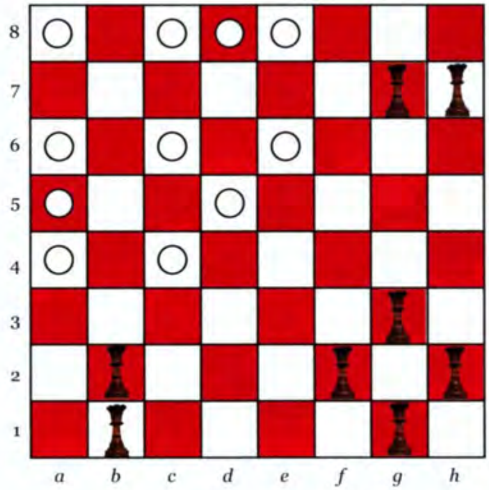


Il est à noter que la configuration pour N = 5 est unique, à une rotation ou une symétrie près.



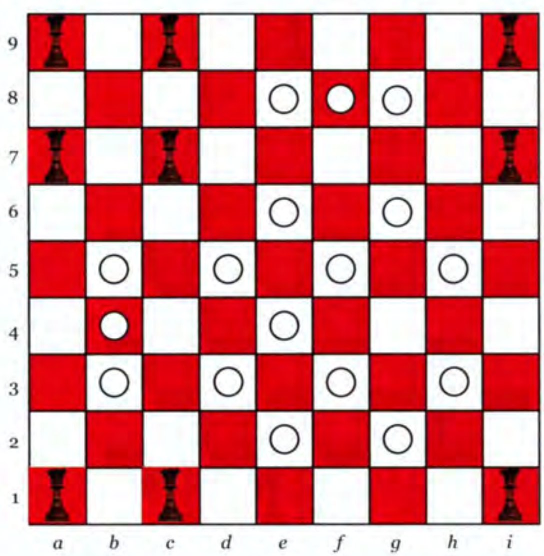
Pour N = 6 et 7, Martin Gardner donne comme nombres maximum de cases libres 5 et 7. C'est bien entendu sur l'échiquier « normal », c'est-à-dire sur l'échiquier 8 × 8, que le problème a été posé en premier.

Cette solution, due au capitaine Turton, est indiquée ci-dessous. Elle n'est pas la seule solution pour $n = 8$.



Pour les valeurs de N supérieures à 8, il est plus difficile d'avoir la certitude de détenir un record absolu. Voici par exemple le record pour N = 9 : 18 cases non menacées.

A. C. & M. C



***Les joueurs d'échecs*, Cornelis de Man,** Musée des Beaux-arts, Budapest.

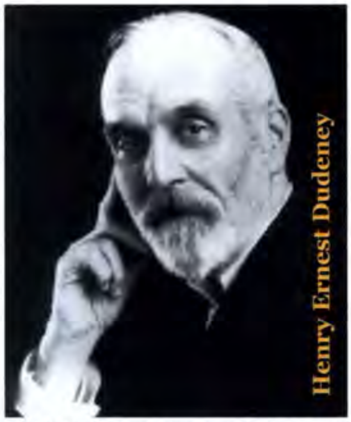
RÉFÉRENCES :

- **S. Ainley**, *Mathematical Puzzles*, Bell, 1977
- revue *Jouer Jeux Mathématiques*, numéros 3, 16, 17, 19, Fédération Française des Jeux Mathématiques, 1991-1995
- site de Mario Velucchi : http:/www.velucchi.it_

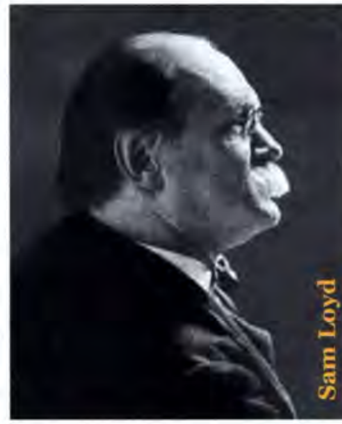
Sam Loyd et Ernest Dudeney

L'anglais Ernest Dudeney (1857-1930) et l'américain Sam Loyd (1841-1911) ont eu des carrières de créateurs de puzzles mathématiques très parallèles.

Le premier, excellent mathématicien, inventeur très imaginatif, publia des dizaines de problèmes brillants, parfois très sophistiqués, toujours camouflés sous des anecdotes amusantes, qu'il publia en 1907 sous le titre *The Canterbury Puzzles*. Son pseudonyme « Le Sphinx » en dit long sur son talent de mystificateur mathématique. En voici un exemple, celui du découpage d'un triangle équilatéral en quatre morceaux, qu'on doit réarranger pour en faire un carré. Cette curiosité purement géométrique a été commercialisée sous forme de jeu fait de pièces en bois pivotant les unes sur les autres.



Henry Ernest Dudeney



Sam Loyd

Infatigable inventeur de jeux mathématiques, Dudeney, qui ne négligeait jamais de relier chacun de ses problèmes à la théorie sous-jacente, collabora à d'innombrables revues comme *Strand Magazine, Blighty, Cassel's, the Queen, Tit-Bits* et *Weekly Dispatch*. Hormis le livre mentionné plus haut, il fit de tous ces problèmes des recueils, *Amusements in Mathematics* (1917) et *Modern Puzzles* (1926) où l'on peut aujourd'hui encore trouver des trésors d'ingéniosité débordants d'imagination.

En même temps que Dudeney, collaborait à *Tit-Bits* un autre géant du puzzle mathématique, Samuel Loyd (1841-1911), connu sous le nom de Sam Loyd. Comme Dudeney, grand amateur de jeu d'échec, il se fit connaître en publiant des problèmes d'échecs et leurs solutions. Son premier problème date du 14 avril 1855, dans le *New York Saturday Courier*. Il avait alors quatorze ans !

Il laisse les échecs en 1870 pour s'adonner à son autre passion : les puzzles mathématiques. Ceux qu'il publie alors sont de véritables jouets, souvent commercialisés sous forme de gadgets, comme cet âne dont on peut faire un cheval. Essayez de réarranger ses six morceaux pour en faire un cheval ! On raconte que Sam Loyd a vendu des millions d'exemplaires de ce jeu et qu'il en a tiré 10 000 dollars, une vraie fortune à l'époque.

Le génie de Sam Loyd a été précisément de traduire par un jeu réalisé concrètement et vendu à des milliers d'exemplaires les puzzles qu'il créait. À un moment, tout le monde était fou de son puzzle « 14-15 », que nous connaissons sous le nom de « taquin ». Le jeu est constitué d'un cadre carré rigide dans lequel sont emprisonnés quinze petits carrés mobiles, laissant une case vide. Le but du jeu consiste à remettre les pièces dans l'ordre de 1 à 15 à partir d'une position initiale quelconque. Seulement voilà, Loyd, farceur, a interverti au départ le 14 et le 15, si bien que le défi reste impossible à relever ! Il a eu beau jeu de proposer une prime de 1 000 $ à qui résoudrait son fameux puzzle ! La raison de cette impossibilité est liée à un problème de parité. Comme Dudeney, Loyd réunit environ 5 000 problèmes et jeux dans un grand ouvrage : *The Cyclopedia of puzzles*.

E. B.

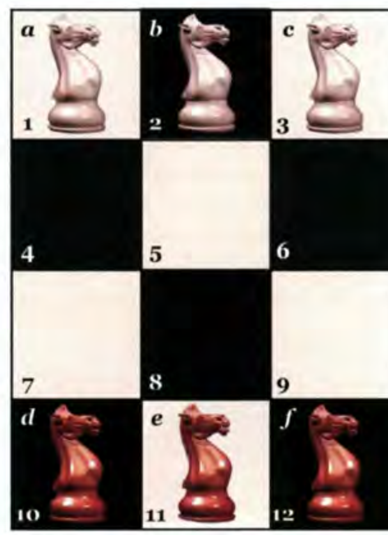
Échecs et maths

1. Trois contre trois

On dispose de trois cavaliers blancs en a, b et c, et de trois cavaliers noirs en d, e et f. **Peut-on échanger les cavaliers blancs et les cavaliers noirs ? Si oui, en combien de mouvements** (au minimum) **?**

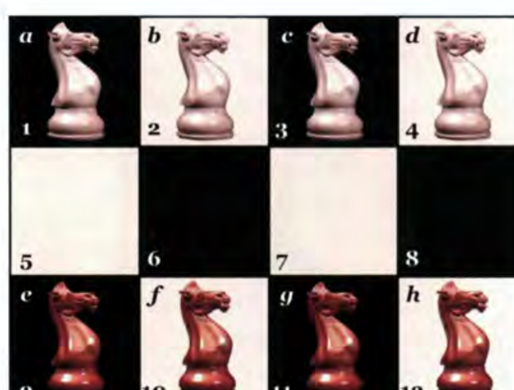
2. Sur un 3 × 4

Même problème que le précédent, avec 3 cavaliers de chaque côté, mais sur un échiquier de 3 cases sur 4 cases, disposés comme sur la figure ci-dessous. Là aussi, **déterminez le nombre minimum de déplacements nécessaires à l'échange.**



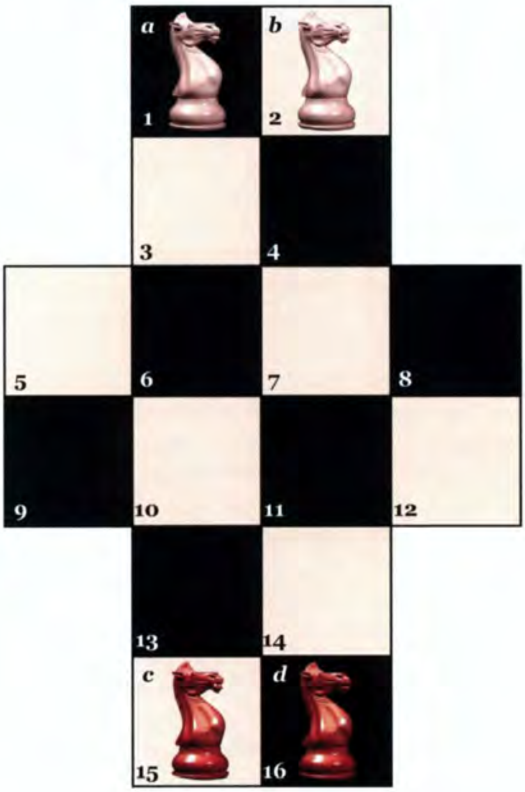
3. Sur un 4 × 3

Même problème encore, avec 4 cavaliers de chaque côté, placés sur un échiquier de 4 cases sur 3 cases, disposés comme sur la figure.
Déterminez une solution minimale, si elle existe.



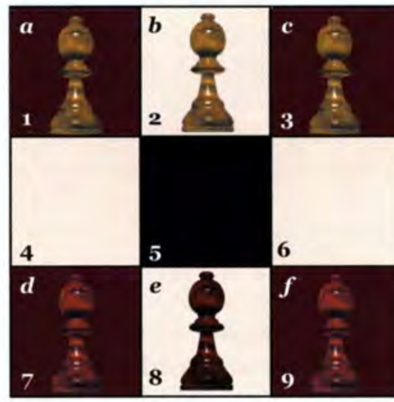
5. La grande croix

On propose le même problème sur la croix ci-contre.



6. Échange de fous sur un échiquier 3 × 3

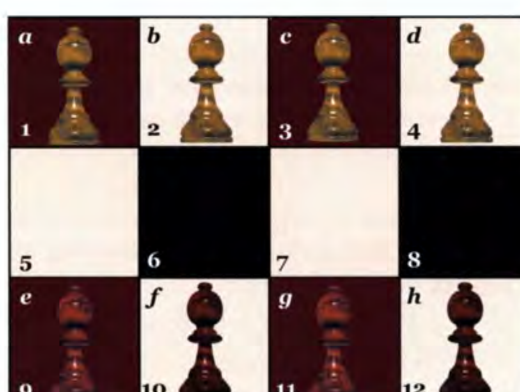
On place 3 fous blancs (en a, b, c), et 3 fous noirs (en d, e, f), sur un échiquier de 3 cases sur 3 cases. **L'échange est-il possible ? Si oui, en combien de coups ?**



Solutions page 28

7. Échange de fous sur un échiquier 4 × 3

Nous proposons le même problème avec 4 fous blancs et 4 fous noirs sur un échiquier de 4 cases sur 3 cases. **Trouvez une solution minimale, s'il en existe une**.

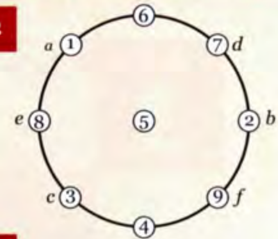


SOLUTIONS

1 - L'échange s'effectue comme dans le problème posé initialement par Guarini, en 8 déplacements, ce qui constitue un minimum : 1-6; 8-1; 3-8; 9-4; 4-3; 2-9; 7-2; 6-7.

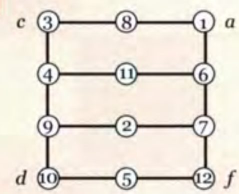
2 - On obtient le graphe ci-contre. Le nombre minimum de déplacements est 16 :10-9; 9-4; 2-9; 9-10; 12-7; 7-2; 1-6; 6-7; 7-12; 4-9; 11-6; 6-1; 3-4; 4-11; 9-4; 4-3.

2



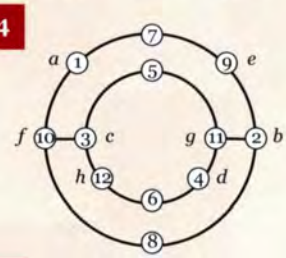
3 - Voir le graphe ci-contre. On arrive à 10 déplacements au minimum : 1-7; 10-1; 3-10; 12-3; 4-6; 6-12; 11-4; 2-11; 9-2; 7-9.

3



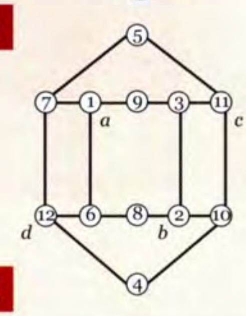
4 - Voir le graphe ci-contre. On arrive à 8 déplacements au minimum : 1-7; 12-6; 7-12; 6-1; 11-3; 2-10; 3-2; 10-11.

4



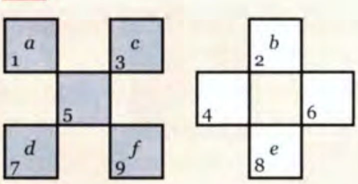
5 - Voir le graphe ci-contre : on obtient 12 déplacements au minimum : 1-7; 7-9; 15-11; 9-15; 11-5; 5-1; 2-8; 8-10; 16-12; 12-6; 6-2; 10-16.

5



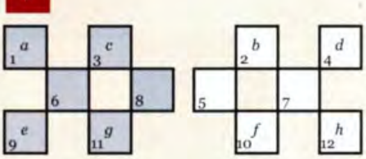
6 - Séparons les cases blanches des cases noires :
Il est évident que les fous placés en *a* et *c* (sur des cases blanches) ne peuvent être échangés avec les fous situés en *d* et *f*, puisqu'ils devraient tous passer par la case 5.
Il n'y a donc pas de solution.

6

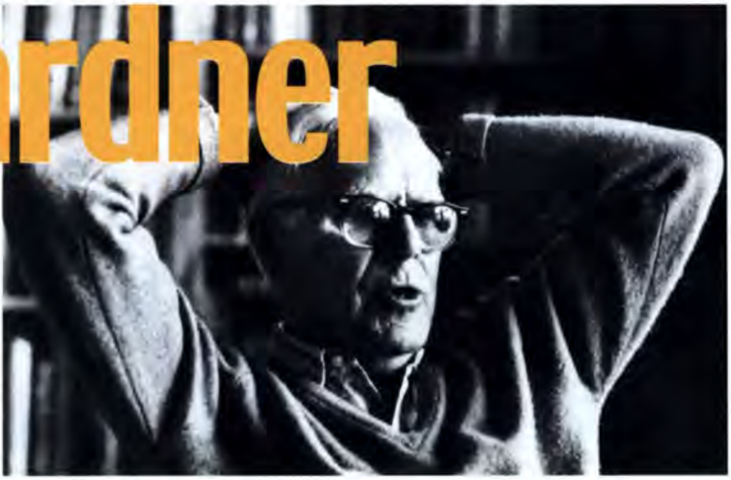


7 - Ici encore, séparons les cases blanches des noires. L'échange est possible, en 12 déplacements au minimum :
11-8; 1-11; 9-6; 6-1; 3-9; 8-3; 10-5; 4-10; 12-7; 7-4; 2-12; 5-2.

7



Martin Gardner



Martin Gardner est né en 1914 à Tulsa dans l'Oklahoma, d'un père géologue, féru de magie et d'ésotérisme. Étudiant au collège de Caltech, il est fort intéressé par les sciences.

Sa première publication date de 1930 dans la revue *Science and Invention*. Son esprit curieux et ordonné l'amène à collectionner tout ce qui peut l'être : clefs de maisons, timbres, papillons... Mais c'est vers tout ce qui touche aux puzzles que va sa passion. Il collabore avec diverses revues dont *The Sphinx*, montrant son intérêt précoce pour tout ce qui a trait à la science et à la magie.

En 1936, il est diplômé en... philosophie de l'université de Chicago. Il se situe pourtant lui-même comme magicien professionnel tout en travaillant comme journaliste et rédacteur publicitaire.

Après un service dans la marine pendant la guerre, il devient écrivain indépendant et se marie à New York, en 1947. Il aura deux fils nés en 1955 et 1958.

Il écrit des poèmes, des fictions et des nouvelles pour adolescents, commente *Alice au Pays des Merveilles*, tente les premières passerelles entre humour, philosophie, logique et mathématiques. Martin Gardner apporte également son concours à des journaux philosophiques. Parmi les ouvrages publiés à la frange de la philosophie et de la science citons : *Fads and Fallacies in the Name of Science*, *Relativity for the Million*, *Logic Machines and Diagrams*, *The Annotated Ancient Mariner*, et *The Ambidextrous Universe*, ainsi que des commentaires sur les livres de Lewis Carroll comme *The Annotated Alice*, *The Annotated Snark*.

Le tournant de sa vie se situe en janvier 1957 avec une rubrique mensuelle dans la revue *Scientific American*. Son premier article sur le pliage du papier, les hexaflexagones lui apportera une célébrité qui ne fera que croître durant 25 ans.

De 1957 à 1982, il a chaque mois analysé, disséqué, développé, réinventé tous les thèmes existant de la récréation mathématique, de la topologie à la théorie des nombres, en passant par les paradoxes logiques ou géométriques, l'analyse de jeux de société comme les solitaires, les jeux de lettres et du langage, les puzzles en tout genre. Cette rubrique a d'ailleurs été reprise en 1977 par la revue *Pour la science*, édition française du *Scientific American*.

Grâce à son goût de la collection il a accumulé puzzles, casse-tête et documents s'y rapportant et s'en est servi pour tirer le meilleur des trouvailles de ses prédécesseurs comme Loyd, Lucas, ou Dudeney. Il a su aussi puiser à des sources nouvelles comme celles de l'école russe de Kordiemsky dont il a introduit, adapté et édité les *Moscow Puzzles* (1971). Mieux, il a utilisé en permanence les techniques habituelles de la magie pour mettre en scène des récréations traditionnelles, ou des puzzles anciens mais oubliés. Il ne néglige jamais les solutions provocantes et présente souvent des problèmes simplistes à cet effet. Enfin le réseau amical qu'il a tissé en près de soixante ans lui permet d'associer constamment ses propres créations et celles de ses amis, correspondants ou lecteurs dont il développe les thèmes et encourage les publications. Citant toujours ses sources, Gardner illustre toutes ses publications d'abondantes références, qui sont à elles seules une mine pour l'amateur. Son immense culture l'amène à de très nombreuses citations de poètes ou d'écrivains et ses articles sur les récréations littéraires, l'Oulipo et Perec ont fait date.

Depuis 1982, retiré à Hendersonville, en Caroline du Nord, il a cessé la chronique qui a assuré sa renommée mais continue à écrire, en particulier dans *The Skeptical Inquirer*, revue trimestrielle du comité pour la recherche scientifique vis-à-vis des phénomènes paranormaux.

Périodiquement il fait paraître avec l'aide de ses innombrables amis, des rééditions augmentées ou de nouvelles compilations de ses rubriques et une manifestation réunit régulièrement à Atlanta les puzzlers en tout genre, qui témoignent par des communications en son honneur, du feu sacré que Gardner a su leur insuffler.

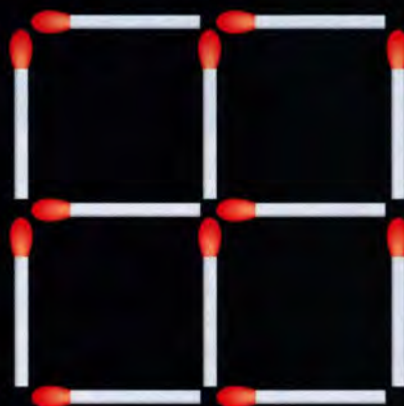
La bibliographie des ouvrages ou contributions de Gardner, humaniste, infatigable chercheur, journaliste et écrivain prolixe, est un monument, comportant plus de huit cents références et couvrant tous les domaines de sa grande créativité. Soulignons que Gardner, avec des centaines de créations et de publications, est encore plus connu dans le monde de la magie que dans le monde des récréations mathématiques.

A. Z.

Jouer avec le feu

1. Carrés

À partir de la figure ci-contre
1 • Déplacez 2 allumettes pour former sept carrés.
2 • Déplacez 3 allumettes pour former trois carrés.
3 • Déplacez 4 allumettes pour former trois carrés.
4 • Déplacez 2 allumettes pour former trois carrés.



2. Huit

A partir de la figure ci-dessus, **déplacez deux allumettes pour faire huit.**

3. Équation

Que faire pour que l'équation ci-contre, faite avec des chiffres romains, soit vraie en touchant le moins d'allumettes possible ?

4. Tangente

Tangente est le meilleur des magazines. **Pouvez-vous écrire cela avec seulement douze allumettes ?**

5. Onze

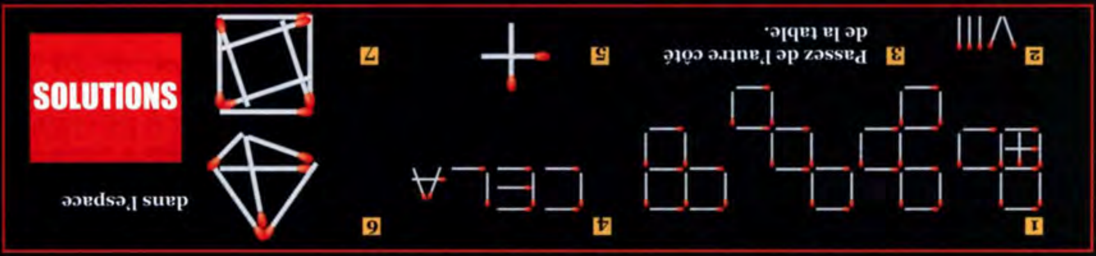
J'ai écrit onze en chiffres arabes (11), avec deux allumettes. **Arriverez-vous à faire plus (toujours avec deux allumettes) ?**

6. Triangles

Formez quatre triangles équilatéraux, sans faire de carrés, avec six allumettes.

7. Triangles

Avec huit allumettes, **formez deux carrés et quatre triangles rectangles.**



Énigmes et logique

Les problèmes de logique font partie des grands classiques des jeux mathématiques. Quelles sont les questions à poser qui permettront de démêler l'imbrication de la vérité et du mensonge ? Comment interpréter les réponses et traquer les contradictions qui entraînent des impossibilités.
La logique est indépendante du langage, mais le langage possède sa propre logique, tantôt conforme à la logique commune, tantôt contradictoire. Le langage illustre parfois ce qu'il veut décrire, et nous sommes alors dans l'autoréférence. Dans d'autres situations, il se contredit et nous tombons dans le paradoxe. L'autoréférence et le paradoxe sont devenus le terrain de jeux favori de certains ludologues parmi lesquels il est impossible de ne pas citer les noms de Raymond Smullyan et de Douglas Hofstadter.

Œdipe et le Sphinx de Jean-Auguste Dominique Ingres, 1808, Musée du Louvre, Paris.

par Gérard Cohen-Zardi

Comment résoudre les problèmes de logique

Parmi les récréations mathématiques ou logiques, l'une des plus appréciées est celle constituée par des problèmes consistant à faire des déductions à partir de phrases, prononcées par des « sincères » ou des « menteurs », sans savoir, à priori, qui est sincère et qui ne l'est pas.

Suivant les époques… et les auteurs, les appellations concernant ceux qui disent la vérité et les autres, ont changé. Il y a eu, au moins, les « véridiques » et les « menteurs » , les « purs » et les « pires », et j'ai moi-même introduit les termes de « Francs » et « Vils » dans un album en bande dessinée, *Œdipeland*, construit autour de cette situation, enrichie d'une idée originale.

Je me permettrai donc ici de désigner par « Franc » un personnage ne disant que des phrases vraies et par « Vil » celui qui ne prononce que des phrases fausses.

Un « Franc » désigne un personnage qui ne dit que des phrases vraies et un « Vil » ne prononce que des phrases fausses.

L'univers des Francs et des Vils

Imaginez que vous vous trouviez sur un territoire peuplé uniquement de Francs et de Vils.

Bien sûr, rien, dans l'aspect ou la manière, ne permet de distinguer un Franc d'un Vil. Vos seuls secours pour démêler le « vrai » du « faux » sont les phrases qu'ils prononcent… et votre capacité de déduction. Mais, me direz-vous, comment établir des certitudes à partir de phrases prononcées dont chacune d'elles peut être soit vraie soit fausse ?… C'est là toute la « magie » de la *Logique formelle* appliquée à cette situation.

Mais laissez-moi vous poser une question préliminaire. Vous rencontrez une personne (un Franc ou un Vil, vous ne savez pas !) et vous lui demandez « êtes-vous Franc ? ». *Que vous répond-elle ?*

Elle vous répond « oui » pour un Franc c'est clair et pour un Vil c'est dû au fait qu'il ment. Aucun Franc, ni aucun Vil ne peut dire « Je suis Vil ». Ils disent tous « Je suis Franc ».

Ainsi, la réponse peut-être prévue, malgré les circonstances.

Si, maintenant, vous croisez deux individus dont l'un vous dit : « nous sommes deux Vils ».

Gentilhomme vénitien de **Giorgione**, 1510, National Gallery of Art, Washington. Vérité et mensonge d'un tableau :
• l'image de fond représente-t-elle un tableau ou une fenêtre ?
• le livre surgit en trompe-l'œil du plan du tableau.
• L'inscription V. V. O (*vivus vivo*, fait par le vivant pour le vivant) est une vérité bien éphémère.

Qu'en déduisez-vous ? (Cherchez vous-même avant de lire la réponse qui suit)… Si c'est un Franc qui a parlé, comme un Franc dit toujours la vérité, ils seraient tous deux Vils !!! Celui qui parle est donc Vil, et par conséquent l'autre est Franc, car toute phrase prononcée par un Vil est fausse. Là encore, bien qu'il ne vous dise pas la vérité, vous savez à quoi vous en tenir.

Avant d'exposer une méthode systématique pour résoudre ce type de problèmes, sans doute n'est-il pas inutile de rappeler, ou d'apprendre à ceux qui l'ignorent, ce qui suit :

Si P , Q désignent deux phrases, la phrase : « P ou Q » est fausse seulement quand P ainsi que Q est fausse.

« P et Q » est vraie seulement quand P ainsi que Q est vraie.

« Si P alors Q » n'est fausse que si, simultanément, P est vraie tandis que Q est fausse.

(« Si P alors Q » s'énonce aussi « P implique Q »).

« P si et seulement si Q » est vraie quand P a même valeur de vérité que Q, fausse sinon.

(« P si et seulement si Q » s'énonce aussi : « P implique Q , et Q implique P » ou encore « P est équivalente à Q »)
Nous résumons ces propriétés dans la *table de vérité* qui suit, où l'on a mis **0** pour *fausse* et **1** pour *vraie*.

P	Q	P ou Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

P	Q	P et Q
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

P	Q	Si P alors Q
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

P	Q	P est équivalente à Q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La méthode

Voici maintenant la méthode annoncée. Quand un individu A, Franc ou Vil, prononce une phrase, vous l'écrivez entre guillemets.
Supposons, par exemple qu'il dise : « je suis Vil et il y a des kangourous dans la région ».
Vous allez faire successivement l'hypothèse que A est Franc, ensuite qu'il est Vil.
Marquez votre supposition, par exemple par un gros point, et les conclusions partielles ou définitives que vous en tirez par une flèche, en disposant le tout ainsi :
• A est Franc → « je suis Vil » est fausse → toute la phrase est fausse... impossible !
• A est Vil → « je suis Vil » est vraie → « il y a des kangourous » est fausse (sinon !!)
Finalement, on sait que : *A est un Vil* et qu'*il n'y a pas de kangourous dans la région*.
Prenons maintenant un exemple où deux individus A et B prononcent les phrases suivantes.
A : « B est Franc et le monstre du Loch Ness existe »
B : « A est Vil et le monstre du Loch Ness existe »
• A est Franc → « B est Franc » ainsi que « le monstre du Loch Ness existe » sont vraies.
Mais la déclaration de B, qui est Franc nous dit que A est Vil (contrairement à l'hypothèse)
• A est Vil → • B Franc → le monstre du Loch Ness n'existe pas (sinon A dit vrai), mais alors B ment tout en étant Franc, impossible !!!
• B Vil → Le monstre du Loch Ness n'existe pas (vu ce qu'il dit).
En conclusion : *A est Vil ainsi que B*, et *Le monstre du Loch Ness n'existe pas*... (c'est du moins ce que pensent A et B, mais ça reste à prouver !). Vous aurez noté, au passage, que l'on est amené à faire (et à marquer, ici d'une •) des sous-hypothèses.
Voyons un autre exemple, avec des implications :
A : « si B est Franc alors je suis Vil »
B : « si je suis Vil alors la Lune est habitée »
• A Franc → « je suis Vil » est fausse → B est Vil (pour que A dise vrai).
• A Vil → « je suis Vil » est vraie → La phrase de A est vraie : impossible !!!
Donc on peut déjà conclure que *A est*

© Carol Simpson

**— L'Académie des menteurs ?
Vous devez avoir fait un faux numéro.**

Franc tandis que *B est Vil*.

Pour que B ne dise pas vrai, *la Lune n'est pas habitée*… Mais alors qui sont les Sélénites ?!

Les raisonnements peuvent être considérablement abrégés si l'on a pris soin d'établir un certains nombre de règles (ou théorèmes) générales. En voici quelques unes.

R_1 : Si A dit : « B est Franc » alors A et B sont de même race (Francs ou Vils).

R_2 : Si A dit : « B est Vil » alors A et B sont de races différentes.

R_3 : Si A dit : « Je suis Vil et X » (où X désigne une phrase) alors A est Vil, X est fausse.

R_4 : Si A dit : « Je suis Vil ou X » (où X désigne une phrase) alors A est Franc, X est vraie.

R_5 : Si A dit : « Je suis de même race que B » alors B est Franc (on ne sait rien de A).

R_6 : Si A dit : « Je suis de race différente de B » alors B est Vil (on ne sait rien de A).

R_7 : Si A dit : « Je suis Franc si et seulement si X » alors X est vraie (on ne sait rien de A).

R_8 : Si A dit : « Je suis Vil si et seulement si X » alors X est fausse (on ne sait rien de A).

Si nous reprenons l'exemple du début. Vous croisez A et B.

A vous déclare : « nous sommes deux Vils » que vous traduisez par « je suis Vil et X » avec

X = « B est Vil ». La règle 3 vous donne instantanément A est Vil et X fausse donc B Franc.

Voir l'encadré ci-après pour la démonstration de quelques règles. Mais je vous conseille d'essayer de les démontrer vous-même (au besoin en « consultant » cet encadré).

Variations

Dans toutes les énigmes envisagées jusqu'ici, il n'est question que de Francs et de Vils. Si un individu n'est pas Franc il est Vil et vice et versa.

On peut complexifier cette situation de différentes manières. Par exemple en introduisant des « Versatiles », individus qui mentent ou disent la vérité suivant le gré de leur humeur ou de leur intérêt. (C'est, du reste, ce que nous faisons, nous humains !)

La méthode générale de résolution que nous avons donnée s'applique. Mais il y a, alors, trois cas à envisager. Que pensez-vous d'un individu qui dit : « je suis Vil » ? ... Évidemment il ne peut, comme nous l'avons vu, être ni Franc ni Vil, c'est donc un Versatile. Si maintenant vous êtes en présence d'un Vil, d'un Franc et d'un Versatile (sans savoir « qui est quoi ») :

A dit : « Je ne suis pas Versatile », B dit : « C est Versatile » et C dit : « Oui en effet ! » .

Clairement A n'est pas le Vil, qui est donc B ou C :

• B Vil → C n'est pas le Versatile, (ni le Vil, qui est B) mais C ment... impossible !

• C Vil → B ne dit pas vrai, c'est donc le Versatile et A donc le Franc.

Finalement A est Franc, B Versatile et C est Vil.

Une autre idée, pour enrichir la situation et qui s'est avérée très féconde, est celle que j'ai développée dans l'album *Œdipeland*. Au départ il n'y a que des Francs et des Vils. Mais d'une part ils sont indiscernables tant du point de vue de leur race (Franc ou Vil) que de celui de leur sexe (garçon ou fille), d'autre part une fille a toujours la race de son père et un garçon celle de sa mère. Si un œdipien A, vous déclare : « Ma mère est Vile » la règle R_2 vous apprend qu'il est de race différente de sa mère. Ce ne peut donc être un garçon. C'est une fille et elle a, par conséquent, la race de son père. Vous concluez donc que A est une fille métisse.

Je termine en vous recommandant de bien ordonner votre démarche, pour affronter les énigmes. Faire nettement la distinction entre la ou les phrases prononcée(s), les hypothèses que vous faites et, enfin, les conclusions partielles ou définitives que vous en tirez. Bon courage donc, et « vive la Logique dans la joie et la bonne humeur » !

G. C.-Z.

Prouvons :

R_1 : A dit : « B est Franc »
• A Franc → B Franc (car A dit vrai)
• A Vil → B Vil (car A dit faux)

Donc A est bien de même race que B.

R_3 : A dit : « je suis Vil et X »
• A Franc → « je suis Vil » est fausse, et donc A ne dit pas vrai !!
• A Vil → « je suis Vil » est vraie et donc X doit être fausse

La première hypothèse est contradictoire. Donc A est Vil, X fausse.

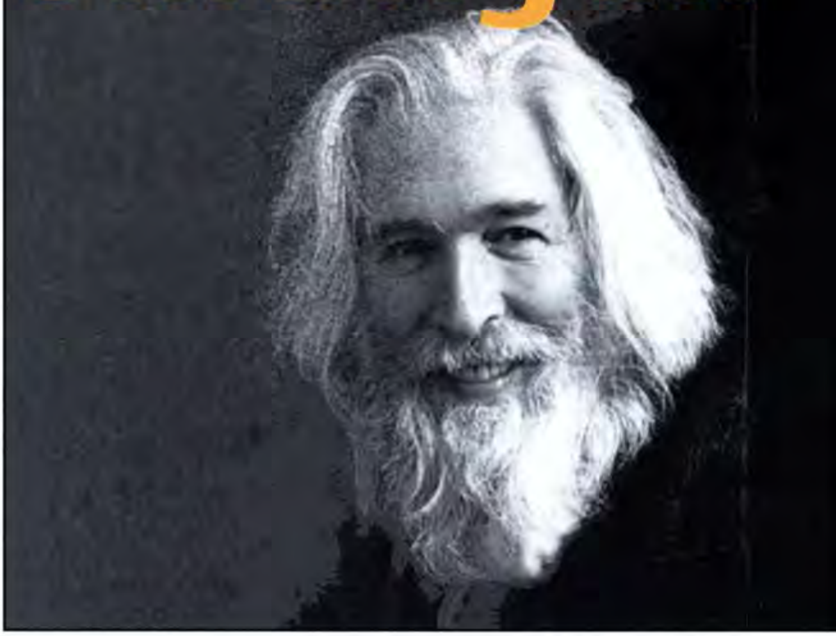
R_6 : A dit : « je suis de race différente de B »
• A Franc → B est vil → (car A dit vrai)
• A Vil → B est Vil (car A ment)

Donc dans tous les cas B est Vil.

R_7 : A dit « je suis Franc si et seulement si X » (Rappelons que « P équivalente à Q » est vraie quand P a même valeur de vérité que Q, est fausse sinon.)

- A Franc → « je suis Franc » a même valeur de vérité que X, qui est donc vraie
- A Vil → « je suis Franc » a une valeur de vérité différente de celle de X, qui est donc encore vraie, car cette fois « je suis Franc » est fausse.

Raymond Smullyan



On ne peut parler de logique ou de paradoxes et de casse-tête logique sans citer Raymond Smullyan, né en 1919, mathématicien et logicien, professeur de philosophie à l'université d'Indiana aux États-Unis.

Digne émule de Martin Gardner Il s'est également produit comme magicien professionnel et a régulièrement tenu des rubriques dans des revues telles dans *Scientific American* et *Pour la Science*.

Écrivain et humoriste, musicien, il est dans la droite ligne de la pensée de Lewis Carroll à qui il a dédié un de ses livres *Alice in Puzzle-Land* paru chez Dover en 1982 et sous-titré « Un conte carrollien pour les enfants de moins de quatre-vingts ans. »

Quel est le titre de ce livre ? (Dunod, 1981) est un recueil de 253 énigmes basées essentiellement sur la logique, sans doute le plus original et divertissant jamais publiés, emmenant le lecteur au cœur des travaux de Gödel.

« Un homme regarde un portrait et dit à ses voisins : « *Je n'ai ni frère ni sœur mais le père de cet homme est le fils de mon père* » De qui regarde - t-il le portrait ?

Le chapitre *Alice dans la forêt de l'oubli* est bien entendu un hommage à Lewis Carroll.

« Dans la forêt, Alice a deux compagnons : un lion qui ne ment que les lundis, mardis et mercredis et une licorne qui ne ment que les jeudis, vendredis et samedis. Un jour le lion dit à Alice : « *hier, c'était un de mes jours de mensonges* ». La licorne dit alors : « *Moi aussi, hier c'était un de mes jours de mensonges* ». Alice qui est intelligente sait de quel jour de la semaine il s'agit ! »

De l'indécidabilité à l'autoréférence Raymond Smullyan semble, dans ce livre, faire un sort aux problèmes des menteurs qui disent parfois la vérité ou des coffrets qui peuvent ne pas contenir ce qui est indiqué sur leur étiquette

Smullyan était pourtant loin d'avoir épuisé le sujet et *Le livre qui rend fou* (Dunod, 1984) nous conduira effectivement dans cette douce folie, un brin masochiste de résolution d'énigmes apparemment simple qui nous enferment dans le piège de raisonnements en boucle ou inextricables. La « machine à fabriquer des nombres » de Smullyan est exemplaire).

Avec *Ça y est je suis fou* (Dunod, 1993) Smullyan récidive – il y a encore à dire et à trouver sur les faux vrais diseurs de vérités possibles et il nous emmène, de plus, vers des méta-jeux et des généralisations mettant en jeu l'infini, Cantor et Gödel. C'est l'aboutissement d'une tentative de l'auteur pour nous contaminer de son mal diabolique. Le titre en anglais est d'ailleurs *Satan, Cantor and Infinity*.

Mais, loin de se limiter à la logique, chacun de ses livres contient de délicieuses anecdotes, des rappels d'énigmes bien connues ou particulièrement mises en scène.

Ainsi *Sherlock Holmes en échecs* (Flammarion 1983, réédité en 2000) présente des problèmes d'échecs de toute nature sous forme d'une enquête policière destinée à retrouver un fabuleux trésor.

De même *Les énigmes de Shéhérazade* (Flammarion1998) nous entraîne aux suites des mille et une nuits des contes du même nom. La deuxième partie du livre est consacrée à la logique moderne et entre autre à la logique coercitive

« Vous devez répondre à une question par oui ou par nous. Quelle est la question qui bon gré mal gré vous oblige à dire la vérité ? Quelle est la question qui vous oblige à mentir ?»

Par sa verve et son sens pédagogique Smullyan a poussé à l'extrême, le délice que nous éprouvons à nous instruire sans nous en rendre compte. Du grand art.

A. Z.

Au delà des jeux :
les paradoxes

Les paradoxes sont certes des amusements pour mathématiciens dilettantes, mais pas seulement. Depuis l'antiquité, ils nous amènent à réfléchir sur des notions familières, d'apparence simple, ou servent à démasquer l'absurde. En somme, les paradoxes font avancer la science.

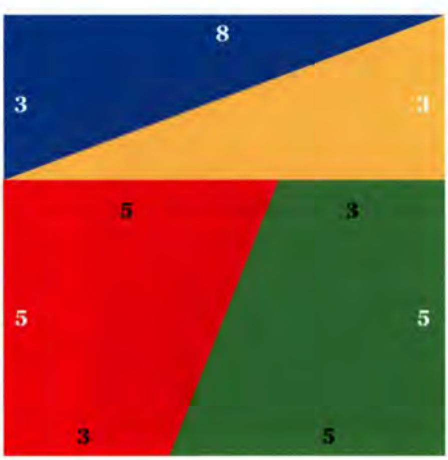
Le chemin du paradoxe est le chemin du vrai.
Oscar Wilde

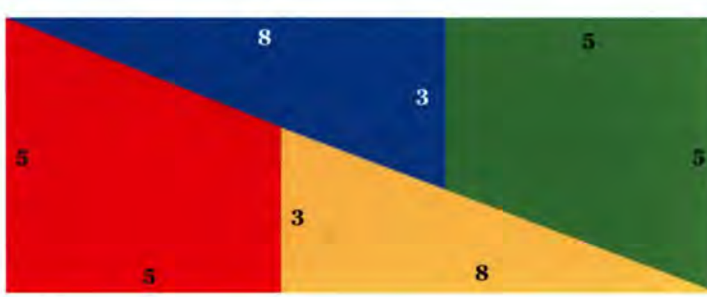
Dans le langage courant, on parle de paradoxe quand la conclusion d'un raisonnement semble aberrante. Parfois, le raisonnement est exact et simplement étonnant (voir l'encadré *Logique paradoxale*) mais dans d'autres cas, il peut être subtilement faux.

Lewis Carroll et les paradoxes pour s'amuser

Un certain nombre de paradoxes ont été créés dans le seul but d'étonner et d'amuser.

Lewis Carroll – un expert en la matière – montre que 64 = 65 en découpant un carré de côté 8 comme ci-dessous.
Il reconstitue ensuite ce carré en un rectangle de longueur 13 et de largeur 5 soit d'aire 65 (voir ci-contre).
On en déduit que 64 = 65. Bien entendu, il y a une erreur quelque part.
Le but du jeu est de la trouver.
Ici, elle se situe au niveau visuel : le carré proposé ne se reconstitue pas en ce rectangle.
Il manque un petit triangle dont l'aire est égale à une unité. On peut trouver un bon nombre de paradoxes de ce type.





Les paradoxes comme arguments

Plus sérieusement, les paradoxes ont servi à démontrer l'absurdité de certaines thèses. Parmi les plus anciens figurent ceux de Zénon d'Elée. Ce philosophe voulait montrer que le temps ne peut être divisé à l'infini. Pour cela, il suppose que c'est possible et en déduit l'impossibilité du mouvement.
Voici son raisonnement :
Achille voit une tortue devant lui. Il se met à courir pour la rattraper mais malgré sa grande vélocité, il n'y arrive pas !
Voici pourquoi : lorsqu'il atteint la place qu'occupait la tortue, cette dernière a avancé ; il doit donc maintenant atteindre la place qu'elle occupe alors, et ainsi de suite... : *Achille ne rattrapera jamais la tortue*.
Les mathématiciens de nos jours voient dans ce paradoxe un problème de calcul : la somme d'un nombre infini de termes peut être finie comme par exemple :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1.$$

En fait, Zénon s'intéresse à l'essence même du temps : l'instant n'existe pas, il n'existe que des intervalles de temps très courts.

La crise des fondements

On retrouve cette attitude à l'ère moderne avec la crise des fondements. Pour des questions assez calculatoires liées à la physique mathématique (séries de Fourier), Georg Cantor (1845-1918) crée la théorie des ensembles. Par ensemble, il considère toute collection d'objets que l'on peut considérer comme étant un « ensemble ».
Cette « définition » soulève assez vite des problèmes et des paradoxes appa-

Les axiomes de Peano

Dans l'axiomatique de Peano, les entiers naturels sont définis par un ensemble $\mathbb{N}$ contenant au moins un élément noté 0 dans lequel existe une application notée *succ* (*succ* pour successeur) vérifiant :

1. ***succ* est injective,**
2. **pour tout a, $succ(a)$ est différent de 0,**
3. **si E est une partie de $\mathbb{N}$ telle que 0 appartient à E et $succ(E)$ est inclus dans à E, alors $E = \mathbb{N}$.**

L'addition de deux entiers se définit alors par itération de l'application *succ* :

$$n + 0 = n \text{ et } n + succ(m) = succ(n + m).$$

Cette définition est légitimée par l'axiome de récurrence (3).

De même, on définit la multiplication en itérant l'addition :

$$n \times 0 = 0 \text{ et } n \times succ(m) = n \times m + n.$$

On peut alors démontrer toutes les propriétés élémentaires de ces deux opérations à partir des trois axiomes ci-dessus. On peut faire de même pour la notion de division euclidienne puis celle de nombre premier, etc.

Une assertion vraie improuvable

Pour donner un exemple un peu naturel d'une assertion vraie mais improuvable avec les seuls axiomes de Peano, nous avons besoin de quelques définitions.
Soit k un entier et E une partie finie de $\mathbb{N}$ ayant plus de k éléments, nous considérons E_k, l'ensemble des parties à k éléments de E. Soit r un entier, nous nous intéressons aux coloriages à r couleurs de E_k, c'est-à-dire aux applications f de E_k dans $\{1, 2,\ldots, r\}$. Si P est une partie à k éléments de E, f (P) est appelée sa couleur. Enfin, une sous partie F de E est dite *monochrome* (pour un coloriage f) si toutes les parties à k éléments de F ont même couleur. Ces définitions faites, nous pouvons formuler l'assertion en question :

Pour tout couple (k, r) d'entiers, il existe un entier n tel que : pour tout coloriage à r couleurs de l'ensemble des parties à k éléments de $\{k + 1, \ldots , n\}$, il existe une partie monochrome de $\{k + 1, \ldots, n\}$ dont le plus petit élément est strictement inférieur au nombre d'éléments.

Cette assertion peut être prouvée en utilisant un axiome supplémentaire appelé l'axiome du choix, elle ne peut l'être avec les seuls axiomes de Peano. L'axiome du choix étant communément admis en mathématiques, cette assertion est considérée comme vraie mais improuvable dans l'arithmétique de Peano.

H. L.

raissent. Le plus célèbre est dû à Russell en 1903 :

> Si A est l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes, A est-il contenu dans A ?

Russell lui-même a vulgarisé son idée en énonçant le paradoxe suivant :

> Sur l'enseigne du seul barbier d'un petit village, on peut lire : *Je rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes.*

Il pose alors la question : qui rase le barbier ?

S'il se rase lui-même, il ne respecte pas son enseigne puisqu'il raserait quelqu'un qui se rase lui-même. S'il ne se rase pas lui-même, alors son enseigne ment puisqu'il ne raserait pas tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-mêmes.

Les paradoxes et l'autoréférence

Dans les deux cas comme dans celui de la théorie des ensembles de Cantor, le problème est celui de l'autoréférence. Plus précisément, on ne peut définir quelque chose à partir d'elle même. Cette idée d'autoréférence permet de créer toute sorte de paradoxes, en voici un parmi les plus connus :

Considérons le nombre suivant : *le plus petit nombre entier ne pouvant être exprimé en moins de quinze mots.*
Comptez, cela fait quatorze mots. La définition même de ce nombre nie son existence ! Elle ne comporte pourtant aucune ambiguïté. Le problème vient uniquement de l'autoréférence : si l'on dresse une liste de toutes les définitions des nombres et qu'on l'ordonne par le nombre de mots utilisés, on ne peut plus ensuite intervenir dans cette liste. C'est un raisonnement de ce type que Gödel a utilisé pour montrer son théorème d'incomplétude : *En arithmétique, il existe*

Logique paradoxale

Fumeurs dans un intérieur, (détail), des frères **Le Nain**, 1643, Musée du Louvre, Paris

Pour éviter les fumeurs au restaurant : *envahissez la zone fumeur !* Aucun paradoxe mathématique ici, juste une application parfaite de la logique. En effet, s'il est interdit de fumer dans la zone non-fumeur, il n'est pas obligatoire de fumer dans la zone fumeur. S'ils ne veulent plus sentir la moindre odeur de cigarette au restaurant, les non fumeurs ont donc intérêt à demander à être placé en zone fumeur. Il ne restera ainsi plus que les places non-fumeurs pour les fumeurs !

des assertions vraies improuvables avec les axiomes de Peano.

