

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIA EXATAS E DA TERRA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ARTHUR HENRIQUE DA SILVA

MATEMÁTICA RECREATIVA DE KAPREKAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA

ORIENTADORA:
PROF^A. DRA. GABRIELA LUCHEZE DE OLIVEIRA LOPES

Natal - RN
Março de 2020

ARTHUR HENRIQUE DA SILVA

MATEMÁTICA RECREATIVA DE KAPREKAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao PROFMAT, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof^ª. Dra. GABRIELA LUCHEZE DE OLIVEIRA LOPES.

Natal - RN
Março de 2020

MATEMÁTICA RECREATIVA DE KAPREKAR NA EDUCAÇÃO BÁSICA

ARTHUR HENRIQUE DA SILVA

Dissertação de mestrado profissional apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Banca Examinadora:

Profa. Dra. Márcia Maria Alves de Assis (Membro Externo)
UERN

Prof. Dr. Edgar Silva Pereira (Membro Interno)
UFRN

Prof. Dr. Jaques Silveira Lopes (Membro Interno)
UFRN

Prof^ª. Dra. Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes (Orientadora)
UFRN

Natal - RN
Março de 2020

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Setorial Prof. Ronaldo Xavier de Arruda - CCET

Silva, Arthur Henrique da.

Matemática recreativa de Kaprekar na educação básica / Arthur Henrique da Silva. - 2020.

98f.: il.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciência Exatas e da Terra, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. Natal, 2020.

Orientadora: Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes.

1. Matemática - Dissertação. 2. Matemática recreativa - Dissertação. 3. História da matemática - Dissertação. 4. Kaprekar - Dissertação. 5. Aritmética - Dissertação. I. Lopes, Gabriela Lucheze de Oliveira. II. Título.

RN/UF/CCET

CDU 51

Dedico esse trabalho a todos os professores da Educação Básica. Profissionais que diante das más condições para exercer seu trabalho e a desvalorização da profissão, seguem firmes e fortes na luta por um país melhor e mais justo para nossas crianças.

Agradecimentos

À Deus, pelo guia diário em toda minha trajetória até aqui.

A todos os professores de matemática que tive na minha vida acadêmica, na qual transferiram um pouco do seu conhecimento. Em especial ao professor Cleiton, meu professor do Ensino Fundamental que me incentivou muito na matemática e principalmente na Olimpíada de Matemática. E também a professora e orientadora Gabriela, por todos os ensinamentos, paciência e conversas ao longo da escrita desta dissertação. Vocês são uma inspiração para mim.

À banca examinadora, pela disposição em avaliar esta dissertação.

À minha mãe, Agmar. Que sempre esteve presente em cada segundo da minha vida. Incrível mãe e agora uma incrível avó.

À minha irmã, Bruna. Que sempre foi minha companheira e incentivadora das minhas escolhas.

Ao meu pai, Raimundo. Minha grande fonte de inspiração pessoal e profissional. Tudo que sou e conquistei foi graças a ele.

À minha esposa Camila, por toda paciência e compreensão em nosso dia a dia. Não teria terminado este trabalho sem sua ajuda.

Ao meu filho, Bernardo. A materialização do amor para mim.

À Nick. Pelo amor e companherismo.

Aos meus familiares, meus tios(as), primos(as), avós e avôs. E em especial a minha prima Maria Helena, minha irmã mais nova.

Ao meu sogro, minha sogra e minha cunhada. Pelo carinho e amor que tem pela minha família.

Aos meus amigos, desde a infância em Felipe Camarão, passando pelo Atlético Colinas, amigos do IFRN e da UFRN. Em especial Azevedo, Caio, Gleidson, Larisson, Rodrigo e Teixeira. Obrigado por se fazerem presente em minhas conquistas.

Aos meus amigos de PROFMAT. Pelos encontros descontraídos e pelas ajudas durante o mestrado.

E a todos que direta ou indiretamente contribuíram para que eu pudesse estar aqui hoje.

“Educação não transforma o mundo.

Educação muda as pessoas.

Pessoas transformam o mundo.”

Paulo Freire

Resumo

O presente texto tem como tema central a Matemática Recreativa. Logo, procuramos expor o que alguns matemáticos falam sobre sua definição, destacar a sua importância para o âmbito escolar e como ela apareceu ao longo da história. Também abordaremos grandes nomes da Matemática Recreativa, como Martin Gardner, o principal nome da Matemática Recreativa no mundo. E aqui no Brasil, falaremos de Malba Tahan e sua contribuição para a Matemática Recreativa. Em uma das publicações feita por Martin Gardner, ele aponta um matemático indiano chamado Kaprekar. É justamente este matemático indiano que iremos destacar no nosso trabalho. Contaremos um pouco sobre sua história, passando pela infância, adolescência, até a sua fase adulta. Destacaremos o contexto histórico e geográfico em que ele vivia na época e abordaremos suas duas pesquisas mais conhecidas: A Constante de Kaprekar e os Números de Kaprekar. O nosso principal enfoque matemático será os Números de Kaprekar, adotamos a forma como o Iannucci (2000) demonstra a dinâmica do número em seu artigo. Mas para poder fazer toda a abordagem matemática contida nos Números de Kaprekar, juntamente com o artigo do Iannucci (2000), dedicaremos um espaço da dissertação para poder explicar a matemática contida no trabalho, que basicamente é Aritmética. Na nossa pesquisa utilizaremos as ideias de Chaquiam e Mendes (2016) para explorar a História de Kaprekar e como resultado propomos um produto educacional que aborda a Matemática Recreativa associada a História da Matemática. Esse produto educacional é um livreto de atividades para ser utilizado em sala de aula por professores do Ensino Fundamental II.

Palavras-chave: Matemática Recreativa, História da Matemática, Kaprekar, Aritmética.

Abstract

The main theme of this text is Recreational Mathematics. Therefore, we seek to expose what some mathematicians say about this definition, highlight its importance for the school environment and how it appeared throughout history. We will also address big names in recreational mathematics, such as Martin Gardner, the leading name in recreational mathematics in the world. And here in Brazil, we will talk about Malba Tahan and his contribution to Recreational Mathematics. In one of Martin Gardner's publications, he points to an Indian mathematician named Kaprekar. It is precisely this Indian mathematician that we will highlight in our work. We will tell you a little about his history, going through childhood, adolescence, until its adult phase. We will highlight the historical and geographic context in which he lived at the time and discuss his two best-known researches: The Kaprekar Constant and the Kaprekar Numbers. Our main mathematical focus will be the Kaprekar Numbers, we adopted the way that Iannucci (2000) demonstrates the dynamics of the number in his article. But in order to be able to make the whole mathematical approach contained in the Kaprekar Numbers, together with the article by Iannucci (2000), we will dedicate a space for the dissertation to be able to explain the mathematics contained in the work, which is, in general, Arithmetic. In our research we will use the ideas of Chaquiam and Mendes (2016) to explore the History of Kaprekar and as a result we propose an educational product that addresses Recreational Mathematics associated with the History of Mathematics. This educational product is an activity booklet to be used in the classroom by Elementary School teachers.

Keywords: Recreational Math, History of Mathematics, Kaprekar, Arithmetic.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	4
2	Fundamentos da pesquisa	8
2.1	Matemática Recreativa	8
2.1.1	O que é a Matemática Recreativa?	8
2.1.2	Matemática Recreativa ao longo da história	12
2.1.3	Dois autores da Matemática Recreativa	16
2.2	História da Matemática	27
2.3	A aritmética para o estudo dos