En encadré, nous donnons un exemple d'assertion vraie improuvable sans l'*axiome du choix* (Pour toute collection d'ensembles non vides et disjoints, en nombre fini ou non, il existe un algorithme (dit *fonction de choix*) permettant d'extraire un élément et un seul dans chaque ensemble afin de constituer un nouvel ensemble non vide.

Le raisonnement va cependant plus loin, même en ajoutant l'axiome du choix au système d'axiomes de Peano (voir l'encadré : *Les axiomes de Peano*), il reste des assertions vraies improuvables.

Le paradoxe de Richard

La démonstration de son théorème par Gödel est une amélioration du raisonnement fallacieux suivant dû à un logicien français du nom de Richard :

Les assertions sur les entiers peuvent être ordonnées suivant l'ordre lexicographique.

Soit A_n l'assertion portant le numéro *n*.

Appelons *richardiens* les nombres *n* ne vérifiant pas A_n.

Être richardien est une assertion qui porte un numéro, soit *n*.

Ce nombre est-il richardien ?

H. L.

 par Alain Zalmanski

Ceci n'est pas un titre

L'autoréférence devrait être promue au rang de figure de style, au même titre que la prétérition qui est presque son antonyme : l'autoréférence annonce la couleur, elle se décrit elle-même. La prétérition annonce au contraire ce qu'elle ne va pas faire et ce faisant elle le fait.

Il va donc sans dire que l'autoréférence, comme son nom l'indique, est un dispositif qui boucle sur lui-même. De nombreux paradoxes et structures en abyme lui sont donc redevables. Exemple classique : « Cette phrase comporte cinq mots »

C'est un énoncé qui parle de lui-même et qu'il n'est point besoin de qualifier d'autoréférent (bonjour la prétérition !). Mais attention, l'énoncé « Cette phrase ne comporte pas cinq mots » est aussi autoréférent, ce qui va commencer à jeter le trouble chez le lecteur.

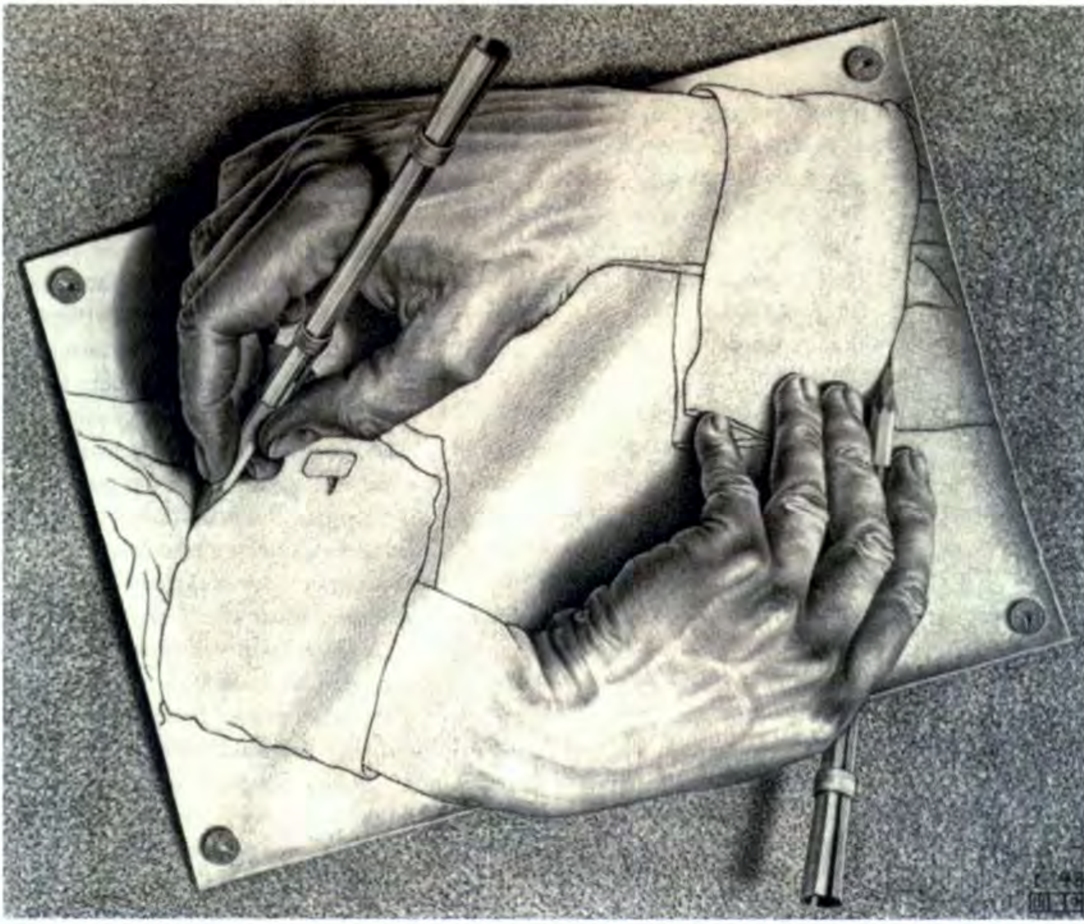
Autre exemple de la vie courante, qu'on trouve dans de nombreuses salles de spectacle ou de conférence : le Larsen ! Une boucle sonore s'établit entre le micro, l'ampli et l'enceinte. Boucle sonore bien vite suivie d'une autre, puis d'une autre qui en engendre une autre. Autoréférence, phénomène heuristique, structure en abyme comme les affichettes *Dubonnet*, *Ripolin*, *Vache qui rit* ou *Banania*.

Le verbe inexister... *inexiste.* *D. Nordon.*

Nous baignons dans l'autoréférence. Il suffit d'ouvrir un traitement de texte et de dérouler le menu ad hoc pour constater que le mot « souligné » est souligné, que le mot « italique » est en italique, que le mot « gras » est en gras, et le mot « CAPITALE » en majuscules. Sans évoquer un autre menu, celui des polices typographiques, où « Arial » est en Arial et « Georgia » en Georgia…

En fait, nous aimons bien l'autoréférence. Quand nous nous rendons compte de sa présence, dans un discours ou dans un petit fait quotidien, notre esprit flotte un instant et nous sourions. Elle nous fait réfléchir – et le mot « réfléchir » lui-même nous renvoie à un autre dispositif, tout aussi troublant, celui du miroir, autoréférent lui aussi d'une certaine manière.

Que se passe-t-il, en effet, quand on met face à face deux miroirs plans, dans une forêt sibérienne perdue, à mille miles de toute présence humaine, juste à côté de cet arbre mythique, connu de tous les sophistes, qui s'effondre sans que l'on sache s'il fait du bruit ou non.



Mains dessinant de M. C. Escher.

Épiménide

C'est avec Épiménide que commence véritablement le vertige de l'autoréférence. Quand ce dernier affirme que « tous les Crétois sont menteurs » et que l'on s'avise que c'est justement un Crétois qui parle ! Si on vous demande un jour, à brûle-pourpoint : « Pouvez-vous dire « mieux » ou « plus ? », vous pourrez répondre « mieux » ou « plus ».

Donc l'autoréférence nous amuse quand elle nous prend au dépourvu. Ou plutôt quand elle nous oblige à réfléchir d'une façon non habituelle : c'est le début de ce que l'on appelle la pensée latérale.

« Il y a trois types de mathématiciens : ceux qui savent compter et ceux qui ne savent pas » nous amène normalement à réfléchir et à compter !

De même l'énoncé : « Dans cette phrase il y a huit mots » fonctionne parce que nous avons un cadre de référence – la langue française, ses règles de grammaire, son sujet, son verbe, son complément et les façons par lesquelles ces éléments interagissent, mais aussi les règles de l'arithmétique et de l'énumération.

On notera que l'autoréférence fonctionne d'autant mieux qu'elle est peut-être appréciée sans distinction de langue (certains tableaux de Magritte ou d'Escher, certains dessins animés de Tex Avery), ou qu'elle est suffisamment complexe pour obliger à une

BIBLIOGRAPHIE
L. Carroll, *Logique Sans Peine*, Hermann, 1966.
D. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach*, Interéditions, 1985.
D. Hofstadter, *Mathémagie*, Interéditions, 1988.
M. Gardner, *Paradoxe du Pendu et Autres Divertissements*, Dunod, 1971.
G. Salachas, *Lettres d'Humour*, Akimbo, 1999.
R. Smullyan, *Quel est le Titre de ce Livre ?*, Dunod, 1981.

INTERNAUGRAPHIE : Un grand merci à **Eric Angelini** qui m'a autorisé à extraire et à aménager les éléments et de très nombreux exemples d'une communication privée et de son site à l'URL autoréférente. Vous serez sidérés de la richesse des exemples qu'il a élaborés et qui défient logique et imagination.
http://www.cetteadressecomporte cinquantesignes.com/Autoreference.htm
Gilles Esposito-Farèse
http://www2.iap.fr/users/esposito/oulipo5.html#150798
http://www.fatrazie.com/festival.htm

gymnastique de l'esprit pour comprendre la difficulté du mécanisme
Quelques autodescriptions demandent plus de réflexion :

1 chiffre (cet énoncé ne comporte qu'un chiffre, le « 1 »)
Deux mots (cet énoncé fait bien deux mots)
Trois syllabes (cet énoncé, etc.)
Cinq voyelles
Huit consonnes
Dix lettres
Quatorze voyelles, dix-huit consonnes.

« Cette phrase a cinq mots » ou « cette phrase n'a pas cinq mots mais neuf » est certainement une expression autoréférente mais peu excitante.
En revanche une certaine fébrilité doit commencer à réveiller tout lecteur, éclairé ou non en découvrant :

« **Cinq c, cinq i, cinq n, cinq q** »

et une admiration sans borne doit s'emparer de l'amateur lisant ce stupéfiant énoncé d'un astrophysicien français, Gilles Esposito-Farèse :

« Cette phrase autodescriptive contient exactement dix a, un b, huit c, dix d, trente-trois e, un f, cinq g, six h, vingt-sept i, un j, un k, deux l, deux m, vingt-cinq n, dix o, huit p, six q, treize r, quinze s, trente-deux t, vingt-deux u, six v, un w, quatorze x, un y, quatre z, six traits d'union, une apostrophe, trente virgules, soixante-huit espaces, et un point. »

Chaque élément nouveau de la description agit sur l'ensemble et exige un réajustement. La prouesse est évidente tout comme celle de Pascal Kaeser, mathématicien genevois :

« Le nombre de lettres de cette phrase est strictement compris entre quatre-vingt-sept et quatre-vingt-neuf. »

Il faut donc, pour qu'il y ait autoréférence, une référence – ce qui paraît logique – avec des lois implicites, plus une application en boucle de ces lois sur l'objet même de l'énoncé.

Univers autoréférents

Mais quels sont donc les univers les plus favorables à l'autoréférence ?

— Ce sont d'abord ceux qui mettent en œuvre la représentation, bien sûr : peinture, photographie, arts plastiques en général, littérature – et psychanalyse, pour ce qui est de la représentation de soi.

Pour fixer les idées, la gravure d'Escher « *Mains dessinant* » où l'on voit deux mains se dessinant l'une l'autre. On est dans la représentation se représentant.

— Ce sont ensuite les univers qui touchent à la communication - et, premier d'entre eux, celui de la langue - française, en ce qui concerne ce texte.

Deux exemples de livres aux titres autoréférents :
« *Quel est le titre de ce livre ?* » du logicien américain Smullyan.
« *Pourquoi je n'ai écrit aucun de mes livres ?* » de Marcel Bénabou.

La notion de paradoxe nous permet d'évoquer une des limites à l'autoréférence. Le paradoxe, en effet, ne boucle pas complètement sur lui-même. Il ne revient que sur une partie des prémices.

Voici deux exemples d'aphorismes paradoxaux qui manquent de peu le statut autoréférent, bien qu'ils tentent, d'une certaine manière, de boucler la boucle :

« Je résiste à tout, sauf à la tentation », Oscar Wilde.
« L'éternité c'est long, surtout vers la fin », Robert Beauvais.

On mesurera ce qui sépare ces citations d'une autoréférence plus affirmée en méditant ce qu'on appelle désormais la « Loi d'Hofstadter » :

— « Les choses prennent toujours plus de temps que prévu, même en tenant compte de la loi d'Hofstadter.»

Douglas Hofstadter est l'auteur qui a fait accéder sérieusement aux délires logiques de l'autoréférence en publiant en 1981 ce livre merveilleux qu'est « *Gödel, Escher, Bach* » et qui fait comprendre que l'autoréférence est la marque de l'humain.

Les paradoxes

Les paradoxes sont souvent des énoncés qui introduisent une part d'autoréférence et par là même tentent vainement de travailler en boucle.
Citons les paradoxes :
• du barbier qui rase toutes les personnes de la ville qui ne se rasent pas elles-mêmes (solution : c'est une femme) ;
• du condamné à mort qui sera exécuté un des jours de la semaine qui vient, mais sans s'y attendre (paradoxe du pendu),
• de l'erratum, glissé entre les pages 26 et 27, qui porte la phrase : « Lire, sur le feuillet glissé entre les pages 26 et 27, *Errata* au lieu d'*Erratum* »
• du cheval à un franc qui est rare parce que bon marché et donc cher puisque tout ce qui est rare est cher.
Tous ces paradoxes sont cependant moins impressionnants que les singularités autoréférentes, dont nous citons quelques joyaux, entre autres tirés du livre « *Ma Thémagie* » de Douglas Hofstadter.
Le conférencier : – « Avant de commencer à parler, je voudrais dire ceci »
« Cette phrase pas de verbe »
« Je suis la littérale traduction d'une anglaise phrase »
« Toutes les généralisations sont abusives »
« Je déteste, abhorre, abomine et maudis les synonymes »
« Je ne suis pas superstitieux, ça porte malheur ».
Et puis il y a les mots autoréférents classiques : - *polysyllabique, écrit, hiatus, court, français, mot*. Par contre *chiffre, monosyllabe, long, anglais, hiéroglyphe, intraduisible* ne le sont pas.
La relation chiffres/lettres peut également fournir matière à autoréférence : Ainsi donnez à « *a* » la valeur 1, à « *b* » la valeur 2, à « *c* » la valeur 3, etc... jusque « *z* » valant 26. Quel est le nombre qui pèse ainsi son propre poids ? C'est le nombre deux cent vingt-deux, écrit en toutes lettres, qui vaut, avec cette règle, 222 ! Est-il le seul ?
Nicolas Graner, ingénieur en informatique et professeur à l'université de Paris-Sud, a exploré d'autres systèmes graphiques dont le *morse*, et produit les auto-références suivantes (où les • sont les points et les - les traits) :

– – • – / • • – / • – / • – • / • – / – • / – / •
• – – •/– – –/••/– •/–/••••/– ••• –/••/– •/–
– •/– – •/•/•• –/•• – • –/• – •/• –/••/–/•••

Cela se lit : *quarante points et vingt-neuf traits* qui, comme on le vérifiera ci-dessus, s'écrit bien à l'aide de 40 points et 29 traits.
Voici quelques énoncés minimaux qui se décrivent complètement : « Cinq *c*, cinq *i*, cinq *n*, cinq *q* » ou en italien : « sette *e*, tre *r*, tre *s*, sette *t* ».
Et voici enfin, d'Éric Angélini :
« Dans cette phrase le mot *dans* apparaît deux fois, le mot *cette* apparaît deux fois, le mot *phrase* apparaît deux fois, le mot *le* apparaît treize fois, le mot *mot* apparaît treize fois, le mot *apparaît* apparaît treize fois, le mot *fois* apparaît treize fois, le mot *treize* apparaît cinq fois, le mot *cinq* apparaît deux fois, le mot *deux* apparaît sept fois, le mot *sept* apparaît deux fois et le mot *et* apparaît deux fois. »
Stressant, n'est-ce pas ?

Conclusion

En tout état de cause, une chose semble sûre à présent : l'autoréférence ultime,

tournant sur elle-même en une sorte de tautologie infinie, n'existe pas.
Vous connaissez sûrement ce bristol sur lequel on lit : « Retournez ce carton et vous découvrirez le secret du mouvement perpétuel » Quand on retourne ledit carton on lit évidemment : « Retournez ce bristol et vous découvrirez le secret du mouvement perpétuel ».

Alors je ne vous dirai pas que vous avez lu un texte sur l'autoréférence. S'agirait-il de prétérition ou d'autoréférence ?
Quelle est la dernière question qui a été posée dans ce texte ?

A. Z.

Problèmes d'autoréférence

1• *Quel est l'intrus dans l'énumération suivante* : français, court, polysyllabique, écrit, visible, imprimé, masculin, mot, singulier, américain, intrus ? (**Perec**, *La Vie mode d'emploi*.)

2• « L'autoréférence est à la limite des mathématiques, des lettres et de la philosophie », *écrivez tout cela en huit lettres*.

3• Cette phrase de Pascal Kaeser est autoréférente : « Les diviseurs du nombre de lettres de cette phrase sont : un, deux, trois, six, dix-sept, trente-quatre, cinquante et un et cent deux. » *Trouvez sans compter le nombre de lettres qu'elle contient.*

Ceci n'est pas une pipe **de René Magritte.**

4• **Assemblage délicat**
Essayez d'assembler en un seul mot les lettres qui composent « moulus net ».

5• **Le prisonnier**
Un prisonnier doit énoncer une phrase devant un jury – si cet énoncé est vrai il sera pendu, s'il est faux il sera fusillé.
Que doit-il répondre pour sauver sa vie ?

6• Cadre autoréférent (*Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques*)

> Dans ce cadre, il y a exactement une phrase vraie.
> Dans ce cadre, il y a exactement une phrase fausse.
> Dans ce cadre, il y a exactement deux phrases vraies.
> Dans ce cadre, il y a exactement deux phrases fausses.

Qu'en pensez-vous ? Combien de phrases du cadres sont-elles vraies ?

7• Devinettes autoréférentes

Pãrler
maille elliam maille elliam
N RMAND
OOOOOO
VI AN DE
SA NTE (de Constantinople)
aLExandre
GEAAUZ
Inpresion
AAEEFFIR
CONTRE SION

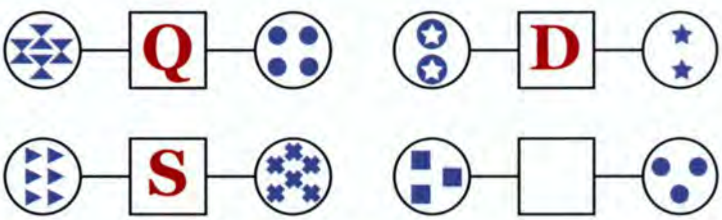
Solutions des problèmes

1• Ce n'est pas « américain », car il y aurait alors deux mots ne se décrivant pas eux-mêmes : « américain » et « intrus ». La réponse est donc « intrus » : l'intrus est le mot « intrus ».
2• « Tout cela » comporte exactement huit lettres.
3• La phrase de Pascal Kaiser contient 102 lettres.
4• « Un seul mot » s'écrit avec toutes les lettres de «moulus net» et seulement celles-là !
5• Le prisonnier doit répondre : « Je serai fusillé ». Il ne peut alors ni être fusillé (il aurait dit la vérité) ni être pendu (il aurait menti).
6• Il y a 3 solutions :
Aucune phrase vraie (et quatre fausses)
Une phrase vraie : la 1ere (et trois fausses)
Deux phrases vraies : les deux dernières (et deux fausses).
7• Parler avec l'accent espagnol
Le point de riz (une maille à l'endroit, une maille à l'envers, ...)
Le trou normand
Six orangers
Viande hachée
Sainte Sophie
Alexandre le Grand
De l'eau dans le gaz
Fautes d'impression
Affaire classée
Contravention.

Problèmes de logique

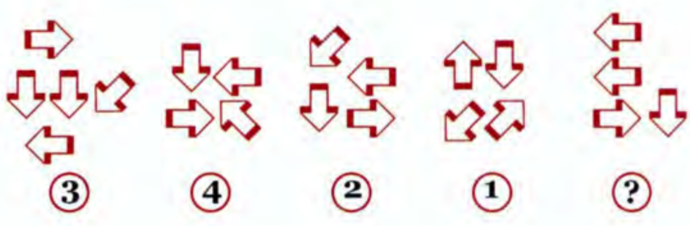
1. Lettre

Quelle lettre faut-il placer logiquement dans le dernier carré ?



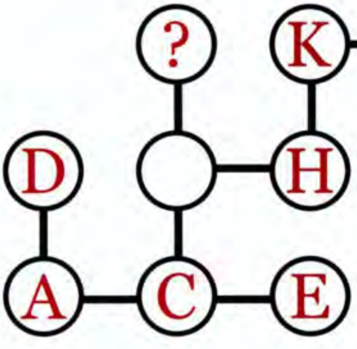
2. Chiffre

Quel chiffre faut-il placer logiquement sous le dernier groupe de flèches ?



3. Lettre

Quelle lettre faut-il placer logiquement à la place du point d'interrogation ?

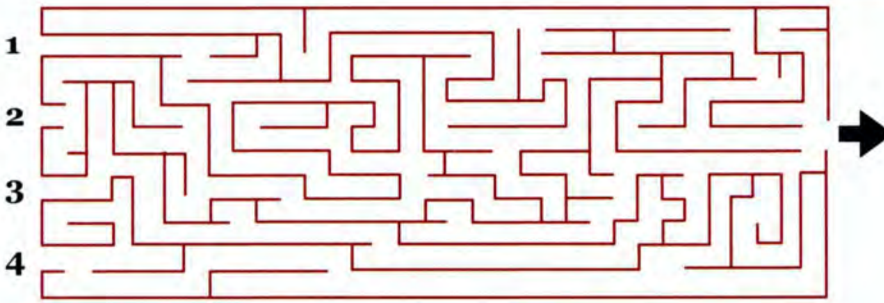


4. Le vrai et le faux

Certains de ces personnages disent la vérité et d'autres mentent (soit tout vrai ou tout faux). **Notez « vérité » ou « ment » sous chacun pour que ces affirmations soient compatibles.**

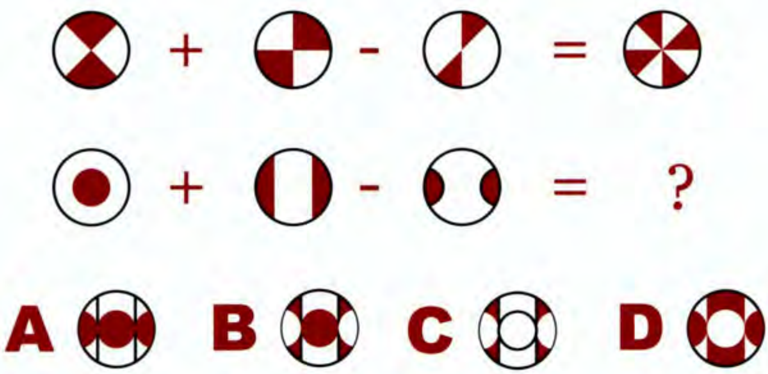
5. Labyrinthe

Quelle entrée faut-il prendre pour sortir du labyrinthe ?



6. Opérations logiques

En suivant la même logique, **trouvez le résultat de la deuxième égalité.**



7. Qui est qui ?

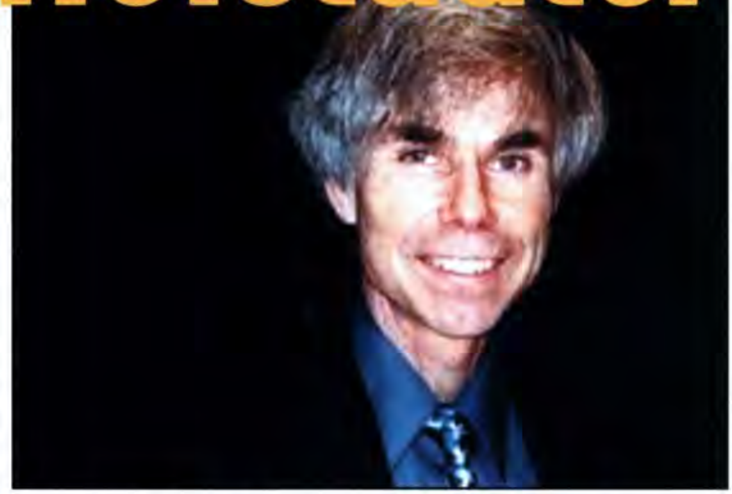
Quatre copains jouaient au bridge, assis comme il se doit, autour d'une table carrée. Simon et l'agriculteur, assis face à face, jouaient contre Mr Anglade et le Vétérinaire. Mr Union, lui, ne cessait de se chamailler avec Thierry, son voisin de droite, car il l'accusait de tricher avec la complicité de sa femme. Remarques qui incitaient le comptable (assis en face de Thierry) à se féliciter, comme d'habitude, d'être resté célibataire.
Pendant ce temps, justement, les femmes de Laurent et du pharmacien hurlaient de rire à la débilité du feuilleton à la télé, tandis que Madame Ecusson cherchait désespérément un cendrier.
Finalement c'est Charles et Laurent qui ont gagné, et Mr Inter et Mr Ecusson qui ont perdu.
Trouvez les nom, prénom et profession de chacun.

Solutions

1• T (comme Trois).
2• 1 (le nombre de flèches qui se dirigent sur une autre).
3• 1 (en allant vers la droite, on progresse de deux lettres ; en allant vers le haut, on progresse de trois lettres).
4• Les déclarations de 3 et 5 sont incompatibles : au moins l'un des deux ment. Si 5 dit vrai, 3 devrait mentir. Mais il dit la vérité, donc 5 ment, 3 aussi, et, de ce fait, 2 également, mais 1 et 4 disent
5• Entrée 1.
6• B (il faut superposer les deux premières formes et en retrancher la troisième).
la vérité).
7• Simon Inter, comptable, Thierry Ecusson, agriculteur, Laurent Union, vétérinaire, et Charles Anglade, pharmacien (on compare les équipes telles qu'elles sont présentées, puis, à la fin, où l'on présente les vainqueurs. On voit ainsi que l'agriculteur n'est ni Charles, ni Laurent , e l'équipe adverse, ni Simon, son partenaire. C'est donc Thierry, etc.)

par Gaël Octavia

Douglas Hofstadter



Qui est Douglas Hofstadter ? Un fils de prix Nobel de physique, scientifique prédestiné et accompli. Un émouvant mélomane. Un auteur de gros livres étonnants. Un penseur qui s'interroge sur sa pensée. Bref, un homme complexe qui aime à sonder la complexité.

Douglas Hofstadter nait à New-York en 1945. Son père, Robert Hofstadter, est physicien et sera lauréat du prix Nobel en 1961. Pour un futur scientifique, on pouvait craindre pire ascendance. La famille Hofstadter se déplace aux États-Unis et en Europe au gré des nominations de l'éminent papa. Une partie de son enfance passée à Genève vaudra au jeune Douglas de parler parfaitement le français. L'heure venue, il étudie à l'Université de Stanford, où il se spécialise d'abord en mathématiques. L'étude de la théorie des nombres lui « apporte des plaisirs énormes pendant plusieurs années », selon ses propres mots, mais il se lasse de la « formidable abstraction des mathématiques » et se consacre dès la fin des années 1960 à la physique à l'Université d'Oregon, discipline qui le couronnera d'un doctorat après… huit ans d'efforts. C'est à la même époque qu'il entame la rédaction « d'un livre drôlement long » qui lui fera goûter au succès.

Gödel, Escher et Bach…

Gödel, Escher et Bach, les brins d'une guirlande éternelle : tel est le titre du pavé de 800 pages, écrit comme une fugue, condensé de beauté, de folie, d'humour et d'érudition. Cet ouvrage captivant est de ceux qui unifient sous nos yeux le génie humain en rapprochant ses expressions les moins conciliables à première vue. Hofstadter tente le pari de faire le lien entre les gravures d'Escher, la musique de Jean-Sébastien Bach et les travaux révolutionnaires du mathématicien Kurt Gödel. Plus généralement, il joue de l'universalité de la logique mathématique, il explore le langage et le reconstruit en structures empruntées à la musique ou aux arts plastiques, il use et abuse du concept d'auto-référence pour nous pousser à reconsidérer nos propres processus de pensée. Publié aux États-Unis en 1979, le livre obtient le prestigieux prix *Pulitzer* en 1980. Traduit dans le monde entier, il étonne, séduit et devient vite un best-seller.

Un homme complet

Le livre en dit long sur la personnalité de son auteur. Certes, c'est un scientifique : il enseigne l'informatique à l'Université d'Indiana à Bloomington, puis au MIT, et enfin à l'Université du Michigan où il décroche une chaire de sciences cognitives. C'est aussi un mélomane averti qui nous émeut lorsqu'il nous raconte sa redécouverte de l'étude opus 25 n° 2 de Chopin, dont il avait cru le rythme binaire et dont il comprit enfin la ternarité, en s'exclamant : « C'était comme tomber deux fois amoureux de la même personne ». Enfin c'est un érudit et un philosophe maniant aussi bien l'humour que la logique. Il n'est pas sans nous rappeler les Lewis Carroll et autres Martin Gardner. D'ailleurs, c'est à ce dernier qu'il succède en acceptant en 1981 la rédaction d'une rubrique du *Scientific American*. Gardner intitulait la sienne *Jeux mathématiques*. Avec Hofstadter il s'agira des *Thèmes métamagiques*. Malgré leurs styles différents, les deux rubriques auront le mérite de bâtir des ponts entre deux mondes : d'un côté les mathématiques et de l'autre la littérature ou l'art. Les deux années de rubrique sont regoupés dans un autre pavé : *Ma Thémagie*.

Les qualités révélées dans *Godël, Escher, Bach* s'épanouissent aussi bien dans ces chroniques que dans ses autres livres d'Hofstadter. Dans *Vues de l'esprit*, co-écrit avec Daniel Dennett, il s'interroge sur l'être et l'âme. Enfin dans *Le Ton beau de Marot* magnifique ouvrage en anglais, malgré son titre français, il nous parle informatique, amour et linguistique (il y explique d'ailleurs pourquoi il refuse qu'on traduise ce livre).

Émouvants et poétiques, ils n'en sont pas moins étroitement liés à la recherche informatique de leur auteur. En somme : complexes, à l'image de Douglas Hofstadter !

G. O.

Jeux de chiffres et de lettres

Le thé chez le Chapelier fou, illustration de John Tenniel pour *Alice au pays des merveilles* de Lewis Carroll.

Il existe des amateurs de jeux mathématiques et d'autres qui se cantonnent aux jeux de lettres, dont les mots croisés et le scrabble sont les plus universellement connus. Les rédacteurs de Tangente ont toujours pensé que des ressorts et des mécanismes de pensée identiques existent derrière ces deux grandes catégories de jeux de l'esprit. On peut jouer avec des palindromes littéraux ou des palindromes numériques, des anagrammes de lettres ou des anagrammes de chiffres. On peut crypter des phrases ou des nombres et le décryptage, dans l'un et l'autre cas, demande un travail d'analyse qui présente de nombreuses similitudes. Un nom associe les jeux de chiffres et les jeux de lettres : celui de Charles Lutwidge Dodgson, plus connu sous le nom de Lewis Carroll.

Jeux de chiffres, jeux de lettres, jeux de mots

Comment l'Ouvroir de littérature potentiel (l'OuLiPo), mouvement littéraire comme son nom l'indique, peut-il intervenir dans un dossier dans lequel le caractère ludique est plus généralement affecté aux mathématiques ?

Tout simplement parce que le 24 novembre 1960, François le Lionnais, mathématicien ami des lettres, et Raymond Queneau, écrivain amateur de mathématiques, ont décidé d'explorer le transfert de tous les outils mathématiques vers le langage, l'inverse pouvant d'ailleurs également faire l'objet de recherches.

L'OuLiPo

Créativité et humour président aux travaux de l'OuLiPo dont les instigateurs sont logiciens, mathématiciens, artistes et donc créateurs.

L'OuLiPo se proposait d'examiner en quoi et par quel moyen, étant donné une théorie scientifique concernant essentiellement le langage et donc l'anthropologie, on pouvait y introduire du plaisir esthétique, de l'affectivité et de la fantaisie. Les oulipiens sont en fait et selon leur expression « des rats qui ont à construire le labyrinthe dont ils se proposeront de sortir ».

En jouant sur la longueur, le nombre, l'ordre ou la nature des contraintes, Raymond Queneau a établi fin 1974, une classification des travaux de l'Oulipo (d'où l'appellation de *table de Queneleïeff*...), complété par la *Tollé* (Table des Opérations Linguistiques Littéraires Élémentaires) de Marcel Bénabou. Le but étant évidemment de produire des textes de longueur (et de sens) significatifs.

Parmi les membres de l'OuLiPO – certains sont excusés pour cause de décès – citons Harry Mathews, Jean Lescure, Paul Braffort, Claude Berge, Jacques Bens et Noël Arnaud (membres fondateurs), rejoints plus tard par des personnalités comme Jacques Roubaud, Georges Perec, Paul Fournel, Luc Etienne, Italo Calvino et Marcel Bénabou. Depuis 1983 Hervé Le Tellier, Olivier Salon, Ian Monk, Jacques Jouet, Michèle Grangaud, Anne F. Garréta, François Caradec et Valérie Beaudouin ont été parmi les cooptés et nombre d'entre eux participent aux fantaisies linguistiques débordantes et jubilatoires des « décraqués » et autres « Papous dans la tête. »

Créativité et humour président aux travaux de l'OuLiPo dont les instigateurs sont logiciens, mathématiciens, artistes et donc créateurs.

***Infinity circle* de Scott Kim. Palindrome visuel et circulaire.**

Voici quelques exemples constituant autant de pistes à poursuivre ou à développer, avec toujours présent à l'esprit qu'une contrainte, loin de nuire à la créativité, aide à son développement en obligeant, entre autres, à un balayage complet d'un champ donné.

Palindromes

Le *palindrome* est une phrase ou un mot qui se lit dans les deux sens.
On dit qu'au Tibet les lamas devenaient fous à force de chercher des phrases édifiantes se lisant dans les deux sens… et l'antiquité regorge de textes palindromiques ou *anacycliques* dans lesquels on peut travailler en rétrogradation sur les mots ou sur les lettres. Le matériau de base est fourni par des mots qui sont des *palindromes naturels* comme Ève, Noyon, Senones, Sées, Laval, sas, ressasser, tôt, têt, non, kayak, gag, 1991, 2002, 3993 ou des dates passées ou à venir comme 13/11/1131 ou surtout 20 02 2002, double palindrome exceptionnel.

Et la marine va, papa, venir à Malte. (L. Étienne).

Rose verte et rêves or. (L. Étienne).

Karine égarée rage en Irak. (Gérard Durand).

Ève rejette le mot omelette, je rêve. (Gérard Durand).

Six sous, ce pavot ne vaut pas ce souci : palindrome de syllabes (Gérard Durand).

Piéton hagard, gare à ton pied.

Jeanne en luge, Jules en nage et Une slave valse nue : palindromes phonétiques (L. Étienne).

À noter que si la lecture rétrograde est différente de la lecture initiale il s'agit d'un *boustrophédon* (ou *anacycle*) comme dans les couples Léon/Noël ou adoré/éroda.

Georges Perec a été le champion incontestable du genre, qui « traç(a)e l'inégal palindrome » géant de plus de 5000 lettres dont la virtuosité excuse l'hermétisme ! Il s'agit d'un record puisque de nombreux auteurs ne produisent que des suites de palindromes.

Trace l'inégal palindrome. Neige bagatelle, dira Hercule. Le brut repentir, cet écrit né Perec (...) ce repentir, cet écrit, ne perturbe le lucre : Haridelle, ta gabegie ne mord ni la plage ni l'écart.

Son grand palindrome est composé de 5566 lettres soit palindromiquement $11 \times 23 \times 2 \times 11$! - hors titre et signature.

La palindromie fournit des curiosités numériques du type

$1\,367\,631 = 111 \times 111 \times 111$
$= 1367631.$

$30492 + 29403 = 59895.$

$1099\ldots989 \times 9 = 9899\ldots9901$ (les . remplacent autant de 9 que l'on veut).

$122^2 = 14\,884$ et $221^2 = 48\,841.$

$666 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$
$+ 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3.$

Lipogrammes

Le *lipogramme*, quant à lui, vise à éliminer d'une œuvre une ou plusieurs lettres données et correspond à la soustraction. « *La disparition du grand Victor Hugo* » ou 24686428 sont respectivement des lipogrammes en *e* et en chiffres impairs.

Georges Perec a réintroduit le genre en rédigeant des poèmes, et même un livre entier, sans la lettre « *e* » (*La disparition*), que certains ont pu lire sans s'apercevoir de quelle disparition il s'agissait ! Beaucoup de contraintes littéraires de ce type peuvent se retrouver dans les récréations mathématiques : *tautogrammes*, *contrepèteries*, *anagrammes*, *hétérogrammes*.

On peut également comparer ces exercices à celui de suites périodiques qui, multipliées par un nombre ne font jamais apparaître l'un d'entre eux, ou dont la période et la composition sont fixées à l'avance :

Exemples de lipogrammes en 3 et 6

$142857 \times 2 = 285714$
$142857 \times 4 = 571428$
$142857 \times 5 = 714285$
$142857 \times 7 = 999999.$

Lipogrammes du type charades

$(6048 + 1729)^2 = 60481729$
$1^3 + 5^3 + 3^3 = 153.$

Palindromes :

$11111 \times 11111 = 123454321.$
1961 et 1691 présentent une double symétrie.
$122 \times 213 = 25986$ et
$68952 = 312 \times 221$
$44944 = 212^2.$

Monovocalisme

Le *monovocalisme*, à l'inverse du lipogramme consiste à n'utiliser qu'une voyelle donnée :

Le merle et le fennec **(de Gens des légendes)**

Mère Merle, en chêne perché,
Serre en bec le Selles
Père Fennec, les sens tentés,
Célèbre et encense : Respects, Mère Merle.
Très sélect et svelte, et belle !
Tes lèvres et tes pennes,
Engendre le rêve des bêtes
En ces mélèzes et en ces frênes"
Mère Merle se sent en fête ;
Et perd le sens, écervelée

Elle se penche et le chèvre descend.
Le Fennec le prend en ses dents, et égrène : « Révérences, Merle,
Je me délecte et dépends des benêts :
Cette lèche-fesse est le dessert certes. »
Le Merle, berné et blessé,
Peste en serments de regrets éternels.

Une transcription arithmétique : on peut faire le rapprochement avec les *rep-units* 11111…111 aux multiples propriétés.

Anagrammes

Un autre exercice consiste à prendre un mot ou une phrase et à en permuter les lettres pour obtenir un autre mot, une autre phrase. Le palindrome est une *anagramme* particulière.

Parmi les anagrammes célèbres citons le très poétique AIMER MARIE, Boris Vian dont le surnom était BISON RAVI, Marguerite de Crayencour qui prit comme pseudonyme Marguerite YOURCENAR. De même Voltaire (Le Jeune) dérivait de la transcription du XVIII^e de AROUET Le Jeune. (AROVETLI).

Un poème *anagrammatique* sera constitué de vers composés avec exactement les mêmes lettres placées dans un ordre différent. On peut imposer les lettres à l'avance.

C'est ainsi qu'à partir de PALINDROME on peut obtenir

Médor, lapin **Mode pralin**
Mine polar **Mol épinard**
La rime pond **D'amer pilon**
Répond l'ami **Pal endormi.**

Ou ce délicieux quatrain d'Élisabeth Chamontin intitulé « *La petite sirène* » :

Si pâle éternité
Il t'a prise en été
Épris il t'a entée
Et il te nie après

Les anagrammes de phrases ont également passionné les chercheurs avec par exemple :

Révolution française : Un Veto corse la finira.

Voici un exemple d'une possible transposition chiffrée :

$11664 = 108^2$
$16641 = 129^2 \quad 41616 = 204^2$
$722 - 272 = 962 - 692$, également palindrome symétrique.

Hétérogrammes

Les *hétérogrammes* sont des énoncés composés de lettres bien définies ne se répétant qu'après avoir toutes été utilisées. L'hétérogramme alphabétique parfait ou *hétéropangramme* serait une phrase de 26 lettres comprenant toutes les lettres de l'alphabet.

L'utilisation des seules lettres d'un groupe de mots dans un poème ressort à la fois de l'anagramme et du lipogramme. C'est le cas des *épithalames*, poèmes lyriques composés en l'honneur de jeunes mariés et qui ne comportent souvent que les lettres des prénoms (et parfois noms) de ces derniers. On a alors affaires à un « beau présent ».

Exemples de pangrammes :

Portez ce vieux whisky au juge blond qui fume.

The quick brown fox jumps over lazy dog.

Exemples d'hétérogrammes :

Se vouer à toi ô cruel
À toi couleuvre rose,
Rose au coeur violet
Va où surréel côtoie.

Ces exemples peuvent être rapprochés d'égalités du type:

$7744 = 4 \times 44 \times 44$
$7744 = (77 \times 77) - 77 + 44 \times 44) - 44$
$18 \times 297 = 5346$
$27 \times 1198 = 5346$
$12 \times 483 = 5796$
$42 \times 138 = 5796$

$$51249876 \times 3 = 153749628$$
$$1741725 = 1^7 + 7^7 + 4^7 + 1^7 + 7^7 + 2^7 + 5^7$$
$$(1 + 2 - 3 - 4)(5 - 6 - 7 - 8 - 9) = 100.$$

Autres méthodes

Une « boule de neige » est une phrase dont la longueur des mots augmente puis diminue régulièrement, permettant l'arrangement calligraphique en triangle, losange ou polygone. Ces exercices sont analogues à ceux relatifs aux nombres triangulaires, rhopaliques…

A	**1**
la	**1 1**
mer	**2 1**
nous	**1 2 1 1**
avons	**1 1 1 2 2 1**
trempé	**3 1 2 2 1 1**
crûment	**1 3 1 1 2 2 2 1**
quelques	
gentilles	
allemandes	
stupidement	
bouleversées. (J. Bens)	

Réaliser un « centon », c'est confectionner un poème par la juxtaposition successive de vers glanés dans le répertoire des poésies classiques française. C'est le principe de la réunion dans la théorie des ensembles ! Plus aisément, on peut dans le même esprit réunir deux moitiés d'alexandrins ou de proverbes pour bâtir un florilège personnalisé. Mais attention le terrain a été largement labouré et une bonne bibliographie s'impose avant de revendiquer la paternité de « *Qui vole un bœuf n'amasse pas mousse* » ou « *Écoute bûcheron, je t'aime davantage* ».

La *méthode* S + 7 : il s'agit d'une sorte de translation qui conduit à des textes quasi aléatoires. Mise au point par Jean Lescure, la création consiste à partir d'un texte donné, et de remplacer chaque substantif par le septième qui le suit dans un dictionnaire bien précisé. « *La cigale et la fourmi* » devient par cette méthode « *La fraction et la cimaise* ». De très nombreuses variantes sont possibles.

Le sommet de la combinatoire est sans conteste le « *Cent mille milliards de poèmes* » de Raymond Queneau, qui à partir d'un tirage aléatoire d'alexandrins successifs, pris dans 14 sonnets précis, engendre 10^{14} sonnets. On ne peut passer sous silence le travail d'un professeur suisse, Pascal Kaeser, qui a décrit de façon très complète toute une série de contraintes d'ordre typiquement mathématiques. Ainsi, il utilise les pavages, les pentaminos, les graphes, les carrés magiques, le calcul matriciel, les permutations, pour produire des textes dans la droite ligne des propositions de l'OuLiPo. Enfin on se reportera à des exemples d'utilisation de toutes ces contraintes – et de bien d'autres – dans la lecture de *Je suis le ténébreux* (101 avatars de Gérard de Nerval) de Camille Abaclar, paru aux éditions *Quintette* en 2002.

Conclusions oulipiennes :

> Des mots et des chiffres, déchiffrés les modes,
> Démodés les chiffres ? Défrichés les mots,
> Des chiffres et des maux de tête.

A. Z.

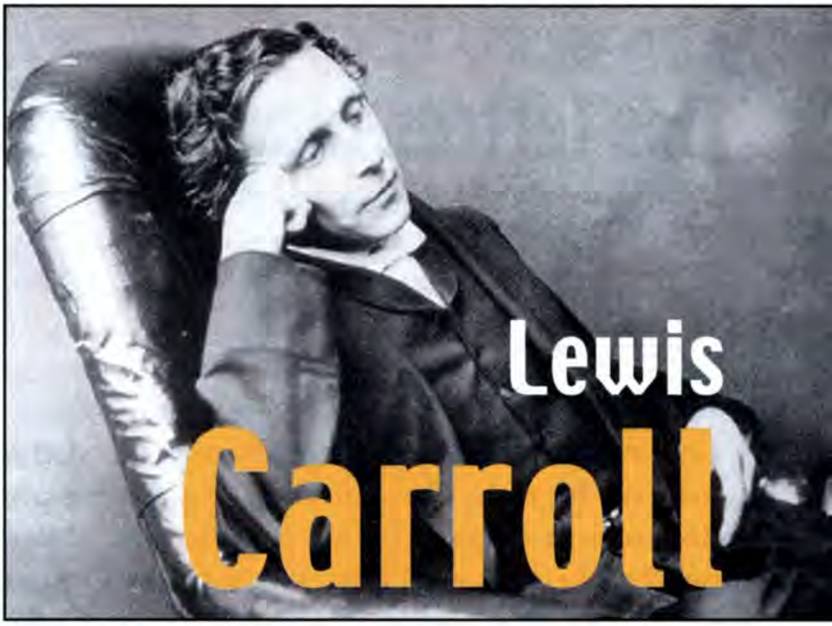
Bibliographie

Jacques Bens, *Guide des jeux d'esprit,* Albin Michel (1967).
Michel Laclos, *Jeux de lettres jeux d'esprit,* Simoen (1977)?
OULIPO, *La littérature potentielle,* Gallimard (1973).
OULIPO, *Atlas de littérature potentielle,* Gallimard (1981).
***La bibliothèque oulipienne,* Castor Astral.** (135 fascicules sortis. Les 85 premiers ont été rassemblés en 6 volumes).
Pascal Kaeser, *Nouveaux exercices de style,* Diderot, 1997).
Eric Angelini et Daniel Lehman, *Mots en forme,* Quintette (2001).
Oulipo, *Abrégé de littérature potentielle,* Mille et une nuits (2002).
Gérard Durand, *Palindromes en Folie,* Dossiers d'Aquitaine (2002)
***Formules/Revue des littératures à contraintes*,** Noesis Editeur.

Internaugraphie
www.chamontin.nom.fr/index.html
www2.iap.fr/users/esposito/oulindex.html
www.fatrazie.com/jeuxdemots.htm
www.graner.net/nicolas/OULIPO/

par Alain Zalmanski

Lewis Carroll



Charles Lutwidge Dodgson est essentiellement connu par son pseudonyme *Lewis Carroll* double traduction renversée de ses prénoms *Carolus Ludovicus*. Bien que professeur de mathématiques, à l'origine, c'est comme auteur des *Aventures d'Alice au Pays des Merveilles* (1865) ou d'*À travers le Miroir* (1872) qu'il s'est rendu célèbre.

Charles Lutwidge Dodgson, est né à Daresbury, près de Manchester le 27 janvier 1832, aîné des garçons et troisième d'une famille de onze enfants, élevés dans une stricte rigueur par un père pasteur. Dès son jeune âge Charles se plut à inventer des jeux divers, et monter des spectacles de marionnettes, pour ses frères et sœurs. À douze ans, il entre en pension à Richmond, puis à treize à la public-school de Rugby. Après de bonnes études, il est admis, à dix-sept ans, au Christ Church College d'Oxford, où il s'installe en janvier 1851. Grand travailleur, il obtient brillamment son diplôme de mathématiques quatre ans plus tard. Le collège lui accorde un titre correspondant à celui d'assistant de faculté, en contrepartie d'un engagement à devenir prêtre et à rester célibataire.

Il commence alors à écrire des poèmes et quelques nouvelles qui paraissent dans *The Train*, sous le nom de plume, qu'il gardera par la suite, de Lewis Carroll (1856). Parallèlement, il se passionne pour la photographie, qui en est à ses balbutiements. Il effectue de nombreux portraits des enfants du doyen de son collège, dont celui de la petite Alice. Carroll lui raconte en 1862, alors qu'Alice a 10 ans, ce qui devait devenir *Alice au Pays des Merveilles* dont la première édition date de 1865. Le succès est immédiat. C'est ensuite, en 1872, *Alice à travers le Miroir* dont le poème *Jabberwocky* est un des textes de non-sens les plus poétiques de la langue anglaise et conduit à d'immenses difficultés de traduction. En 1876 *La Chasse au Snark* paraît avec un égal succès.

Carroll mène de front son travail de professeur et de mathématicien. Cependant ses ouvrages mathématiques – mis à part, peut-être, *Euclide et ses Rivaux Modernes*, 1879, réfutation pleine d'humour des géométries non euclidiennes – n'ont pas marqué. De plus son enseignement ne plaît guère. Il renonce alors à devenir prêtre, prétextant sa timidité. En 1881, il quitte l'enseignement, et, par suite de reproches adressés à son goût pour les photographies de fillettes en déshabillé, abandonne la photographie, art dans lequel il excellait pourtant. La logique devient alors son seul souci.

Par une analyse rigoureuse apportant des conclusions à partir de prémisses complexes il arrive à résoudre sorites et syllogismes numériques, géométriques, ou rhétoriques. Malgré une approche mathématique limitée et basée sur les théories des ensembles de Boole, son diagramme à double carré apporte une dimension complémentaire aux diagrammes d'Euler ou de Venn.

Carroll allie alors mathématique, logique et humour. Il publie successivement : *Une Histoire Compliquée* (1885), *The Game of Logic* (1887), *Pillow Problems* (1893), *Logique symbolique* (1896) et entre autres un paradoxe qui va devenir célèbre : *Ce que se dirent Achille et la Tortue* (1894). La dernière partie du roman *Sylvie et Bruno*, auquel il travaillait depuis 22 ans, paraît en 1894, année où il décide d'abandonner complètement la littérature.

Il meurt, dans sa famille, à Guilford d'une bronchopneumonie, le 14 janvier 1898, à l'âge de soixante-six ans, regretté en tout cas par ses très nombreuses petites amies, auxquelles il n'écrivit pas moins de 98 721 lettres !

Son talent de mathématicien est sans doute surfait car son œuvre est essentiellement littéraire. Bien qu'écrite pour des enfants, celle-ci est d'ailleurs de plus en plus appréciée des adultes et constitue une importante contribution à toutes sortes de réflexion sur le langage qu'il considère faussé par l'absence de règles objectives, la dialectique et le raisonnement, qui permettent de déceler chez autrui les failles et les sophismes de l'argumentation, la pensée conformiste dont il se joue par bon sens ou grâce au non-sens.

Lewis Carroll fut donc essentiellement un poète, un pourfendeur de mots et un logicien. Sa créativité, la liaison qu'il crée entre la logique et les jeux sur les mots, sa trituration foisonnante du langage – des charades aux acrostiches, limericks et autres doublets et mots valises qu'on lui doit - en font un des précurseurs du mouvement oulipien créé en 1960 par Queneau et Le Lionnais, eux aussi mathématiciens et écrivains.

A. Z.

par P. H. Ladame & M. Criton

Des lettres aux chiffres : les cryptarithmes

Les cryptarithmes sont des jeux dans lesquels les lettres jouent le rôle de chiffres. Leur résolution nécessite de la déduction et parfois un peu de calcul mental. Découvrons ces petits plaisirs de l'esprit à partir d'exemples célèbres.

Le cryptarithme est une sorte de rébus mathématique, dans lequel tous les chiffres d'une opération arithmétique ont été remplacés par des lettres. Ainsi les nombres se présentent sous la forme de mots. Le problème est de parvenir à retrouver l'opération originelle.

Les règles de substitution sont bijectives, c'est-à-dire que dans chaque cryptarithme particulier, une lettre donnée représente un et un seul chiffre, et le même chiffre est toujours représenté par la même lettre. Enfin aucun nombre ne commence par zéro.

La demande de Dudeney

Le plus connu des cryptarithmes est le fameux :

SEND + MORE = MONEY

avec lequel Dudeney, un éminent amateur de jeux mathématiques, faisait d'une pierre deux coups en envoyant à son éditeur le casse-tête, et le message...

Voyons comment on peut résoudre ce grand classique.

On peut dire immédiatement que M = 1, car la somme de deux nombres de quatre chiffres est toujours un nombre inférieur à 20000. Si M représente le chiffre 1, alors la lettre O représente le chiffre 0 (zéro) et S représente le chiffre 9. En effet, SEND et MORE sont deux nombres respectivement inférieurs strictement à 10 000 et à 2 000 (puisque M = 1). Leur somme est donc strictement inférieure à 12 000, mais M et O représentant deux chiffres différents, seul le zéro est possible pour la lettre O.

On a donc MORE < 1098, et par ailleurs MONEY > 10234 (toutes les lettres du mot représentent des chiffres différents).

Il faut alors que SEND > 9 000, donc que S = 9.

L' addition devient :

$$\begin{array}{r} 9\,E\,N\,D \\ +\,1\,0\,R\,E \\ \hline =1\,0\,N\,E\,Y \end{array}$$

L'examen de la colonne des centaines permet d'affirmer que N = E + 1, et celui

de la colonne des dizaines que R = 8 et qu'il y a une retenue provenant de la colonne des unités (c'est la seule possibilité pour que l'on ait N + R = 10 + E). Par ailleurs, Y étant au moins égal à 2, on doit avoir E > 5 pour que l'on ait D + E > 12 (en effet, D, ne pouvant prendre les valeurs 9 et 8, déjà utilisées, est au plus égal à 7).
En essayant les valeurs 5 et 6 pour E, on n'obtient qu'une seule possibilité : E = 5, N = 6, D = 7 et Y = 2, qui donne la solution unique du cryptarithme :

9 5 6 7 + 1 0 8 5 = 1 0 6 5 2.

Déduction et calcul mental

Sans que ce soit une obligation, la plupart des cryptarithmes forment en effet avec leurs quelques mots de courts messages. La boucle est enfin bouclée lorsque ces messages reviennent faire référence aux nombres, par exemple avec

NEUF + UN + UN = ONZE

de G. Glaser (*Le Petit Archimède*).
Analysons ce second exemple pour découvrir les failles où l'esprit de déduction va s'introduire.
Ici en première colonne (celles-ci sont comptées à partir de la gauche), nous avons N + retenue = O, où la retenue ne peut être que 1, d'où O = N + 1.
En deuxième colonne, E + retenue = N + 10. Mais N ≠ 0, car N commence un mot, donc E + retenue > 11. Nous sommes obligés de retenir E = 9, retenue = 2 , alors N = 1 et O = 2.
De la quatrième colonne (F + 2N finit par E) on tire F = 7.
En colonne 3 : 3U = Z + 20,9 et 7 étant déja attribués, on a U = 8 et Z = 4.
L'addition est donc :

1987
\+ 81
\+ 81
2149

MARI
\+ FEMME
\+ ENFANT
\+ ENFANT
\+ ENFANT
\+ ENFANT
\+ ENFANT
\+ ENFANT
\+ ENFANT
\+ ENFANT
\+ ENFANT
\+ ENFANT
\+ ENFANT
\+ ENFANT
= FAMILLE

Pouvez-vous résoudre ce cryptarithme, à solution unique, dû à Éric Angelini ?

La résolution est ici analytique jusqu'à la solution mais ce n'est pas toujours le cas. L'exemple résolu nous a amené à une solution unique. C'est la plupart du temps le cas pour les « beaux » problèmes, la « beauté » dépendant grandement de cette unicité.
Les auteurs ajoutent parfois des contraintes ou regroupent les opérations. Les cryptarithmes récalcitrants nécessitent souvent davantage de calcul mental. Pour ceux-là, il faut « faire varier » une lettre, c'est-à-dire lui donner successivement toutes les valeurs disponibles, et en tirer les conséquences pour les autres lettres, nous appellerons cela « tester » une lettre.
Les cryptarithmes sont relativement jeunes en France, Ils ont été importés grâce à Martin Gardner du *Scientific American* et à Pierre Berloquin dans ses

L'ouvrage de Raymond Bloch

rubriques de *Science & Vie* et du journal *Le Monde*. On en retrouve la trace pendant quelques années dans la page de jeux du magazine *Spirou*, puis dans les rubriques de Pierre Berloquin dans *Science & Vie* et le journal *Le Monde* et épisodiquement dans *Jeux et Stratégie* avant que *Tangente* ne reprenne la tradition.

P.-H. L. & M. C.

BIBLIOGRAPHIE

Raymond Bloch, *80 additions-mystères et autres surprises mathématiques*, Editions POLE, 2000.
Pierre-Henry Ladame, *Tangente n° 7*, Editions Archimède, Argenteuil, 1989.
Pierre-Henry Ladame, *Les cryptarithmes*, Jouer Jeux Mathématiques n° 10, F.F.J.M., Maisons-Alfort, 1993.
Elisabeth Busser et Gilles Cohen, *Opérations cryptées*, La Recherche n° 313, Paris, 1998.

Quelques méthodes pour aider à la résolution des cryptarithmes,

d'après Raymond Bloch

1. Examen de la colonne de gauche

```
    B ..
+   C ..
= A D ..
```

Ici, A=1 et B + C + retenue éventuelle ⩾ 10.

2. Repérage de 0 ou 9

```
  .. B
+ .. A
= .. B
```

Ici, A = 0.

```
  .. B ..
+ .. A ..
= .. B ..
```

Ici, A = 0 ou A = 9, s'il y a une retenue.

3. Duos

Deux lettres A et B apparaissent dans deux colonnes différentes, accompagnées de deux lettres distinctes X et Y.

```
  .. A ... Y ..
+ .. X ... A ..
= .. B ... B ..
```

Ici, X et Y doivent être consécutifs, dans cet ordre ou dans l'ordre inverse.

```
  .. A ... B ..
+ .. B ... A ..
= .. X ... Y ..
```

Même déduction : X et Y doivent être consécutifs, dans cet ordre ou dans l'ordre inverse.

4. Trios

```
  .. A ... C ..
+ .. B ... A ..
= .. C ... B ..
```

L'étude des différents cas possibles, notamment pour ce qui est des retenues, conduit à conclure que l'on doit avoir A = 4 ou A = 5.

5. Doubles

```
  .. A ... B ..
+ .. A ... B ..
= .. B ... A ..
```

On doit avoir A = 3 et B = 6 ou A = 6 et B = 3. De plus, il est impossible que les deux colonnes symétriques soient voisines.

Énigmes chiffrées

1 - Endroit Paradisiaque

HONOLULU

Tantôt carré, tantôt triangulaire*, mais aussi hexagonal*, le nom de cette cité de rêve, où le chifre 8 est tabou, cache 3 nombres différents. Lesquels ?

* nombre « triangulaire » : nombre de la forme $n(n + 1)/2$
* nombre « hexagonal » : nombre de la forme $3n(n + 1) + 1$ (six fois un nombre triangulaire, plus un).

2 - En Hommage à Georg Cantor

Cet hommage s'adresse à Georg Cantor (1845-1918), mathématicien de génie, dont les travaux ont été à l'origine de la théorie des ensembles.

```
    G E N I E
+   G E O R G
= C A N T O R
```

3 - Cuisine

CUIRE + EN + POELE = FRIRE

(FOC est un carré.)

4 - Douze

ONZE + ZERO + UN = DOUZE

Si TREIZE est un nombre premier, combien vaut DIX ?

5 - TRENTE

VINGT + CINQ + UN + UN +UN + UN + UN = TRENTE

(CENT n'est pas premier.)

6 - Couleurs

JAUNE + BLEU + ROUGE = ORANGE

(JAUNE est premier.)

7 - Vingt siècles de palindromes

1991 est un nombre palindrome de somme digitale 20 ($1 + 9 + 9 + 1 = 20$). Trouvez tous les nombres palindromes inférieurs à 1991 qui ont la même somme digitale.

8 - Somme de carrés palindrome

On calcule la somme des carrés des nombres entiers naturels, dans l'ordre :

$$0^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots$$

On veut arrêter le calcul en ajoutant le carré d'un nombre palindrome ayant plus d'un chiffre, et de telle sorte que la somme obtenue soit aussi un palindrome. Jusqu'où devra-t-on poursuivre le calcul ?

9 - Un bel échafaudage

Attention, la longueur des traits de fraction induit certaines priorités.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{1}{101}}{10101}}{\cfrac{10101}{\cfrac{101}{1}}} = ?$$

10 - Cubes palindromes

Quel est le plus petit cube palindrome ? Et le suivant ?

11 - Carrés palindromes

Le plus petit carré palindrome est 0. Viennent ensuite 1, 4, 9. Quel est le suivant ?
Trouvez un carré palindrome à quatre chiffres.

par Marie-José Pestel

Codes, chiffres, messages secrets, à vous de jouer

La nécessité d'échanger des informations à l'insu d'yeux indiscrets s'est manifestée depuis que les hommes communiquent. Panorama des principales techniques de cryptographie de Jules César à l'informatique.

La machine à crypter *Enigma*.

Raison politique, militaire, industrielle ou simplement sentimentale, toutes sont bonnes pour que le génie humain s'exerce, que se mette en place un système de code (ou de chiffre) pour communiquer dans le secret incitant l'Autre, l'ennemi, à chercher à lever le secret… Cette lutte incessante entre concepteurs et briseurs de code a permis de remarquables percées scientifiques. L'évolution des codes secrets est très liée à celle des sciences. Tous les efforts pour garder ou trouver le secret ont mis en jeu de nombreux domaines : mathématique et linguistique, théorie de l'information, théorie des nombres et aujourd'hui théorie quantique…

Un survol des différentes techniques en matière de messages secrets va être pour nous l'occasion tout en plongeant dans l'histoire, de jouer à l'agent secret.

« L'envie de pénétrer les secrets est profondément ancrée dans l'âme humaine ; même le moins curieux des esprits s'enflamme à l'idée de détenir une information refusée à d'autres. Certains ont la chance d'exercer un métier qui leur demande d'élucider des mystères, mais la plupart d'entre nous sont réduits, pour satisfaire ce besoin, à résoudre des casse-tête artificiels, inventés pour notre satisfaction. Les romans policiers et les mots croisés suffisent au plus grand nombre, la résolution des codes secrets peut être la quête de quelques-uns. »

John Chadwick

Stéganographie

Le mode de communication secrète obtenu en dissimulant le message est appelé *stéganographie* (en grec, *stéganos* : couvert et *graphein* : écriture). Les premières références écrites à l'utilisation de messages cachés sont données par Hérédote, v^{e} siècle av. J.-C., les messages étant dissimulés sous des plaquettes de cire ou sur le crâne du messager.

Au v^{e} siècle av. J.-C., la *scytale* spartiate est un dispositif de transmission des messages qui tient à la fois de la stéganographie (on cache le message, préalablement écrit sur un ruban enroulé sur un bâton, la scytale, ruban qui sert, par exemple, de simple ceinture) et de la *cryptographie* puisque le message trouvé on doit encore le décoder (il reste illisible pour celui qui ne connaît pas le bon diamètre de bâton pour le lire).

Au I^{er} siècle ap. J.-C., Pline l'Ancien explique comment on fait de l'encre invisible avec le lait de l'euphorbe. Tout au long des siècles, les différentes techniques relevant de la stéganographie se sont développées aussi variées que l'imagination des hommes.

Le message est caché dans le texte

Il semble que les Grecs avaient déjà imaginé cette méthode qui consiste à mettre des points ou des trous sous certaines lettres d'un texte anodin pour envoyer le message.

Ainsi, **Paul Erdös est « le voyageur des mathématiques ». C'est un chercheur de solutions mathématiques élégantes et de « bons problèmes »**, donne « *Tout est nombre* ».

La stéganographie cache la présence des messages. Elle offre un minimum de sécurité mais elle a une faiblesse structurelle : à l'interception, le message est immédiatement révélé. C'est pourquoi, parallèlement à la stéganographie s'est développée la *cryptographie* (en grec, kruptos : caché) science qui tente de changer le message pour le rendre inintelligible à toute personne non autorisée. Bien sûr rien n'empêche d'utiliser les deux méthodes pour mieux dissimuler le message.

Pour rendre un message illisible directement on peut penser à « mélanger les lettres ».

Pour crypter un message on peut faire une transposition des lettres du message. Si cette transposition se fait dans le plus grand des hasards il y tant de possibilités que débrouiller l'anagramme sera aussi difficile (voire impossible) pour le destinataire que pour l'intercepteur (pour une courte phrase de 35 lettres il y a plus de 5×10^{11} possibilités). Alors on applique une transposition codée aux lettres de l'alphabet.

Le premier usage connu de substitution codée dans un contexte militaire apparaît dans la *Guerre des Gaules* de Jules César.

Le code de Jules César

Jules César, pour communiquer avec Cicéron, utilise une méthode de chiffrement par décalage des lettres de l'alphabet. Ainsi si on décide de remplacer chaque lettre par la lettre située + 3 places après elle dans l'alphabet le message en clair ATTAQUE devient DWWDTXH.

En cryptographie on appelle *Chiffre* toute méthode de chiffrement où chaque lettre est remplacée par une autre ou par un symbole.

Pour construire un alphabet chiffré on

peut bien sûr faire glisser les lettres de un à 25 rangs mais il est clair qu'il sera relativement facile de briser le message crypté correspondant.
Pour compliquer le problème, bien des méthodes ont été essayées. On peut par exemple introduire des signes nuls.

Les deux disques

Pour utiliser ce système de chiffrement, imaginons deux cercles concentriques de rayons différents sur lesquels on a régulièrement écrit les 26 lettres de l'alphabet, le grand cercle est fixe et le plus petit peut tourner.

Une des améliorations notables à ce procédé de substitution a été apportée en introduisant une clé.
Le savant florentin Léon Battista Alberti a, au XV^e siècle, proposé d'utiliser non plus un mais deux alphabets chiffrés au cours du chiffrement en passant alternativement de l'un à l'autre. Cependant Alberti échoua à développer son concept mais plusieurs chercheurs reprirent son idée et Blaise de Vigenère, diplomate français né en 1523, mit au point une méthode qui devait résister jusqu'à la dernière guerre à tous les briseurs de code… Sa force réside dans l'utilisation non pas d'un mais des 26 alphabets chiffrés pour coder un message. Ces 26 alphabets sont écrits l'un sous l'autre, chacun d'eux étant décalé d'une lettre supplémentaire par rapport au précédent. On construit ainsi un « *carré de Vigenère* » et pour savoir quelle ligne utiliser pour coder chaque lettre du message on utilise une clé répétée en boucle au dessus du message.
Ainsi, le code de Vigenère (1523-1596) permet, avec ce mot clé, de déplacer différemment une même lettre du message en clair selon sa place dans le message. Si on choisit pour mot clé LUNE, L est la 12^e lettre de l'alphabet donc la première lettre du message sera décalée de 11, la deuxième lettre du message sera décalée de 20 car U est la 21^e lettre, la troisième de 13 car N est la 14^e, la quatrième de 4 car E est la 5^e, la cinquième de nouveau de 11 puisque l'on recommence avec L ainsi de suite… Le message en clair A T T A Q U E devient L N G E B O R.

Le travail des cryptanalystes

Le principe de substitution a dominé la technique des écritures masquées pendant tout le premier millénaire ap. J.-C. Cependant les décodeurs finirent par trouver la faille : cette découverte se fit en Orient et fut le résultat de la rencontre entre la linguistique, les statistiques, les mathématiques et la dévotion religieuse. Disons pour simplifier que les érudits arabes avaient l'habitude d'écrire leur message en utilisant un alphabet crypté de substitution.
En rapprochant des textes codés de textes en clair et en étudiant dans le texte en clair la fréquence d'apparition de chaque lettre ainsi que l'assemblage de certaines lettres on dispose d'un premier outil puissant de cryptanalyse. Remarquons que le *Chiffrage de Vigenère* échappe à cette méthode de déchiffrage basée sur l'étude de la fréquence de chaque lettre puisqu'il utilise non pas un alphabet mais plusieurs. C'est sans doute ce qui lui permis de

Bibliographie
Histoire des codes secrets, **Simon Singh**, Livre de Poche.

La France gagne la guerre des codes secrets 1914-1918, **Sophie de Lastours**, Tallandier.

Article de la revue **Repères** – IREM n° 46 janvier 2002, ***Du chiffrement de César à la mathématique de la carte bancaire*** de **Dany-Jack Mercier**.

Site sur ENIGMA : http://www.iro.umontreal.ca/~crepeau/CRYPTO/ENIGMA/ENIGMA/enigma.html

rester inviolé si longtemps.
C'est un génie excentrique anglais du XIXe siècle, Charles Babbage qui proposa le premier les plans de superbes calculateurs appelés *Difference Engine* qui annonçaient nos ordinateurs et qui étaient capables d'effectuer un grand nombre de calculs. Le travail de cryptanalyse de Babbage reposait sur l'observation suivante : un mot clé étant choisi, les lettres de ce mot n'ont qu'un nombre limité de façons d'être transposées et donc chaque mot n'a qù'un nombre fini et connu de façons d'être écrit ; il suffisait alors de rechercher dans un texte des mots (ou des assemblages de lettres) qui figurent plus de fois qu'ils n'ont d'écritures…
D'autre part des méthodes de plus en plus sophistiquées de cryptanalyse se sont mises en place et pendant les deux dernières guerres on vit se développer des méthodes qui furent toujours basées sur les substitutions polyalphabétiques mais avec des clés aléatoires, de plus en plus longues, grâce à l'utilisation de rouages mécaniques, puis électriques et même électroniques. Ce fut le cas de la célèbre machine à crypter de l'armée allemande *Enigma* qui affola les Alliés pendant la seconde guerre mondiale. Le grand mathématicien anglais Alan Turing, en cassant les codes d'Enigma, donna un sérieux coup de main aux alliés et mit en place ce que l'on peut considérer comme le premier ordinateur, une machine à calculs automatiques.
Reste encore bien des façons de coder [1] ; plutôt que de remplacer les lettres par d'autres lettres, on peut les remplacer par d'autres signes ou par des nombres…
La fascination grandissante au XIXe siècle pour la cryptographie et la cryptanalyse amena codes et codages à être très présents dans la littérature : Jules Verne, Edgard Poe, Sir Arthur Conan Doyle et le célèbre déchiffrement de Sherlock Holmes raconté dans « *Les hommes dansants* ».

La Cryptographie moderne, le RSA

En devenant numérique, à partir de 1978, la cryptographie va transformer non plus des lettres mais des nombres – chaque lettre est remplacée par le nombre représentant sa place dans l'alphabet – et en appliquant aux nombres, et non plus aux mots, des résultats puissants d'arithmétique on va pouvoir crypter les messages.
En 1978, les mathématiciens américains Rivest, Shamir et Adleman proposèrent le premier algorithme de chiffrement à clés publiques connus sous le nom de RSA et basé sur un résultat d'arithmétique connu sous le nom de *Théorème de Fermat-Euler* et dont la sécurité repose sur la difficulté à retrouver les deux facteurs premiers d'un grand nombre.
Pour mettre en place le système on a besoin de choisir deux nombres premiers p et q ; plus ils seront grands plus le système sera sécurisé.
On calcule $n = pq$ et on cherche deux entiers naturels c et d tels que cd et 1 aient le même reste dans la division par $(p - 1)(q - 1)$ donc $cd - 1$ est un multiple de $(p - 1)(q - 1)$.
Ces deux entiers c et d peuvent se deviner dans les cas simples (ce n'est pas le cas en cryptographie), soit se chercher par tâtonnement (c'est souvent le cas en arithmétique) soit être demandé à l'ordinateur car il existe des algorithmes puissants pour les calculer.
Les entiers c et n appartiennent au domaine public, constituent la *clé publique*, sont publiés dans un bottin et servent à chiffrer le message numérique M.

(1) La technique du macro points consiste à singulariser dans un texte quelconque les lettres du message à transmettre Pendant la dernière guerre mondiale les espions soviétiques et allemands ont utilisé des films suffisamment petits pour les placer à l'intérieur d'un point de ponctuation d'un document dactylographié.

(2) En 1997 le nombre de 97 chiffres utilisés par le système RSA a été factorisé et ses deux facteurs premiers ont pu être calculés (affaire Serge Humpich).

M devient M′ qui est le reste dans la division de M^c par n.
L'entier d est la *clé secrète*, il va permettre de déchiffrer le message M′ donc seuls ceux habilités à décrypter les messages doivent le connaître ; comme d se calcule avec p, q et c, il est clair que p et q doivent être secrets.
Pour retrouver M, il faut calculer le reste dans la division de $M'^{\,d}$ par n.
La sécurité du système RSA repose sur la facilité d'obtenir des nombres premiers très grands – il existe des tests qui certifient la primalité d'un entier et qui sont rapides – et sur la difficulté d'obtenir le décomposition d'un grand nombre en produits de facteurs premiers.
Le RSA 320 bits correspondant à des nombres de 97 chiffres décimaux ayant montré sa faiblesse (2) les banques visent au plus vite à mettre en place le RSA 1024 bits correspondant à des nombres de 309 chiffres.

M.-J. P.

Solutions

1• Une solution unique : $53231616 = 7296^2$, $35250606 = 8396 \times 8397/2$, $16461919 = 3 \times 2342 \times 2343 + 1$.

2• Moyennant la condition O = 0, on a une seule solution : E = 6, G = 8, I = 5, R = 4, N = 2, T = 3, A = 7, et C = 1, qui correspond à l'addition : 86256 + 86048 = 172304.

3• CUIRE + EN + POELE = FRIRE (FOC étant un carré). Une solution unique : 46359 + 91 + 28909 = 75359 (784 est un carré).

4• ONZE + ZERO + UN = DOUZE .
Une solution unique : 2897 + 9732 + 68 = 12697. TREIZE = 537497 est premier, et DIX vaut 140.

5• VINGT + CINQ + UN + UN + UN + UN + UN = TRENTE (CENT non premier). Une solution unique : 97581 + 4756 + 35 + 35 + 35 + 35 + 35 = 102512 (4251 n'est pas premier).

6• JAUNE + BLEU + ROUGE = ORANGE (JAUNE est premier). Une solution unique :
94327 + 61307 + 8573 = 164207 (94327 est premier).

7• Il y a 4 solutions : 686, 767, 848, et 929.

8• $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$ (formule due à Archimède).
La plus petite solution est 181 :
$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \ldots + 181^2 = 1992991$.
On notera que :
$1992991 = 181 \times 91 \times 121 = 181 \times 11 \times 1001 = 1991 \times 1001$.

9• 1/102030201.

10• 343 et 1331.

11• Le suivant est 121 et le suivant 484.
Il n'existe aucun carré palindrome à quatre chiffres.

Les jeux
dans la théorie des jeux

Les joueurs de cartes, Lucas van Leyden, 1520, National Gallery of Art, Washington.

La théorie des jeux, imaginée par John von Neumann pendant la deuxième guerre mondiale, a l'ambition de modéliser toutes les situations où une décision est à prendre. Elle couvre donc un vaste champ mathématique qui inclut aussi bien les probabilités que la théorie des graphes, voire la recherche opérationnelle. Elle est donc loin de se limiter au jeu ! Pire, le jeu n'est qu'une petite partie de son champ d'application, dont le principal est probablement la polémologie – l'étude des conflits – avec laquelle elle est née. Elle s'applique aujourd'hui également en économie ou en politique. Bien sûr, les jeux mathématiques rentrent dans son champ de compétence, et c'est à eux que nous avons limité ce dossier.

 par Gilles Cohen

Hasard et décision

La théorie des jeux a pour objet de construire et d'étudier des modèles mathématiques pour analyser les décisions, les actions humaines. La démarche historique veut que les règles de décision qui sont l'objet de cette théorie ont d'abord été recherchées pour régler la conduite des joueurs dans les jeux de hasard.

Antoine Gombaud, Chevalier de Méré, imagina le jeu suivant : le banquier confie une paire de dés à un joueur, et lui demande d'effectuer *n* lancers. Si à l'issue de ces lancers, il n'obtient jamais de double 6, le joueur aura gagné. En revanche, si l'un des lancers se solde par un double 6, c'est le banquier qui remporte la partie.

Avant de mettre ce jeu en pratique, une décision s'imposait : fixer le nombre *n* de lancers. Il va de soi que chaque lancer supplémentaire avantage la banque. Mais quelle est la valeur minimum que doit prendre *n* pour que le banquier soit favori ? (réponse en encadré).

La légende affirme qu'incapable de répondre à cette question, le Chevalier alla consulter son ami Blaise Pascal qui "inventa" pour la circonstance le calcul de probabilités. La théorie des jeux venait de naître, avec, pour ce premier problème de décision, son outil privilégié : la théorie des probabilités.

La partie interrompue

Dans les jeux de hasard pur, l'initiative humaine est restreinte. La décision à prendre est souvent élémentaire : jouer ou ne pas jouer. Elle peut aussi consister à fixer le montant de sa mise. Une fois la partie engagée. le joueur n'a souvent plus aucun rôle. Pourtant, un cas doit être envisagé : celui où, la partie ayant commencé de se dérouler dans les conditions fixées par la règle. se trouve interrompue pour une raison de force majeure. avant le terme prévu. On pourrait convenir qu'alors chaque joueur reprendra sa mise, mais ce serait faire table rase du jeu qui, sans avoir été mené à son terme, a cependant eu lieu, favorisant plus ou moins chacun des deux joueurs. Il faut donc chercher une solution plus "juste" de partage. C'est encore Pascal qui imagina la "règle des partis" (partages), applicable à de telles situations. Cette règle est la préfiguration de la notion d'espérance mathématique. On calcule la

***Le fileur de cartes*, Caravaggio,** 1596, Kimbell Art Museum, Forth Worth.

moyenne des gains possibles de chacun, pondérée par leur probabilité.
Il est possible d'appliquer la méthode de Pascal pour remonter jusqu'au début de la partie, et attacher ainsi un règlement à la situation initiale elle même. En d'autres termes, le seul fait d'avoir accepté de jouer à un jeu vous met dans une position avantageuse, désavantageuse, ou équitable, vis à vis de vos adversaires. Ainsi, si vous acceptez de jouer 37 Euros sur un numéro à la roulette, et si vous revenez sur votre décision, vous devriez en théorie laisser 1 Euro à la banque et ne récupérer que 36 Euros. Ce calcul d'espérance initiale peut vous conduire à plus de circonspection vis à vis des jeux de hasard, où, bien sûr votre espérance n'est jamais positive (les "banquiers" ne sont pas fous).

Indicateurs d'utilité

À vrai dire, la décision à prendre – jouer ou ne pas jouer — ne dépend pas de la seule information donnée par la règle des partis. Sans insister sur le fait que l'espérance mathématique d'un gain aléatoire ne définit pas entièrement la fonction de gain, il faut souligner la difficulté que présente, en pratique, l'arbitrage entre un versement certain, et l'espérance mathématique offerte en contre-partie. Il est permis, et même souvent recommandé, de refuser un jeu équitable, ou même avantageux, s'il présente de trop grands "risques", par exemple si l'une des situations finales, peu probable, mais possible, entraîne une perte énorme équivalente à la ruine, ou pire encore, la mort (peut-on "chiffrer" la mort ?).

Inversement, il est permis d'accepter un jeu théoriquement désavantageux où l'on risque tout au plus de perdre un enjeu minime, mais où on l'on peut espérer, avec une très faible probabilité, gagner une somme considérable. Le Loto l'a bien compris avec la formule choc : "c'est facile, c'est pas cher, et ça peut rapporter gros !"
Le rôle des facteurs psychologique est primordial dans de tels cas : goût du risque ou prudence, attrait plus ou moins fort du gain éventuel, sensibilité plus ou moins grande à telle ou telle publicité : autant d'éléments qui interviendront dans la décision du joueur au point qu'il négligera souvent tout calcul d'espérance.
D'ailleurs il n'est pas dit que l'espérance doive se mesurer en francs. D'où l'introduction de la notion d'échelle d'utilité. Les préférences des joueurs sont traduites par des indicateurs numériques (indicateurs d'utilité) : c'est à partir de ces données "psychologiques" qu'on calcule l'espérance.
Dans les jeux dont les résultats sont monétaires, les valeurs d'utilité sont définies en fonction des gains (Daniel Bernoulli propose en 1730, à titre d'exemple, une fonction logarithmique), mais la théorie de l'utilité linéaire, développée en 1948 par Von Neumann et Morgenstern, s'applique à des cas très généraux. Le paradoxe de St Petersbourg, mis en évidence par Bernoulli (voir encadré), illustre bien les limites de la notion d'espérance mathématique.

Marche aléatoire et ruine

Le paradoxe de St Petersbourg introduit un problème qui se pose très naturellement dans la théorie de la décision en présence d'aléa : il s'agit de calculer – ou au moins de borner supérieurement – la probabilité qu'un joueur soit ruiné au cours d'une marche aléatoire, suite de parties d'un jeu de hasard donné. Ce peut être un jeu entre particuliers, un jeu de casino, mais aussi des situations qui utilisent un tel modèle, comme celles relevant de l'assurance ou de la gestion de stock où le risque de défaillance, faillite ou rupture de stock, joue un rôle essentiel.

D'une manière plus générale, la probabilité lors d'un jeu équitable de voir se ruiner la joueur qui possède X unités de mise contre le joueur qui en possède Y est :

$$\frac{Y}{X+Y}.$$

Imaginez alors ce qui se passe pour vous dans un casino, quand on sait que vous jouez à un jeu inéquitable contre la banque qui possède une fortune quasi illimitée !
Votre meilleure stratégie consiste alors à borner artificiellement la fortune du casino, en décidant de vous retirer dès que vous aurez gagné une certaine somme, fixée à l'avance. Mais quel flambeur est-il capable d'une telle résolution ?

G. C.

Le problème du chevalier de Méré : la solution.

Sur chaque lancer, le Joueur a 1 chance sur 36 de perdre, et 35 chances sur 36 de s'en tirer. La probabilité de sortir victorieux des n lancers est donc pour lui : $(35/36)^n$.
Cette valeur devient inférieure à 1/2 à partir de $n = 25$. Pour 25 lancers et au- delà, le banquier sera favori.

Le paradoxe de Saint-Petersbourg

Le banquier joue à pile ou face avec un joueur, qui a préalablement misé une somme m.
Au premier coup, si la banque gagne, la partie est terminée, et la somme m reste acquise au banquier. En revanche, si le joueur gagne, le banquier lui remet 2 euros, et la partie continue.
Au deuxième coup, si la banque gagne, fin. Si le joueur gagne, le banquier lui remet 4 euros, et la partie se poursuit.
Au troisième coup, c'est 8 euros que le joueur risque de recevoir s'il gagne, au quatrième 16 euros, au cinquième 32 euros, etc.
Quelle doit être la mise m pour que la partie soit équitable ?

Daniel Bernoulli (1700-1782), l'inventeur du paradoxe de Saint-Petersbourg.

Le paradoxe réside dans la surprenante réponse suivante. Calculons l'espérance de gain du joueur. La perte s'élève à m euros. Le gain se calcule de la façon suivante :
2 euros au premier coup (proba = 1/2), soit 1 euro
4 euros au deuxième coup (proba = 1/4), soit 1 euro, ...
8 euros au deuxième coup (proba = 1/8), soit 1 euro, ...
...
2^n euros au n- ième coup (proba = $1/2^n$), soit 1 euro, etc.

L'espérance de gain est donc infinie ! La somme m devrait être infinie pour que le jeu soit équitable ! Quel résultat curieux !

En pratique, il y a une faille dans ce raisonnement rigoureux sur le plan théorique.
D'une part, vos préférences sont dans un tel cas mal traduites par l'espérance mathématique de gain, d'autre part et surtout la banque, si riche soit-elle, dispose d'une réserve finie, et le jeu ne peut donc se prolonger indéfiniment, ce qui limite la valeur de l'espérance mathématique de gain.

 par Gilles Cohen

Les jeux de réflexion pure à information complète

Les jeux de réflexion pure à information complète représentent aux yeux de certains l'application la plus noble de la théorie des jeux. Mais la conclusion à laquelle nous mène cette étude ne signifie-t-elle pas la mort du jeu de dames ou du jeu d'échecs ?

Deux cavaliers chevauchent de conserve à travers les plaines arides du Far-West. Ils ont épuisé tous les sujets de conversation : violence, femmes, argent, chevaux. Il ne reste que le jeu où l'on peut risquer sa vie, sa femme, ses dollars, sa monture. Mais à quoi jouer lorsqu'on est cahoté sur ces chemins poussiéreux, sans accessoires et sans crayon ?

Lucky propose alors: « *Je vais annoncer un nombre compris entre* 1 *et* 10, *Johnny. Tu l'augmenteras d'un nombre de ton choix compris entre* 1 *et* 10. *A mon tour, j'ajouterai un nombre compris entre* 1 *et* 10, *et ainsi de suite... Le premier qui atteindra* 100 *aura gagné* 100 $ ».

Quelques kilomètres plus loin, allégé de 100 $, Johnny se rebelle :

«– *C'est moi qui commence, maintenant, et on joue plus cher !* ».

– *O.K. Johnny, celui qui atteint* 110 *gagne* 110 $ ».

Que faut- il penser de l'honnêteté de Lucky ?

Quelques heures plus tard, c'est le repos nocturne. Le crépitement du feu, la respiration rauque des chevaux fourbus, le hurlement lointain d'un coyote, accompagnent la voix bien timbrée de Lucky qui fredonne *I am a poor lonesome cow-boy*. Silencieux, Johnny remâche sa rancœur. «– *Je vais te donner une nouvelle chance* », s'interrompt Lucky. « *Jouons à un autre jeu : vois-tu ces tas de cailloux ? Nous allons retirer à tour de rôle un nombre de cailloux de notre choix* (*au moins* 1) *de l'un exactement de ces tas. Celui d'entre nous qui enlèvera le dernier caillou recevra de l'autre* 200 $.

– *Je ne sais si je dois te faire confiance, après ce que tu m'as piqué à cheval*, grogne Johnny. Mais il est joueur, et finit par se laisser faire.

– *Jouons d'abord avec deux tas* », propose-t-il.

Les deux jeux proposés par Lucky – le premier est connu sous le nom de "piquet à cheval" – font partie de la même catégorie de jeux que les échecs

Bill Owens - *Cowboys in the Making.*

et les dames : deux joueurs, A et B, s'affrontent en étant parfaitement informés, à chaque instant, de tout ce qui s'est passé antérieurement, de l'éventail des choix dont chacun dispose à son tour de jeu, et enfin des conditions qui définissent les différentes issues possibles.

On dit qu'il s'agit de duels (deux joueurs) de réflexion pure, à information complète (ou parfaite). Vous trouverez leur étude pratique dans le prochain article, mais un peu de théorie s'impose préalablement.

Situations fortes et faibles

Nous supposerons d'abord, pour simplifier, qu'une partie n'a que deux issues possibles : soit le joueur A gagne, soit le joueur B. On peut répartir les situations de jeu en deux classes : les situations fortes pour A (faibles pour B) qui correspondent à la victoire de A, et bien sûr, les situations fortes pour B (faibles pour A).

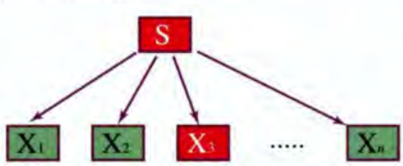
Il est facile de classer les situations finales, mais que faut-il penser des situations intermédiaires, ou même de la situation initiale ?

Cette question ressemble beaucoup à celle que s'est posée Pascal à propos des jeux de hasard. Mais il a fallu attendre 1896 pour que la réponse fût entrevue par Lucas, et quelques années de plus pour qu'elle fût donnée sous forme rigoureuse par Zermelo et Kalmar.

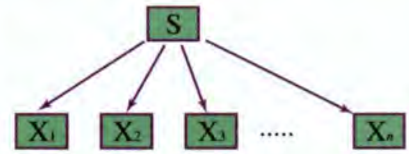
Observons en effet l'enchaînement des coups successifs. Au cours d'une partie, une situation S donnée peut être immédiatement suivie d'un certain nombre d'autres, $X_1, X_2, X_3, .. X_n$, dont la réalisation dépend seulement du choix fait par le joueur qui doit jouer dans la situation S, par exemple le joueur A.

Supposons que toutes les situations X_1, X_2, .., X_n, soient finales ; la règle du jeu les répartirait entre les deux classes (fortes pour A, en rouge, ou fortes pour B, en vert).

• Si parmi les situations X_1, X_2, .., X_n suivant immédiatement S, il en existe au moins une qui est forte pour lui (par exemple X_3), le joueur A, qui peut passer de S à la situation ultérieure de son choix, a bien entendu intérêt à évoluer vers X_3, qui est forte pour lui. Dans ce cas, il est juste d'estimer que la victoire est à sa portée, et A peut être considéré comme vainqueur avant même d'avoir joué. La situation S est donc forte pour A.



• Si au contraire toutes les situations X_1, ..., X_n, suivant immédiatement S sont fortes pour B, donc faibles pour le joueur A, la situation S est classée forte pour B puisque B peut l'emporter contre toute action de A.



Situations gagnantes et perdantes

L'inconvénient de la classification en situations fortes pour A (donc faibles pour B) et fortes pour B (donc fortes pour A) est l'absence de symétrie. On a donc imaginé la convention suivante : une situation sera dite gagnante (en jaune sur le dessin) si elle est forte pour le joueur qui en hérite (et doit jouer), perdante (en bleu) si elle est forte pour le joueur qui vient de jouer (et faible pour celui qui en hérite). Notez que certains ouvrages adoptent la convention contraire.

En conséquence, dans notre terminologie, il est facile de vérifier que :

- Toute situation qui admet parmi ses successeurs immédiats au moins une situation perdante est gagnante.
- Toute situation qui n'est suivie que de situations gagnantes est perdante.

Un joueur qui hérite une situation gagnante à un instant quelconque d'une partie dispose d'une stratégie gagnante à partir de cet instant : faire évoluer le jeu vers une situation perdante à chacun de ses tours de jeu, à partir de la situation gagnante qui lui parvient alors nécessairement.

La mort du jeu d'échecs ?

Ainsi, dès lors que l'éventail des situations n'est pas infini, on peut remonter de proche en proche à partir des situations finales classées par la règle du jeu, et classifier une situation quelconque, intermédiaire ou initiale, soit comme gagnante, soit comme perdante. Cela revient à dire qu'à chaque instant de la partie, en particulier dès qu'elle est engagée, l'un des joueurs gagnerait à coup sûr contre toute défense de son adversaire s'il avait du jeu une connaissance assez complète pour discer-ner, chaque fois qu'il doit jouer, le choix le plus avantageux pour lui.

Autant dire qu'il deviendrait inutile de jouer, puisque le résultat de la partie serait connu d'avance ! Ce n'est évidemment le cas, en pratique, que pour des jeux très simples, par exemple le piquet à cheval et le Nim à deux tas, qui, de jeux, sont du coup relégués au rang de "récréations mathématiques". Mais on peut craindre qu'avec les progrès de l'informatique, une machine disposant d'une prodigieuse vitesse de calcul parvienne à venir à bout d'un nombre de plus en plus grand de jeux.

On peut étendre l'étude aux duels finis, de réflexion pure et à information parfaite, dans lesquels les situations finales sont réparties en un nombre quelconque de classes, pourvu que les préférences des deux joueurs soient opposées. Un cas fréquent est celui des jeux où il existe une possibilité de match nul, et donc trois classes de situations.

En remontant de proche en proche à partir des situations finales, on peut alors classer toute situation intermédiaire ou même initiale dans une des classes. La classe de la situation initiale définit un résultat appelé espérance des deux joueurs, comparable à l'espérance mathématique donnée par la règle des partis dans les jeux de hasard (voir l'article précédent). Chaque protagoniste peut s'assurer un résultat au moins aussi favorable s'il est clairvoyant, mais ne peut obtenir un résultat plus favorable si son adversaire est clairvoyant.

À un autre point de vue, les résultats équivalents obtenus lorsque chacun des deux joueurs agit au mieux de ses intérêts, chaque fois qu'il a le trait, constituent des points d'équilibre du jeu. L'existence d'un tel point au moins, dans tout duel fini de réflexion pure à information parfaite est précisément l'objet du théorème de Zermelo et Kalmar.

La conséquence? Une partie de jeu de dames, ou d'échecs, a une issue inéluctable, si les deux joueurs agissent au mieux de leurs intérêts. Fort heureusement pour ces jeux, nous ne savons pas laquelle. C'est le thème de l'une des nouvelles du livre de Benoît Rittaud intitulé « L'assassin des échecs » (Éditions Le Pommier).

G. C.

Duel
On appelle « duel » un jeu dans lequel les intérêts de deux joueurs (la banque est considérée comme un joueur) sont strictement contradictoires.

Information complète - incomplète
Lors d'un jeu, chaque joueur peut avoir une connaissance totale de la situation (position des pièces, manœuvres de l'adversaire) comme aux échecs. Le jeu est dit alors à information complète, par opposition à un jeu comme le poker où l'information est incomplète.

Réflexion pure
Dans un jeu de réflexion pure, le hasard n'intervient pas.

Situation gagnante
Situation reçue par un joueur qui lui permet de gagner s'il joue correctement, quelle que soit la réplique de son adversaire. Une situation gagnante a, parmi ses successeurs, au moins une situation perdante.

Situation perdante
Position qui interdit au joueur qui en hérite de gagner si l'adversaire joue correctement. Une situation perdante ne possède parmi ses successeurs que des situations gagnantes.

Stratégie gagnante
Ensemble des décisions successives qui mènent à la victoire

Tactique
Choix de l'ensemble des attitudes à tenir dans toutes les situations possibles.

Bonnes et mauvaises tactiques

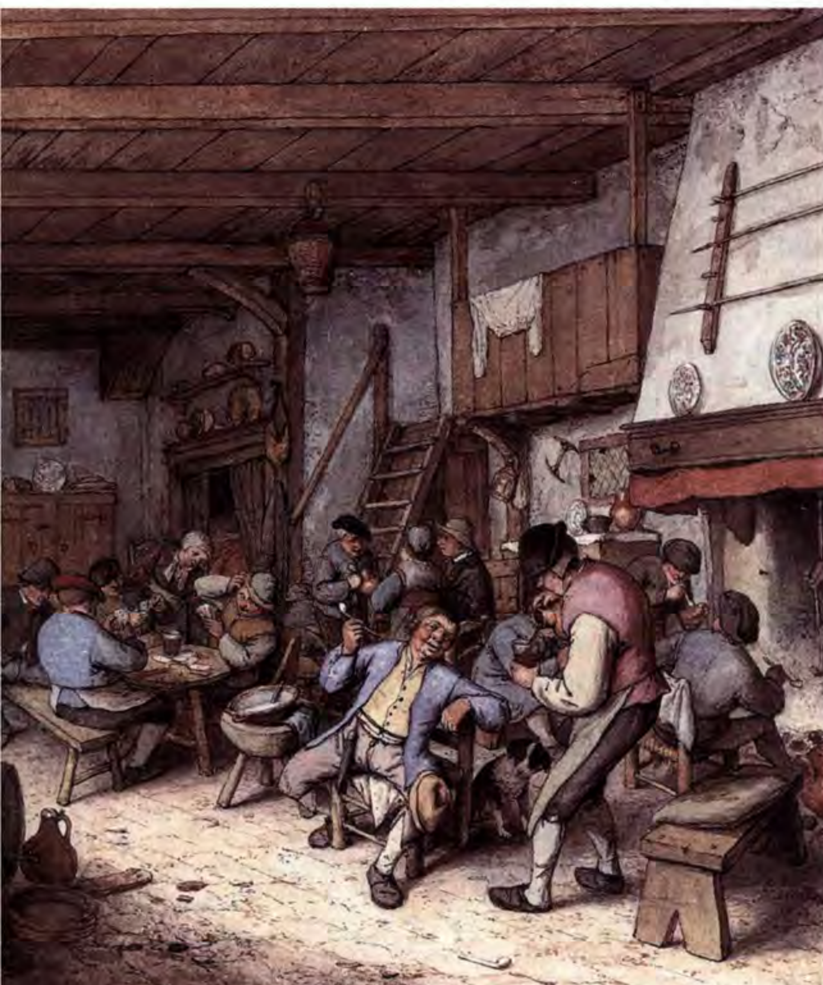
Au cours d'une partie, chaque joueur a autant de décisions à prendre qu'il a de coups à jouer. Voulant analyser la question, les mathématiciens ont eu l'idée de ramener toutes ces décisions à une seule. Comment ? En mettant le jeu sous sa forme normale.

Prenons le cas du piquet à cheval. Imaginez qu'on demande à chacun des adversaires d'écrire, en guise de coup unique et indépendamment de l'autre, une liste de 100 nombres compris entre 1 et 10, X_0, X_1, X_2, .. X_{99} pour le premier, Y_0, Y_1, Y_2, .. Y_{99} pour le deuxième.

X_n et Y_n représentent le nombre qu'ils ajouteraient au total n lors de la partie de piquet.

La partie est alors automatique et ne nécessite plus la présence des joueurs. Le premier joueur écrit le premier total $T = X_0$,. Le deuxième joueur ajoute Y_T pour un nouvelle somme

$S = T + Y_T$. Le premier ajoute X_S et le total passe à une nouvelle valeur de $T = S + X_S$; le jeu se poursuit jusqu'au but fixé.

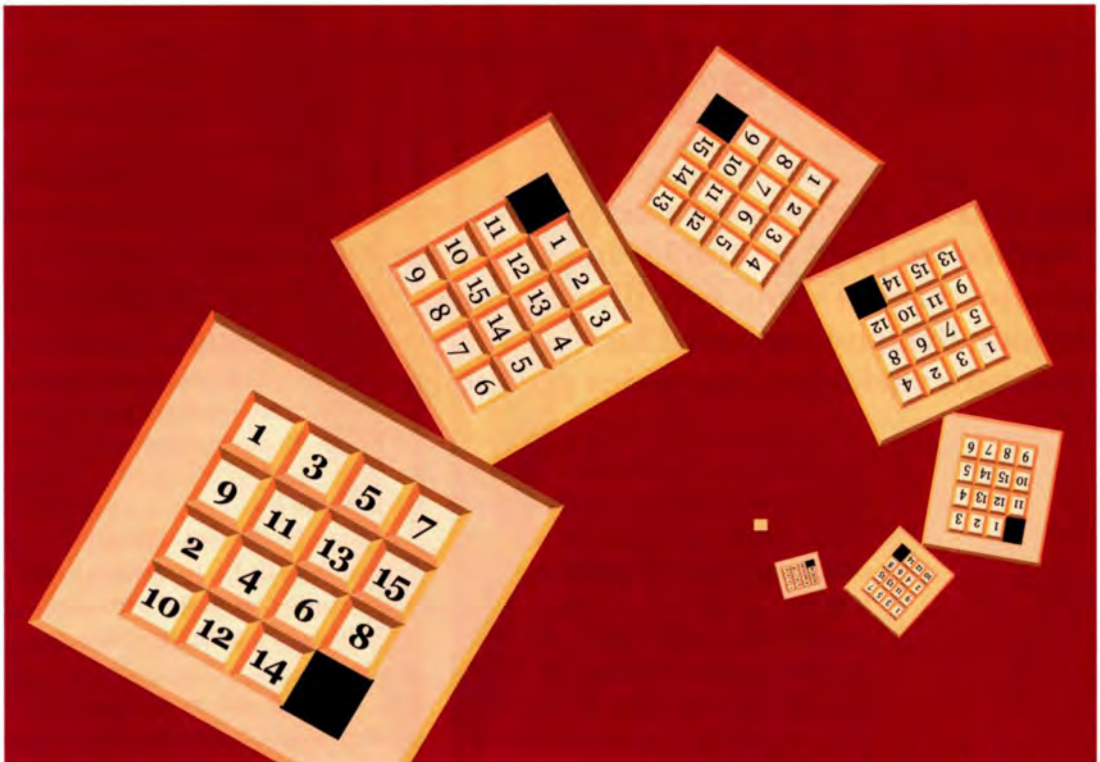


Le choix global de cette suite de nombres s'appelle une tactique. Si la recherche d'une tactique peut paraître artificielle lors de certains jeux, irréaliste pour d'autres, elle fait partie des pratiques courantes au bridge où, lors de la première levée, le déclarant a pour habitude de faire un *plan de jeu*, qui n'est autre que le choix d'une tactique. De même, dans certains jeux de casino comme le black jack, le nombre de cas et les choix tactiques (faut-il tirer une carte, doubler la mise, splitter ses paires ?) sont suffisamment réduits pour que chacun puisse dresser un tableau qu'il va appliquer systématiquement dans le but d'optimiser son espérance.

***Intérieur d'une taverne*, Adriaen Jansz van Ostade**, 1680, Musées Royaux des Beaux-Arts, Bruxelles.

par Michel Criton

Trois taquins



Le **premier taquin** (en bas à gauche) est tel qu'il se présente à l'achat : les quinze carrés sont ordonnés dans l'ordre naturel, à l'exception du 14 et du 15 qui sont intervertis.

Parmi les trois suivants, lesquels sont résolubles, c'est-à-dire lesquels peuvent se ramener à la position du premier sans sortir des dés du cadre ?

Solutions p. 94

 par Gilles Cohen

Quelques stratégies gagnantes pour les jeux de Nim

Les jeux de Nim ont été portés à la connaissance du plus grand nombre en 1961, quand le cinéaste Alain Resnais en a popularisé une version dans son film *L'année dernière à Marienbad*, version désignée aujourd'hui par « jeu de Marienbad ». En voici quelques variantes, parmi les plus célèbres.

Il est bien difficile de donner une définition satisfaisante d'un jeu de Nim. Il s'agit, naturellement, d'une famille de duels de réflexion pure à information complète du même type que le piquet à cheval ou le jeu des cailloux décrits dans l'article précédent. Le jeu de Marienbad, lui, se joue avec des allumettes. Bien sûr, peu importe les accessoires. On peut y désigner les positions par des nombres (piquet), des couples, ou plus généralement des suites d'entiers. Les situations gagnantes et perdantes de jeux comme les jeux de Nim se déterminent assez facilement de proche en proche en partant de la fin, à l'aide de graphes. Résoudre un jeu, c'est donc par exemple déterminer l'ensemble des situations perdantes, le noyau. La stratégie gagnante consistera donc, pour un joueur à qui on laisse une situation gagnante, de jouer pour laisser à son adversaire un élément du noyau.

Les situations gagnantes et perdantes de jeux comme les jeux de Nim se déterminent de proche en proche en partant de la fin.

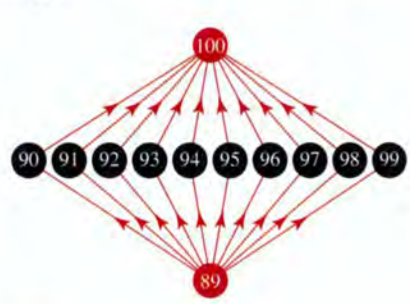
Le piquet

La règle du jeu.

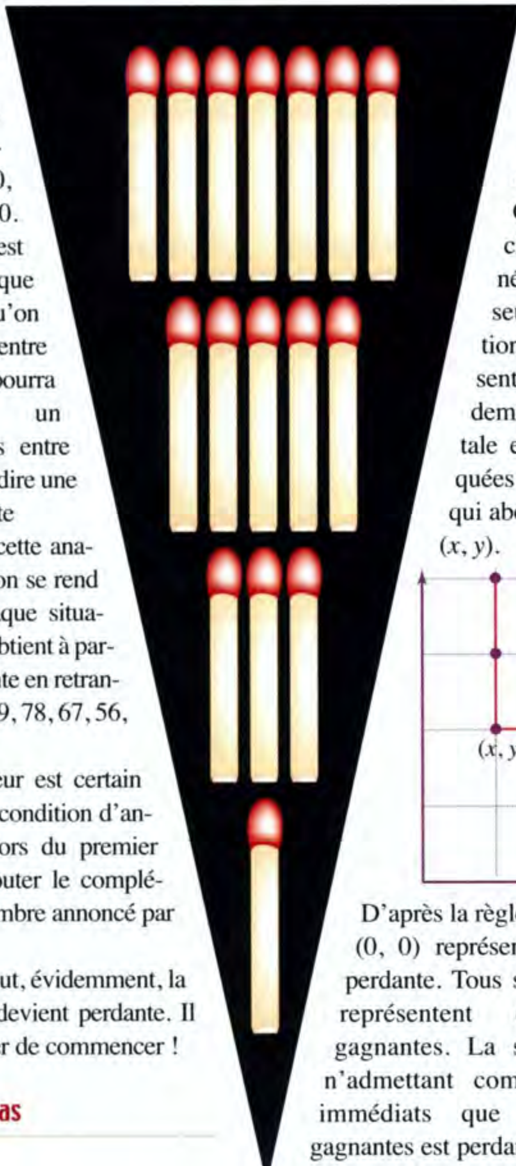
Les joueurs ajoutent alternativement des nombres de 1 à 10 au total. Le premier joueur part de 0. Le premier des deux joueurs à atteindre 100 gagne la partie.

Une situation sera représentée par le nombre laissé à l'adversaire. Ce nombre sera entouré d'un cercle bleu si la situation est perdante, d'un cercle jaune si elle est gagnante. On part du but, 100, perdant, naturellement, pour le joueur qui s'y trouve confronté.

Dix situations (donc gagnantes) permettent d'y parvenir en respectant les règles du jeu.



Ce sont les entiers de 90 à 99 qui permettent, en ajoutant un nombre compris entre 1 et 10, d'atteindre 100. En revanche 89 est perdant. Quel que soit le nombre qu'on ajoute, compris entre 1 et 10, on ne pourra qu'atteindre un nombre compris entre 90 et 99, c'est-à-dire une situation gagnante



En poursuivant cette analyse récurrente, on se rend compte que chaque situation perdante s'obtient à partir de la précédente en retranchant 11 : 100, 89, 78, 67, 56, 45, 34, 2, 12, 1.

Le premier joueur est certain de l'emporter, à condition d'annoncer « 1 » lors du premier coup, puis d'ajouter le complément à 11 du nombre annoncé par l'adversaire.

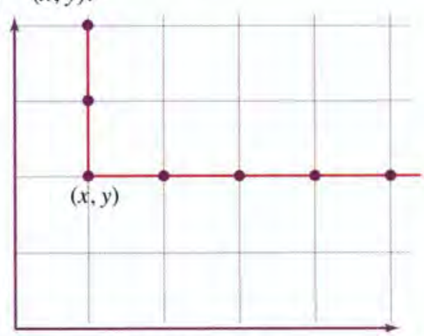
Avec 110 pour but, évidemment, la situation « 0 » devient perdante. Il vaut mieux éviter de commencer !

Le Nim à deux tas

La règle du jeu.

Deux tas contiennent des cailloux. Chaque joueur ôte à son tour un nombre de cailloux de son choix (non nul) d'un des deux tas. Celui qui ôte le dernier caillou gagne la partie.

Cette fois, les situations de jeu sont caractérisées par les couples d'entiers (x, y) où x représente le nombre de cailloux restant dans le premier tas, et y celui qui reste dans le deuxième tas. Elles peuvent être représentées par les sommets d'un quadrillage dans un plan rapporté à deux axes de coordonnées (Ox, Oy) (x est l'abscisse et y l'ordonnée). Les prédécesseurs d'une situation (x, y) sont représentés par les deux demi-droites horizontale et verticale, marquées d'un trait rouge, qui aboutissent au point (x, y).



D'après la règle du jeu, l'origine (0, 0) représente une situation perdante. Tous ses prédécesseurs représentent des situations gagnantes. La situation (1, 1), n'admettant comme successeurs immédiats que des situations gagnantes est perdante.

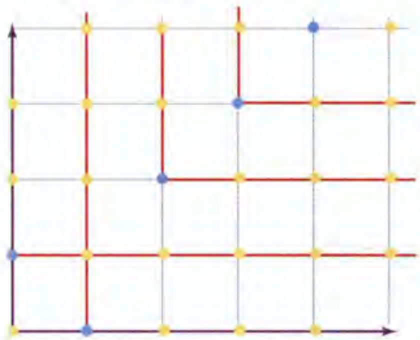
Et il est facile de montrer, par récurrence, qu'une situation (x, y) est :

- perdante si x est égal à y
- gagnante si x est différent de y.

• Si au début de la partie, les deux tas sont inégaux, le joueur jouant le premier coup dispose d'une stratégie gagnante qui consiste à égaliser les deux tas chaque fois qu'il a le trait.

• Si, au contraire, les deux tas sont égaux au départ, c'est le deuxième joueur qui peut adopter cette stratégie gagnante.

Variante : Si l'on modifie la règle du jeu en convenant comme au jeu de Marienbad que le joueur ayant retiré le dernier caillou a perdu la partie (sans autre modification), la situation (0, 0) devient gagnante, les situations (0, 1) et (1, 0) deviennent perdantes, la situation (1, 1) devient gagnante, et la classification des autres situations n'est pas modifiée.

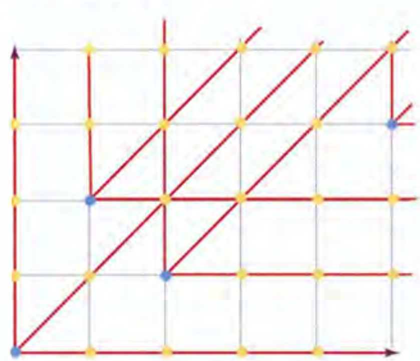


Sur la figure, les points bleus représentent les situations perdantes dans cette variante, et les traits rouges les chemins qui y mènent (et ne contiennent donc que des situations gagnantes).

Le Nim à deux tas, variante de Wythoff

La règle du jeu.

Deux tas contiennent des cailloux. Chacun des deux joueurs ôte alternativement un nombre de cailloux non nul de son choix d'un des deux tas, ou le même nombre (toujours non nul) des deux tas. Celui qui ôte le dernier caillou gagne la partie.



De même que pour le Nim à deux tas, les situations du jeu peuvent être représentées par les sommets d'un quadrillage. L'origine (0, 0) représente encore une situation perdante. Les situations qui l'admettent comme successeur immédiat sont gagnantes. Elles sont situées sur les trois demi-axes (rouges) qui y aboutissent. De même pour toutes les situations perdantes en bleu sur la figure. On voit, par exemple, que les situations (1, 2) et (2, 1) n'admettent comme successeurs immédiats que des situations gagnantes, de sorte qu'elles sont perdantes.

Du coup, les situations qui y aboutissent, représentées sur les trois demi-axes rouges qui y mènent, sont gagnantes…

(3, 5) et (5, 3) sont les suivantes à n'admettre pour successeurs que des situations gagnantes..

On construit ainsi, de proche en proche, la liste des situations perdantes, qui sont, à la symétrie près :

(1, 2) ; (3, 5) ; (4, 7) ; (6, 10) ; (8, 13) ; (9, 15) ; (11,1 8) ; (12, 20) ; (14, 23) ; (16, 26) ; (17, 28) ; (19, 31) ; (21, 34) ; (22, 36) ; (24, 39) ; (25, 41) ; (27, 44) ; (29, 47) ; (30, 49) ; (32, 52) ; (33, 54) ; (35, 57) ; (37, 60) ; (38, 62)…

On peut remarquer que pour la situation perdante numéro n, (x, y), x est le plus petit nombre ne figurant dans aucune des situations perdantes précédentes, et y est égal à $x + n$.

En résolvant ce système de relations de récurrence, Wythoff a fait la découverte suivante :

Si (x, y) représente la situation perdante numéro n, x est le plus grand nombre entier inférieur à n fois Φ, et y le plus grand entier inférieur à n fois Φ^2, où Φ est le fameux "nombre d'or", qui a pour valeur :

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\Phi \approx 1{,}618033988749894848$$

Le jeu de Nim général

La règle du jeu.

Plusieurs tas contiennent des allumettes. Les deux joueurs ôtent alternativement un nombre non nul d'allumettes de leur choix d'un des tas. Celui qui ôte la dernière allumette gagne la partie.

Les situations du jeu sont, dans le cas général, caractérisées par des suites $(x, y, z, t, \ldots)$ de nombres représentant le contenu de chaque tas.

Une représentation graphique, naturellement possible pour le Nim à deux tas, devient irréaliste dans le cas général. Heureusement, une étude algébrique reposant sur la numération binaire permet de répertorier les situations perdantes.

Ayant ainsi écrit dans le système de numération de base 2 chacun des nombres $x, y, \ldots$ d'allumettes des tas en présence, placez-les les uns au-dessus des autres, comme pour effectuer une addition. On montre que la situation est perdante si la somme des chiffres figurant sur chaque colonne est paire (situation paire).

Selon que la situation initiale est paire ou non, c'est le joueur B ou le joueur A qui dispose d'une stratégie gagnante consistant à laisser le jeu dans une situation paire chaque fois qu'il a l'initiative.

Exemple de la situation initiale (1, 3, 5, 7).

1	=	0	0	1
3	=	0	1	1
5	=	1	0	1
7	=	1	1	1
TOTAL		2	2	4

La situation initiale est donc perdante. Elle l'est encore dans la variante où le dernier à jouer a perdu. Vous pouvez, comme dans le film *L'année dernière à Marienbad*, vous montrer grand prince et laisser votre adversaire commencer !

G. C.

Et si vous cherchiez à votre tour ?

Pour terminer, voici deux jeux dont la solution est laissée à votre sagacité.
Bonne recherche !

Le doublé

Cette fois, il n'y a qu'un seul tas. Chaque joueur doit retirer à son tour de jeu un nombre de cailloux de son choix compris entre 1 et le double du nombre retiré par son adversaire au coup précédent. Le joueur jouant le premier coup doit retirer un ou deux cailloux, à son choix. Le vainqueur est celui qui enlève le dernier caillou.

La casse

Au départ, on ne dispose que d'un tas de cailloux. A son tour, chaque joueur choisit un tas de plus d'un caillou et le « casse » à son choix en deux ou trois tas. Le vainqueur est celui qui n'a laissé à son adversaire que des tas de 1 caillou.

par Hervé Lehning

Le choix d'une stratégie

La théorie des jeux est une branche des mathématiques s'intéressant à des activités aussi peu ludiques que la guerre ou l'économie, afin d'établir les meilleurs stratégies possibles. Néanmoins, ses résultats sont utilisables dans le domaine des jeux proprement dits.

Quand John von Neumann crée la théorie des jeux pendant la seconde guerre mondiale, il s'intéresse aux stratégies optimales dans un domaine qu'on hésite aujourd'hui à qualifier de jeu : celui de la guerre. Suite à cette naissance militaire, la théorie des jeux a trouvé un terrain d'application plus pacifique dans le domaine de l'économie. C'est pourquoi, John Nash - l'autre grand nom de la théorie des jeux - a reçu le prix Nobel d'économie en 1994. Bien sûr, cette théorie est également utile pour étudier les jeux à proprement parler comme les échecs, le poker ou le bridge.

Existence d'une stratégie gagnante

Les jeux de somme nulle sont les jeux comme les échecs, les dames ou le poker, où les gains de l'un sont les pertes de l'autre. Ce n'est pas le cas général. Certains jeux sont à somme non nulle : tous les joueurs peuvent gagner ou perdre. La guerre comme le combat politique ou le monde des affaires en montrent bien des exemples. Dans tous les cas, le problème essentiel d'un joueur rationnel est d'établir une stratégie l'amenant à la victoire.

Zermelo a montré en 1913 qu'il existait toujours une stratégie optimale dans les jeux de somme nulle.

Pour fixer les idées, examinons le jeu d'échecs et considérons l'ensemble des positions terminales gagnantes pour les blancs (celles où les noirs sont échec et mat). Nous lui adjoignons l'ensemble des positions menant à une position terminale gagnante pour les blancs en deux coups quelque soit le coup des noirs entre-temps. Ce sont les situations des fameux problèmes d'échecs.

En itérant cette méthode, nous obtenons un ensemble G correspondant aux positions à partir desquelles les blancs peuvent assurer la victoire quel que soit le jeu des noirs. Si la position initiale appartient à G, on en

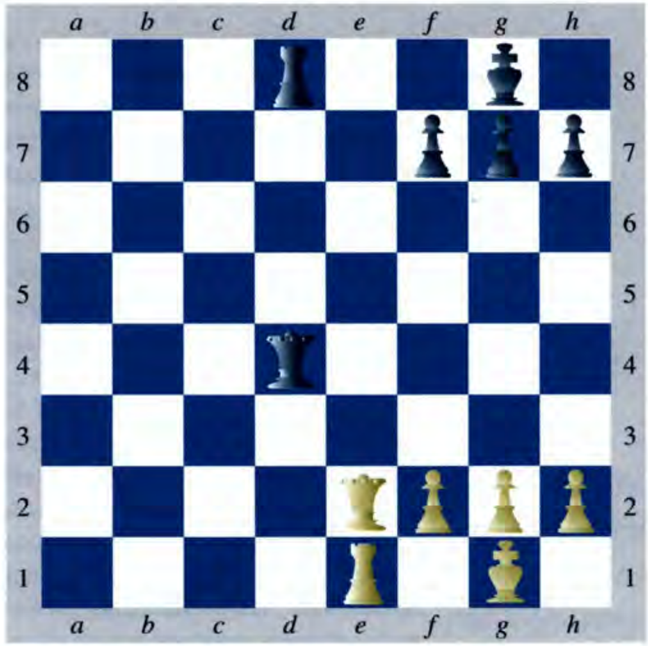
déduit qu'il existe une stratégie gagnante pour les blancs. On peut reprendre le raisonnement avec les positions terminales nulles puis avec les noirs.
En utilisant ce raisonnement par récurrence à rebours, Zermelo a montré en 1913 qu'il existait toujours une stratégie optimale dans les jeux de somme nulle : soit les blancs peuvent gagner à coup sûr et il existe une stratégie gagnante, soit ils peuvent faire nul soit la même chose pour les noirs.

Minimisation du gain maximal de l'adversaire

En pratique, ce raisonnement ne permet pas de trouver une stratégie gagnante au jeu d'échecs puisque le nombre de coups possibles est énorme. Une manière d'établir une stratégie intéressante repose sur la méthode du *minimax* de von Neumann. L'idée de départ est d'attribuer une valeur à chaque position pour chacun des deux joueurs : au échec, ce choix se fait en fonction du nombre de pièces, de leurs positions et des possibilités de mouvement.
Une fois cette fonction définie, le meilleur choix pour jouer un coup est non pas de maximiser la valeur de sa nouvelle position mais de minimiser la meilleure valeur que l'adversaire peut obtenir après avoir joué à son tour. Cette idée peut s'appliquer sur un seul coup ou sur une profondeur de plusieurs coups. Elle est utilisée en informatique pour faire jouer les ordinateurs aux échecs ou à d'autres jeux du même type.

Le choix d'une stratégie

De façon générale, on appelle stratégie un plan d'action complet pour chaque joueur. Deux joueurs sont donc face à face et ont le choix entre diverses stratégies. Pour fixer les idées, imaginons les choix des généraux Bradley et von Kluge à la fin de la bataille de Normandie en 1944. Le front allemand vient d'être percé. Von Kluge a le choix entre la retraite pour rétablir un front plus tenable derrière la Seine ou l'attaque pour tenter de repousser les alliés. Bradley, parti loin de ses réserves, peut les attendre, les faire monter rapidement ou continuer à attaquer. Il estime que ses gains probables sont les suivants, von Kluge étant aussi rationnel que lui a la même estimation :



Les blancs jouent et font mat en deux coups.

Bradley/von Kluge	Retraite	Attaque
Attendre	5	10
Monter réserve	2	3
Attaque	7	0

Matrice donnant l'efficacité estimée des stratégies : pour Bradley, la plus efficace est d'attendre alors que von Kluge attaque. La moins efficace est d'attaquer alors qu'il attaque aussi.

Sur cette matrice, on remarque que la stratégie « faire monter les réserves » de Bradley a toujours de moins bons résultats que celle qui consiste à attendre. On dit qu'elle est dominée, on peut donc l'éliminer. Le choix doit donc s'opérer entre « attendre » et « attaquer ».
En général prudent, Bradley examine le plus mauvais résultat possible suivant le choix de sa stratégie. C'est dans le cas où il attaque et von Kluge aussi. Il élimine ce risque. Il reste donc le seul choix d'attendre. Le meilleur résultat de l'allemand est alors obtenu en se retirant. Celui-ci fait également ce choix rationnel et commence à se retirer. Hitler en décida autrement en lui ordonnant d'attaquer ce qui provoqua le désastre attendu.
Dans cet exemple, les deux joueurs ont choisi de minimiser le maximum du gain possible de leur adversaire (stratégie du minimax). Nous avons ici un exemple d'équilibre en stratégie pure.

Intervention des probabilités

Il n'en existe pas toujours même dans les cas de jeux à somme nulle. Le jeu « *pierre, papier, ciseaux* » en fournit un exemple très simple. Dans ce jeu, deux joueurs cachent une main derrière le dos et la dévoile simultanément sous l'une des formes : *pierre*, *papier* ou *ciseaux*. Le *papier* l'emporte sur la *pierre* mais perd contre les *ciseaux*, il fait match nul contre le *papier*, etc.
On obtient la matrice de gains suivante pour le joueur A, ceux de B sont opposés puisqu'il s'agit d'un jeu à somme nulle :

A/B	pierre	papier	ciseaux
pierre	0	– 1	1
papier	1	0	– 1
ciseaux	– 1	1	0

Matrice des gains du joueur A du jeu « pierre, papier ciseaux ».

Il n'existe aucun équilibre en stratégie pure. Cependant, ce jeu se jouant plusieurs fois, on a intérêt à changer de stratégie. Par exemple, A peut choisir aléatoirement pierre une fois sur six, papier une fois sur trois et sinon ciseaux. Dans ce cas, les gains moyens de gain de A dans chacun des choix de B sont :

B	pierre	papier	ciseaux
gain moyen de A	– 1/6	1/3	– 1/6

Si B connaissait cette stratégie, il aurait intérêt de jouer aléatoirement *pierre* et *ciseaux*. De façon générale, si A joue aléatoirement *pierre*, *papier* et *ciseaux* avec des probabilités p_A, q_A et r_A où $p_A + q_A + r_A = 1$ nous obtenons le tableau :

B	pierre	papier	ciseaux
gain moyen de A	$q_A - r_A$	$r_A - p_A$	$p_A - q_A$

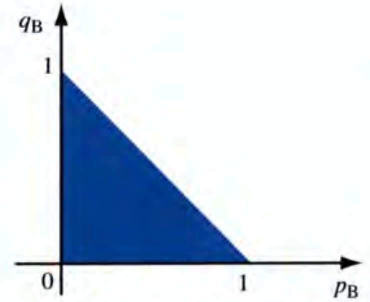
Donc, si B joue de même avec les probabilités p_B, q_B et r_B, le gain moyen de A est égal à :

$$\text{gain}_A = p_B(q_A - r_A) + q_B(r_A - p_A) + r_B(p_A - q_A)$$

Une stratégie prudente pour A est de choisir p_A, q_A et r_A de façon à minimiser le gain moyen maximum possible de B :

$$\text{gain}_B = p_B(r_A - q_A) + q_B(p_A - r_A) + (1 - p_B - q_B)(q_A - p_A)$$

où le couple (p_B, q_B) appartient au triangle ci-dessous :



Domaine de variation du couple (p_B, q_B).

La fonction gain_B étant du premier degré en p_B et q_B, ses valeurs extrêmes ne peuvent être atteintes qu'en des sommets du triangle. Son maximum est donc celui des trois nombres :
$r_A - q_A, p_A - r_A$ et $q_A - p_A$.
Il est minimal si $p_A = q_A = r_A$ c'est-à-dire si A choisit *pierre*, *papier* et *ciseaux* de façon aléatoire équiprobable. Bien sûr, B a intérêt à jouer de même.

Équilibre de Nash

Si A change de stratégie, il ne peut qu'avoir un résultat inférieur et de même pour B, c'est pourquoi on dit que ce choix est un équilibre pour les deux joueurs. En 1928, John von Neumann a montré qu'il en était de même pour tout jeu à somme nulle. Plus précisément, il existe toujours un équilibre en stratégies mixtes même s'il n'en existe pas en stratégies pures. En 1954, John Nash a généralisé ce résultat au cas des jeux à sommes non nulles.

Illustrons cette notion d'équilibre avec le *jeu des prisonniers*. Deux complices viennent de commettre un crime. La police les arrête mais manque de preuves pour les inculper. On les place dans des pièces séparées et leur propose à chacun l'impunité s'il avoue qu'ils ont commis le crime ensemble. Chacun sait que trois cas peuvent se présenter :

- S'il avoue le délit et que son complice se tait, il sera libre et ce dernier écopera de dix ans de prison.
- Si les deux restent silencieux, ils écoperont tous deux de six mois de détention.
- S'ils avouent tous les deux, chacun fera cinq ans de prison.

Ce jeu est à somme non nulle c'est-à-dire que la somme des gains pour les joueurs n'est pas toujours la même. Il est encore possible de le résumer au moyen d'un tableau :

A/B	dénonce	ne dénonce pas
dénonce	(5, 5)	(0, 10)
ne dénonce pas	(10, 0)	(0,5, 0,5)

Ce tableau résume les conséquences de chaque stratégie des prisonniers.

Il soulève une question de coopération. Si les deux joueurs pouvaient s'entendre, ils auraient intérêt de décider de coopérer et refuser d'avouer mais comme ils ne peuvent le faire, ils vont tous les deux avouer pour éviter d'écoper de dix ans de prison. Ce choix est un équilibre de Nash.

Nous retrouvons le même jeu dans les guerres de tranchée de 1914. Deux petites unités au contact peuvent choisir de ne pas se combattre mais si elle combattent, la première qui tire prend un avantage. Le même dilemme est à l'œuvre. Cependant comme le jeu se répétait souvent, certains points du front restaient calmes. Une coopération tacite s'était installée.

H. L.

John Nash a montré l'existence d'équilibres dans les jeux à somme non nulle.

La loi de Tartakover en théorie des jeux

par Élisabeth Busser

John Conway

A quatre ans déjà, il connaissait la liste des puissances de 2, à onze il voulait être mathématicien. Il y a réussi, puisque John Conway , devenu un grand mathématicien anglais, enseigne aujourd'hui à l'Université de Princeton (États-Unis). Il a d'abord œuvré dans plusieurs domaines « sérieux » des mathématiques, à commencer, en 1968, par les empilements de sphères dans un espace de dimension 24, où chaque sphère en touche exactement 196 560 autre, excusez du peu…C'est là qu'il a commencé à avoir l'impression de faire des mathématiques. Sa remarquable originalité n'a depuis cessé de se développer et de s'appliquer à de multiples domaines. Théorie des groupes et création des nombres surréels, cette classe de nombres qui inclut les réels, les cardinaux infinis et les nombres infinitésimaux, plus proches de zéro que tout réel, théorie des nombres, formes quadratiques pour les mathématiques « classiques ».

John Conway a inventé le Jeu de la vie, jeu extraordinaire qui n'a pas besoin de joueur.

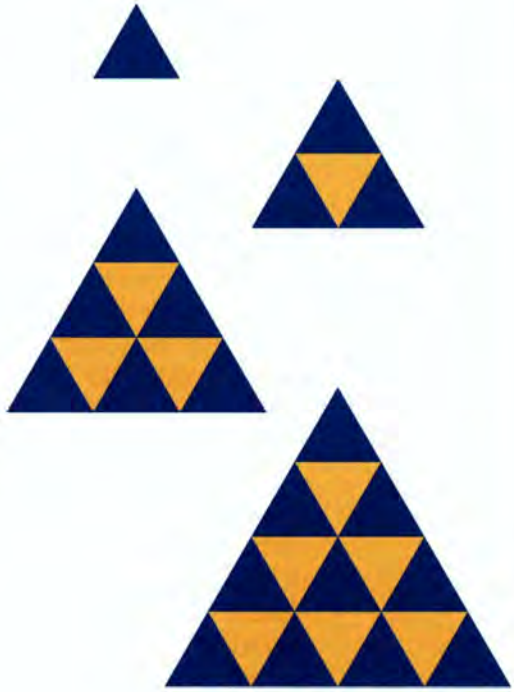
John Conway né en 1937

Théorie des nœuds, théorie des jeux, problèmes de découpage, codages et pavages pour des mathématiques plus ludiques.

Grand amateur de backgammon dans sa jeunesse, Conway a continué dans cet univers ludique en se prenant de passion pour les différentes facettes de tout ce qui est jeu mathématique. Il fait passer dans ses conférences, ses inventions et ses publications sa conviction du lien intime entre jeux et mathématiques. En témoignent les nombreux jeux dont Conway est l'inventeur. Il y a les jeux papier-crayon, qui se jouent à deux joueurs comme *sprouts game* (1967), où l'on doit à tour de rôle joindre sans croisements des points sur des courbes, *Phutball* ou *le football philosophique*, sur une grille 19×15, ou qui se jouent seul, comme le *Jeu de la Vie*. Ce jeu, que Conway reprend de John von Neumann dans les années 70 est un fantastique passe-temps solitaire, véritable automate cellulaire, auquel le ludologue américain Martin

Combien de triangles ?

Dans son *Livre des Nombres*, Conway nous donne un bon « truc » pour deviner le terme suivant d'une suite. Combien de triangles au total dans ces figures ?
Conway suggère pour de nombreux cas, en l'occurrence celui-ci, de faire une table de différences et d'observer une régularité. Ici, cela donne :



1	5	13	27	48	78	118
4	8	14	21	30	40	
4	6	7	9	10		
2	1	2	1			

les différences troisièmes alternant entre 2 et 1, si n est pair, on aura

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{8} \text{ triangles,}$$

et si n est impair, on en aura

$$\frac{n(n+2)(2n+1)-1}{8}.$$

Gardner a consacré un long exposé dans la revue *Scientific American* en 1970. Très éclectique, Conway s'intéresse aussi aux cubes « *Soma* », ces sept assemblages différents, l'un de trois cubes, les six autres de quatre, en quelque sorte un tangram en 3D et publie dans *Winnings ways for your mathematical plays*, qu'il écrit avec E.R. Berlekamp et R.K. Guy, une longue étude sur les puzzles à réaliser avec ces cubes. Il imagine également un algorithme permettant de retrouver quel jour de la semaine se situe une date donnée mais, original comme toujours, utilise pour ce faire que le 4 avril (04/04), le 6 juin (06/06), le 8 juillet (08/08), le 10 octobre (10/10) et le 12 décembre (12/12) sont chaque année tous le même jour de la semaine (*doomsday*) Il en est d'ailleurs de même, remarque-t-il des 09/05 et 07/11, et l'algorithme « Doomsday » est né.
John Conway, malgré ses innombrables idées, publie peu. On lui doit cependant le *Livre des Nombres*, écrit avec R. K. Guy, où tout lecteur, quel que soit son niveau mathématique, trouvera sans peine un intérêt pour les divers développements de la notion de nombre. « Attention – dit la préface- ce livre contient des sujets hautement addictifs » !

Le jeu de la vie

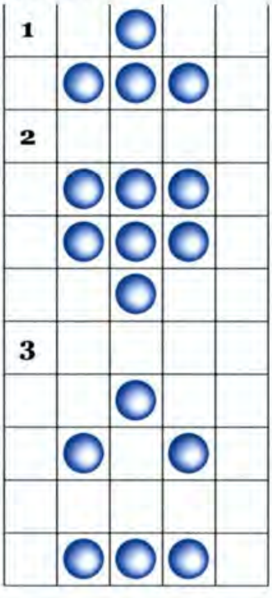
C'est à partir de systèmes évolutifs comme les automates cellulaires de John von Neumann que Conway a mis au point le Jeu de la Vie. Il se joue à une personne, sur un papier quadrillé, en principe illimité, où chaque case est soit vide, soit habitée par une cellule, qu'on représente par un point. Comme dans la vraie vie, les cellules vivent et meurent selon des règles extrêmement simples :

- Toute cellule ayant au plus une voisine meurt d'isolement,
- Toute cellule entourée de quatre voisines meurt d'étouffement,
- Toute case vide voisine d'exactement trois cellules donne naissance à une nouvelle cellule qui s'y fixe. Les naissances et les morts sont simultanées.

Si vous voulez jouer au *Jeu de la Vie*, utilisez la méthode préconisée par son inventeur :

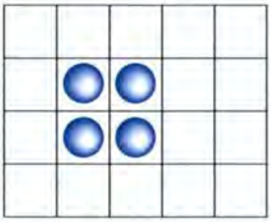
- Figurez les cellules initiales par des jetons noirs,
- Identifiez tous les jetons qui vont mourir en posant dessus un jeton noir par-dessus,
- Identifiez les cases libres pouvant donner lieu à une naissance en posant un jeton blanc.
- Vérifiez le tout, puis supprimez toutes les piles de deux jetons noirs et remplacez les jetons blancs par des noirs.

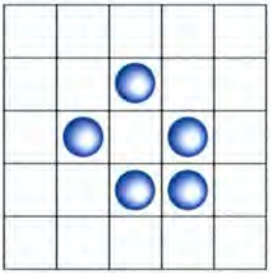
Voici par exemple l'histoire de la vie d'un tetramino :

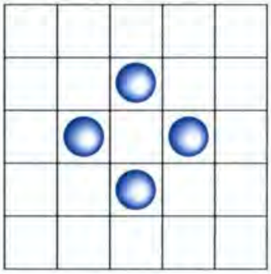


Suivant la disposition initiale, la population de cellules évolue de façon variée. Il est par exemple immédiat que ne survivent que les cellules comptant deux ou trois voisines. Les règles édictées par Conway, si elles rendent a priori imprévisible le destin de la population de départ, vont cependant permettre de dégager des situations-clé à l'évolution répertoriée :

- Il y a les *morts subites* : toute figure constituée de deux cellules juxtaposées est promise à une mort immédiate,
- Il y a des *formes stables*, celles que Conway appelle les *vies tranquilles*, par exemple :

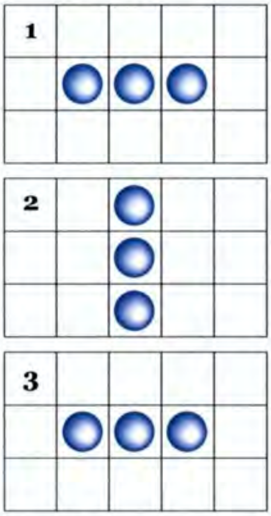




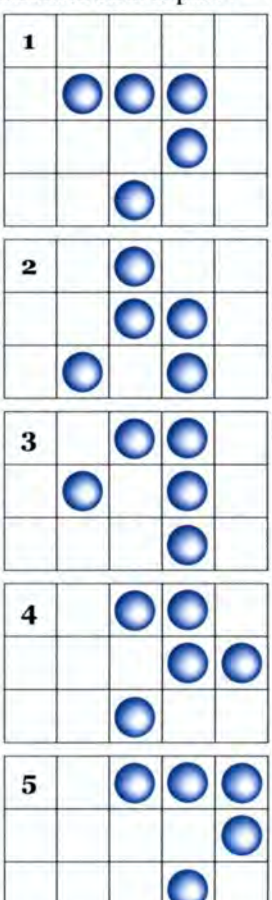


- Il y a des *oscillateurs*, formes qui se retrouvent identiques à elles-mêmes et au même emplacement au bout de plusieurs générations.

Un oscillateur de période 2 :

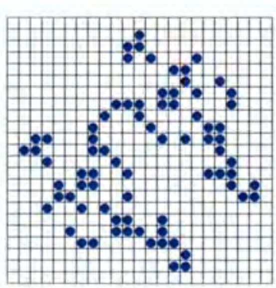


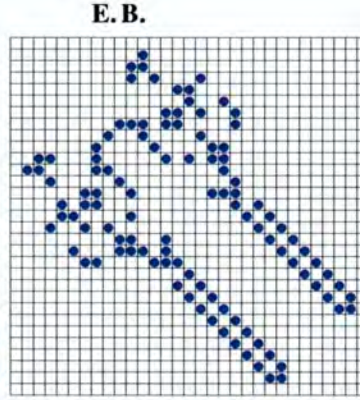
- Il y a des *vaisseaux*, qui se retrouvent, au terme d'un nombre fini de générations, translatés dans le plan :



Le Jeu de la Vie est devenu aujourd'hui une véritable science, avec ses spécialistes, ses sites Internet, ses résultats remarquables (Une figure non symétrique au départ tend à devenir symétrique) ses propres théorèmes et évidemment ses programmes informatiques. Il est en effet devenu un classique de la programmation ; on l'a même vu poser en sujet de concours.
La fascination de ces développements n'empêche pas les questions comme celle de l'expansion sans limites : une population peut-elle croître indéfiniment ? Conway avait des doutes dans les années 70, mais la réponse est « oui » : on a trouvé à de multiples reprises des figures capables de s'étendre à l'infini, comme « l'extenseur » par exemple. Dans cette figure, le nombre de cellules devient de plus en plus grand, même si celles-ci n'occupent qu'un étroite bande du plan. On a par la suite créé des configurations qui recouvrent le plan petit à petit seulement : ce sont les recouvreurs du plan, d'abord en 2069 cellules (1970), puis en 187 cellules (1995), et on n'a sûrement pas fini de découvrir au jeu inventé par Conway, aux confins des mathématiques, de la physique et de la biologie, des ouvertures extraordinaires et souvent inattendues.

E. B.





L'*extenseur* dans sa position initiale et dans sa 32[e] génération ; sa "tête" est périodique et ses "bras" s'allongent à chaque génération.

Problèmes* de jeux de Nim

1. Le jeu de chiffres

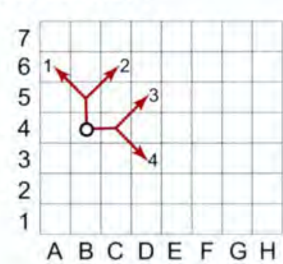
Julien et Bernard jouent à un jeu qui consiste à écrire un nombre à plusieurs chiffres. Le joueur qui commence écrit le premier chiffre à gauche, obligatoirement différent de 0, et les joueurs jouent ensuite alternativement en écrivant les chiffres suivants à droite du chiffre ou des chiffres déjà écrits. Ils doivent respecter les règles suivantes :
• après un 9, on peut écrire n'importe quel chiffre
• après un chiffre inférieur à 9, on doit écrire un chiffre plus grand
• chacun des chiffres doit apparaître au plus 3 fois dans le nombre.
Le premier joueur ne pouvant écrire aucun chiffre a perdu. Julien commence.
Quel chiffre doit-il écrire pour être sûr de gagner, quel que soit le jeu de Bernard ?

2. Le jeu de pions

Bernard et Gaston jouent au jeu suivant.
Ils disposent d'une bande de 15 carrés numérotés de 1 à 15 et de 15 pions dans une boîte. Au départ, aucun pion n'est posé sur la bande. Bernard et Gaston jouent à tour de rôle. Bernard commence. À chaque coup, il peut prendre au plus 6 pions dans la boîte et les poser sur les cases libres de son choix. Gaston, lui, à chaque fois que c'est son tour de jouer, peut enlever de la bande un nombre quelconque de pions (au minimum un pion) à condition qu'il soient sur des cases consécutives. Il doit alors les remettre dans la boîte.
En combien de coups, au minimum, Bernard peut-il poser tous les pions sur la bande, quel que soit le jeu de Gaston ?

3. Le jeu du cavalier

Un cavalier d'échecs se trouve initialement sur la case B4 d'un échiquier de 8 cases sur 7 cases. Étant sur une case quelconque, il peut effectuer l'un des quatre mouvements indiqués sur la figure (à condition qu'il soit réalisable sans sortir de l'échiquier), et seulement l'un de ces quatre là.
Les deux joueurs déplacent le cavalier à tour de rôle jusqu'à ce qu'un joueur ne puisse plus jouer. Le dernier joueur ayant pu jouer est alors déclaré vainqueur.
Vous jouez le premier.
Quel doit être votre premier mouvement si vous voulez être sûr de gagner, quel que soit le jeu de votre adversaire (chaque mouvement est désigné par son numéro sur la figure ci-dessous) **?**



4. Prises bicolores

Le "bicolore" est un jeu qui oppose deux joueurs. Ces deux joueurs ont devant eux un tas constitué de 91 pions blancs et 92 pions noirs.
Ils doivent, alternativement, ôter de 1 à 5 pions, à leur convenance, ces pions retirés du tas étant de couleurs de leur choix.
Est perdant le premier qui prend le dernier pion blanc, ou qui laisse dans le tas moins de six pions noirs.
C'est à vous de jouer ; parmi les 20 possibilités de prise qui s'offrent à vous, choisissez celle(s) qui vous permet(tent) de gagner contre toute défense de votre adversaire.

5. La revanche

Jean-Pierre et Gilles, deux redoutables bretteurs numériques, s'affrontent une nouvelle fois. Jean-Pierre, qui a perdu la fois précédente, a aujourd'hui le choix du jeu. Il a apporté avec lui un sac de pions et déclare à Gilles : « Tu vas placer sur cette table un nombre de pions au moins égal à la moitié du contenu du sac (le sac contient un nombre pair de pions).
Ensuite, nous retirerons des pions du tas ainsi formé à tour de rôle. Tu auras le droit d'en ôter 2, 6, ou 11 d'un coup, à l'exclusion de tout autre nombre.
Quant à moi, je pourrai en prendre 3, 4, ou 7 à chaque fois, à l'exclusion de tout autre nombre.
Le premier qui ne peut plus prendre de pions en respectant ces règles sera déclaré perdant. Souhaites-tu commencer, ou jouer le deuxième ? »
Gilles flaire alors le piège, et s'aperçoit que le jeu est inéquitable pour lui, quel que soit celui qui commence.
Quel est le nombre minimum de pions contenus dans le sac de Jean-Pierre, lorsqu'il est arrivé ?

6. Galanterie suspecte

Héloïse et Abélard jouent : devant eux se trouve un tas de 1993 pièces. Ils ont le droit de prendre, chacun à son tour, au moins une et au plus n pièces dans le tas. Celui qui prend la dernière pièce a perdu ! Par galanterie, prétend-il, Abélard laisse Héloïse jouer la première… Mais, en réalité, le rusé a compris qu'ainsi il pouvait gagner la partie à coup sûr !
Le nombre *n* est compris entre 25 et 250. Quelle est sa valeur ?

7. Duel numérique à O. K. Corrall

Jean-Pierre et Gilles, redoutables lanceurs de nombres, jouent au "nombre cible". Il décident d'atteindre 1992 à
ls nombres 1, 8, ou 11, en
uniquement l'addition. Un
commence, à partir de zéro
oisit l'un des trois nombres
risés qui constitue donc le
mier total. De même, son
lversaire choisit un des trois
ombres, l'ajoute au total
précédent, et annonce le
nouveau total…
Les deux joueurs jouent alternativement selon le même principe. Le premier joueur qui est contraint de dépasser 1992 a perdu, et son dversaire est par conséquent nant.
:rre vient d'annoncer "92 !".
va gagner ? Quel est le rochain total que le futur gagnant doit annoncer ?

* Problèmes issus du Championnat des Jeux Mathématiques et Logique

Solutions

1• Le jeu de chiffres

Une stratégie gagnante pour Julien, qui joue en premier, consiste à écrire 8. Son adversaire doit alors, d'après la règle, écrire 9. Julien écrit à nouveau 8, ce qui oblige Bernard à écrire 9 encore une fois. Julien écrit une troisième fois 8, Bernard écrit 9 (il n'a pas le choix). Julien gagne alors en écrivant 7, après quoi Bernard ne peut plus jouer (8 et 9 ont déjà été écrits 3 fois).

2• Le jeu de pions

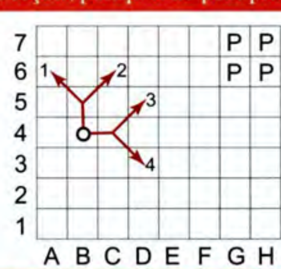
La position A représentée ci-dessous est une position gagnante pour Bernard. En effet, quel que soit le jeu de Gaston, qui peut retirer au plus trois pions, Bernard pourra finir au coup suivant. C'est d'ailleurs la seule position gagnante à partir de laquelle Bernard peut gagner en 1 coup.

A	•	•	•	4	•	•	•	8	•	•	•	12	•	•	•
B	•	2	•	4	•	6	•	8	•	10	•	12	•	14	•
C	•	2	•	4	•	6	•	8	•	10	•	12	13	14	15

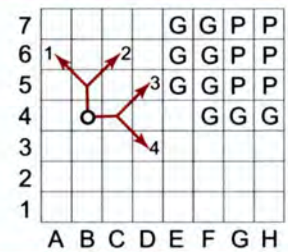
Pour arriver à la position A, Bernard doit jouer au moins trois coups.
La position B lui permet d'arriver à A en un coup, quel que soit le jeu de Gaston, donc de gagner en deux coups.
Deux coups sont nécessaires à Bernard pour arriver à la position B, puisque huit pions sont dposés sur la bande. Il peut, par exemple, commencer par réaliser la position C (son premier coup), puis arriver à la configuration B (2 ème coup), puis à A (3 ème coup), et enfin recouvrir la bande (4 ème coup).
Il faut donc au minimum **4 coups** à Bernard pour gagner, quel que soit le jeu de son adversaire.

3• Le jeu du cavalier

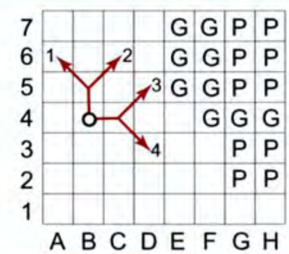
Les positions G6, G7, H6 et H7 sont perdantes pour celui qui les reçoit, puisqu'il ne peut plus jouer.



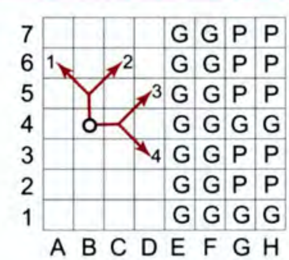
Les cases E5, E6, E7, F4, F5, F6, F7, G4, G5, H4 et H5 sont donc gagnantes pour celui qui les reçoit, puisqu'il peut alors déplacer le cavalier sur une des quatre cases perdantes pour son adversaire.

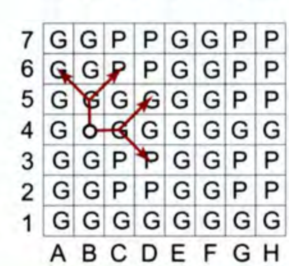


On montre de même que les 4 cases G2, G3, H2 et H3 sont perdantes pour celui qui les reçoit, car il ne peut jouer que sur une case gagnante pour son adversaire.



En continuant ainsi, on montre que les cases D3 et C6 sont perdantes, alors que les cases A6 et D5 sont gagnantes. Les positions 2 et 4 sont perdantes pour celui qui les reçoit. Elles sont donc gagnantes pour le premier joueur s'il les laisse à son adversaire.





Le premier mouvement du joueur qui commence doit donc être **2 ou 4** s'il veut être sûr de gagner quel que soit le jeu de son adversaire.

4• Prises bicolores

Le jeu peut être simplifié en décidant d'écarter cinq pions noirs avant le début de la partie, ce qui laisse 91 pions blancs et 87 pions noirs, et de modifier la règle comme suit : "Est perdant celui qui prend le dernier pion blanc ou le dernier pion noir".

La situation S où il reste un pion blanc et un pion noir est alors perdante pour celui qui la reçoit.

Désignons par N le nombre de pions noirs restants et par B le nombre de pions blancs restants lors d'une situation donnée.

La situation " $3 \leq N + B < 7$ ", avec "$N\,B > 0$" est gagnante pour celui qui la reçoit puisqu'il peut atteindre la situation S en ôtant de 1 à 5 pions (en veillant à ne pas retirer tous les pions blancs ni tous les pions noirs).

Par contre, la situation " $N + B = 8$ " est perdante puisqu'elle ne permet d'atteindre qu'une situation gagnante : quel que soit le nombre de pions retiré par le joueur qui la reçoit, son adversaire pourra, en ôtant le complément de ce nombre à 6, atteindre la situation S.

On peut ainsi montrer que toute situation où N + B est un multiple de 6 augmenté de 2 est perdante, et que les autres situations sont gagnantes si $N > 0$ et $B > 0$.

$$91 + 87 = 178 = 6 \times 29 + 4.$$

En prenant deux pions, vous laisserez à votre adversaire une situation perdante.

Il y a donc trois solutions :
- 2 pions noirs
- 2 pions blancs
- 1 pion blanc et 1 pion noir.

5• La revanche

Examinons, pour chaque nombre n de pions restant sur la table, si cette situation est gagnante ou perdante pour chacun des deux joueurs, lorsqu'il reçoit cette situation (c'est-à-dire lorsque c'est son tour de jouer), à partir de 0 pion, position évidemment perdante pour celui qui la reçoit.

On obtient ainsi le tableau ci-contre, où l'on observe qu'au-delà de 31 pions, les situations semblent toutes perdantes pour Gilles (... et gagnantes pour Jean-Pierre).

On peut démontrer par récurrence, que pour $n > 31$, la situation où il reste n pions sur la table est toujours gagnante pour Jean-Pierre, et perdante pour Gilles. En effet, c'est vrai pour $n = 32$ et pour $n = 33$. Supposons que ce soit vrai jusqu'à $n > 34$. Si Jean-Pierre reçoit la situation où il reste $n + 1$ pions, il peut en enlever seulement deux, et laisser une situation perdante à Gilles. Si c'est Gilles qui reçoit cette situation, il peut enlever 2 pions, 6 pions ou 11 pions, et dans tous les cas, il laisse une situation gagnante à Jean-Pierre.

Gilles doit donc sortir au moins 32 pions du sac, qui contient par conséquent au moins 64 pions.

6• Galanterie suspectes

La situation S où il reste une seule pièce est une situation perdante pour celui qui la reçoit.

Les situations où le nombre p de pièces restantes vérifie $2 < p < n + 1$ sont des situations gagnantes.

Par contre, la situation où $p = n + 2$ est perdante : en effet, quel que soit le nombre de pièces ôtées par un des joueurs, son adversaire, en retirant le complément de ce nombre à $n + 1$, peut lui laisser la situation S.

On montre de même que les situations où

$$n + 3 < p < 2n + 2$$

sont gagnantes, et que la situation où $p = 2n + 3$ est perdante. En généralisant, on peut démontrer que les situations où

$$p = (k + 1)\,n + k + 1$$

sont gagnantes.

La position de départ où $p = 1993$ est perdante pour celui qui la reçoit, autrement dit pour le premier joueur si $1993 = k\,(n + 1) + 1$, c'est-à-dire si $n + 1$ est un diviseur de 1992.

$$1992 = 2^4 \times 3 \times 83.$$

Les diviseurs de 1992 compris entre 25 et 250 sont 83, 166, et 249.

Le problème a donc 3 solutions : $n = 62$, $n = 165$, et $n = 248$.

7• Duel numérique à O. K. Corrall

Le jeu pratiqué par Jean-Pierre et Gilles est équivalent à un jeu de Nim à un seul tas. Une analyse rétrograde à partir de 1992 fait apparaître une périodicité de 19, mais la période n'apparaît qu'après les 16 premiers nombres, qui sont hors période. On peut observer que les "écarts" successifs 2, 3, 2, 2, 3, 2 et 5 entre les positions gagnantes (pour celui qui les annonce), se répètent de 1976 à 1957, puis de 1957 à 1938, etc. Il apparaît que ces totaux perdants pour celui qui les reçoit sont les nombres multiples de 19 plus 0, 5, 7, 10, 12, 14, ou 17. **C'est Gilles qui va gagner**. Il peut annoncer soit **93** = 92 + 1 = 19 × 4 + 17, soit **100** = 92 + 8 = 19 × 5 + 5.

Nombres croisés

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A								■	
B			■						
C							■		
D	■								
E					■				■
F								■	
G						■			
H									
I									■

HORIZONTALEMENT

A Un nombre et son cube.
B Nombre premier.
Un nombre et son cube.
C Un nombre et son carré.
Vaut **B1** + 1.
D Anagramme de 98664211.
E Le produit des chiffres vaut 12.
Suite de chiffres entre lesquels la différence est la même.
F Anagramme de 9975411.
G La somme des chiffres vaut 9.
Cube.
H Anagramme de 875532100.
I Palindrome.

VERTICALEMENT

a Sa renommée a fait le tour du monde, c'est le cas de la dire !
Suite de chiffres entre lesquels la différence est la même.
b Palindrome, son carré, son cube.
c Le produit des chiffres non nuls vaut 4.
d Un nombre et son carré.
e Anagramme d'une suite de chiffres consécutifs.
Carré de **f2**.
f Palindrome.
Racine carrée d'***e2***.
g Vaut **B1** – 1.
Suite de chiffres entre lesquels la différence est la même.
h La somme des deux premiers chiffres vaut celle des deux derniers.
Le produit des chiffres vaut 0 et la somme vaut 12.
i Les deux premiers chiffres sont les mêmes que les deux derniers.
Suite décroissante de chiffres entre lesquels la différence vaut 3.

Solution
Nombres croisés

	a	b	c	d	e	f	g	h	i
A	3	1	2	9	7	9	1	■	2
B	1	1	■	1	6	4	0	9	6
C	4	1	1	6	8	1	■	1	2
D	■	2	1	8	9	1	6	4	6
E	4	1	1	3	■	4	5	6	■
F	5	1	1	9	7	9	4	■	6
G	6	3	0	0	0	■	3	3	3
H	7	3	1	5	5	8	2	0	0
I	8	1	4	6	6	4	1	8	■

Solutions : les trois taquins

Dans le **second taquin**, les nombres impairs ont d'abord été rangés, suivis des nombres pairs. Nous pouvons passer de la première configuration à la seconde par les permutations : (2 ; 9 ; 5 ; 3), (7 ; 4 ; 10 ; 13), (11 ; 6), (8 ; 12 ; 15). Ces permutations peuvent se décomposer en 9 transpositions : (2 ; 9), (9 ; 5), (5 ; 3), (7 ; 4), (4 ; 10), (10 ; 13), (11 ; 6), (8 ; 12), (12 ; 15). Le nombre de transpositions étant impair, il est impossible d'atteindre cette configuration.

Dans le **troisième taquin**, les nombres sont rangés en une spirale, de l'extérieur vers l'intérieur. Si nous déplaçons les pions 1, 2, 3 vers la gauche, et 4, 5, 6 vers le haut, afin que le trou soit placé comme dans la configuration de départ, les permutations sont : (5 ; 8 ; 15 ; 10 ; 9 ; 13 ; 7 ; 14 ; 11), et (6 ; 12). Elles se décomposent également en 9 transpositions. On ne peut donc réaliser cette configuration.

Dans le **quatrième taquin**, les nombres étaient rangés ligne par ligne, formant un "serpent numérique". On passe de cette configuration à la première par trois transpositions : (5 ; 8), (6 ; 7), et (13 ; 15). Cette configuration n'est donc pas réalisable non plus.

Surprises arithmétiques

La théorie des nombres a longtemps été considérée comme un domaine accessible aux amateurs, c'est-à-dire aux mathématiciens non professionnels, et comme un jeu purement intellectuel, parce qu'elle a longtemps été éloignée des applications pratiques. Ces deux affirmations ne sont plus valides aujourd'hui. En effet, l'arithmétique est la principale clé des méthodes modernes de cryptage omniprésentes dans notre société. Par ailleurs, même si les problèmes d'arithmétique peuvent souvent s'énoncer sous une forme accessible au grand public, leur résolution fait souvent appel à des mathématiques très spécialisées. Mais heureusement, les problèmes liés à la numération et aux propriétés arithmétiques les plus simples comme la divisibilité constituent toujours une mine inépuisable de jeux mathématiques capables de captiver l'amateur.

 par Gilles Cohen

Méthodes numériques pour jeux mathématiques

Les techniques numériques, à première vue, ne revêtent pas un caractère particulièrement ludique. Et les jeux mathématiques qui y font appel sont souvent plus surprenants par leur formulation que par leur méthode de résolution. Pourtant, quelques arguments forts, essentiellement empruntés à l'arithmétique, peuvent laisser pantois d'admiration.

"J'ai deux fois l'âge que vous aviez quand j'avais l'âge que vous avez. Et quand vous aurez l'âge que j'ai, nous aurons à nous deux 72 ans."

Quel est l'âge des deux personnages ?

Le système de deux équations à deux inconnues auquel mène ce problème on ne peut plus célèbre n'a rien de ludique, mais avouez qu'en l'énonçant, vous prenez un malin plaisir à décontenancer votre interlocuteur !

La solution : si on appelle Y l'âge de celui qui parle (et X celui de l'autre personnage), le système se ramène à :

$$Y = 2(X - (Y - X))$$
$$Y + X + 2(Y - X) = 72$$

soit

$$3Y = 4X$$
$$3Y = X + 72$$

Il en ressort X = 24 et Y = 32.

Il en est de même des problèmes conduisant à une équation du deuxième degré, voire d'un degré supérieur, comme celui

Suites arithmétiques et géométriques

Dans une *suite arithmétique*, chaque terme est obtenue en ajoutant au précédent un nombre fixe r appelé raison. La suite s'écrit alors $a, a + r, a + 2r, \ldots$

Si une telle suite de n nombres admet pour dernier terme le nombre b, égal à $a + (n - 1)r$, la somme de ses termes est égale à

$$n\,\frac{a+b}{2}.$$

Dans une *suite géométrique*, chaque terme est obtenue en multipliant le précédent un nombre fixe r appelé encore raison. La suite s'écrit alors $a, a.r, a.r^2, \ldots$

Si r est différent de 1, la somme de ses termes est égale à

$$a\,\frac{1-r^n}{1-r}.$$

des *bœufs du soleil*, posé à Eratosthène par Archimède (voir en page 7). Les séries, appelées progressions jusqu'au milieu du XX^e siècle, donnèrent également lieu à des jeux mathématiques savoureux dont la résolution en elle-même n'avait rien de palpitant. Il suffisait en général de savoir calculer la somme de ces progressions, essentiellement arithmétiques ou géométriques (voir encadré).

Les séries géométriques sont à l'origine d'une autre technique qui, cette fois, donne lieu à des résolutions plus esthétiques. Il s'agit de la conversion des nombres dans une base de numération autre que la numération décimale. Et plus précisément la numération binaire et la numération ternaire, qui sont le plus souvent exploitées dans ces jeux. Les problèmes de pesées (voir l'article d'Hervé Lehning en page xxx) ont été les premiers à les utiliser, en particulier sous la plume du *précurseur* Bachet de Méziriac. Mais on les trouve aussi dans les tours de magie mathématiques (voir l'article intitulé "*Devine mon nombre* !") ou encore en théorie des jeux, plus précisément dans les jeux de Nim.

Fascinante parité

On se rapproche cette fois de l'arithmétique des nombres entiers, qui va fournir les méthodes de résolution les plus puissantes et les plus étonnantes. Le maître mot ? La divisibilité.

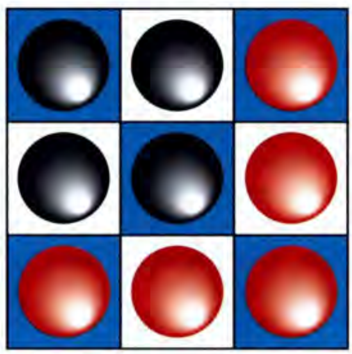
Une relation simple en apparence, mais à l'origine de véritables joyaux. Qu'y a-t-il en effet de plus simple que la divisibilité par 2, autrement dit la parité ? Regardez pourtant les remarquables preuves qu'elle véhicule. Les deux problèmes sont tirés des ouvrages publiés à partir des "*Jeux mathématiques du Monde*" d'Elisabeth Busser et Gilles Cohen (solutions à la suite).

La division nationale

"Lors de la première journée d'un championnat de football, 10 matches opposent les 20 équipes. Les dix équipes qui reçoivent ont toutes marqué un nombre différent de buts, compris entre 0 et 9, et, choses curieuse, il en est de même des dix équipes visiteuses."

Est-il possible que tous les écarts soient différents ?

Les pions réversibles



"Ce petit damier de 3 cases sur 3 contient 9 pions réversibles, rouges d'un côté et noirs de l'autre. Au départ, ils affichent tous une face blanche, sauf quatre d'entre eux, occupant un carré de deux cases sur deux. Vous avez le droit de les retourner trois par trois, selon une ligne, une colonne ou une diagonale, autant de fois que vous le souhaitez."

Est-il possible de les faire afficher tous la même couleur ?

Les solutions, vous l'aurez compris, font intervenir la notion de parité.

Dans le cas de la *division nationale*, la somme algébrique des scores est nulle, donc paire. La valeur absolue d'un nombre étant de même parité que le nombre, la somme des écarts est donc paire. Or, si les écarts étaient tous différents, ils seraient égaux à tous les entiers de 0 à 9, dont la somme, 45, est impaire. Dans le cas des pions réversibles, on constate que seul un des quatre pions situés aux quatre coins est noir. Or, chaque opération autorisée inverse la couleur d'un nombre pair de ces pions de coin, zéro ou deux. En conséquence, on ne pourra jamais obtenir 0 ou 4 pions noirs dans ces coins.

Le jeu des congruences

De la divisibilité à la congruence, il n'y a qu'un pas. On dit que deux entiers sont congrus modulo n s'ils ont le même reste dans la division par n.

Cartes sur table

"Sur vingt cartes, on a inscrit des nombres strictement positifs dont la somme est égale à 38."

Peut-on forcément faire deux tas de cartes de total 19 ?

La réponse ? Oui, bien sûr. Classez les vingt cartes dans un ordre quelconque et considérez la suite croissante formée par le premier nombre, la somme des deux premiers, la somme des trois premiers, ... jusqu'à la somme des vingt. Les vingt restes de ces nombres dans la division par 19 ne pouvant prendre que 19 valeurs, deux de ces restes sont égaux. C'est que la différence de ces nombres est 19, ce qui implique que la somme des cartes comprises entre ces deux rangs est 19.

La propriété fondamentale de la congruence, c'est qu'elle se conserve par somme et par produit.

Autrement dit, si a et a' sont congrus modulo n, si b et b' sont congrus modulo n, alors

- aa' et bb' sont congrus modulo n,
- $a + a'$ et $b + b'$ sont congrus modulo n.

Une conséquence importante est l'étude résiduelle des carrés, utile dans de nombreux problèmes. Ainsi :

Le général Georges Déployé

"Chacune des unités du général compte le même nombre d'hommes (moins de 100). Le général peut déployer deux unités en carré ainsi que trois unités à condition de se joindre à ses troupes."

Quel est le nombre d'éléments d'une unité ?

On raisonne dans un premier temps modulo 5 où les carrés sont égaux à 0, 1 ou 4.

- $2n + 1$ n'est égal à un tel carré que si $n = 2$, 0 ou 4 modulo 5.
- $3n + 1$ n'est égal à un tel carré que si $n = 3$, 0 ou 1 modulo 5.

La seule intersection est obtenue quand n est un multiple de 5.

On raisonne dans un deuxième temps modulo 8 où les carrés sont encore égaux à 0, 1 ou 4.

- $2n + 1$ n'est égal à un tel carré que si $n = 0$ ou 4 modulo 8.
- $3n + 1$ n'est égal à un tel carré que si $n = 5$, 0 ou 1 modulo 8.

La seule intersection est obtenue quand n est un multiple de 8.

Conséquence : n est un multiple de 40. 40 convient, 80 non (161 n'est pas un carré).

L'unité du général compte 40 hommes.

Les diviseurs

Le dernier outil des problèmes faisant intervenir l'arithmétique est l'étude et le recensement des diviseurs d'un nombre entier. De très nombreux problèmes s'y ramènent, mais nous nous contenterons, pour terminer cet article comme il a commencé, d'un autre problème d'âge hautement célèbre.

Les trois enfants

"– Saurez-vous deviner les âges de mes trois enfants ? demande cette mère de famille à son voisin mathématicien. Le produit de leurs âges est 36, la somme est le numéro de cette maison.

– Ces renseignements ne me suffisent pas, rétorque l'homme de l'art.

– Et si je vous confie que l'aîné aime le chocolat ?

– Dans ce cas, je peux les deviner."

Quel est l'âge des trois enfants ?

Il s'agit d'énumérer toutes les façons de décomposer 36 en produit de trois facteurs, et d'associer la somme des facteurs à chaque décomposition :

1	1	36	38
1	2	18	21
1	3	12	16
1	4	9	14
1	6	6	13
2	2	9	13
2	3	6	11
3	3	4	10

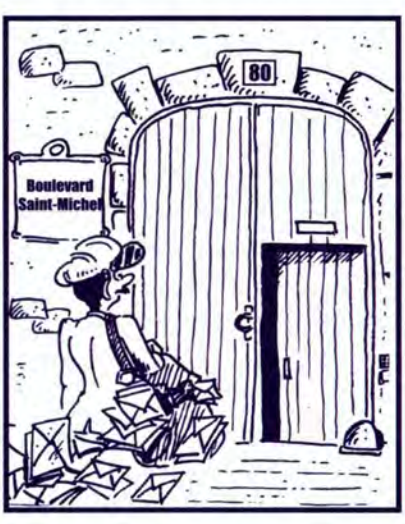
Seule la somme 13 empêche le mathématicien de conclure, ce qui n'est plus le cas lorsqu'il sait qu'il y a un aîné. La mère de famille a un aîné de 9 ans et deux jumeaux de 2 ans.

G. C.

Le problème impossible

Ce problème, initialement proposé par Martin Gardner dans la revue *Scientific American* il y a une trentaine d'années, nous vaut des courriers réguliers de gens qui en cherchent en vain la solution. Voici donc, sinon une solution complète, tout au moins une mise sur la voie "en images"...

Pierre et Serge sont deux mathématiciens géniaux qui habitent le même immeuble, et que leur concierge tente constamment de coller.



Scénario : Michel Criton
Dessins : Laurent Van Offel

Après avoir montré un papier à Pierre, elle lui dit : "Voici leur produit".
Puis, faisant de même avec Serge : "Et voici leur somme".

Lequel de vous deux devinera ces deux nombres ?

Solution

Désignons par P le produit des deux nombres, et par S leur somme.

Déclaration n° 1 : P ne peut posséder moins de 5 diviseurs, c'est-à-dire qu'il ne peut être ni un nombre premier, ni le carré ou le cube d'un nombre premier, ni le produit de deux nombres premiers. Il reste donc pour P : 12, 16, 18, 20, 24, 28, 30, 32, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 54, 56, 60, …

Déclaration n° 2 : Étudions les valeurs possibles de S. Pour chacune d'elles, si on considère toutes ses partitions en sommes de deux nombres au moins égaux à 2, deux cas peuvent se présenter.

Ou bien il n'apparaît que des partitions en paires de nombres dont le produit est un des produits possibles, et dans ce cas, cette valeur de S est une valeur possible. Ou bien apparaît au moins une partition en une paire de nombres dont le produit possède moins de 5 diviseurs (valeur éliminée plus haut), et dans ce cas, cette valeur de S est à rejeter (dans ce cas, en effet, Serge n'aurait pu dire "Je le savais !").

Les valeurs de S restantes sont alors : 11, 17, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 47, 51, 53, 57, 59, 65, 67, 71, …

Déclaration n° 3 : Reprenons les valeurs de P possibles après la déclaration n° 1. Si Pierre connait maintenant les deux nombres, c'est que le nombre P qu'il détient n'est décomposable que d'une seule façon en un produit de deux nombres dont la somme appartient à la liste des sommes restant possibles après la déclaration n° 2.

Ainsi 18 = **2** × **9** = 3 . 6 convient , mais 30 = **2 . 15** = 3 . 10 = **5 . 6** ne convient pas.

Les valeurs de P rescapées sont maintenant : 18, 24, 28, 50, 52, 54, 76, …

Déclaration n° 4 : Le nombre S que détient Serge n'est décomposable que d'une seule façon en une somme de deux nombres dont le produit appartient à la liste des produits restants après la déclaration n° 3. On peut vérifier (à la main, c'est assez long…) que la seule solution est 17 = 4 + 13 ; 4 × 13 = 52.

Les deux nombres de la concierge étaient donc 4 et 13.

Devine mon nombre

Les tours de magie ont toujours fait bon ménage avec les jeux mathématiques. Martin Gardner, qui était magicien avant d'être mathématicien, en est le symbole. Mais plusieurs siècles auparavant, déjà, les premiers adeptes des jeux mathématiques faisaient appel à des magiciens pour mettre en scène leurs inventions numériques.

"D*eviner le nombre que quelqu'un aura pensé*", tel est l'amorce des problèmes plaisants et délectables du premier ouvrage de jeux mathématiques en langue française écrit au début du XVII^e^ siècle par Bachet de Méziriac. C'est dire si ce type de devinette arithmétique est ancien, d'autant qu'on en retrouve plusieurs siècles auparavant chez les auteurs arabes, en particulier chez Al Kindi, dès le IX^e^ siècle. Plusieurs auteurs européens, y compris Bachet, s'approprieront d'ailleurs ces énoncés sans vergogne, énoncés dont on doit en particulier l'importation à Léonard de Pise, le fameux Fibonacci. On trouve dans le remarquable ouvrage de William Rouse Ball *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes*, édité à la fin du XIX^e^ siècle, un chapitre résumant les notions arithmétiques mises en jeu dans ces problèmes et citant les sources arabes, contrairement à une autre anthologie des jeux mathématiques parue à la même époque, sous la signature d'Emile Fourrey*, qui occulte totalement les emprunts faits à cette civilisation.

Arithmétique élémentaire

Les ressorts des problèmes de ce type empruntent d'abord essentiellement à l'arithmétique élémentaire. L'idée est très simple : si on demande à son interlocuteur d'effectuer, à partir du nombre auquel il aura pensé, des opérations successives pour parvenir à un résultat, il faut être capable, à partir de ce résultat, d'effectuer la suite inverse d'opérations, mais en un temps suffisamment court pour que l'annonce du nombre pensé apparaisse comme magique. La performance paraîtra d'autant plus miraculeuse si on a permis des arrondis. Voici par exemple un jeu adapté d'un problème de Bachet :

"Faites penser à un nombre. Demandez à votre interlocuteur de le multiplier par 3, puis de diviser le

produit par 2, quitte à l'arrondir à l'entier supérieur. Faites à nouveau multiplier par 3 et encore diviser par 2, toujours en arrondissant si besoin. Demandez le résultat."
En moins d'une seconde, vous annoncerez à votre interlocuteur le nombre pensé.

Un rapide calcul permet de savoir qu'un nombre de la forme 4n se transforme en $9n$, que $4n + 1$ devient $9n + 3$, que $4n + 2$ se métamorphose en $9n + 5$, et enfin que $4n + 3$ donne $9n + 8$.
Le décodage se fait, au choix, de deux façons. Ou bien on multiplie par 4, et on prend le quotient entier de la division par 9, ou bien on reconnaît grâce à la preuve par 9 dans lequel des quatre cas on se trouve, et on commence par déterminer n avant de conclure.

Les identités remarquables fournissent une mine de petits problèmes semblables. Ainsi, chez Fourrey, on trouve le problème suivant :

"Faites penser à un nombre, demandez de l'élever au carré, puis d'ôter ce carré du carré du nombre immédiatement supérieur au nombre pensé. Demandez le résultat."
Immédiatement, vous annoncerez le nombre pensé.

Évidemment, comme le dit Fourrey, le nombre pensé est la petite moitié du résultat. Tout vient de l'identité :

$$(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1.$$

Autre problème trouvé chez le même auteur, utilisant quelques propriétés élémentaires de la numération :

"Dites à une personne de retrancher d'un nombre de trois chiffres ce nombre renversé. Demandez-lui de vous indiquer le chiffre des unités de cette différence."

Vous pourrez alors lui annoncer intégralement quelle est cette différence.

Vous vous convaincrez facilement que la différence est de la forme $a9b$, où la somme $a + b$ est égale à 9. Autre tour, où l'on ne demande même pas la moindre information :

"Disposez 100 jetons. Demandez à l'interlocuteur A de prendre un certain nombre de ces jetons, inconnu de vous, compris entre 10 et 20. Demandez à l'interlocuteur B d'en prendre quatre fois plus. Puis, demandez à A de donner 5 jetons à B, demandez enfin à B de donner à A quatre fois plus de jetons qu'il en reste à A."
Sans rien demander, annoncez à B ce qu'il lui reste !

Est-il besoin de préciser que c'est 24, et que vous pouvez généraliser le problème ?
A propos de devinettes concernant plusieurs joueurs, Rouse Ball cite un problème beaucoup plus délicat faisant intervenir les questions de divisibilité.

Divisibilité et congruence

"Demandez à cinq interlocuteurs de penser chacun à un nombre entier. Après concertation entre eux, chacun doit inscrire sur un morceau de papier, le produit de son nombre par la somme des quatre autres. On vous donne alors les quatre plus petits de ces nombres."
Indiquez à chacun à quel nombre il a pensé.

L'auteur, cette fois, ne dit pas que vous devez le faire en moins d'une seconde, et il faudra la plupart du temps un papier et un crayon. Mais avant cela, il

Emile Fourrey n'est pas un grand mathématicien, il est même fort peu connu, et nous avons eu toutes les peines du monde à recueillir des informations biographiques le concernant. Pourtant, il fait partie de ces auteurs incontournables qui ont brillamment réussi à concentrer en quelques ouvrages la somme de quarante siècles de récréations mathématiques.

est bon de vérifier les deux propriétés suivantes : d'abord, les nombres pensés sont fonctions croissantes des résultats calculés par les interlocuteurs ; ensuite, chacun des nombres pensés, sauf peut-être le plus grand, est plus petit que la somme des autres. Il ne reste plus alors qu'à exprimer de toutes les façons possibles chaque résultat que vous possédez sous la forme d'un produit de deux facteurs, et de remarquer que la somme des deux facteurs cherchés doit être la même dans chaque cas : c'est la somme des cinq nombres pensés. Nous vous laissons ainsi trouver les cinq nombres quand les quatre produits qui vous sont confiés sont 180, 294, 418 et 444.

Les choses se compliquent encore avec l'utilisation, dans un problème cité par Bachet, du théorème chinois. On rappelle que ce théorème garantit l'existence d'un nombre dont les restes de la division par plusieurs nombres fixés sont donnés, à condition que les nombres fixés soient premiers entre eux.

"Demandez à un interlocuteur de penser à un nombre entier compris entre 0 et 59. Demandez-lui alors de vous indiquer le reste de ce nombre dans la division par 3, par 4 et par 5."
En moins d'une seconde, vous annoncerez alors le nombre pensé.

Bachet vous demande, préalablement, d'avoir trouvé trois nombres : un multiple de 20 de reste 1 modulo 3 (il vous suggère 40), un multiple de 15 de reste 1 modulo 4 (il vous suggère 45), enfin un multiple de 12 de reste 1 modulo 5 (il vous suggère 36).
Si les restes indiqués par votre interlocuteur sont a, b et c, vous dit-il, calculez alors $40\,a + 45\,b + 36\,c$, et prenez-en le reste dans la division par 60. Ce sera le nombre pensé par votre interlocuteur ! Saurez-vous justifier sa méthode ?

Tours de cartes

Qui dit magicien, pense à des tours de cartes. Nombreux parmi ces derniers sont d'inspiration mathématique. Si certains font appel à la théorie des permutations, comme ceux mis en évidence par le mathématicien et révolutionnaire Gaspard Monge, d'autres reposent fréquemment sur l'arithmétique, et plus spécialement sur les bases de numération. En voici deux dont nous vous laissons découvrir la clé. Ils sont tous deux des effets de la numération de base 3. Rouse Ball nous apprend que le premier, puisé chez Bachet, a été généralisé en 1813 par Gergonne.

"Prenez un jeu de 27 cartes. Durant toute la manipulation, les cartes seront tenues face apparente.
• Distribuez ces cartes "à la manière de Bachet", c'est-à-dire en trois paquets, une à une, en partant du bas. Ainsi, les trois premières cartes du jeu initial seront au sommet des trois paquets partiels de 9 cartes. Demandez à un spectateur de repérer une carte et de vous indiquer dans quel paquet il se trouve.
• Rassemblez les cartes "à la manière de Gergonne", c'est-à-dire mettez ce paquet entre les deux autres, et recommencez à distribuer le jeu "à la manière de Bachet". Demandez à nouveau au spectateur dans quel paquet se trouve sa carte.
• Mettez là encore le paquet désigné entre les deux autres. Distribuez le jeu "à la manière de Bachet", mais en repérant, cette fois, la carte du

milieu (la cinquième) dans chacun des trois paquets. Demandez une dernière fois à votre interlocuteur dans quel paquet se trouve sa carte.

• Vous pouvez maintenant l'annoncer : c'est la cinquième carte du paquet, celle que vous avez repérée. En général, vous impressionnerez fortement l'assemblée !"

Sauriez-vous expliquer ce miracle ? Vous pourrez, si vous le désirez, construire le jeu de cartes nécessaire pour le second.

"Demandez maintenant à votre cobaye de choisir mentalement un nombre entier compris entre 0 et 80. Montrez-lui successivement les 4 cartes suivantes. Pour chacune il doit vous indiquer une des trois réponses :

"BLEU" si son nombre y est inscrit en bleu.

"BLANC" si son nombre n'y figure pas

"ROUGE" si son nombre y est inscrit en rouge."

Au vu de ses réponses, en une demi-seconde, vous lui annoncez le nombre qu'il a choisi.

G. C.

		27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64
65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80

9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26						
			36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53			
						63	64
65	66	67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78	79	80

		3	4	5	6	7	8
			12	13	14	15	16
17				21	22	23	24
25	26				30	31	32
33	34	35				39	40
41	42	43	44				48
49	50	51	52	53			
57	58	59	60	61	62		
	66	67	68	69	70	71	
		75	76	77	78	79	80

1	2		4	5		7	8
	10	11		13	14		16
17		19	20		22	23	
25	26		28	29		31	32
	34	35		37	38		40
41		43	44		46	47	
49	50		52	53		55	56
	58	59		61	62		64
65		67	68		70	71	
73	74		76	77		79	80

Les compilations de William Rouse Ball

Entre 1875 et 1925, plusieurs spécialistes ont tenté de réaliser des anthologies historiques des jeux mathématiques. Le plus célèbre de ces "compilateurs" est Édouard Lucas. Mais l'œuvre en ce domaine de Walter William Rouse Ball (1850-1925) mérite aussi grandement d'être prise en considération. Directeur du département mathématique du Trinity Collège de Cambridge, Rouse Ball marqua par son activité débordante la vie de son université dont plusieurs distinctions portent encore aujourd'hui son nom. Il trouva néanmoins le temps d'écrire de nombreux livres, essentiellement consacrés à l'histoire des mathématiques, à celle de l'université de Cambridge, et, naturellement, aux jeux mathématiques. Ses *Récréations mathématiques et problèmes des temps anciens et modernes* (en trois volumes), dont on peut trouver la traduction française de J. Fitz-Patrick aux Éditions Gabay, se caractérisent par plusieurs qualités notables : l'effort de classification qui se manifeste dans le sommaire, la constante référence à l'origine historique des notions étudiées, le souci d'une démonstration rigoureuse – voire de plusieurs – de chaque propriété énoncée.

par Alain Zalmanski

Léonard de Pise dit Fibonacci

Premier grand mathématicien de notre ère, Léonard de Pise est, comme son nom l'indique, né à Pise vers 1175. Ce « fils de Bonaccio » est vite devenu Fibonacci. Son père, représentant des marchands pisans à Bougie (l'actuelle Bejaïa) en Algérie, encourage le jeune Léonard à compter pour l'aider dans son négoce.

C'est ainsi qu'il voyagea en Syrie, en Grèce, en Égypte et en profita pour apprendre les algorithmes orientaux et compléter sa formation mathématique jusqu'en 1200 où revient à Pise, alors que l'on y construit la fameuse tour penchée.

Léonard de Pise dit Fibonacci
environ1180 - environ 1250

Il comprit que la notation arabe — hindoue à l'origine — et la numération décimale de position était la meilleure pour écrire les nombres et édita un livre, en 1202, sur l'algèbre et l'arithmétique, "*Liber abaci*", l'une des œuvres mathématiques fondamentales du XIII^e siècle.

Ce livre eut un grand succès et fut très largement lu, copié, recopié et étudié pendant les deux siècles qui suivirent, surtout comme le principal vecteur de la numération indo-arabe, en Italie d'abord, dans toute l'Europe ensuite. Le *Liber abaci* contenait aussi, outre des problèmes commerciaux concrets, ce qui fit son succès dans les milieux commerciaux, mais aussi de petits problèmes plus spéculatifs. C'est dans l'un d'entre eux, concernant la reproduction des lapins, qu'est introduite la célèbre suite qui porte son nom et constitue un élément essentiel de sa notoriété. Rappelons (sic !) enfin, que la suite de Fibonacci a participé a la résolution du dixième problème de David Hilbert (1862-1943) relatif aux équations diophantiennes.

Sous l'influence de maître Dominicus, philosophe à la Cour de Frédéric de Souabe, Léonard de Pise écrit en 1220 *Practica geometricae* qui commente les *Élements* d'Euclide, en 1225 *Liber quadratorum*, où il y propose une approximation intéressante de π : 864/275, puis *Fleurs de solutions de certaines questions relatives au nombre*, connu sous le nom de *Flos*.

En 1225, il rencontre l'empereur qui fera organiser un tournoi de mathématiques à Pise, afin de tester ce grand mathématicien.

C'est Fibonacci qui remporte la compétition, en résolvant tous les problèmes posés, aucun des autres compétiteurs n'arrivant d'ailleurs à en résoudre un seul. Il s'agissait par exemple trouver un nombre, pas un entier bien sûr, tel que son carré augmenté ou diminué de 5 res-

La suite de Fibonacci

Introduite par Fibonacci en 1202 dans son *Liber Abaci*, cette suite est un jeu plus qu'un problème.
Étant donné au départ un couple de lapins, combien de couples de lapins seront nés au bout de n mois si chaque couple donne naissance chaque mois à un nouveau couple, celui n'étant productif qu'au bout de deux mois ?
Le problème a fait le tour du monde et nous connaissons tout la relation qui régit le nombre F_n des couples de lapins nés après n mois :
$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, sachant que $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$. Les termes successifs de cette suite sont 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …
On leur accorde de multiples vertus. On les retrouve par exemple dans le nombre de pétales observé en moyenne dans certaines fleurs : les delphiniums ont 5 pétales, les célandines en ont 8, les doubles delphiniums 13, les asters 21, les marguerites 34, les marguerites de Michael 55 ou 89… ! On les trouve encore, en géométrie, dans la mesure des côtés des polygones réguliers, en génétique dans la formation des coquilles d'escargot ou de coquillages marins liée à des spirales logarithmiques, en botanique dans l'arrangement des graines de tournesol ou l'enroulement de certaines feuilles de plantes sur leur tige, dans la théorie des nombres, dans le triangle de Pascal. On observe aussi son utilisation dans les sculptures de Dürer ou dans la représentation du corps humain par Léonard de Vinci et ce, par l'intermédiaire du nombre d'or. Ce nombre fameux, égal à

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

est la limite de la suite des quotients F_{n+1}/F_n.

***Jeune lièvre*, Albrecht Dürer**, 1502, Graphische Sammlung Albertina, Vienne.
Grâce à Fibonacci, le lapin entre dans le bestiaire mathématique après la tortue de Zénon.

tait un carré. Vous aurez bien sûr trouvé 41/12. Un autre problème consistait à résoudre une équation du troisième degré : $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$.
Léonard montra d'abord qu'il ne pouvait s'agir de nombres rationnels ou faisant appel à des racines carrées et donna une approximation de la solution.
On ne retrouve aucune trace plus de ses activités après 1228, mais on sait qu'il obtint en 1240 une pension de la ville de Pise, pour services rendus.
L'œuvre de Fibonacci a été fondamentale surtout comme lien entre les mathématiques arabes et celles de la Renaissance et il ne faut pas oublier qu'elle a sans doute été déterminante pour la propagation des chiffres arabes en Occident.

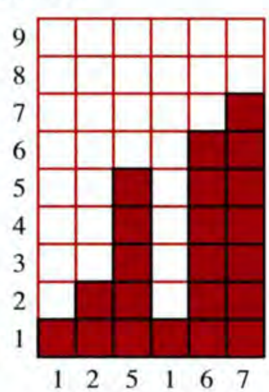
A. Z.

par Michel Criton

Fantaisies numériques

Ramanujan, le grand mathématicien indien, considérait tous les nombres comme des amis intimes. Il pensait que chacun d'eux avait sa propre personnalité. On peut attribuer à chaque nombre une "forme", un relief. Bien que cette "forme" ne soit pas une propriété intrinsèque du nombre, puisqu'elle est liée au choix de la base, on peut tirer de cette particularité une étude étonnante !

Dans un article très sérieux de la revue américaine *Mathematics Magazine*, Richard Blecksmith, de la Northern Illinois University, et Charles Nicol, de la South Carolina University, établissent un théorème, qu'ils dénomment *Monotonic Product Theorem*, qui fait intervenir ce que l'on pourrait appeler la "forme" des nombres. Cette forme, visualisée ci-dessous pour le nombre 125167, dépend évidemment de la base de numération utilisée. Nous nous limiterons ici à la base usuelle, c'est-à-dire la base 10.



Les 12 pentaminos : un moyen mnémotechnique pour les retenir est d'associer à chacun d'eux une lettre : FLIP 'N TUVWXYZ

Les nombres ascendants

Blecksmith et Nicol s'intéressent, dans leur article, aux nombres que l'on peut qualifier d'*ascendants*, c'est-à-dire aux nombres dont l'écriture décimale est constituée d'une suite de chiffres écrits dans un ordre croissant (au sens large, c'est-à-dire qu'il peut y avoir répétition de chiffres). Ainsi, 2, 12, 12229, 13336667 sont des nombres ascendants, mais 10, 1231, 1234565789 n'en sont pas.

Un premier problème que l'on peut poser au sujet de ces nombres, est celui de leur dénombrement. Combien existe-t-il de nombres ascendants parmi les nombres de n chiffres (ne commençant évidemment pas par un zéro) ?

Le problème posé par Blecksmith et Nicol est le suivant : **Existe-t-il des produits de deux nombres ascendants dont le résultat soit lui-même un nombre ascendant ?**

Un cas particulier en est : **Un carré de nombre ascendant peut-il être ascendant ?**

Une notation commode pour écrire des nombres comportant des répétitions de chiffres consécutifs, est la notation suivante, que nous illustrons par un exemple :

$1_{(n)}\,6_{(m)}\,7_{(p)}\,8$ désignera le nombre dont l'écriture décimale comporte n fois le chiffre 1, suivi par m fois le chiffre 6, puis par p fois le chifre 7, et par le chifre 8 (une seule fois).

Avec cette notation, tout nombre ascendant peut s'écrire sous la forme : $1_{(a)}\,2_{(b)}\,3_{(c)}\,4_{(d)}\,5_{(e)}\,6_{(f)}\,7_{(g)}\,8_{(h)}\,9_{(i)}$, les nombres en indice, entre parenthèses, étant des entiers naturels (la valeur "0" correspond à l'absence d'un chiffre dans l'écriture du nombre).

Une source d'égalités en cascade :

37 × 37 = 1369
337 × 367 = 123679
3337 × 3667 = 12236779
33337 × 36667 = 1222367779
333337 × 366667 = 122223677779
3333337 × 3666667 = 12222236777779

L'égalité générale donnée par Blecksmith et Nicol est une source d'égalités aussi esthétiques qu'apparemment mystérieuses.

Pour $n = 1$, $p = 1$, et $m = q$, on obtient, par exemple la suite d'égalités donnée plus haut, tandis que pour $n = 1$, $p = 0$, et $q = m+1$, on obtient le tableau ci-après :

Le théorème du "produit ascendant"

Les deux auteurs américains, dans leur article, établissent une égalité valable dans toute base b de numération, et dont la version en base 10, est l'égalité suivante,

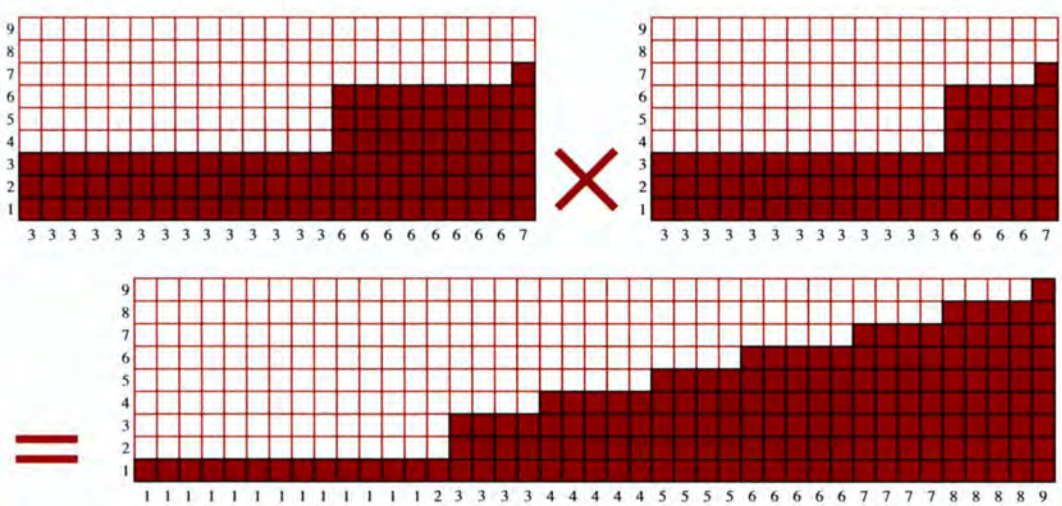
[3(m) 6(n) + 1] [3(p) 6(q) +1] = 1(p) 2(m-p) 3(p+q-m) 4(m+n-p-q) 5(p-n) 6(q) 7(n-q) 8(q) +1

vraie pour $p + q < m < p < n < q < 0$: Pour $m = 14$, $n = 9$, $p = 13$, et $q = 5$, on obtient l'égalité :

3 333 333 333 333 366 666 667 × 333 333 333 333 366 667

= 11 111 111 111 112 333 344 444 555 566 666 777 788 889,

illustrée ci-dessous :



$$7 \times 7 = 49$$
$$37 \times 67 = 2479$$
$$337 \times 667 = 224779$$
$$3337 \times 6667 = 22247779$$
$$33337 \times 66667 = 2222477779$$
$$333337 \times 666667 = 222224777779$$
$$3333337 \times 6666667 = 22222247777779$$

De même, pour $n = 0, p = 0$, et $m = q$, on obtient :

$$4 \times 7 = 28$$
$$34 \times 67 = 2278$$
$$334 \times 667 = 222778$$
$$3334 \times 6667 = 22227778$$
$$33334 \times 66667 = 2222277778$$
$$333334 \times 666667 = 222222777778$$
$$3333334 \times 6666667 = 22222227777778$$

Enfin, pour $n = 0, q = 1$, et $m = p+1$:

$$4 \times 7 = 28$$
$$34 \times 37 = 1258$$
$$334 \times 337 = 112558$$
$$3334 \times 3337 = 11125558$$
$$33334 \times 33337 = 1111255558$$
$$333334 \times 333337 = 111112555558$$
$$3333334 \times 33333337 = 11111125555558$$

Voici un autre petit problème que la formule donnée ci-dessus vous aidera à résoudre facilement.
Tous les nombres ascendants n'ont pas un carré ascendant.
Un exemple en est donné par :

$$125^2 = 15625.$$

Au contraire, certains nombres non ascendants ont un carré ascendant :

$$106^2 = 11\,236.$$

On conjecture que le plus grand nombre non ascendant ayant un carré ascendant est le nombre 125167, cité au début de cet article, et dont le carré vaut 15 666 777 889.
Mais peut-on déterminer tous les nombres ascendants dont le carré est ascendant ?
C'est ce qu'ont fait Blecksmith et Nicol en donnant la forme de tous ces nombres ascendants "à l'ordre deux" (voir encadré page suivante).

D'autres formes de nombres

Bien d'autres champs de recherche restent ouverts à l'amateur dans ce domaine encore peu exploré. Par exemple, celui des nombres "descendants", images-miroirs des nombres "ascendants", si ce n'était la possibilité d'utiliser le zéro, interdit dans les nombres "ascendants", et le rôle des retenues (qui se font de droite à gauche) dans les multiplications.
Le tableau ci-dessous nous donne une cascade d'égalités (en base dix), qui ne découlent pas de l'égalité générale de Blecksmith et Nicol. La raison en est que, si le premier facteur et le produit sont bien des nombres ascendants (c'est-à-dire des nombres dont l'écriture décimale est constituée d'une suite de chiffres écrits dans un ordre croissant au sens large), le second facteur, par contre, n'en est pas un, puisque $9 > 7$.

$$337 \times 397 = 133789$$
$$3337 \times 3397 = 11335789$$
$$33337 \times 33397 = 1113355789$$
$$333337 \times 333397 = 111133555789$$
$$3333337 \times 3333397 = 11111335555789$$
$$33333337 \times 33333397 = 1111113355555789$$

Bien qu'étêtée, cette cascade présente un certain esthétisme, et montre qu'il existe des produits d'un nombre ascendant par un nombre non ascendant, dont le résultat est un nombre ascendant (ce qui semble évident, si l'on considère, par exemple, le produit $13 \times 53 = 689$).
L'expression générale de ces produits pourrait être la suivante (avec, pour le paramètre m, la condition $m > 2$) :

$$(3_{(m)}\,6 + 1)\,(3_{(m-1)}\,9\,6 + 1)$$
$$= 1_{(m-1)}\,3\,(2)\,5_{(m-2)}\,7\,8_{(2)} + 1.$$

Des produits descendants

D'autres cascades construites à partir du produit d'un nombre ascendant par un nombre non ascendant, nous montrent que le résultat du produit peut être un nombre "descendant" :

$$8 \times 4 = 32$$
$$98 \times 34 = 3332$$
$$998 \times 334 = 333332$$
$$9998 \times 3334 = 33333332$$
$$99998 \times 33334 = 3333333332$$
$$999998 \times 333334 = 333333333332$$
$$9999998 \times 3333334 = 33333333333332$$
$$99999998 \times 33333334 = 3333333333333332$$

$$8 \times 9 = 72$$
$$98 \times 79 = 7742$$
$$998 \times 779 = 777442$$
$$9998 \times 7779 = 77774442$$
$$99998 \times 77779 = 7777744442$$
$$999998 \times 777779 = 777777444442$$
$$9999998 \times 7777779 = 77777774444442$$
$$99999998 \times 77777779 = 7777777744444442$$

Dans le dernier exemple que nous donnons, le premier facteur est "étale" (c'est-à-dire que son écriture décimale ne comprend qu'un seul chiffre), le second facteur est ascendant, et le produit est descendant.

$$9 \times 9 = 81$$
$$99 \times 89 = 8811$$
$$999 \times 889 = 888111$$
$$9999 \text{ x } 8889 = 88881111$$
$$99999 \times 88889 = 8888811111$$
$$999999 \times 888889 = 888888111111$$
$$9999999 \times 8888889 = 88888881111111$$
$$99999999 \times 88888889 = 8888888811111111$$

On peut aussi imaginer des nombres "en colline" (par exemple 133462221), ou "en colline symétrique" (par exemple 133464331), ainsi que des nombres "vallonnés", symétriques ou non.

M. C. & J. G.

LES NOMBRES ASCENDANTS À "L'ORDRE DEUX"

Tous les nombres ascendants à "l'ordre deux" sont donnés par les formules ci-contre.

$$(3_{(m)}\, 6_{(n)} + 1)^2 = 1_{(m)}\, 3_{(m)}\, 4_{(n-m)}\, 6_{(m)}\, 8_{(n)} + 1$$

si $m > n$

$$(3_{(m)}\, 6_{(n)} + 1)^2 = 1_{(m)}\, 3_{(n)}\, 4_{(m-n)}\, 6_{(n)}\, 8_{(n)} + 1$$

si $n > m$

$$(3_{(n)}\, 5)^2 = 1_{(n)}\, 2_{(n+1)}\, 5$$
$$(1\, 6_{(n)}\, 7)^2 = 2\, 7_{(n)}\, 8_{(n+1)}\, 9.$$

par Michel Criton

Algorithmes numériques

Un algorithme, d'après le Larousse, est un procédé de calcul mis en œuvre pour obtenir un résultat par un nombre fini d'applications d'une règle. Ce mot provient du nom latinisé d'un mathématicien arabe du x^e siècle de notre ère : Al-Huwarizmi, originaire de la ville de Huwarism (aujoud'hui Khiva, en Ouzbekistan), et qui écrivit un des premiers traités d'algèbre, où il donnait divers procédés (nous dirions aujourd'hui algorithmes) de résolution d'équations.

Un algorithme peut être comparé à une "recette", avec l'idée supplémentaire de répétition systématique, jusqu'à ce qu'on ne puisse plus appliquer la recette, ou bien jusqu'à ce que l'on "tourne en rond", comme nous le verrons plus loin.

L'Ecole d'Athènes : Euclide traçant un cercle (détail), **Raphaël**, 1509, Stanza della Segnatura, Palais pontifical Le Vatican.

Cette notion d'itération d'une suite de calculs prend une importance grandissante aujourd'hui, où des machines peuvent effectuer sans fatigue, sans erreurs, et en des temps très courts, des milliers, voire des millions d'opérations répétitives.

Algorithme d'Euclide

Un des premiers algorithmes connus est le célèbre algorithme d'Euclide, qui permet de calculer le P. G. C. D. (*Plus Grand Commun Diviseur*) de deux nombres.

- Prenez deux nombres, par exemple 26208 et 13200.
- Divisez le plus grand par le plus petit (il s'agit ici de la division dite "euclidienne", c'est-à-dire que l'on s'arrête à un quotient et à un reste entiers). Le quotient

entier est 1, et le reste 13 008.

26 208 = 13 200 × **1** + **13 008**.

- Recommencez en mettant le diviseur, 13200, à la place du dividende, et le reste, 13008, à la place du diviseur.

13 200 = 13 008 × **1** + **192**.

On obtient alors 1 comme quotient entier, et 192 comme reste.

- Dans cette deuxième division, remplacez à nouveau le dividende par le diviseur, et le diviseur par le reste.
- Réitérez ensuite cette suite d'opérations jusqu'à obtention d'un reste nul

13 008 = **192** × 67 + **144**.

192 = 144 × **1** + **48**.

144 = 48 × **3** + **0**.

Le processus s'arrête alors, bien sûr, puisqu'on ne peut diviser par zéro !

Le dernier reste non nul est le P. G. C. D. de nos deux nombres de départ. On peut en effet prouver, c'est ce qu'a fait Euclide, que tout nombre qui divise simultanément les deux nombres de départ, divise également le dernier reste.

Si les mathématiciens ont ainsi inventé, ou découvert, des procédés systématiques de calcul leur permettant de résoudre, de façon quasi-automatique, des problèmes précis, ces grands joueurs devant l'Eternel ont aussi inventé des algorithmes numériques dans le seul but de s'amuser à les "faire tourner", et de voir ce qui en sortirait (à condition que l'algorithme en question ne tourne pas indéfiniment, auquel cas on n'en sort évidemment jamais !).

L'algorithme de Kaprekar

Le second algorithme que nous vous présentons s'appelle l'algorithme de Kaprekar, du nom d'un mathématicien indien, qui le publia en 1949 :

- Prenez un nombre de 4 chiffres, non tous égaux : par exemple, 4742.
- Réordonnez ses chiffres du plus grand au plus petit : 7442, puis retournez l'ordre des chiffres du nombre obtenu (l'écriture de ce nombre retourné peut alors commencer par zéro), et soustrayez ce dernier nombre du précédent :

7442 – 2447 = 4995.

- Recommencez ce procédé à partir du nouveau nombre obtenu :

9954 – 4599 = 5355.

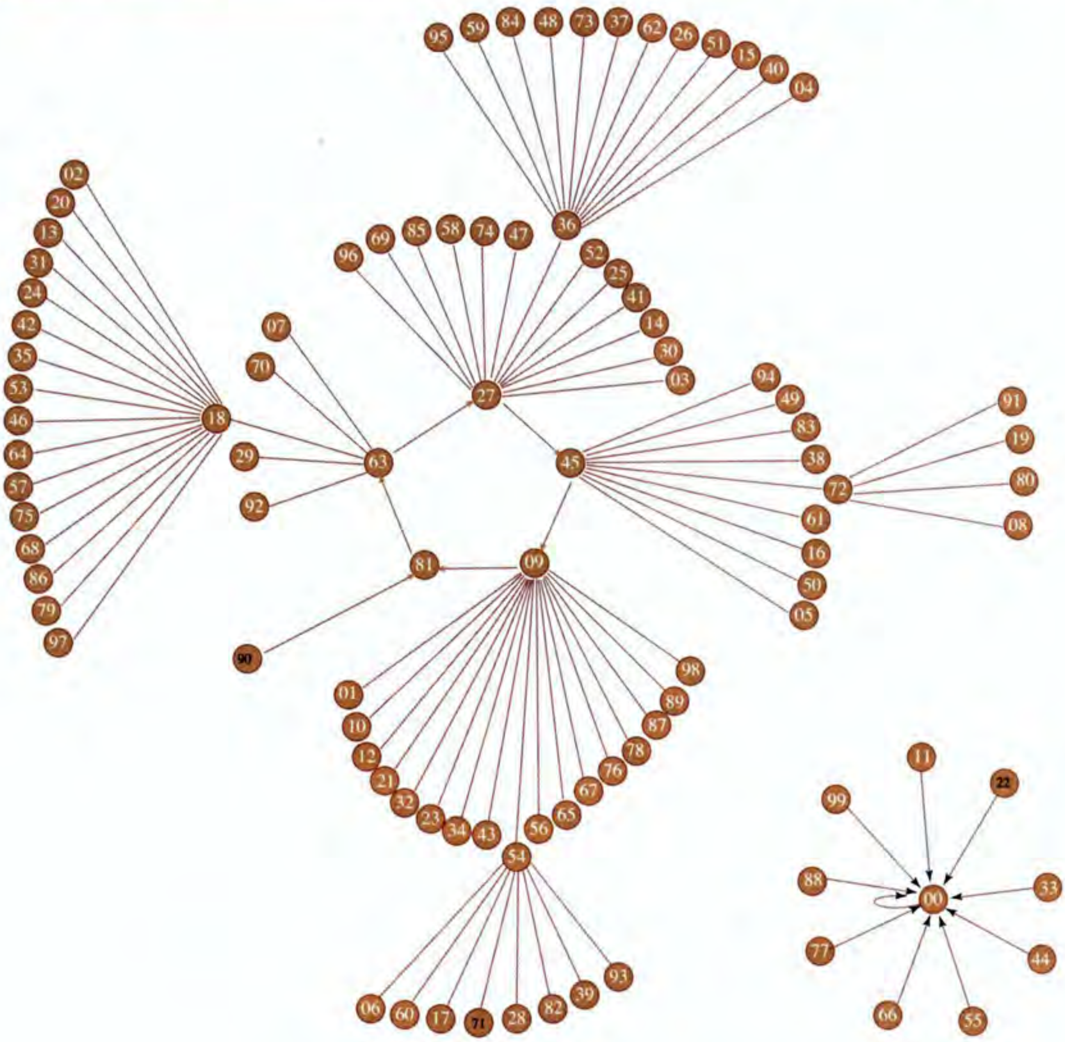
- Recommençons une nouvelle fois :

5553 - 3555 = 1998.

En réitérant, on obtient la suite
4742 → 4995 → 5355 → 1998 → 8082 → 8532 → 6174.

Quel sera le nombre suivant ? Eh bien oui, le nombre qui suit 6174 sera encore 6174, et nous sommes tombés dans un "puits" dont nous ne pouvons plus sortir. Cet algorithme n'opérant que sur des nombres à quatre chiffres ou moins de quatre chiffres (on accepte ici une écriture commençant par un ou plusieurs zéros), nous ne pouvions aboutir qu'à un "cycle", ou à un "puits" (qui

***Nature morte aux harengs*, Joseph de Bray**, 1656, Gemäldegalerie, Dresdes.
Un algorithme est une recette de cuisine dont les ingrédients sont les données numériques et le plat cuisiné, le résultat du calcul.



"L'algorithme de Kaprekar pour les nombres à deux chiffres"

est un cycle à un seul élément), en un nombre fini d'étapes.

Essayez de faire fonctionner cet algorithme à partir de différents nombres !

Le diagramme ci-dessus vous donne l'algorithme de Kaprekar appliqué aux nombres de deux chiffres. Vous y constatez qu'il n'existe que :

— le "puits" 00

— le cycle 27-45-09-81-63.

Pour les nombres à quatre chiffres, il n'existe pas d'autre cycle que les deux "puits" : 0000 et 6174.

Nous vous laissons le soin d'explorer les nombres à trois chiffres ou plus de quatre chiffres (voir p. 117).

L'algorithme de Prabekhar

Voici un autre algorithme basé sur l'écriture décimale des nombres : l'algorithme de Prabekhar.

- Prenez un nombre quelconque, par exemple 162
- Calculez la somme des carrés de ses chiffres : $1^2 + 6^2 + 2^2 = 41$.

- Puis recommencez avec le nouveau nombre obtenu : $4^2 + 1^2 = 17$.
- Recommencez à nouveau à partir de ce nombre, etc.

On obtient la suite suivante : 162 → 41 → 17 → 50 → 25 → 29 → 85 → **89** → 145 → 42 → 20 → 4 → 16 → 37 →58 → **89** → 145

La suite obtenue semble beaucoup plus capricieuse que dans l'exemple précédent, puisqu'un nombre à deux chiffres peut très bien avoir pour image un nombre à trois chiffres, mais à partir du moment où on retombe sur un nombre déjà apparu, en l'occurence 89 dans la suite ci-dessus, on sait que l'on a découvert un cycle.

Le diagramme ci-dessous représente les images de tous les nombres de 0 à 100. Les nombres de trois chiffres qui apparaissent comme images de nombres à deux chiffres ont été portés en rouge. On constate qu'outre le cycle décrit plus haut, il existe deux puits : 0 et 1.

Quelques questions à propos de cet algorithme : existe-t-il d'autres puits ou cycles ?

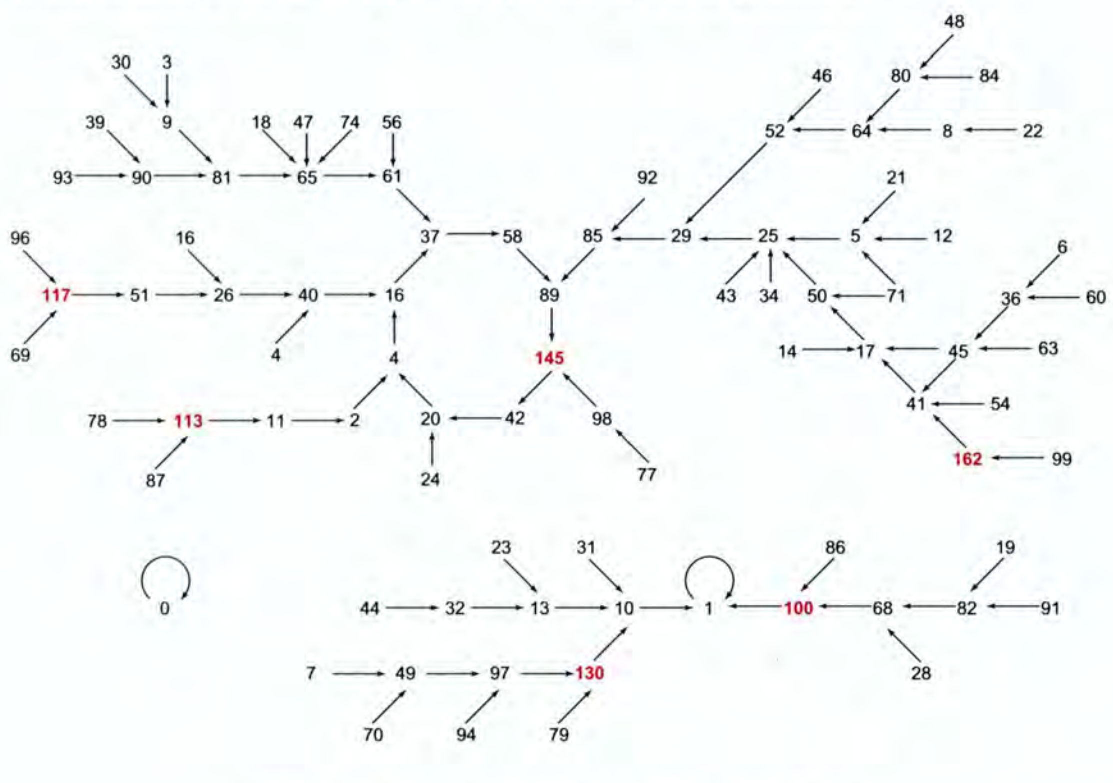
Existe-t-il des nombres qui ne sont images d'aucun entier ?

Quelques questions à propos de cet algorithme : existe-t-il d'autres puits ou cycles ?

Existe-t-il des nombres qui ne sont images d'aucun entier ?

Le problème de Collatz

Un autre algorithme célèbre est celui d'un problème qui circule depuis soixante ans dans les milieux mathématiques sous le nom de problème de



"l'algorithme de Prabekhar pour les nombres à deux chiffres"

Collatz, du nom de son inventeur, ou problème de Syracuse, du nom d'une université américaine qui a contribué à le faire connaître.

- Prenez un entier naturel quelconque. S'il est pair, divisez le par deux. S'il est impair, triplez le, et ajoutez un à son triple.
- Recommencez avec le nombre obtenu.
- Puis réïtérez ce procédé, et observez ce qui se passe.

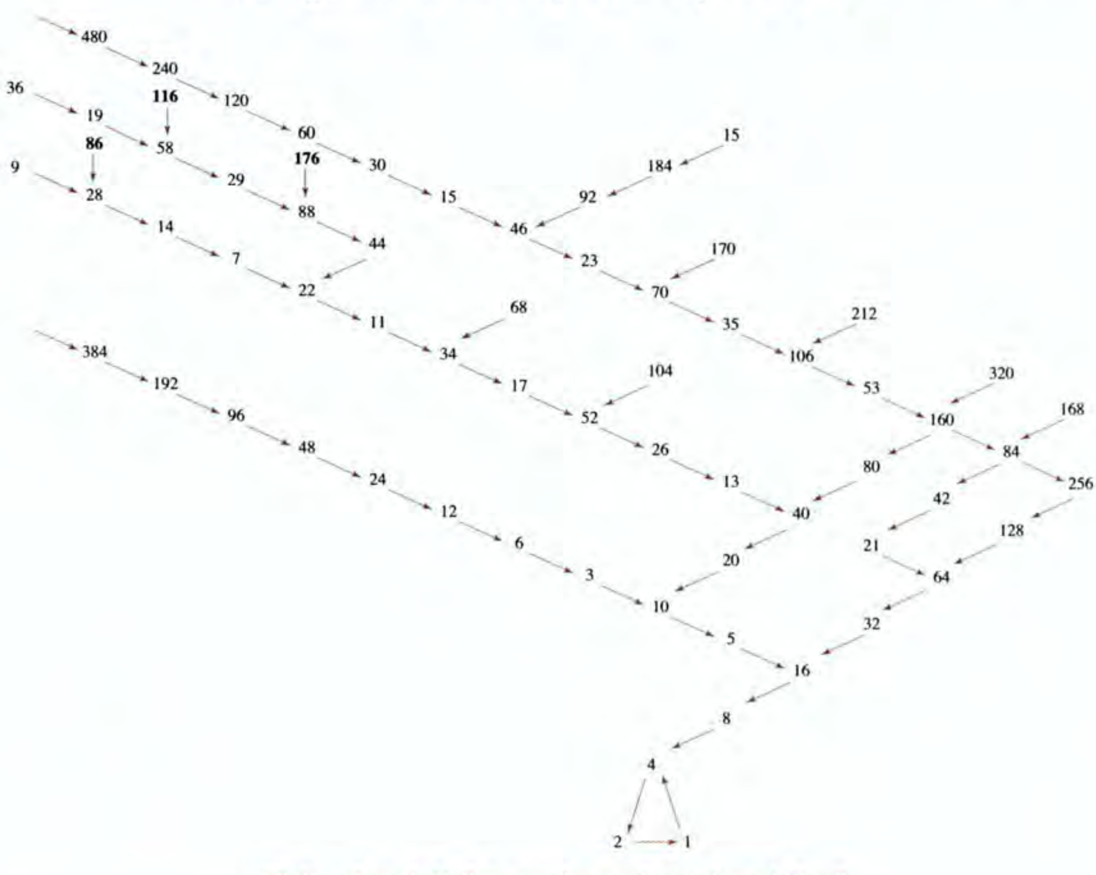
Voyons sur un exemple :
18 → 9 → 28 → 14 → 7 → 22 → 11 → 34 → 17 → 52 → 26 → 13 → 40 → 20 → 10 → 5 → 16 → 8 → 4 → 2 → 1 → 4.

Nous tombons ensuite dans le cycle 4 → 2 → 1 qui se répète indéfiniment.

Cet algorithme a suscité de nombreuses recherches, mais il n'a pas encore livré tous ses secrets. En effet, bien que l'on ait testé tous les entiers, à l'aide de puissants ordinateurs, jusqu'à plus de 10^{11} (cent milliards!), personne n'a pu démontrer jusqu'à ce jour, qu'en partant de n'importe quel entier, on aboutit toujours au cycle 4 → 2 → 1.

Le diagramme ci-dessous vous montre le graphe de cet algorithme pour un certain nombre d'entiers à deux ou trois chiffres.

On peut remarquer que les puissances de deux jouent, de façon évidente, un rôle très important dans ce graphe. Il est également à noter que certains entiers mettent un temps assez long, en passant par des nombres beaucoup plus grands qu'eux, avant de revenir au cycle 4 → 2 → 1.



"l'algorithme de Collatz pour les nombres à deux chiffres"

Essayez par exemple avec 27.
Une question sur cet algorithme : quels sont les nombres qui possèdent deux antécédents ?

Enfin, voici quelques idées d'algorithmes à étudier :

- L'algorithme de Prabhekar cubique : à chaque nombre, on associe la somme des cubes de ses chiffres.
- L'algorithme de Prabhekar à l'ordre n.
- À tout nombre, on associe le carré de la somme de ses chiffres, ou, plus généralement, la puissance n-ième de la somme de ses chiffres.
- À tout nombre, on associe le produit de ses chiffres, augmenté de la somme de ses chiffres.

Faites les tourner. Observez ce qui se passe. Dessinez de jolis diagrammes (vous pouvez nous les envoyer !).
Et puis, donnez libre cours à votre imagination créatrice, et inventez !

M. C.

Sources et références bibliographiques
Sur l'algorithme de Kaprekar : article de Marc Charnay dans *Pentamino* N° 1 (1976) IREM de Grenoble.
Sur l'algorithme de Prabhekar, et le problème de Collatz : article de Brian Hayes dans *Pour la Science* N° 79 (mai 1984).

Solutions

Algorithme de Kaprekar
Pour les nombres à trois chiffres, il existe deux puits : 000 et 495.

Algorithme de Prabhekar
On peut montrer qu'à partir de tout nombre, on finit par aboutir soit au puits 1, soit au cycle $16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4$.
La réponse à la seconde question est négative, puisque Lagrange et Euler ont établi que tout entier positif était somme d'au plus quatre carrés.
Ainsi, $15 = 3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$ est l'image de 1123 !
Bien sûr, ne sont autorisés ici que les carrés des entiers de 1 à 9. Mais en augmentant le nombre de carrés, on trouve toujours un antécédent : une solution toujours possible étant $1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + \ldots + 1^2 + 1^2$.
Ainsi 111 111 111 111 111 est aussi un antécédent de 15.

Algorithme de Collatz
Les nombres ayant deux antécédents sont les nombres de la forme 6k+4, qui ont pour antécédent $12k + 8$, et $2k + 1$. Tous les autres entiers naturels n'ont qu'un antécédent.
La suite obtenue à partir de 27 n'aboutit à 1 qu'après 111 étapes, le plus grand nombre atteint étant 9232.

par Hervé Lehning

Stratégie pour retrouver la boule

On donne douze boules dont une n'a pas le même poids que les autres, combien de pesées sont nécessaires pour retrouver la bonne et dire si elle est plus légère ou plus lourde que les autres ? Au cœur de la résolution des problèmes de ce type, on trouve un principe mathématique puissant : le raisonnement par récurrence et une suite de nombres : les puissances de trois.

Le problème est classique : n boules ou pièces de monnaies sont données dont une n'a pas le même poids que les autres. Elle est soit plus lourde, soit plus légère. On dispose d'une balance de Roberval et on cherche à déterminer la boule exceptionnelle en le minimum de pesées possibles. Bien entendu, la réponse n'est pas la même si l'on sait si la fausse boule est plus légère (ou plus lourde).

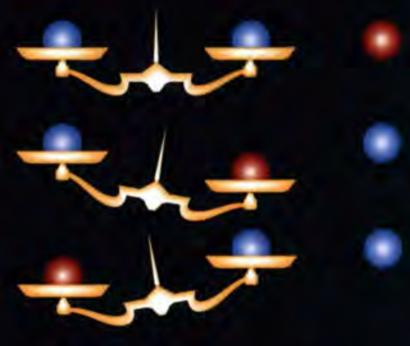
Le problème n'est pas simple. Pour le résoudre, il vaut mieux le prendre à l'envers : **avec n pesées, parmi combien de boules pouvons nous retrouver une boule plus lourde que les autres ?**

Cas d'une pesée

Examinons d'abord le cas d'une pesée. Bien entendu, on peut retrouver la boule parmi deux en les mettant chacune sur l'un des plateaux de la balance. La plus lourde est celle qui fait pencher son plateau vers le bas. On peut également la retrouver parmi trois d'une façon plus subtile :

On dispose les deux premières boules sur les deux plateaux de la balance. S'ils ne s'équilibrent pas, la boule plus lourde est dans le plateau le plus bas et s'ils s'équilibrent, la boule non examinée est la plus lourde

Avec n pesées, nous retrouvons la boule parmi 3^n boules.



Détermination de la boule la plus lourde parmi trois en une seule pesée (la boule la plus lourde est en rouge).

UN PROBLÈME DE SAM LLOYD

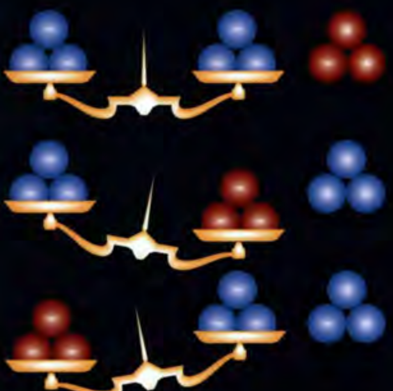
Ainsi, avec une pesée, on peut retrouver la boule parmi deux ou trois boules. On ne peut évidemment pas faire mieux.

Cas de deux pesées

L'idée de base pour passer au cas de deux pesées est celle de récurrence : on se ramène au cas précédent appliqué à des groupes de trois boules. Nous reprenons donc la même idée avec neuf boules en faisant trois tas de trois boules chacun que nous pouvons considérer comme trois méta-boules dont l'une est plus lourde que les autres.

Au moyen de la procédure précédente, nous déterminons en une seule pesée la méta-boule plus lourde que les autres. On recommence alors avec le tas de trois boules déterminé et on trouve la boule la plus lourde en une pesée supplémentaire.

Ainsi, avec deux pesées, on peut retrouver la boule parmi neuf. Il en est de même pour la retrouver parmi quatre, cinq, six, sept et huit (dans l'encadré « cas de quatre à huit boules », nous détaillons ces cas particuliers). Ici encore, on ne peut faire mieux.



Détermination du groupe de trois boules le plus lourd en une seule pesée : Il s'agit de la même procédure que pour trois boules. Une seule pesée supplémentaire suffit alors pour déterminer la boule la plus lourde.

Le problème se complique si on ne sait pas si la fausse boule est plus lourde ou plus légère.

Cas général

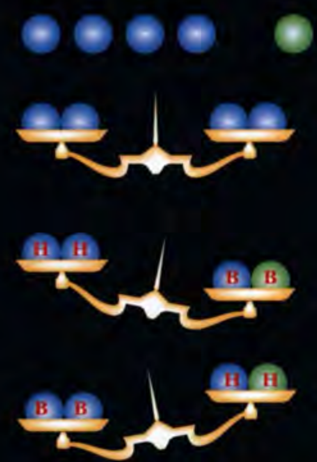
En utilisant le principe précédent, chaque nouvelle pesée triple le nombre de boules parmi lesquelles nous pouvons retrouver une boule plus lourde. Ainsi, avec n pesées, nous retrouvons la boule parmi 3^n boules. Par exemple : avec une pesée, nous retrouvons la boule parmi deux ou trois, avec deux pesées, nous la retrouvons parmi quatre à neuf boules, avec trois, parmi dix à vingt-sept, avec quatre, parmi vingt-huit à quatre-vingt un, etc.

Compliquer pour gagner

Le problème se complique si on ne sait pas si la fausse boule est plus lourde ou plus légère. On peut demander de plus de déterminer si elle est plus lourde ou plus légère. Dans ce cas, que peut-on faire avec n pesées ?
Ce problème possèdent plusieurs avatars. Nous allons en étudier deux : celui dans lequel on dispose d'une boule témoin, c'est-à-dire une boule supplémentaire de poids normal et celui où les boules sont réparties en boules hautes et boules basses dont nous voyons la définition plus loin.

Compliquer pour gagner

Considérons un lot de quatre boules dont une est de poids différents des autres plus une boule témoin de poids normal. Mettons l'une des boules à part, associons une autre avec la boule témoin et pesons ce tas de deux avec les deux autres boules. Si les plateaux s'équilibrent, la fausse boule est celle que nous avons mis de côté et nous la pesons avec la boule témoin pour conclure.



Première pesée pour déterminer la fausse boule et son poids si on dispose d'une boule témoin (en jaune). Dans le premier cas, la fausse boule est déterminé mais on ne connaît pas son poids. Dans les autres cas, on dispose d'une deuxième boule témoin et de boules « hautes » et « basses ».

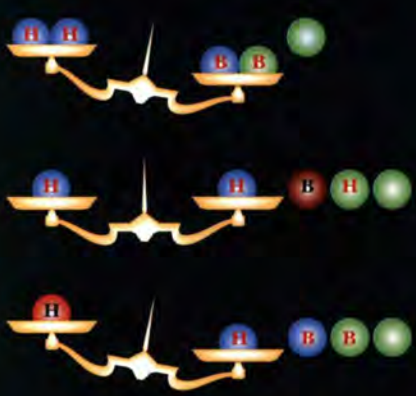
Des boules hautes et des boules basses

Si les plateaux ne s'équilibrent pas, l'un est en haut et l'autre en bas. Nous appelons boules hautes, les boules du plateau haut et de boules basses celles

Du poids lourd au poids plume

Muni d'une balance de Roberval, on doit ranger cinq boules de poids différents de la plus lourde à la plus légère. La seule procédure autorisée est de placer une et une seule boule sur chaque plateau. Montrer qu'il est possible de procéder au classement en au plus sept pesées.

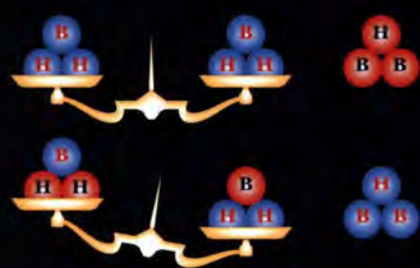
du plateau bas. Si la fausse boule est haute alors elle est plus légère, si elle est basse alors elle est plus lourde. Notre boule témoin se retrouve donc haute ou basse. Si elle est basse, on pèse les deux boules hautes entre elles. Si les plateaux s'équilibrent, elles sont toutes les deux correctes donc la fausse est la boule basse autre que la boule témoin. Elle est donc plus lourde. Si les plateaux ne s'équilibrent pas, l'une des deux boules hautes est fausse et c'est donc celle qui est en haut et elle est plus légère. Le problème est le même quoique symétrique si la boule témoin est haute.



Deuxième pesée pour déterminer la fausse boule et son poids dans le deuxième cas (les plateaux de la première pesée ne s'équilibrent pas).

Enclencher une récurrence

Le problème avec boule témoin passe donc par celui des boules hautes et basses. Nous continuons avec lui. Avec une pesée, on peut déterminer la fausse boule parmi trois (mais pas plus). L'idée est encore la division par trois du début. Avec deux pesées, nous tentons de passer de trois à trois fois trois c'est-à-dire à neuf. On considère donc neuf boules dont cinq sont hautes et quatre basses ou vice versa. On fait trois tas, HHB, HHB et HBB. Nous pesons les deux premiers. Si les plateaux s'équilibrent, la fausse est dans le troisième tas HBB. Si les plateaux ne s'équilibrent pas, la fausse boule est soit haute dans le plateau du haut, soit basse dans le plateau du bas.



Première pesée de neuf boules dont cinq hautes et quatre basses. Les boules suspectes après les divers cas sont colorées en rouges

Cela constitue un nouveau tas de trois boules HHB. Dans tous les cas, nous sommes amené à trouver la fausse boule dans un tas HHB ou HBB.

La récurrence s'enclenche donc et on trouve la fausse boule parmi neuf boules moitié hautes, moitié basses. On montre alors de la même façon que l'on ne peut retrouver la fausse boule parmi dix en deux pesées car cela nous amènerait à trouver la fausse parmi quatre en une pesée. Donc, avec deux pesées, on peut déterminer la fausse boule parmi neuf (mais pas plus).

Par récurrence, notre raisonnement se généralise facilement.

Avec n pesées, on peut retrouver la fausse boule parmi 3^n boules dont la moitié sont hautes et les autres basses mais pas plus.

Principe de récurrence et tours de Hanoï

Dans le jeu des tours de Hanoï, on dispose d'un certain nombre n de rondelles et de trois piquets sur lesquels les rondelles peuvent être enfilées. Au départ, les n rondelles sont sur le piquet de gauche dans l'ordre des périmètres décroissants, le plus large en bas.

Il s'agit de reconstituer la tour initiale sur un autre piquet, chaque mouvement devant amener une rondelle sur une rondelle plus grande.

On peut diviser la tour de n rondelles en une rondelle en dessous et les $n - 1$ au dessus.

Position initiale des tours de Hanoï : le triangle représente un nombre quelconque de rondelles.

Si $n = 1$, il suffit de déplacer directement cette unique rondelle.

Comment procéder par récurrence ?

Imaginons que nous sachions faire passer n rondelles que nous représentons comme un triangle sur notre figure (voir ci-dessus).

Nous utilisons cette connaissance pour faire passer le triangle sur le piquet du milieu :

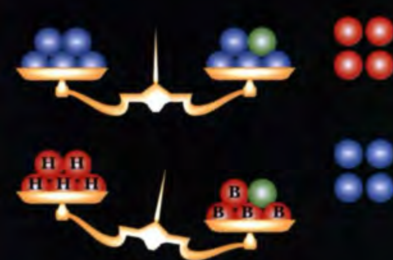
Il est alors facile de faire passer la grande rondelle sur le piquet de droite

Le retour du témoin

Nous avons déjà vu qu'avec deux pesées, nous pouvons retrouver la fausse boule parmi quatre si nous disposons d'une boule témoin. Nous utilisons maintenant trois pesées et treize boules. Nous en mettons quatre de côté, cinq sur l'un des plateaux de la balance et les autres plus la boule témoin sur l'autre.

Si les deux plateaux s'équilibrent, la fausse boule est dans le tas de quatre, deux pesées suffiront pour la déterminer.

Si les deux plateaux ne s'équilibrent pas, nous pouvons répartir les boules en hautes et basses.



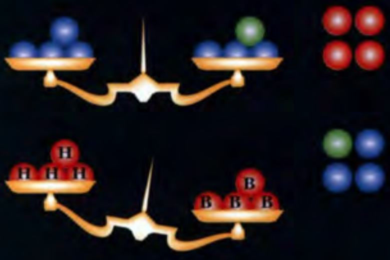
Première pesée avec treize boules plus un témoin : il nous reste soit quatre boules et un témoin, soit neuf boules dont la moitié hautes et la moitié basses.

En enlevant la boule témoin, il nous reste neuf boules moitié hautes moitié basses. Nous avons résolu ce problème précédemment. Nous pouvons également montré que trois pesées ne suffisent pas pour quatorze boules.

En généralisant ce raisonnement, nous montrons que n pesées permettent de retrouver la fausse boule parmi $3^{n-1} + (3^{n-1} - 1)/2$ boules si nous disposons d'une boule témoin.

Se ramener au cas précédent

Considérons maintenant douze boules dont une fausse dont on ne sait si elle est plus légère ou plus lourde.
Nous partageons nos boules en trois tas de quatre et nous pesons les deux premiers tas.
Si les plateaux s'équilibrent, la fausse boule est dans le troisième tas et nous avons une boule témoin, le problème est donc résolu en deux pesées supplémentaires.
Si les plateaux ne s'équilibrent pas, alors nous obtenons 4 boules hautes et quatre basses, nous ajoutons une boule témoin dans un des deux tas et nous résolvons notre problème en deux pesées supplémentaires.



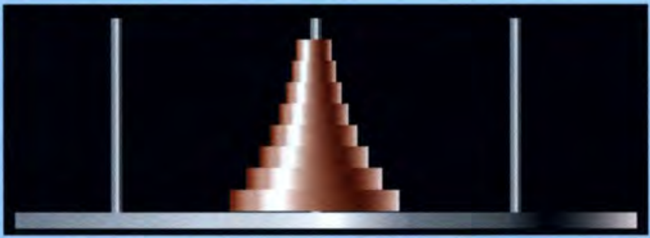
Première pesée de douze boules : on se ramène soit au cas de quatre boules et un témoin, soit au cas de quatre boules hautes, quatre basses plus un témoin.

On peut montrer également que l'on ne peut faire mieux. De façon générale, on montre ainsi que n pesées suffisent pour $3^{n-1} + (3^{n-1} - 1)/2 - 1$ boules et pas plus ce qui fait $(3^n - 3)/2$ boules. Ainsi avec trois pesées, on obtient douze, avec quatre, trente - neuf, avec cinq, cent vingt, etc.

H. L.

Il reste alors à utiliser la procédure valable pour une rondelle de moins pour faire passer le triangle sur le piquet de droite.

Conclusion
Nous savons passer de n rondelles à $n + 1$ et nous savons résoudre le problème pour une rondelle, nous savons donc le faire pour tout nombre de rondelles.
On démontre alors facilement qu'il se résout en $2^n - 1$ coups.



Cas de quatre à huit boules

***Portrait du marchand Georg Gisze* (détail), Hans Holbein le Jeune, 1532, Staatliche Museen, Berlin.**

Que se passe-t-il si on dispose de quatre à huit boules dont une plus lourde ? Nous divisons à nouveau les boules en tas de trois boules : nous trouvons donc un ou deux tas de trois boules plus éventuellement un autre d'une ou deux boules. Si on a deux tas de trois boules, on les dispose sur les deux plateaux de la balance. S'ils ne s'équilibrent pas, on est ramené à un tas de trois boules. S'ils s'équilibrent, on forme un tas de trois en ajoutant une ou deux boules aux boules restantes. On est à nouveau ramené au problème précédent.

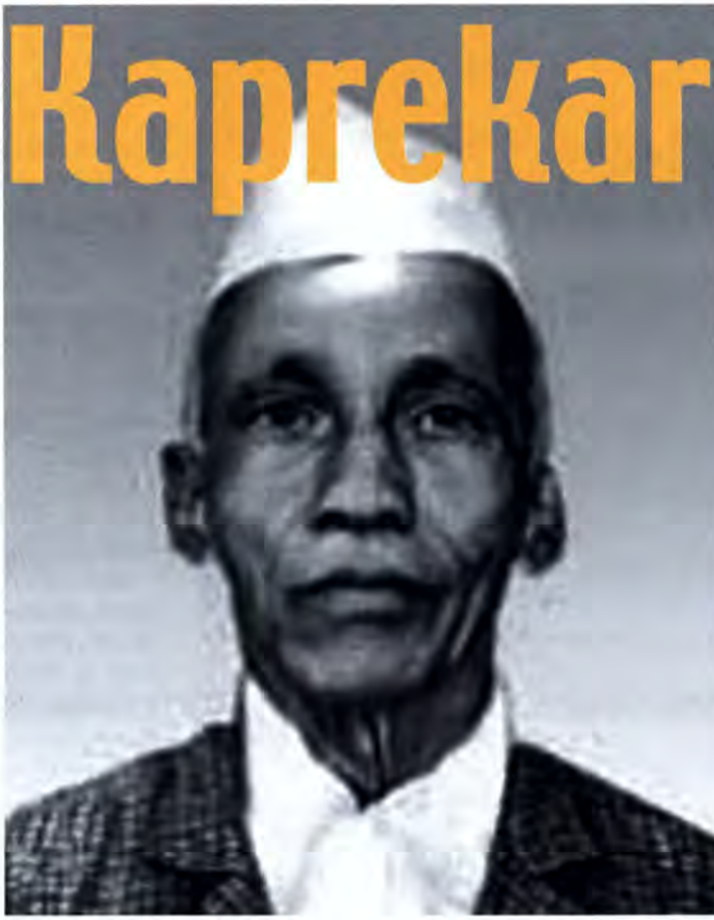
Première pesée dans le cas de six, sept ou huit boules : on est ramené à trois boules.

Si on a qu'un tas de trois boules, on en extrait un tas égal au tas restant. On dispose ces tas sur les deux plateaux de la balance et le raisonnement est identique au précédent :

Première pesée dans le cas de quatre ou cinq boules.

par Michel Criton

Dattatreya Kaprekar



Quel est l'ouvrage de récréations mathématiques, publié depuis moins de 50 ans, dont l'index ne contient pas le nom de Kaprekar ?

Quel amateur de jeux mathématiques n'a jamais entendu parler de l'algorithme de Kaprekar, de la constante de Kaprekar, ou encore des nombres de Kaprekar ?

Pourtant, qui pourrait dire où et quand cet homme a vécu ?

Dattatreya Kaprekar (D.R. Kaprekar), naît le 17 juin 1905, dans la petite ville de Dahanu, à une centaine de kilomètres de Bombay.

Bien qu'étant un écolier moyen, il est très tôt fasciné par les nombres, leurs propriétés et particularités. Tout au long de sa scolarité, il cultive et développe cette sorte de "flair" pour repérer certaines relations entre les nombres. Il passera ainsi des milliers d'heures, à une époque où ni calculatrices, ni ordinateurs, n'existaient, ni n'étaient seulement imaginables, à effectuer des calculs pour tester certaines propriétés numériques.

Il poursuit ses études jusqu'au diplôme de *Bachelor of Sciences* qu'il obtient en 1929 à l'Université de Bombay. Après sa sortie de l'Université, il commence par enseigner le sanscrit, les sciences et les mathématiques dans une école zoroastrienne de la ville de Devlali (1930-1946). Cette école est fréquentée par des enfants Parsis (les Parsis sont une fraction de la population indienne, originaire de Perse, et dont la religion est le Zoroastrisme).

De 1946 à 1962, Kaprekar enseigne ensuite les mathématiques dans une High Scool, toujours dans la ville de Devlali.

Parallèlement à sa carrière d'enseignant, Kaprekar pousuit ses recherches sur les nombres. Strictement végétarien, et menant une vie presque ascétique, cette passion intellectuelle est la seule fantaisie qui illumine sa vie. Il devient membre de l'*Indian Mathematic Society*, et se fait un devoir, chaque année, lors du congrès de cette société, de présenter ses trouvailles. Il commence également à publier régulièrement des articles sur "ses amis les nombres", dans des revues populaires ou destinées à un public étudiant. Il correspond aussi avec de nombreux mathématiciens indiens afin d'obtenir leur soutien pour présenter ses travaux auprès d'institutions universitaires. En effet, Kaprekar n'est pas familier des développements les plus pointus de la théorie des nombres, et ses recherches, que l'on peut qualifier de "naïves" (au sens où le douanier Rousseau est un peintre naïf), font sourire certains universitaires. Pourtant, les mathématiques que pratique, et surtout qu'invente Kaprekar, si elles ne sont pas d'un niveau très difficile, sont toujours originales. C'est pourquoi les revues et ouvrages de récréations mathématiques lui ouvriront largement leurs colonnes. Pendant plusieurs dizaines d'années, ses contributions seront régulièrement publiées dans les revues américaines *Scripta Mathematica*, *American Mathematical Monthly*, et surtout *Journal of Recreational Mathematics*.

Kaprekar s'intéressait également à l'astronomie. Il disait se souvenir d'avoir vu la comète de Halley en 1910, et il s'éteignit en 1986, année du retour de la comète qu'il espérait revoir.

M. C.

Problèmes numériques

1. L'algorithme de Kaprekar

Ce problème constitue la contribution la plus connue de **Kaprekar** aux domaine des mathématiques récréatives :
Prenez un nombre de quatre chiffres non tous égaux, par exemple **3619**. Ordonnez ses chiffres du plus grand au plus petit (**9631** dans notre exemple), puis soustrayez du nombre obtenu le renversé de ce dernier nombre (c'est-à-dire **1369** dans l'exemple). Recommencez à partir de la différence obtenue (9631 – 1369 = **8262**).
Que se passera-t-il si vous continuez ?

2. Les nombres de Kaprekar

Si on élève **297** au carré, le nombre obtenu : 88 209, peut se scinder en deux parties, 88 et 209, dont la somme redonne le nombre de départ, c'est-à-dire 297.
Curieusement, le nombre **703**, complément de 297 à 1000, possède la même propriété. On appelle de tels nombres des **nombres de Kaprekar**.
Trouvez d'autres nombres de Kaprekar.

$$297^2 = 88\ 209$$

$$\begin{array}{r} 88 \\ +\ 209 \\ \hline =\ 297 \end{array}$$

$$703^2 = 494\ 209$$

$$\begin{array}{r} 494 \\ +\ 209 \\ \hline =\ 703 \end{array}$$

3. Les nombres "crucisauteurs"

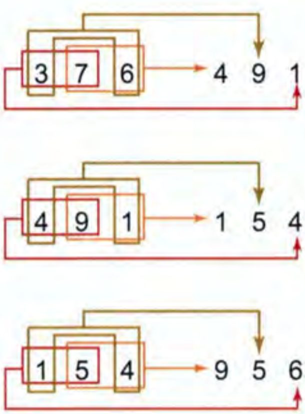
Partez d'un nombre dont l'écriture décimale comporte cinq chiffres. Scindez cette écriture décimale en deux parties : 3 chiffres à gauche et 2 chiffres à droite. Ajoutez deux à chacune de ces parties, considérée comme un nombre (l'écriture décimale d'une partie peut éventuellement commencer par un "0"). Si une retenue entraîne un dépassement du nombre de chiffres, ignorez cette retenue. Permutez ensuite les deux parties obtenues.
Au bout de combien d'itérations de ce procédé retrouverez-vous le nombre de départ ?

EXEMPLE : 54213 → 544 15 → 15544.

4. Les nombres tressés

Partez d'un nombre de trois chiffres, par exemple **376**. Additionnez ses chiffres des centaines et des dizaines : 3 + 7 = 10. Si le nombre obtenu possède deux chiffres, additionnez ces deux chiffres : 1 + 0 = 1, et remplacez par le résultat obtenu le chiffre des unités du nombre de départ. Faites ensuite la même opération avec les chiffres des centaines et des unités du nombre de départ, dont le "résidu" remplacera le chiffre des dizaines : 3 + 6 = 9, qui remplace donc 6. Enfin, le résidu de la somme du chiffre des dizaines et de celui des unités remplacera le chiffre des centaines du nombre initial : 7 + 6 = 13 et 1 + 3 = 4, qui remplace 3. Le nombre de départ **376** est ainsi remplacé par **491**. En recommençant ces opérations à partir de 491, on obtient le nombre **154**.

Au bout de combien d'étapes retrouverez-vous le nombre initial, c'est-à-dire 376 ?



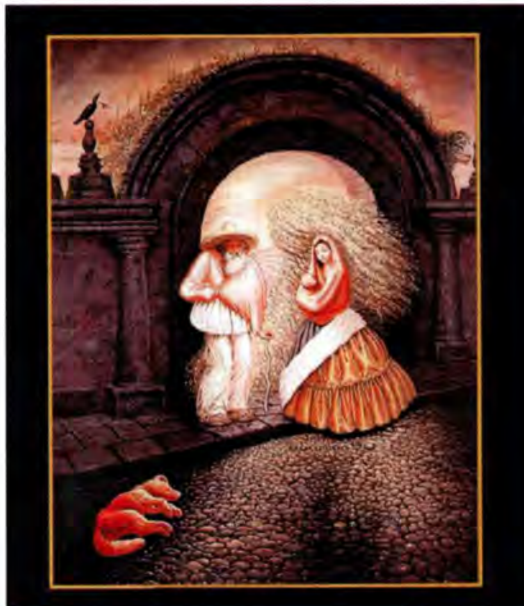
5. Les nombres originels

En partant d'un nombre quelconque, par exemple **143**, ajoutons-lui la somme de ses chiffres (1 + 4 + 3). Nous obtenons 143 + 8 = **151**. Si nous recommençons avec 151, nous obtenons **158**, puis **172**, **182**, **193**, …

Nous dirons que 143 **engendre** le nombre 151, ou que 143 est un **générateur** de 151.

Certains nombres possèdent un seul générateur, d'autres en possèdent plusieurs, et d'autres enfin, n'en ont aucun : ce sont les **nombres originels**.

Trouvez des nombres originels.



Solutions

1• L'algorithme de Kaprekar :

Les nombres obtenus à partir de 3619 sont 8262, 6354, 3087, 8352, 6174, 6174, 6174, …

L'agorithme de Kaprekar possède deux puits : **0000 et 6174** (on appelle ce dernier nombre la "**constante de Kaprekar**")

2• Les nombres de Kaprekar :

45, 55, 297, 703, 2223, 2728, 4950, 5050, 7272, 7777, 22222, … sont des nombres de Kaprekar. On notera l'appartenance du fameux "nombre circulaire" 142857 (c'est la période de 1/7) à l'ensemble des nombres de Kaprekar. Deux grands nombres de Kaprekar : 5 555 555 555 555 556 et 14 141 414 141 415.

3• Les nombres crucisauteurs :

On retrouve le nombre de départ après **46004 étapes.**

4• Les nombres tressés :

On obtient la suite : 376, 491 ,154, 956, 265, 278, 619, 167, 487, 623, 598, 845, 943, 734, 721, 389, 832, 512, 376, … Le nombre de départ revient donc après **19 étapes**.

5• Les nombres originels :

Les nombres originels inférieurs à 100 sont : 1, 3, 5, 7, 9, 20, 31, 53, 64, 75, 86, et 97.

Édouard Lucas

Édouard Lucas, avant d'être ludologue, c'est-à-dire créateur de jeux mathématiques, est mathématicien, mais d'un genre un peu particulier. Il a en effet toujours replacé les théories mathématiques dans le contexte d'énoncés concrets, bien souvent ludiques, en précisant que tout théorème peut donner lieu à l'invention d'un jeu lui correspondant. Mais qui est ce personnage dont le nom figure si souvent dans toutes les bonnes bibliographies contemporaines de récréations mathématiques ?

François Anatole Édouard Lucas est né à Amiens le 4 avril 1842, fils d'un ouvrier tonnelier, aîné d'une famille nombreuse de condition modeste. Il est reçu en 1861 à l'École Polytechnique et à l'École normale supérieure, opte pour cette dernière et, agrégé en 1864, entre à l'Observatoire de Paris comme astronome adjoint. Dès 1871, il est professeur de mathématiques spéciales au lycée de Moulins, au lycée Charlemagne puis au lycée Saint-Louis. Une chaire d'arithmétique supérieure, créée spécialement pour lui au Collège de France est aussitôt supprimée pour des raisons budgétaires, mais Lucas demeure connu pour ses résultats en théorie des nombres. Il a sa suite de Fibonacci à lui, la suite de Lucas, définie par la relation de récurrence $L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$ avec $L_0 = 1, L_1 = 3$. Les nombres de Lucas sont donc 1, 3, 4, 7, 11, 18, … Il invente également un test relativement simple pour dire si un nombre est premier ou non, ce que les mathématiciens appellent un test de primalité. Il démontrera avec sa méthode que $2^{127} - 1$, un nombre de Mersenne, est premier, obtenant ainsi le plus grand nombre premier identifié sans ordinateur. Voici pour le côté académique d'Edouard Lucas.

Sa face cachée est sa passion pour les jeux mathématiques qui fait de lui une figure incontournable des récréations mathématiques. Lucas, non content de faire une compilation quasi exhaustive de toutes le publications sur le sujet depuis que les mathématiques existent, a su analyser et théoriser la plupart des sujets abordés aussi bien dans sa *Théorie des nombres* que dans *L'arithmétique amusante* et dans *Récréations mathématiques*. Il a su aussi inventer des jeux, nombreux et variés, comme le *baguenaudier*, ce jeu de désenchevêtrement qui donna par la suite lieu à de multiples variantes de casse-métalliques. Il sait toujours tirer de ses innovations une théorie mathématique et l'exploiter. On connaît par exemple depuis 1848, posé par Max Bezzer et résolu par Franck Nauck en 1850, le problème des huit reines sur l'échiquier : comment disposer huit reines sur un échiquier de manière qu'aucune d'elles ne menace aucune autre ? Lucas va le généraliser à des échiquiers 3×3, 4×4, $n \times n$, $n \times p$, et va même calculer le nombre de positions possibles si on pose une reine au hasard ou si l'on remplace les reines par des tours, des cavaliers ou des fous. S'intéressant aussi aux chemins eulériens, ces parcours qu'on peut décrire en empruntant une fois et une seule chacune des arêtes d'un graphe, il décrit un algorithme permettant de décrire le réseau d'un seul trait.

Systèmes de numération, calculs binaires, propriétés des nombres entiers, nombres premiers, théorie des graphes, furent pour lui l'occasion d'analyses et de jeux parallèles, touchant une large palette des mathématiques et de leurs propriétés ludiques. Il laisse à son décès accidentel une œuvre qui restera inachevée, mais sa vie lui aura permis, comme il le cite en exergue d'un de ces volumes sur les récréations arithmétiques de "mener une infinité de choses sages de façon folle mais aussi une infinité de choses folles de manière très sage" (Montesquieu).

A. Z.

Le testament du nabab

Un nabab laisse à ses enfants un certain nombre de diamants d'égale valeur, dans les conditions suivantes :

• le premier prend un diamant et le septième de ce qui reste,

• le deuxième prend deux diamants et le septième de ce qui reste,

• le troisième prend trois diamants et le septième de ce qui reste, etc.

• le dernier prend son nombre de diamants et le septième de ce qui reste, c'est-à-dire rien.

Avez-vous trouvé combien le nabab avait d'enfants, et de diamants ?

Sinon, voici l'indication – d'ailleurs inutile- de Lucas : après le partage, toutes les parts sont égales. Alors maintenant ? Avez-vous bien trouvé que le nabab avait 6 enfants et 36 diamants ?

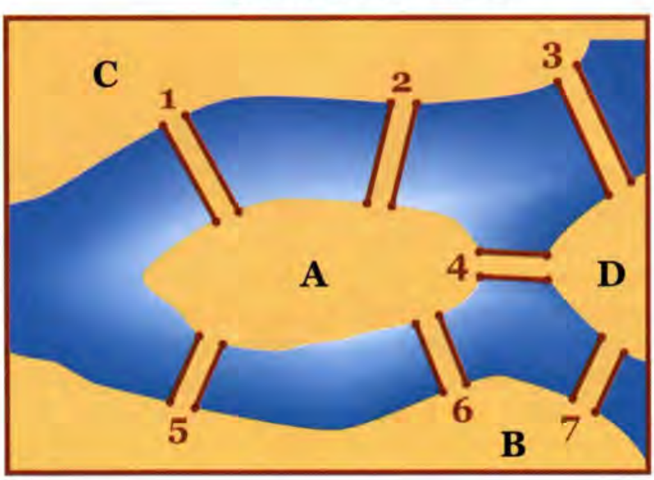
Puzzles géométriques

Si la géométrie d'Euclide peut inspirer des défis mathématiques, sa présentation austère n'incline guère au divertissement, sauf pour les amateurs éclairés. Il faut attendre Euler et sa "géométrie de situation", qui pose les bases de la topologie et de la théorie des graphes, pour se divertir avec des points et des lignes. A côté de ces "nouvelles géométries", se développent, comme en littérature, des "géométries à contraintes", où l'on ne peut utiliser que certains instruments (règle seule, ou compas seul ou compas bloqué) ou certains éléments géométriques comme les carrés unitaires des polyminos, par exemple.

La géométrie de position

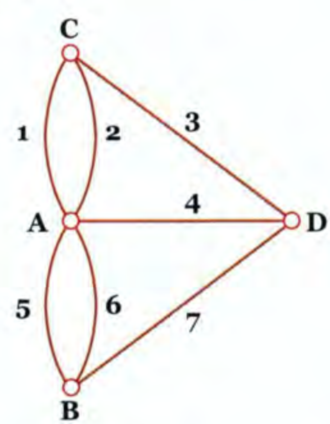
Un des premiers problèmes de la théorie des graphes est celui des « ponts de Königsberg », que le mathématicien suisse Euler (1707-1783) résolut en 1736.

La ville de Königsberg (à cette époque en Prusse Orientale, devenue ensuite soviétique sous le nom de Kaliningrad), est traversée par la rivière Pregel, qui forme à cet endroit deux îles. Sept ponts permettent de relier les deux rives de la Pregel, ainsi que les deux îles, comme l'indique le plan ci-dessous. Le problème qui fut posé à Euler est le suivant : est-il possible à un habitant de Königsberg, en partant de chez lui, de faire une promenade dans la ville qui lui fasse traverser chacun des sept ponts exactement une fois ?

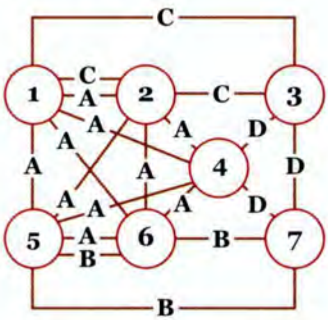


Représentation symbolique

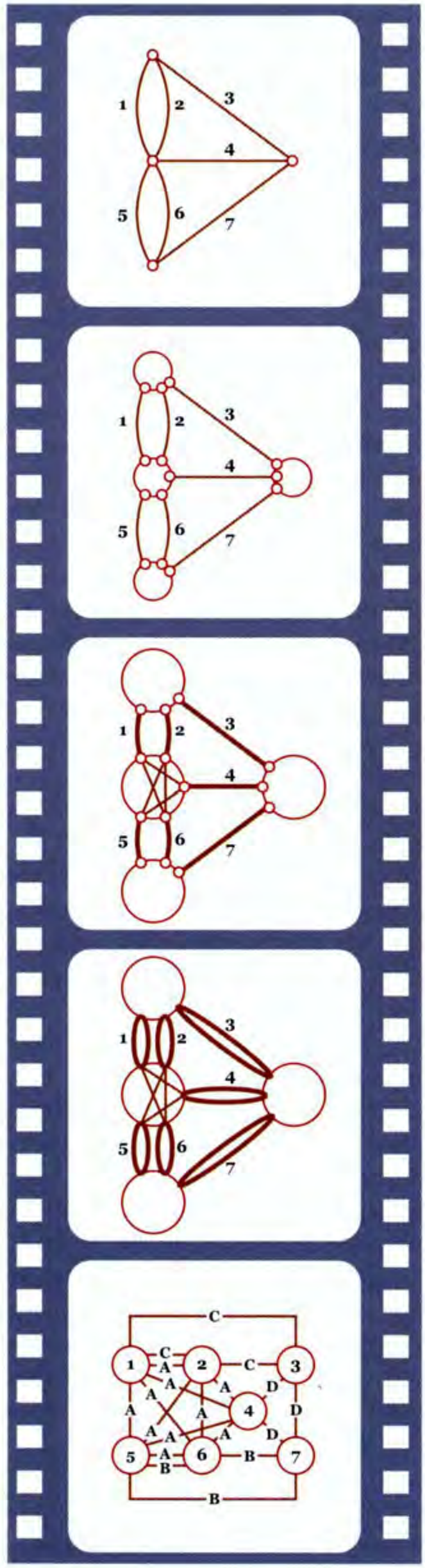
Pour étudier ce problème, une représentation commode est de symboliser chaque élément de terre (rive ou île) par un point, et chaque pont par un arc reliant deux points (figure ci-dessous). Cette représentation s'appelle *un graphe*.



La représentation du problème des ponts de Königsberg par un graphe peut se faire d'une autre façon. En effet, on peut représenter les ponts par des sommets, et les chemins terrestres allant d'un pont à un autre par des arêtes. Cette méthode donne le graphe ci-dessous, qui est le graphe des arêtes du premier graphe.



Le film ci-contre (à droite) vous montre le passage de l'un à l'autre.



Ordre d'un sommet

Avant d'énoncer les propriétés découvertes par Euler, nous devons définir l'*ordre d'un sommet*, qui n'est autre que le nombre d'arêtes aboutissant à ce sommet. Par exemple, dans le graphe des ponts de Königsberg, A est d'ordre 5, B est d'ordre 3, C est d'ordre 3, et D est d'ordre 3.

Au cours d'une soirée qui réunissait un certain nombre de personnes, de nombreuses poignées de mains furent échangées. Mais combien de personnes ont serré un nombre impair de mains ? Il est bien sûr impossible de donner une réponse précise à cette question, mais il y a une chose que l'on peut affirmer avec certitude : le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains est pair. En effet, chaque poignée de mains fait intervenir deux personnes. Si l'on additionne les nombres de mains serrées par chacun des participants à la soirée, on arrive à un total qu'il faut diviser par deux pour obtenir le nombre de poignée de mains. Le total obtenu avant division par deux doit

Un **graphe** est constitué d'un ensemble de **sommets** (les points), et d'un ensemble d'**arêtes** (les arcs) reliant certains de ces sommets. Les arêtes d'un graphe peuvent être orientées ou non.

donc être pair, ce qui implique que le nombre de personnes ayant serré un nombre impair de mains soit pair.

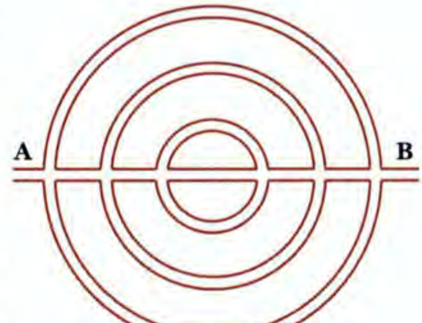
Théorème dit "des poignées de mains":
Dans un graphe, il y a toujours un nombre pair de sommets d'ordre impair.

Chemins et cycles eulériens

Le problème des ponts de Königsberg se ramène à trouver un chemin partant d'un sommet du graphe, et décrivant une et une seule fois chacune de ses arêtes (il est permis de passer plus d'une fois par n'importe quel sommet). En hommage à Euler, lorsqu'il en existe un, un tel chemin est appelé *chemin eulérien*. Lorsque le sommet de départ et le sommet d'arrivée coïncident, le chemin est appelé un *cycle* (ou *circuit*).
Un graphe possédant un *cycle eulérien* est un *graphe eulérien*.
Tous les graphes dont nous parlerons seront supposés être *connexes*, c'est-à-dire tels que l'on puisse toujours aller d'un sommet quelconque à n'importe quel autre sommet.
La démonstration de ce théorème repose sur le fait qu'en parcourant un chemin ou un circuit, pour chaque sommet visité, on utilise une arête pour arriver à ce sommet, et une arête pour en repartir, ces deux arêtes ne devant plus être utilisées par la suite.
Le nombre d'arêtes utilisables en ce sommet diminue donc de deux. Si un sommet est d'ordre impair, une des arêtes aboutissant à ce sommet doit donc être soit la première arête d'un chemin, soit la dernière.
Un chemin n'ayant que deux extrémités, le nombre de sommets d'ordre impair ne peut excéder deux.

Théorème d'Euler :
• **Un graphe possède un chemin eulérien si et seulement s'il possède au plus deux sommets d'ordre impair.**
• **Un graphe est eulérien si et seulement si tous ses sommets sont d'ordre pair.**

Un problème du Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques : "le fil d'Ariane", consistait à chercher un chemin eulérien, avec la condition supplémentaire que ce chemin ne devait jamais se croiser lui-même (cette condition peut toujours être satisfaite si le graphe est *planaire*, c'est-à-dire s'il peut être dessiné dans un plan, sans que deux arêtes quelconques ne se croisent jamais). Il fallait également trouver le nombre de solutions, c'est-à-dire le nombre de chemins possibles.

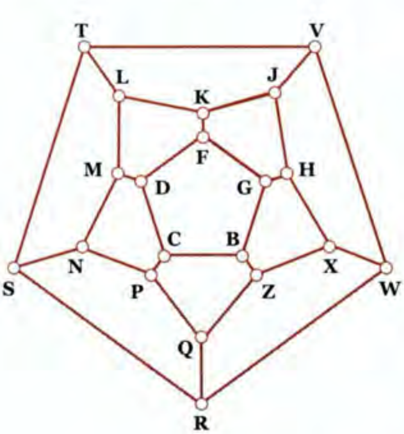


De telles figures, qui peuvent être tracées sans lever le crayon, sont parfois appelées *figures unicursales*.
Un problème voisin, étant donné une figure, ou un graphe, est la détermination du nombre minimum de "coups de crayon" nécessaires pour tracer intégralement cette figure, chaque "coup de crayon" consistant en un tracé continu, c'est-à-dire obtenu sans lever le crayon.

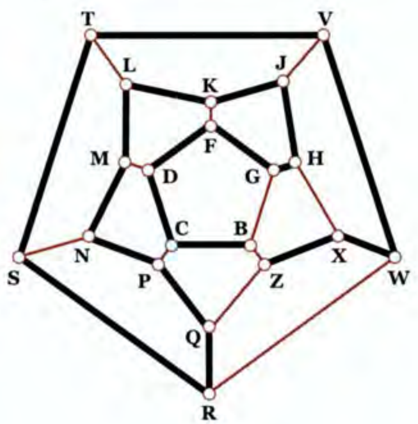
Chemins et cycles hamiltoniens

En 1859, le mathématicien irlandais Sir William Rowan Hamilton (1805-1865), créa, et commercialisa, un jeu intitulé "le voyage autour du monde". Ce jeu consistait en un *dodécaèdre* de bois (le dodécaèdre régulier - 20 sommets, 30 arêtes et 12 faces - est un des 5 solides platoniciens), aux sommets duquel figuraient les noms de 20 grandes villes mondiales : Bruxelles, Canton, Dehli, Francfort, ..., Paris, etc., représentées par les vingt consonnes de l'alphabet.

Les trente arêtes du dodécaèdre sont marquées par des traits noirs, et elles représentent les seules routes que peut emprunter le voyageur.

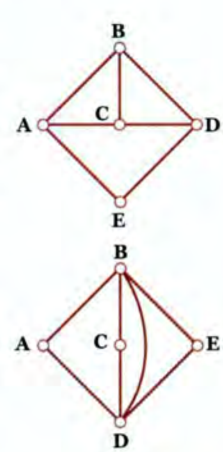


Le but du jeu est de trouver un circuit passant une et une seule fois par chacune des vingt villes, et permettant au voyageur de revenir à son point de départ. Au lieu de se pratiquer sur un véritable dodécaèdre, le jeu peut aussi se dérouler sur une projection plane de ce solide (figure du bas). Cette autre version du jeu a également été commercialisée sous le nom de "jeu icosien" (du mot grec "*eikosi*" : vingt). Une solution est illustrée ci-dessous. Elle consiste tout simplement à décrire les vingt consonnes B, C, ..., X, Z, dans l'ordre... alphabétique.
Edouard Lucas dénombre 30 solutions au jeu d'*Icosie*.



Le problème de l'existence et du nombre de cycles hamiltoniens, s'il parait de prime abord proche de celui des cycles eulériens, est en fait beaucoup plus difficile, et est loin d'être résolu.
On ne sait pas caractériser les graphes qui possèdent un cycle hamiltonien (un tel graphe est appelé un graphe *hamiltonien*).

Parmi les deux graphes représentés ci-contre, celui du haut est hamiltonien, tandis que celui du bas ne l'est pas.

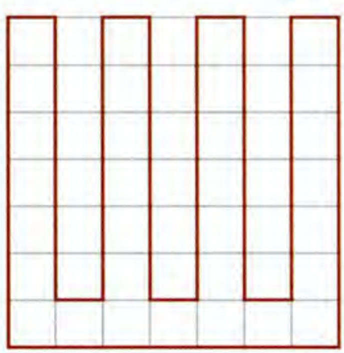


Un autre problème du Championnat des Jeux Mathématiques et Logiques nécessitait la recherche de l'existence d'un circuit hamiltonien sur un quadrillage de… 1989 sur 1989 nœuds : "le circuit maximal".

On considère un quadrillage carré 1989 × 1989, comportant des nœuds (intersections), et des arêtes de longueur 1 (segments joignant deux nœuds).

Quelle est la longueur du circuit le plus long (chemin partant d'un nœud et aboutissant à ce nœud) sachant qu'on ne peut emprunter qu'une seule fois une arête et qu'on ne peut passer qu'une seule fois sur un nœud (à l'exception du point de départ) ?

Comme le montre la figure ci-dessous, un tel circuit est toujours possible si le nombre de nœuds est pair sur chacun des côtés du carré quadrillé.

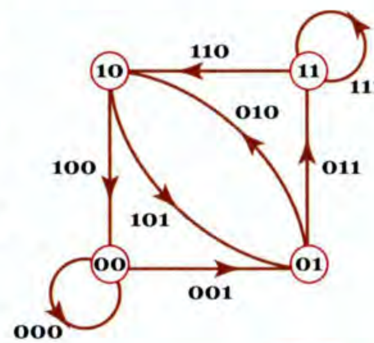


Si un graphe est *eulérien*, son graphe des arêtes est *hamiltonien*. **La réciproque est fausse** (voir les ponts de Königsberg). Si un graphe est *hamiltonien*, son graphe des arêtes est *eulérien* et *hamiltonien*. Si chaque sommet d'un graphe d'ordre $p \geqslant 3$ (l'*ordre* d'un graphe est le nombre de ses sommets), est d'ordre supérieur ou égal à $p/2$, alors ce graphe est *hamiltonien*.

Le problème de Posthumus

Un ingénieur hollandais, K. Posthumus posa, en 1946, le problème suivant, dans le cadre de travaux sur la théorie des circuits téléphoniques : combien existe-t-il de nombres binaires (utilisant uniquement les chiffres 0 et 1), contenant une et une seule fois chacun des huit triplets possibles en binaire (000, 001, 010, 100, 110, 101, 011, et 111) ?

Une première possibilité est de représenter les doublets possibles *ab* par les sommets d'un graphe, dont chaque arête correspondrait au passage d'un doublet *ab* à un doublet *bc* :



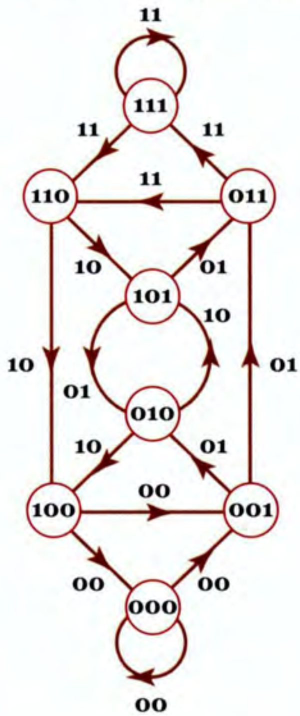
Chaque arête correspond donc à un triplet formé des deux chiffres du doublet de départ, et du deuxième chiffre du doublet image.

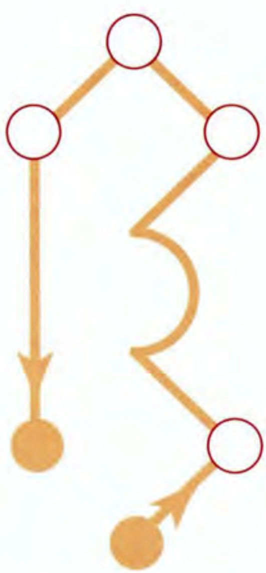
Sur ce graphe, le problème de Posthumus se ramène à déterminer le nombre de chemins eulériens.

L'un de ces chemins est représenté ci-dessus; ce chemin nous donne la solution 0 0 0 1 0 1 1 1 0 0, qui contient une et une seule fois chacun des huit triplets possibles.

Une autre représentation possible est le graphe ci-contre, dans lequel les 8 sommets représentent les huit triplets, chaque arête correspondant au passage d'un triplet abc à un autre triplet bcd : Sur ce graphe, le problème de Posthumus se ramène à trouver tous les chemins hamiltoniens. L'un de ces chemins est représenté en page suivante.

Il fournit la même solution que le chemin eulérien du graphe précedent.





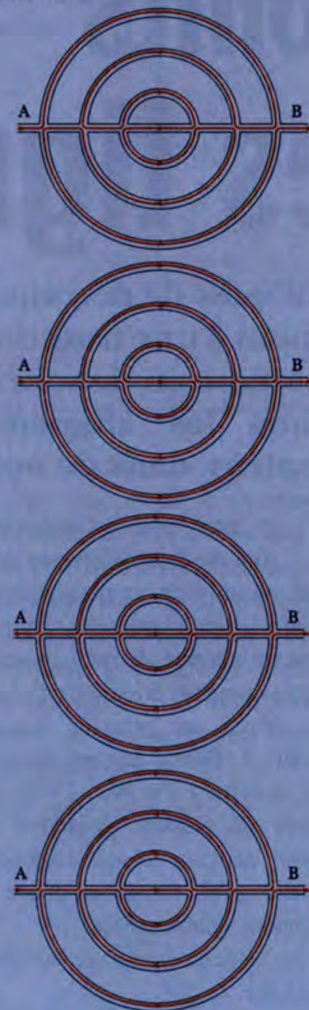
Remarquons que le graphe ci-dessus est le graphe des arêtes du premier graphe (en tenant compte de l'orientation des arêtes).

M. C.

Solutions

Le fil d'Ariane

Il existe 4 solutions représentées ci-dessous.



Le circuit maximal

Un quadrillage 1989 × 1989 comporte $1989^2 = 3\,956\,121$ nœuds. Le circuit idéal passerait par tous ces nœuds, permettant ainsi d'obtenir la longueur maximum. Un tel circuit existe pour tout quadrillage $n \times n$ où n est un nombre impair.

On a 3 956 121 nœuds et autant d'arêtes. La longueur du circuit maximal est donc égale à 3 956 121.

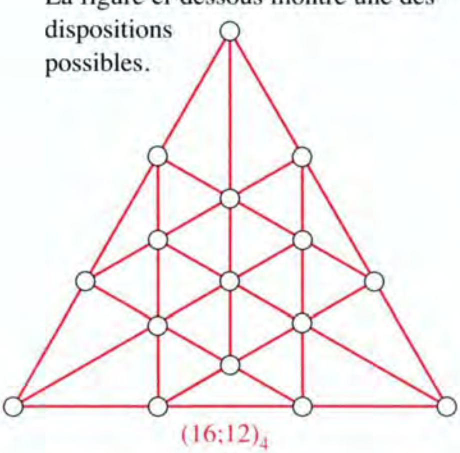
par Michel Criton

Des points et des lignes

Comme les problèmes de découpages, les problèmes d'alignements appartiennent à une tradition très ancienne dans les jeux mathématiques. Même en dehors de ce domaine, on en trouve le témoignage dans les alignements de monuments ou de mégalithes rencontrés dans de nombreuses civilisations.

Les problèmes d'alignement sont traditionnellement posés en utilisant un personnage de jardinier désirant planter des arbres qui forment un nombre donné (souvent le plus grand nombre possible!) d'alignements. Voici un premier exemple emprunté à Henry Ernest Dudeney (*The Canterbury Puzzles*, 1919) : un châtelain du Sussex possédait une plantation de seize chênes, disposés de telle sorte qu'ils formaient douze alignements de quatre arbres.

La figure ci-dessous montre une des dispositions possibles.

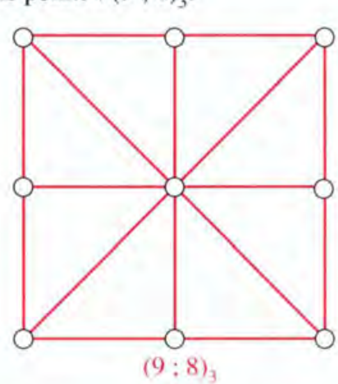


$(16;12)_4$

Un jour, un voyageur fit remarquer au châtelain qu'il aurait pu disposer ses seize chênes de façon à former quinze alignements de quatre arbres. Saurez-vous retrouver une telle disposition ?

Pour plus de commodité, convenons de noter $(p\,;a)_k$ une disposition de p points en a alignements de k points. Ainsi, la figure ci-dessus sera notée $(16\,;12)_4$, et la figure demandée $(16\,;15)_4$.

Voici un autre exemple emprunté à Sam Loyd, génial Américain auteur de problèmes et de casse-tête (1841-1911) : il est facile de disposer neuf points de façon à former huit alignements de trois points : $(9\,;8)_3$.



$(9\,;8)_3$

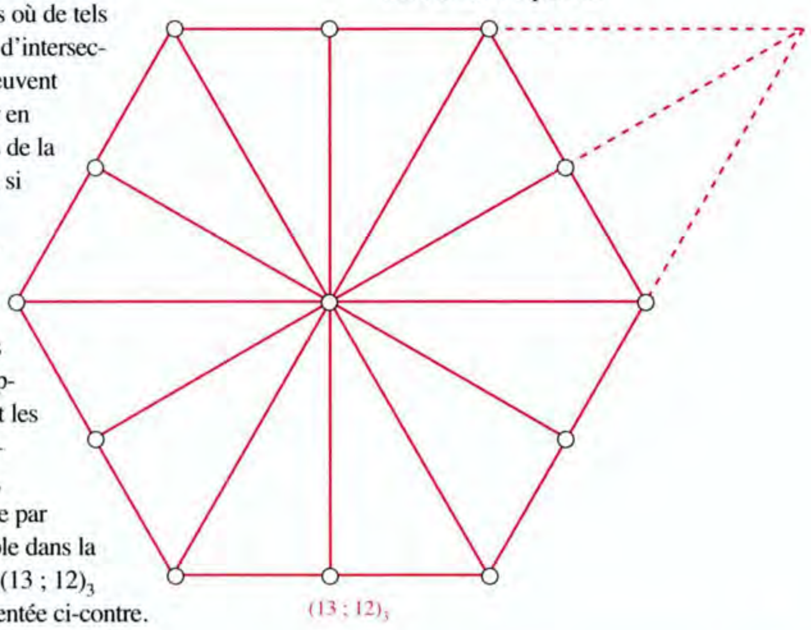
Il est possible de faire mieux, puisqu'on peut former, toujours avec neuf points, neuf alignements de trois points : $(9 ; 9)_3$. Mais pouvez-vous montrer qu'il est possible de disposer ces neuf points de telle sorte qu'ils forment dix alignements de trois points $(9 ; 10)_3$? Saurez-vous retrouver une telle disposition ?

Une première remarque vient à l'esprit en observant ces figures : une disposition de points en engendre une infinité d'autres par déformation. Aussi considérerons-nous comme identiques deux dispositions topologiquement équivalentes. Par souci d'esthétique, nous essaierons simplement de faire apparaître le plus de symétries possibles.

Des configurations parfaites

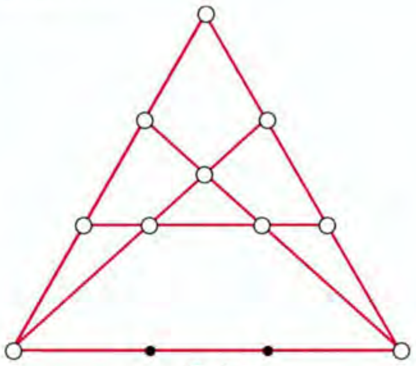
On peut remarquer que certaines des dispositions représentées présentent l'inconvénient, sur un plan esthétique, de posséder des points d'intersection superflus, c'est-à-dire non comptés dans le nombre de points de la figure.

Il existe également des cas où de tels points d'intersection peuvent exister en dehors de la figure, si l'on considère les droites qui supportent les alignements, comme par exemple dans la figure $(13 ; 12)_3$ représentée ci-contre.



$(13 ; 12)_3$

D'autre part, certaines dispositions peuvent présenter des "points flottants", c'est-à-dire des points qui ne sont pas des intersections de droites, comme la figure $(12 ; 6)_4$ représentée ci-dessous.



$(7 ; 6)_3$

On peut donc poser le problème des alignements de points sous une forme certes plus restrictive, mais aussi plus satisfaisante sur le plan de la rigueur : trouver une disposition de a droites qui déterminent p points (d'intersection entre ces droites), de telle sorte que chacune de ces a droites contienne exactement k points.

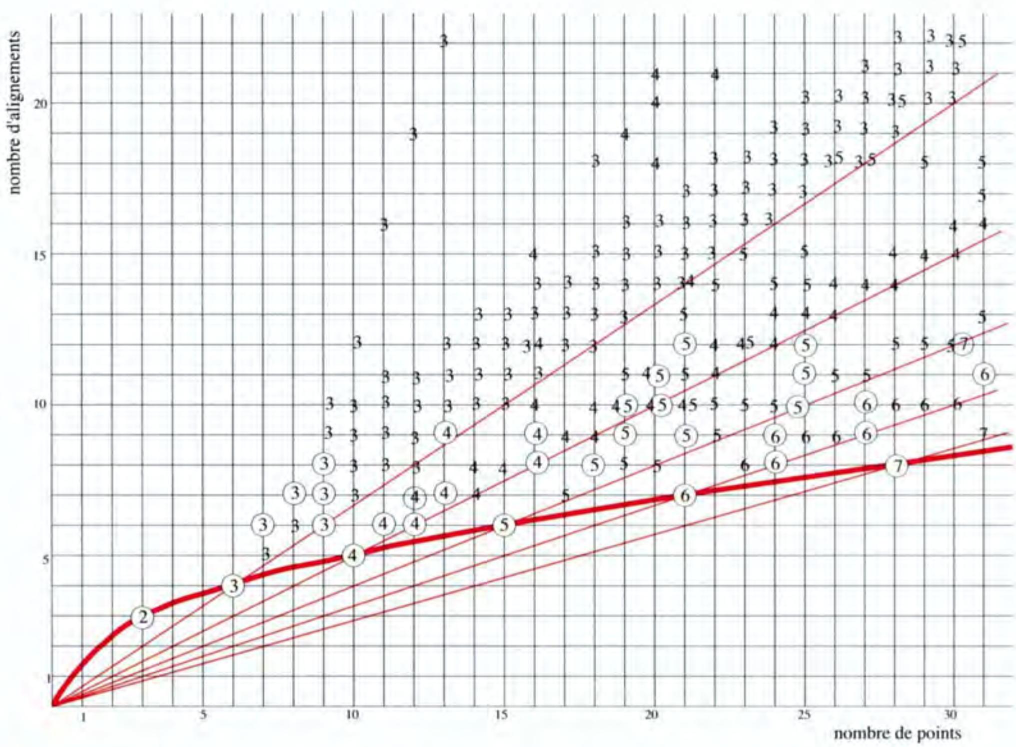
Nous avons rassemblé dans un diagramme toutes les dispositions de points trouvées dans la littérature des jeux mathématiques (voir les références en fin d'article). Dans ce diagramme, nous avons porté en abscisse les nombres de points, en ordonnée les nombres d'alignements, et dans le diagramme, les nombres de points par alignements. Ainsi, par exemple, le 4 figurant en (16 ; 12) correspond à la disposition $(16 ; 12)_4$ donnée dans le problème de Dudeney. Par ailleurs, les nombres cerclés correspondant à des configurations parfaites. Bien sûr, plusieurs dispositions, topologiquement non équivalentes, peuvent correspondre à un même nombre du diagramme. Celui-ci nous indique donc seulement s'il existe au moins une disposition connue de p points en a alignements de k points. Un catalogue des dispositions connues devrait accompagner ce diagramme, mais cet article n'y suffirait pas !

Le lecteur pourra essayer de retrouver une ou des dispositions correspondant aux nombres inscrits dans le diagramme. Certaines lui donneront du fil à retordre ! Ensuite, il pourra, tel l'explorateur découvrant un continent inconnu, essayer de compléter les vides de ce tableau.

Précisons que certaines dispositions évidentes n'y ont pas été portées. En effet, cela offre peu d'intérêt de signaler qu'on peut toujours disposer p points de telle sorte qu'il n'y ait jamais k points ($k > 2$) alignés (c'est-à-dire tels que $a = 0$), ou qu'on peut toujours disposer p points ($p \geqslant k > 2$) de façon à n'avoir qu'un seul alignement de k points ($a = 1$).

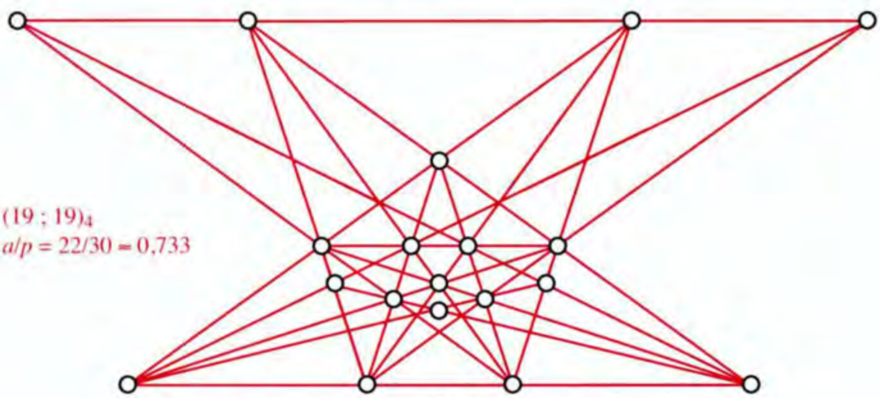
On notera des familles de configurations qui forment des droites d'équations $a = 2p/k$, ainsi que la parabole d'équation $p = a(a-1)/2$.

Ce qui est, par contre, plus difficile, est de trouver, pour un nombre p de points donné, et un nombre k de points par

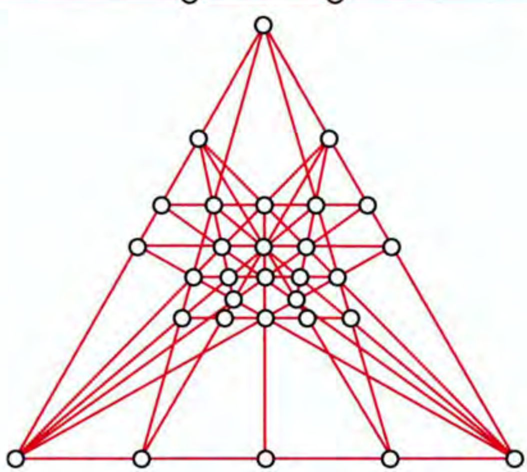


alignement fixé, le plus grand nombre a d'alignements possibles. Citons dans le cas où $k = 3$, une conjecture de Burr, Grünbaum et Sloane donnant le nombre maximum d'alignements a en fonction du nombre p de points : a est l'entier le plus proche de $1 + p(p - 3)/6$.

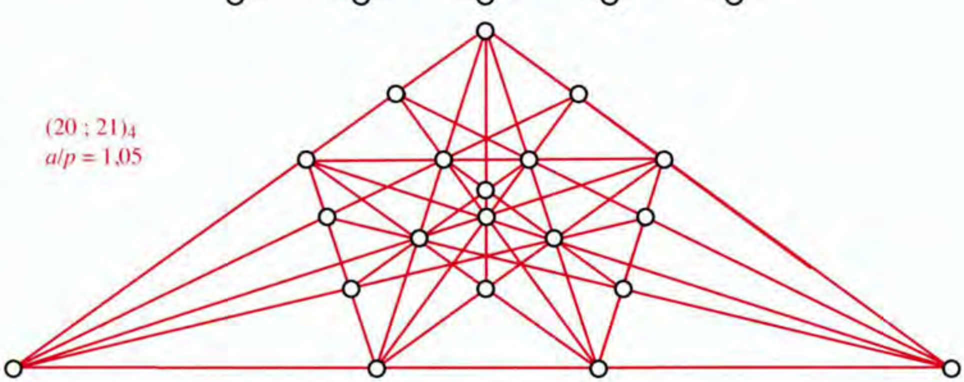
Une autre piste intéressante est l'étude du nombre de points multiples au sein des différentes configurations : le nombre de points doubles (points appartenant à exactement deux alignements), le nombre de points triples ... On peut, dans cet ordre d'idées, s'intéresser, pour une valeur de k fixée, au rapport a/p, et en particulier à la valeur maximum que peut prendre ce rapport. Voici quelques exemples avec un "bon" rapport a/p.



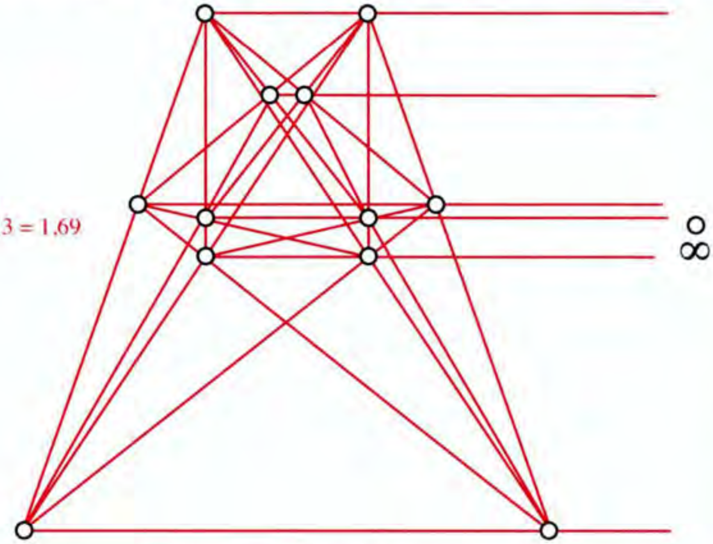
$(19 ; 19)_4$
$a/p = 22/30 \approx 0{,}733$



$(30 ; 22)_5$
$a/p = 1$



$(20 ; 21)_4$
$a/p = 1{,}05$



$(13\,;22)_3$
$a/p = 22/13 = 1{,}69$

Dans la figure ci-contre, on a utilisé un point à l'infini. Bien sûr, le recours à un tel point pourrait être évité : il faudrait "déformer" la figure de telle manière que les six droites parallèles deviennent six droites concourantes. Mais une telle figure tiendrait difficilement sur une seule page de cette revue ! Une question subsidiaire difficile : dans quel ordre faut-il tracer les droites pour construire cette figure ?

Pas de maximum pour le rapport

On peut montrer que le rapport a/p peut être rendu aussi grand que l'on veut, k étant fixé.

Montrons cette construction pour $k = 3$ et $p = 3 \times 12 = 36$.

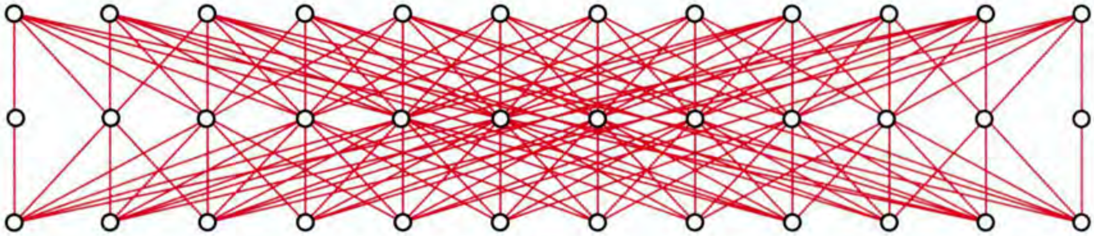
On obtient un nombre d'alignements de 3 points égal à : $2 + 2 \times 10 + 2 \times 8 + 2 \times 6 + 2 \times 4 + 2 \times 2$, soit 72 alignements. Le rapport a/p vaut $72/36 = 2$, mais, si l'on ajoutait une treizième colonne de 3 points, on aurait 13 alignements de plus, et le rapport a/p serait alors égal à $85/39 > 2$.

En généralisant, si l'on dispose $k(k - 1)n$ points en k colonnes de $(k - 1)n$ points, on obtient $(k - 1)n^2$ alignements de k points. La configuration peut être notée :

$$(k(k-1)n\,;(k-1)n^2)_k.$$

Notons néanmoins que pour k et p tous deux fixés, la détermination du nombre a maximum reste un défi passionnant !

M. C.



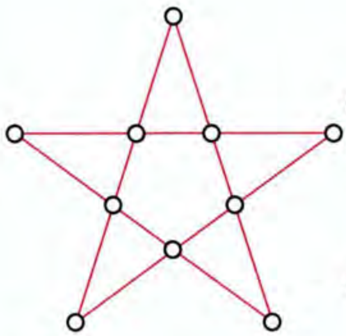
$(36\,;72)_3$

Bibliographie

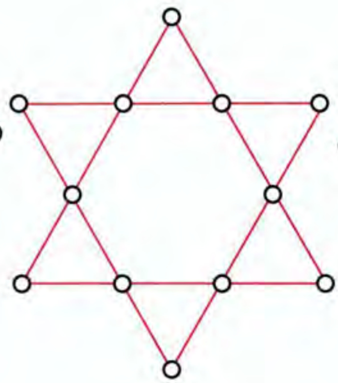
H. E. Dudeney, *The Canterbury Puzzles,* Dover.
M. Gardner, *Les casse-tête mathématiques de Sam Loyd,* Dunod.
Time travel and other mathematical bewilderments (Freeman)
P. Berloquin, *Le jardin du sphinx,* Dunod.
Jeux mathématiques du Monde, Flammarion.
Chronique ***"Jeux et Paradoxes"***, Science & Vie.
Contributions d'**Antoine Leclerc** et de **Christian Romon**.

Des familles de dispositions

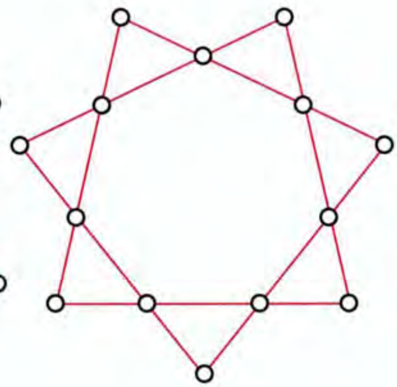
Les polygones réguliers, convexes et étoilés, permettent de construire des familles de dispositions. Vous trouverez ci-dessous quelques-unes de ces familles. Celles-ci ne donnent en général pas des valeurs très élevées du quotient *a/p*, mais on peut partir de certaines d'entre elles, pour, en ajoutant des points judicieusement placés, améliorer ce rapport.



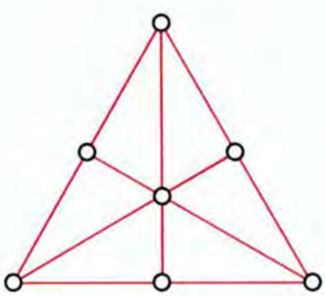
$(10 ; 5)_4$



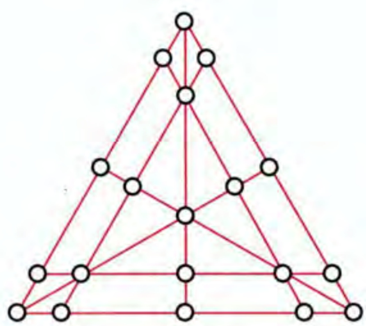
$(12 ; 6)_4$



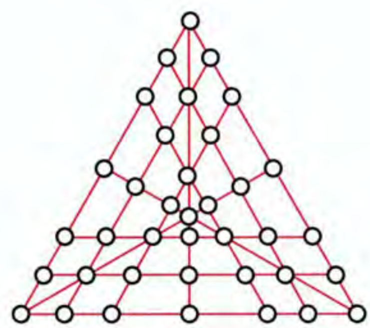
$(14 ; 7)_4$



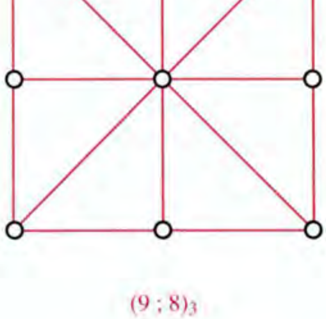
$(7 ; 6)_3$



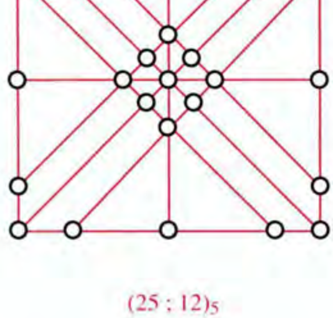
$(19 ; 9)_5$



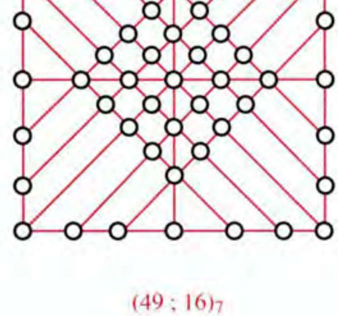
$(37 ; 12)_7$



$(9 ; 8)_3$



$(25 ; 12)_5$



$(49 ; 16)_7$

par Michel Criton

Figures coupables

Les problèmes de découpages sont souvent considérés plus comme des puzzles que comme de véritables problèmes. La raison en est que très peu de méthodes existent pour s'attaquer à ce type de questions, et que l'intuition inspirée est souvent plus utile que le raisonnement pur.

Il existe cependant quelques pistes pour étudier systématiquement ce genre de problèmes.

Nous considérerons ici seulement les découpages d'une figure en deux parties devant être superposables.

Nous ne citerons que pour mémoire les figures présentant un axe de symétrie, qui, de manière évidente, sont découpables en deux parties superposables (après retournement de l'une des deux).

On notera cependant qu'un tel découpage selon un axe de symétrie n'exclut pas l'existence d'un autre découpage, comme le montre l'exemple de la "carafe" de la figure 1.

De même, toute figure admettant un centre de symétrie peut être partagée en deux parties congruentes, et ce d'une infinité de façons (sans retournement).

Un exemple en est donné par le symbole yin-yang de la figure 2.

Par contre le jeu devient plus intéressant, mais plus difficile aussi, pour des figures ne présentant aucune symétrie.

fig. 1

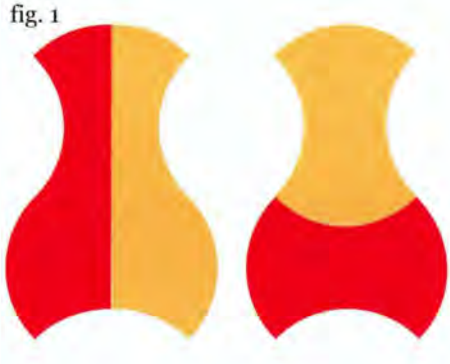


fig. 2

Ainsi, la "silhouette d'usine" ci-dessous peut être découpée en deux parties superposables.

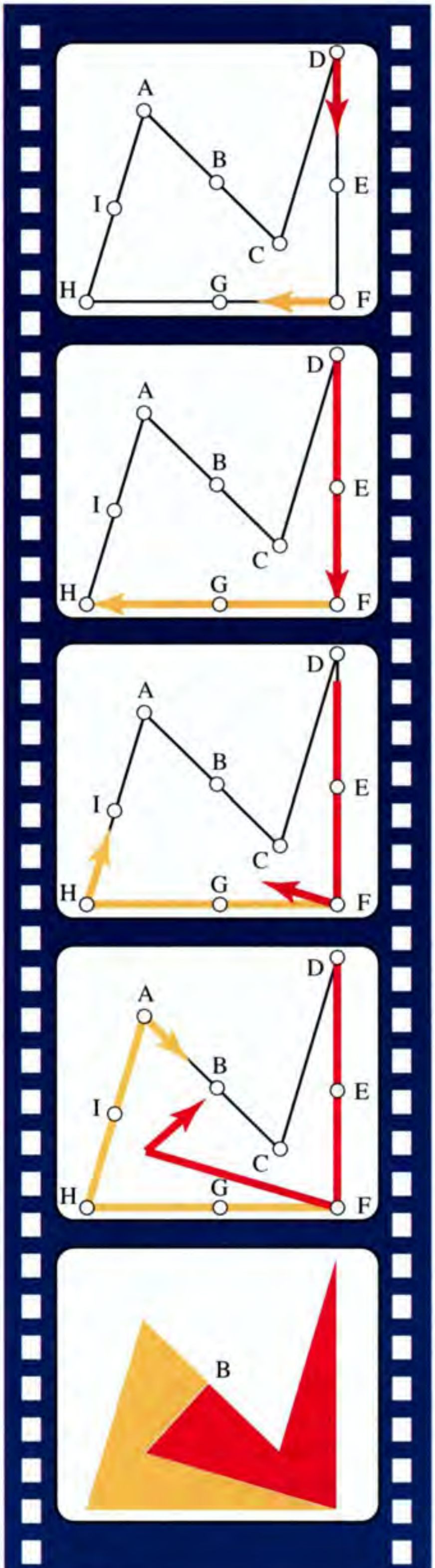
Il est assez facile de construire un tel problème : on assemble deux exemplaires d'une même figure, l'un des deux ayant éventuellement été retourné au préalable. Il est par contre beaucoup moins facile de le résoudre.
Une méthode systématique de résolution a cependant été imaginée par le suédois **Kimmo Eriksson**.

La méthode de Kimmo Eriksson

Pour appliquer cette méthode, on considère l'ensemble S des "sommets" auquels on adjoint les milieux des "côtés" (un "côté" peut éventuellement être courbe si le "polygone" est curviligne) de la figure à découper. On prend deux points de l'ensemble S, on choisit un sens de déplacement à partir de chacun de ces deux points (il y a donc 4 choix possibles), puis on se déplace "parallèlement" sur le bord de la figure en partant des deux points. (ici, le mot "parallèlement" ne signifie pas que les trajets sont parallèles, mais qu'ils engendrent des tracés à tout moment superposables). L'algorithme inventé par Kimmo Eriksson repose sur le fait que si une figure F est décomposable en deux parties superposables (on dira que ces deux parties se correspondent), alors il existe deux parties du bord de F qui se correspondent. Autrement dit, l'image du bord de F dans la correspondance entre les deux parties ne peut être entièrement incluse dans l'intérieur de F.

Découpage d'un cube "écorné" en huit cubes "écorné" isométriques semblables à la figure initiale.

L'algorithme de Kimmo Eriksson en action. Il aboutit au partage de la "silhouette d'usine" en 2 parties superposables. Ces 2 parties sont images l'une de l'autre dans une rotation de centre B et d'angle 90 °.



Le "film" ci-contre à droite illustre l'application de l'algorithme de Kimmo Eriksson. Les deux points choisis sont D et F, et le sens de déplacement est celui des aiguilles d'une montre à partir de ces deux points. À chaque changement de direction, l'un des deux tracés contraint l'autre à tourner du même angle. À la fin, chacun des deux tracés se referment : la figure est partagée en deux parties superposables.

La seule difficulté, non négligeable, réside dans le choix des deux points de départ parmi les points de l'ensemble S, et, dans une moindre mesure, dans le choix des sens de déplacement (il n'y a que 4 possibilités à essayer).

Lorsqu'une tentative n'aboutit pas, soit on se trouve confronté à une impossibilité de déplacement pour un des deux tracés avant que ceux-ci ne se soient refermés (il y a impossibilité si chacun des deux tracés, par exemple, doit sortir de la figure pour suivre l'autre), soit les deux tracés se referment, formant ainsi deux parties superposables, mais il reste une partie de la figure qui n'est incluse dans aucune des deux parties.

Afin que vous puissiez vraiment tester cette méthode, nous avons rassemblé pour vous 40 figures à partager en deux parties superposables. Exercez votre sagacité sur ces figures !

Quelques questions demeurent ouvertes :

1 • Existe-t-il des cas où la méthode de Kimmo Eriksson est inapplicable ?

2 • Est-il toujours suffisant de prendre les sommets et les milieux des côtés ?

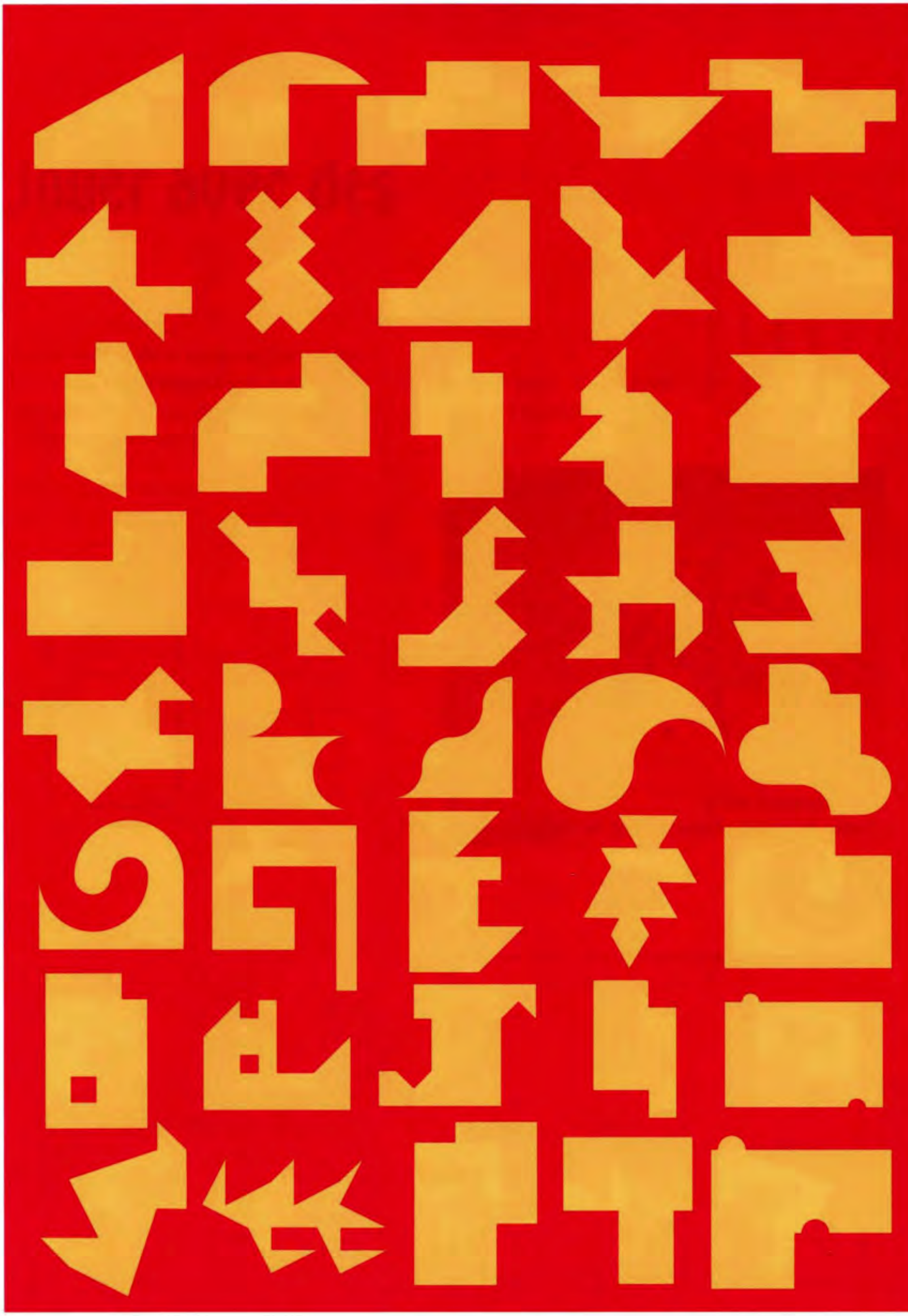
3 • Existe-t-il des figures non triviales décomposables de plus de deux façons ?

Quant à un nombre de parties strictement plus grand que 2, aucune méthode de résolution ne semble connue.

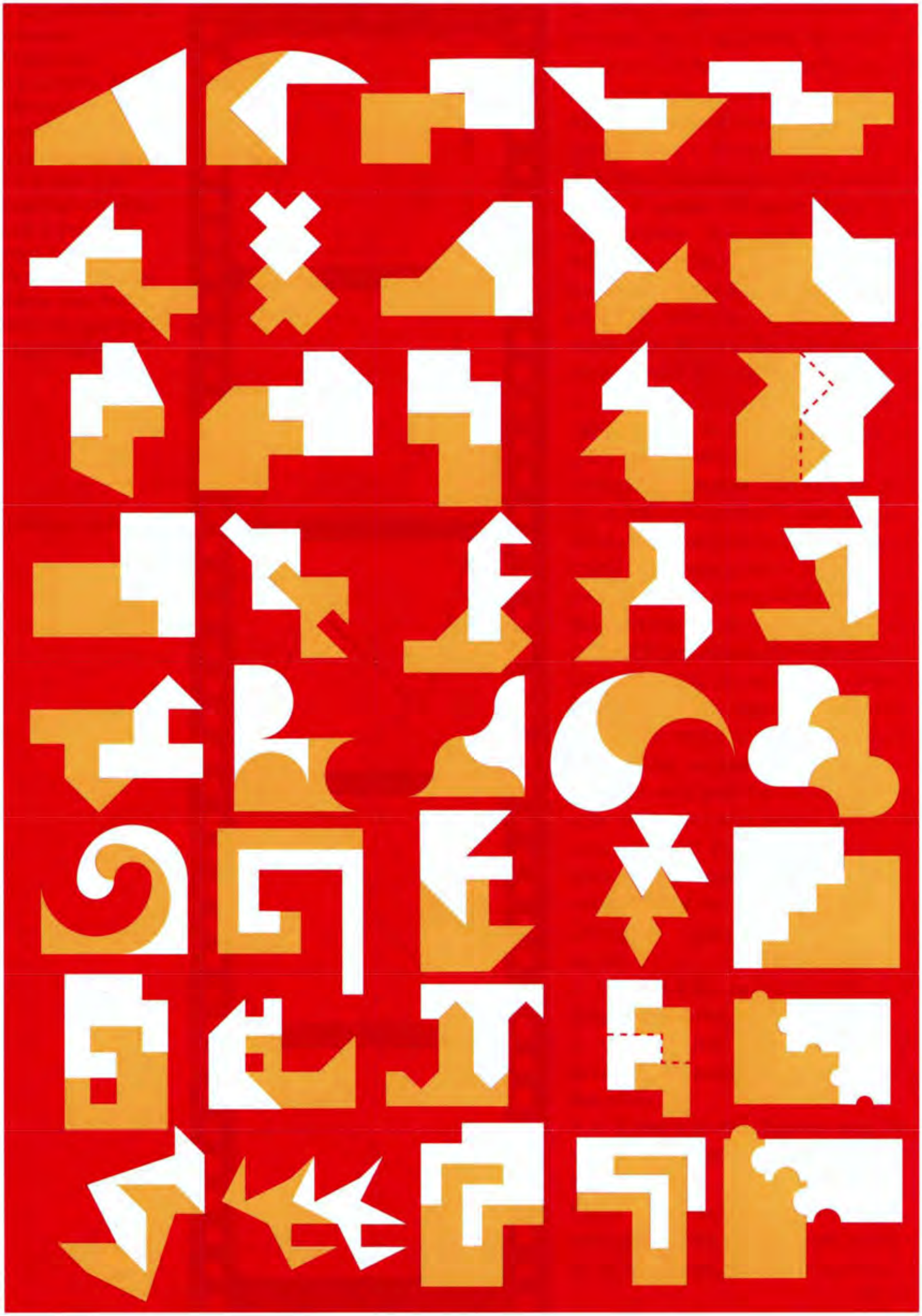
M. C.

Bibliographie :

Pierre Berloquin, *Figures Coupables*, Sciences & Vie, rubrique Jeux et Paradoxes, mai 1971.
Kimmo Eriksson : *Splitting a Polygon into Two Congruent Pieces*, Mathematics Magazine, 1996.
Martin Gardner, chronique "Jeux Mathématiques" dans les revues *Scientific American* et *Pour la Science*, recueils de ces chromiques (nous ne pouvons énumérer ici la longue liste de ces recueils. Certains sont disponibles en français, édités par l'A.D.C.S., Belin et Dunod).



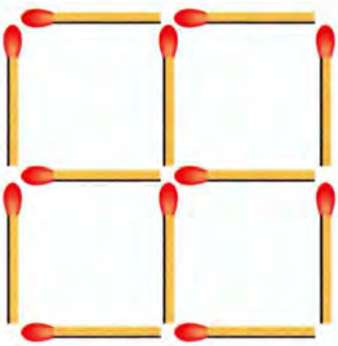
Solutions page suivante



Jouer avec des allumettes

1. Carrés

Vous n'avez le droit ici de ne former que des carrés. On comptera une même surface une seule fois. Ainsi la figure ci-dessus compte-t-elle quatre carrés.
À l'aide de douze allumettes, formez de cette manière de un à six carrés.



2. Huit

Ajoutez trois allumettes à la figure ci-dessous pour écrire huit.

3. Neuf

Disposez neuf allumettes pour former trois carrés égaux et trois triangles équilatéraux.

4. Un

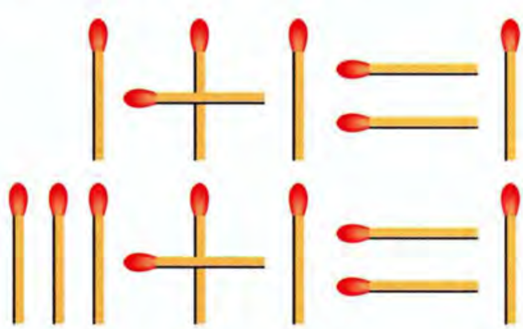
Trouvez six manières de faire un avec six allumettes.

6. Deux

Ajoutez à la figure suivante deux allumettes pour faire deux.

5. Romains

Nous sommes en chiffres romains.
Dans chaque cas, **déplacez une allumette pour rétablir l'égalité**.



Solutions p. 159

par Michel Criton

Jouer avec les polyminos

Vous connaissez les dominos, constitués de 2 petits carrés. On définit de même les triminos, les quadriminos, les pentaminos, ... et plus généralement les polyminos. S'il est un jeu d'enfant de les concevoir et de les construire, ils permettent de poser un nombre illimité de problèmes, parfois très difficiles à résoudre.

Un domino est un assemblage de deux petits carrés élémentaires. Il était naturel de penser à assembler plus de deux carrés identiques, et de baptiser *trimino* un assemblage de 3 carrés, *quadrimino* un assemblage de 4 carrés, *pentamino* un assemblage de 5 carrés, etc. On trouve déjà cette idée dans les casse-tête du ludologue anglais **Henry Ernest Dudeney**. L'un des problèmes de Dudeney proposait au lecteur de former à l'aide des 12 pentaminos et du quadrimino carré, un échiquier de 8 cases sur 8 cases. Le problème était facilité par le fait que les cases étaient noires ou blanches comme les cases d'un échiquier, selon la disposition finale souhaitée.

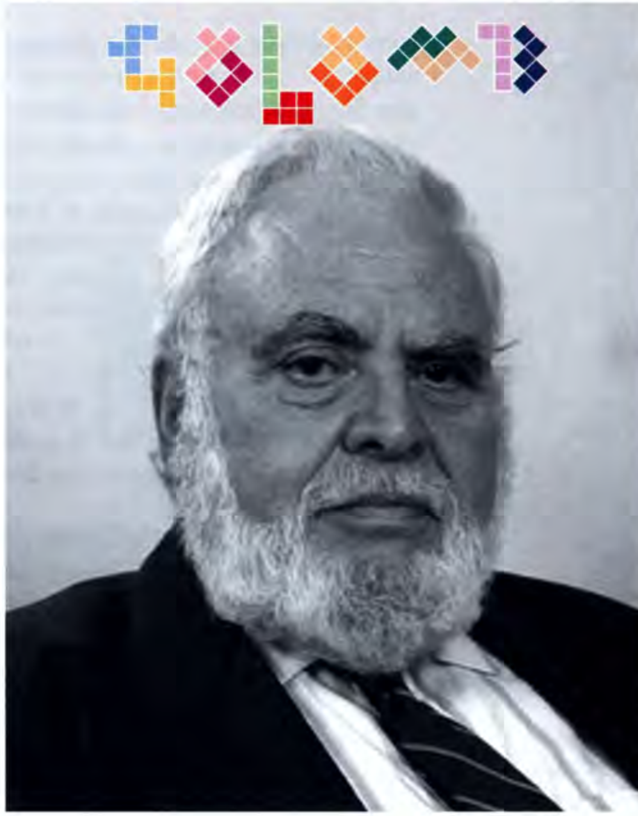
L'anglais **T. R. Dawson**, spécialiste des échecs non orthodoxes, et mathématicien ludique à ses heures, s'intéressa lui aussi à ces "polyformes", mais c'est l'américain **Solomon W. Golomb** qui, en découvrant l'infinie richesse de ce thème, lui donnera ses lettres de noblesse en publiant en 1965 un livre-culte sur le sujet : ***Polyominos***.

Les 12 pentaminos : un moyen mnémotechnique pour les retenir est d'associer à chacun d'eux une lettre : FLIP 'N TUVWXYZ

Dénombrer les polyminos

Le premier problème qui vient à l'esprit est celui du dénombrement des polyminos. Il existe un seul *monomino*, un seul domino, deux *triminos* (le droit et le coudé). À partir des *quadriminos*, on peut se poser la question de savoir si deux *polyminos* superposables grâce à un retournement sont considérés comme identiques ou non.
Le lecteur vérifiera qu'en acceptant de tels retournements, c'est-à-dire en considérant comme identiques deux polyminos images l'un de l'autre par un retournement, il existe 5 quadriminos. Les *pentaminos*, qui sont les plus étudiés des polyminos, sont, eux, au nombre de 12, nombre idéal pour engendrer un grand nombre de problèmes suffisamment difficiles, mais encore accessibles "à la main".
Le nombre de polyminos croît ensuite très vite (voir le tableau ci-dessous), et il faut distinguer polyminos "d'un seul tenant" et polyminos en plusieurs composantes se tenant par un sommet, ainsi que polyminos avec trou(s) et polyminos sans trou(s). Aucune formule générale n'a été trouvée, et ne semble même imaginable.

n	nombre de *n*-ominos
1	1
2	1
3	2
4	5
5	12
6	35
7	107
8	363
9	1248


Solomon W. Golomb

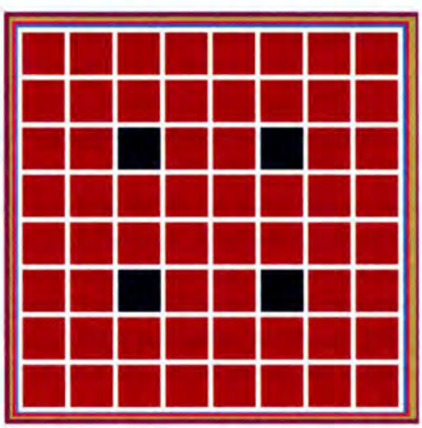
Paver une figure avec les polyminos

Un second type de problèmes est le **pavage d'une figure donnée avec un ensemble donné de polyminos**. Vous pouvez, bien sûr, comme avec le tangram chinois, inventer une figure quelconque d'aire fixée et chercher s'il existe une ou des façons de paver cette figure avec un certain ensemble de polyminos. Il n'existe aucune limite à ce type de problèmes, et vous en trouverez certainement. Il suffit en effet de découper un ensemble de polyminos, et de les assembler en une figure aussi jolie que possible (notion très subjective). Vous n'avez plus alors qu'à dessiner le contour de la figure, les polyminos utilisés, et à soumettre le problème à vos amis. Si votre problème possède une solution unique, sa valeur s'en trouve renforcée. Sinon, il faut essayer de dénombrer les solutions, ce qui est souvent très difficile.

Le jeu devient plus amusant si l'on s'impose une contrainte supplémentaire, comme par exemple de paver un rectangle. L'ensemble des 12 pentaminos, par exemple, occupe $12 \times 5 = 60$ carrés élémentaires.

1• Parmi les rectangles 60 × 1, 30 × 2, 20 × 3, 15 × 4, 12 × 5 et 10 × 6, quels sont ceux qui sont pavables à l'aide des douze pentaminos ?

De même, il est naturel d'essayer de **paver l'échiquier**, qui compte 64 cases, c'est-à-dire quatre de plus que le nombre de cases des douze pentaminos, en imposant (contrainte supplémentaire) la place de 4 monominos ou cases inoccupées.

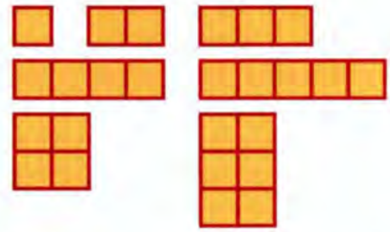


Comment paver cet échiquier "perforé" à l'aide de douze pentaminos ?

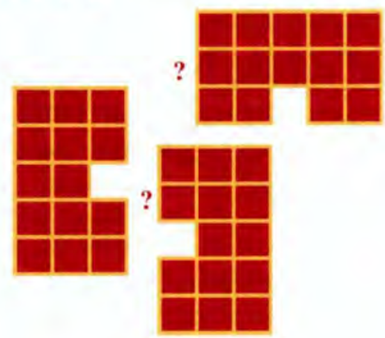
Paver un rectangle avec un seul type de polymino

Un autre problème passionnant consiste à **paver un rectangle, le plus petit possible, avec un seul type de polymino**.

Certains polyminos sont rectangulaires. Un seul exemplaire de ces polyminos constitue à lui tout seul un rectangle. On dira donc que ces polyminos sont **d'ordre 1**.



D'autres polyminos ne peuvent même pas paver le plan sans trous. Ils sont **d'ordre 0**.



D'autres, encore, pavent le plan, mais ne peuvent paver un rectangle (fini). Ces polyminos seront dits **d'ordre infini**.

Il est facile de voir qu'il existe une infinité de polyminos **d'ordre 2**. En effet, tous les polyminos en forme de L majuscule, par exemple, sont d'ordre 2.

Mais ce sont loin d'être les seuls. Un problème intéressant est de chercher toutes les décompositions d'un rectangle dont l'aire est un nombre pair de carrés élémentaires, en deux polyminos d'ordre 2.

Tout polymino en forme de "L" est un polymino paveur du plan d'ordre 2.

Existence d'un polymino d'ordre 3

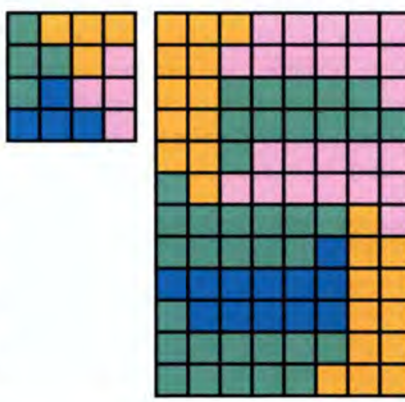
Existe-t-il des polyminos **d'ordre 3** ? La réponse à cette question, de façon surprenante, est négative. On sait, en ce sens que cela a été démontré, qu'il n'existe aucun polymino d'ordre 3. C'est le mathématicien **Ian Stewart**, par ailleurs bien connu comme chroniqueur de jeux mathématiques dans la revue *Pour la Science*, qui a démontré ce théorème. Il a en effet prouvé que la seule façon de découper un rectangle en 3 polyminos congruents, est de le découper en trois polymlnos rectangulaires, qui, par définition, sont d'ordre 1.

Polyminos d'ordre supérieur à 3

Il existe des polyminos **d'ordre 4**. Il est même assez facile d'en construire à volonté (voir figure ci-dessous).

Un polymino d'ordre 4.

Solomon Golomb a montré qu'il existait des polyminos d'ordre $4n$, quel que soit l'entier naturel non nul n, en exhibant une construction systématique représentée ci-dessous, pour $n = 1$ et 2.



Un 16-mino d'ordre 12.

LE THÉORÈME DE IAN STEWART :

Les seuls découpages d'un rectangle en trois polyminos superposables sont ceux représentés ci-contre.

Ces découpages ne sont bien sûr possibles que moyennant certaines conditions sur les dimensions du rectangle de départ.

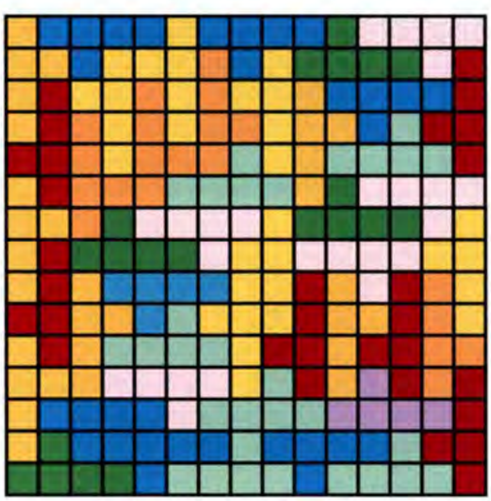
CONSÉQUENCE DU THÉORÈME DE IAN STEWART :

Il n'existe aucun polymino d'ordre 3.

En dehors des nombres **0, 1, 2** et des **multiples de 4**, on ne connaît que quelques valeurs sporadiques qui sont l'ordre d'un ou de polyminos. Les valeurs actuellement connues sont **10, 18, 50, 76 et 92**.

Un polymino d'ordre 10 : le pentamino Y.

On ne connaît aucun polymino d'ordre impair autre que 1, mais il est parfaitement possible qu'il en existe. En effet, on peut paver un rectangle avec un nombre impair de polyminos, mais jusqu'à présent, on n'a réussi à le faire qu'avec des polyminos d'ordre 1, ce qui n'offre guère d'intérêt, ou avec des polyminos ayant un ordre pair plus petit que le nombre d'exemplaires utilisés. C'est ainsi que le pentamino Y, par exemple, qui est d'ordre 10, peut paver un carré 15 × 15.



Un nombre impair d'exemplaires d'un même polymino peuvent paver un rectangle : 45 pentaminos Y pavent un rectangle 15 × 15.

Pavages impairs

De tels pavages d'un rectangle par un nombre impair de polyminos identiques sont possibles pour une infinité de polyminos. Cela a en effet été démontré grâce aux polyminos ayant la forme de “trois quarts de rectangle”, le plus simple d'entre eux étant le trimino coudé. En effet, 15 exemplaires de ce trimino peuvent paver un rectangle 9 × 5 (voir figure ci-dessous).

Quinze trimino forment un rectangle 9 × 5.

Par dilatation de cette figure selon une des deux directions horizontale ou verticale, on obtient toute une classe de polyminos pavant impairement un rectangle. Bien d'autres problèmes sur ces polyformes sont encore des problèmes ouverts, ou même sont à inventer. Laissez donc libre court à votre imagination, posez-vous des questions, même si les réponses ne sont pas évidentes ou semblent hors de portée. Envoyez-nous vos idées, remarques et observations.

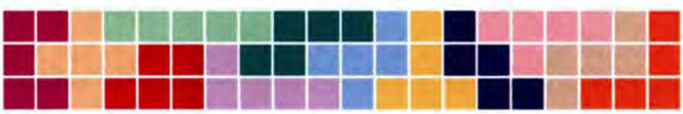
M. C.

Bibliographie

• **Solomon W. Golomb, *Polyominoes***, 2nd edition, Princeton, University Press, 1994.
• **George E. Martin, *Polyominoes, A guide to puzzles and problems in tiling***, Mathematical Association of America.
• ***Revue Puzzle Fun*, Rodolfo M. Kurchan**, Parana 960 5° A, (1017) Buenos Aires, Argentine.

Solutions

1• rectangles de pentaminos : Les rectangles 1 × 60 et 2 × 30 ne peuvent évidemment pas être pavés à l'aide des douze pentaminos pour des raisons "d'encombrement", puisque plusieurs des pentaminos ne rentrent même pas dans le rectangle. Pour les rectangles 4 × 15, 5 × 12 et 6 × 10, il existe de nombreuses solutions, et vous n'aurez aucune peine à en trouver (il est moins évident de les dénombrer, quand ce n'est pas impossible sans l'aide d'un puissant ordinateur). Par contre, Il existe **une seule solution au rectangle 3 × 20**, à une rotation près d'un groupe de pentaminos (voir figure ci-dessous).

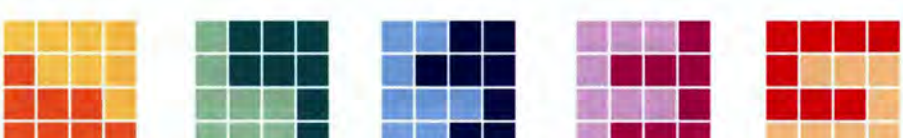


2• le pavage de l'échiquier :

Voici une solution du pavage de échiquier avec 4 monominos imposés. Ceux-ci peuvent prendre bien d'autres dispositions sur l'échiquier.

3• découpage du rectangle 4 × 4 en 2 octominos d'ordre 2 :

Il existe 5 découpages possibles d'un carré 4 × 4 en deux polyminos d'ordre 2.



par Alain Zalmanski

Leonhard Euler

Il a donné son nom à un cercle, une droite, une constante, un diagramme, une formule, une méthode, une fonction, une relation, un indicateur, une conjecture, un critère, une équation et… une identité. Il ne dédaignait pas non plus les jeux mathématiques puisqu'il en créa plus d'un.

Si on ajoute mathématicien suisse en 5 lettres, tout lycéen ou cruciverbiste aura reconnu l'un des plus illustres d'entre eu : Léonhard Euler.

Né à Bâle le 15 avril 1707, Léonhard Euler était le fils aîné d'un pasteur, Paul Euler (1670-1745), lui-même élève et ami des Bernoulli, grande famille de physiciens et mathématiciens. C'est Paul Euler lui-même qui initia son fils aux mathématiques, lequel fit de brillantes études à la faculté de Bâle et fut un des élèves particuliers de Jean Bernoulli.

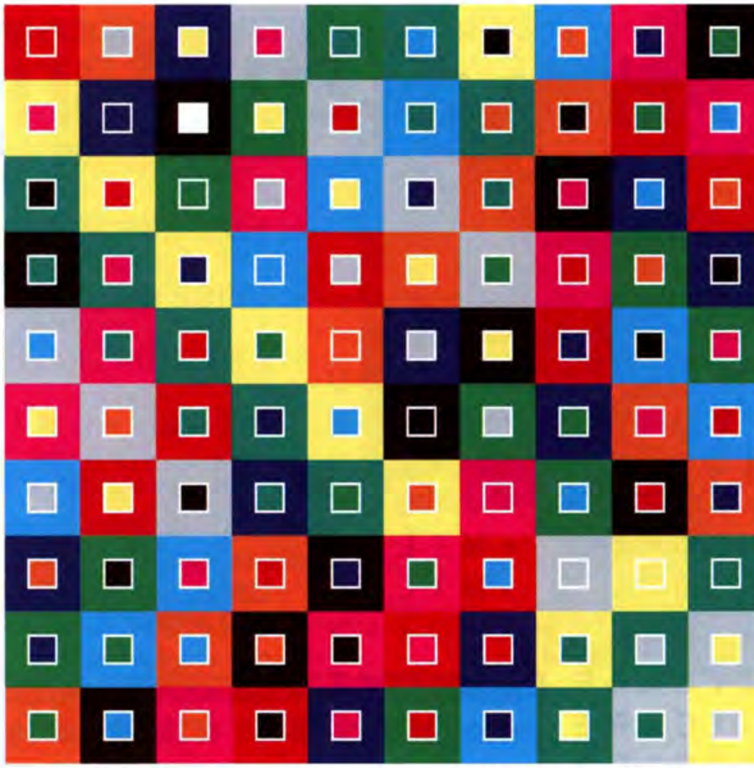
En 1727, Euler rejoignit Daniel et Nicolas Bernoulli, installés à Saint-Pétersbourg, à la nouvelle Académie des sciences de Russie, fondée en 1725 par l'impératrice Catherine. En 1730 il y obtient une chaire de physique et en 1733, la chaire de mathématiques. Sollicité en 1741 par le roi de Prusse Frédéric II, il se partage pendant 25 ans entre la Russie et Berlin, présentant aux deux Académies un nombre impressionnant de mémoires : son œuvre complète ne présente pas moins de 74 volumes ! Il finira cependant sa vie en Russie, quittant Berlin, où il se trouve mésestimé, en 1776. Rien n'arrêtera ce travailleur acharné, pas même la cécité, presque totale dès 1771. Il poursuivra son œuvre scientifique, dictant à ses fils les calculs qu'il écrivait à la craie sur une ardoise.


Léonhard EULER, 1707-1783

Il décède brutalement le 18 septembre 1783, en pleine puissance de travail.

Euler fut un auteur prolifique avec 886 ouvrages et articles couvrant les domaines des plus variés et il a marqué de son nom la plupart des domaines des mathématiques

Les 36 officiers



Carré gréco-latin d'ordre 10.

Comment placer en carré n^2 officiers de n grades et n régiments différents de manière que chaque ligne et chaque colonne contienne tous les grades et tous les régiments ? Euler démontre qu'il n'y a pas de solution pour $n = 6$ ce qui rend insoluble le problème des 36 officiers. Cela revient à construire un carré gréco-latin, tableau carré de couples obtenus en superposant deux carrés latins (où aucun élément n'apparaît deux fois ni dans la même ligne ni dans la même colonne) dont les couples soient deux à deux distincts. Le mathématicien suisse conjectura même qu'il n'existait pas de carrés gréco-latin d'ordre $2p$ avec p impair. En 1959 la conjecture fut renversée et la création par ordinateur d'un carré d'ordre 10 a même présidé à la conception par Georges Perec de son roman *La Vie mode d'emploi*.

: l'analyse, qu'il développe avec les nouveaux outils du calcul différentiel et intégral, l'arithmétique, avec ses travaux sur la théorie des nombres, la géométrie, où il introduit les méthodes analytiques. Ses œuvres complètes publiées en 1911 sont d'un exposé très clair, avec de nombreuses notations nouvelles encore en vigueur aujourd'hui.

Savant polyvalent, Euler intervient également physique (champs magnétiques, hydrodynamique, optique, nature ondulatoire de la lumière) et en astronomie (orbites planétaires, trajectoires des comètes).

Curieux de tout, Euler ne dissociait pas les mathématiques du jeu et les récréations mathématiques lui doivent beaucoup. On raconte que c'est en résolvant le problème des *Ponts de Koenigsberg* qu'il jeta les bases de la théorie des graphes.

Des graphes « eulériens », qu'on parcourt sans lever le crayon ni doubler un trait à la marche d'un cavalier sur l'échiquier, en passant par les *carrés gréco-latins* et le *Problème des 36 officiers*, Euler nous laisse toute une panoplie de problèmes ludiques qu'il pose et résout avec simplicité, montrant que les jeux mathématiques n'étaient pas pour lui moins nobles que ses théories les plus sophistiquées.

A. Z.

Au rythme des cryptarithmes

1. Tintinmania (J. Braconnier)

Sans vouloir offenser Astérix, voici cinq cryptarithmes sur le thème de Tintin et Milou.

```
  COKE        MILOU
+ COKE      + MILOU
+ COKE      + MILOU
+ COKE      + MILOU
+ COKE      + MILOU
+ COKE      + MILOU
= STOCK     = TINTIN

  CIGARE      + COKE
+ CIGARE      + COKE
+ CIGARE      + COKE
= PHARAON     = STOCK

     VOL
   X 714
= SYDNEY
```

2. TRENTE (J. Chaupin-Spirou)

CINQ + CINQ + VINGT = TRENTE

3. TRIGO (A. Peyrol et C. André-Spirou)

$SIN^2 + COS^2 = UNITE$

4. DEUX (P.-H. Ladame, Tangente n° 7)

$UN^X + UN = DEUX$

5. SALE TEMPS [1] (P.-H. Ladame)

FROID + GEL + PLUIE = GRELE

FROID est premier.

6. SALE TEMPS [2] (P.-H. Ladame)

NEIGE + VENT = GIVRE

7. DOUZE [2] (P.-H. Ladame)

SIX + SIX = DIX + UN + UN

UN divise SIX et DIX.

8. QUINZE [2] (P.-H. Ladame)

UN divise **DEUX, CINQ, NEUF, DIX et DIX-NEUF.**

Que vaut **QUINZE** ?

Solutions

1• PHARAON = 1602087 (solution unique)
$STOCK_1$ = 10437, 17958, 27093, ou 28543,
$STOCK_2$ = 50176, 54873, ou 65394.
TINTIN = 687687 (solution unique)
SYDNEY = 183498 ou = 327012 (2 solutions).

2• CINQ + CINQ + VINGT = TRENTE.
Une solution unique :
6483 + 6483 + 94851 = 107817.

3• $SIN^2 + COS^2 = UNITE$.
Une solution unique : $235^2 + 142^2 = 75389$.

4• $UN^X + UN = DEUX$.
Une solution unique : $86^2 + 86 = 7482$.

5• FROID + GEL + PLUIE = GRELE. Une solution unique :
34501 + 689 + 29708 = 64898.

6• NEIGE + VENT = GIVRE. Une solution unique : 35145 + 6530 = 41675.

7• SIX + SIX = DIX + UN + UN. Une solution unique : 432 + 432 = 832 + 16 + 16.

8• UN divise DEUX, CINQ, NEUF, DIX et DIXNEUF. Une solution unique : **QUINZE** vaut 912306.

TANGENTE

le magazine des mathématiques (le seul au monde)

Abonnement de base à *Tangente* :
Par an, 6 numéros + 4 suppléments « éducation »
+ 1 calendrier mathématique

Abonnement PLUS à *Tangente* :
Abonnement de base
+ 4 hors-séries « simples »

Abonnement SUPERPLUS à *Tangente* :
Abonnement de base
+++ 4 hors-séries « doubles » (Bibliothèque Tangente)

Abonnement à *Tangente* Jeux :
Par an, 4 numéros : le nouveau classique du jeu intelligent.

Abonnement à *Tangente sup* :
Par an, 4 numéros : pour ceux qui veulent aller au-delà...

---

codif : POLE **HS 20**

BULLETIN D'ABONNEMENT À RETOURNER À
Tangente - BP 10214- 95106 Argenteuil cedex

NOM : ______ PRÉNOM : ______

ÉTABLISSEMENT : ______

ADRESSE : ______

CODE POSTAL : ______ VILLE : ______

PROFESSION : ______ E-MAIL : ______

Veuillez me servir l'abonnement suivant (cochez titre et type) :

Prix hors métropole entre ( )	❐ Pour 1 an	❐ Pour 2 ans
❐ Tangente (abo normal)	30 € (39 €)	54 € (72 €)
❐ Tangente plus	50 € (65 €)	89 € (119 €)
❐ Tangente superplus	75 € (95 €)	140 € (175 €)
❐ Tangente-Jeux	14 € (18,50 €)	26 € (35 €)
❐ Tangente-sup	18,50 (23 €)	35 € (43 €)

❐ À partir du numéro en cours ❐ À partir du numéro ....

Montant à reporter (verso de ce bulletin) : ______ Total à payer : ______

Je joins mon paiement par (établissements scolaires, joindre bon de commande administratif) :

❐ Chèque (uniquement **payable en France**) ❐ Mandat

❐ Carte (à partir de 30 €) numéro : Date et Signature :

|_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_| |_|_|_|_|

Expiration le : ..../.........

Tangente

Publié par Les Éditions POLE
SAS au capital de 40 000 euros
Siège social :
80, bd Saint-Michel
75006 Paris
Commission paritaire : 1006 K
80883
Dépôt légal à parution

Directeur de Publication
et de la Rédaction
Gilles COHEN

Rédacteur
en chef du numéro
Michel CRITON

Secrétaire de rédaction
Gaël OCTAVIA

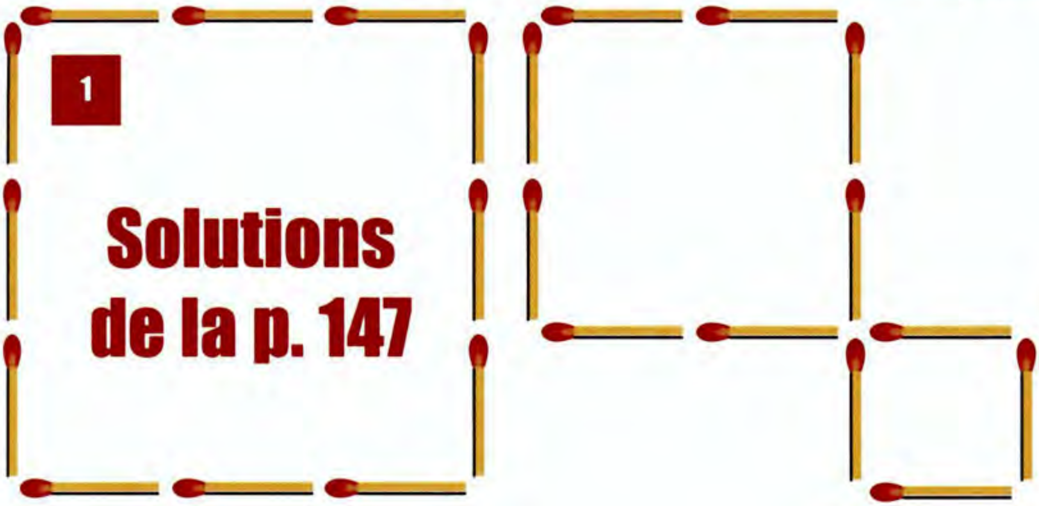
Comité de rédaction
Stella BARUK,
Élisabeth BUSSER,
Joseph CÉSARO,
Michel CRITON,
Denis GUEDJ,
Hervé LEHNING,
Jean-Christophe NOVELLI,
Marie-José PESTEL,
Claude SAUSER,
Daniel TEMAM,
Norbert VERDIER,
Alain ZALMANSKI,
Francis CASIRO.

Maquette
Francis CASIRO
Laurence GAUTHIER (Couverture)
Autres photos : droits réservés

Abonnements
Martine QUEDE
Tel : 01 39 98 83 50
Fax : 01 39 98 83 52

Solutions de la p. 147

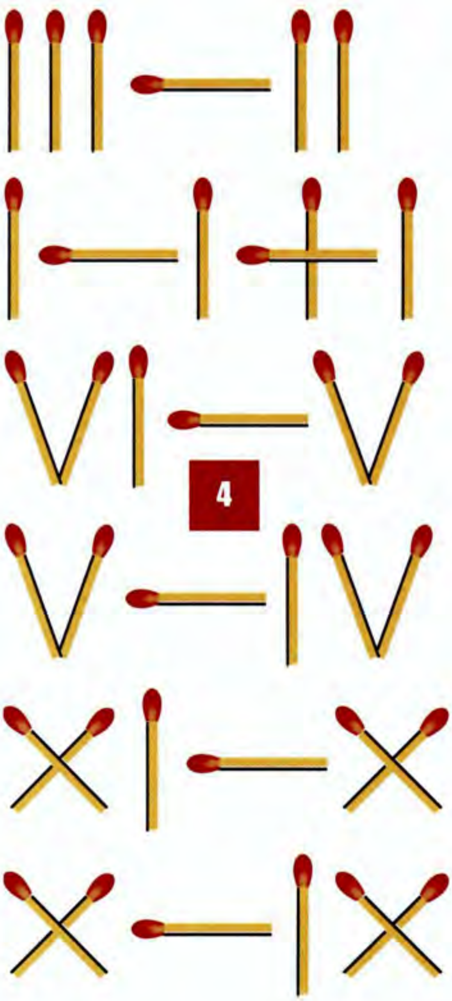
1



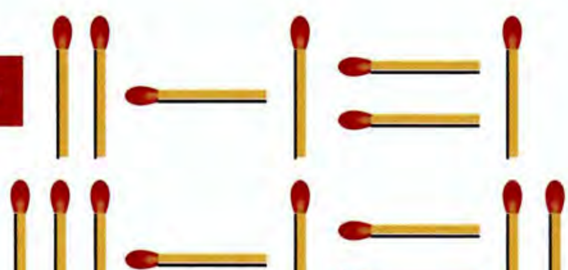
2

3

4



5



6

Achevé d'imprimer pour le compte des Éditions POLE
sur les presses de l'imprimerie Louisjean, 05000 Gap
Dépôt légal 482 - Septembre 2004

Tangente

Jeux mathé-matiques

Grands problèmes historiques

• Enigmes et logique

• Jeux de chiffres et de lettres

• Théorie des jeux

• Surprises arithmétiques

• Puzzles géométriques

Toujours étonnants, souvent pervers, les jeux mathématiques sont des défis que se lancent les hommes depuis la nuit des temps. D'ailleurs, toute chose étant prétexte au jeu, on ne voit guère comment les mathématiques y auraient échappé. N'importe quelle situation peut constituer le point de départ d'une énigme, d'un problème, d'un puzzle : des grains de blé à dénombrer, la marche zigzagante des cavaliers de l'échiquier, les quarante soldats défendant une ville fortifiée, ou encore les sept ponts d'une cité traversée par une rivière...
Esprit logique et esprit ludique se rejoignent pour la plus grande gloire de l'imagination.
Les géniaux inventeurs se succèdent pour offrir à leurs semblables ce que les uns qualifieront de casse-tête, et les autres, d'agréables récréations.

ISBN 2-84884-024-2

9 782848 840246

Diffusion : 404024
Prix : 18 €

POLE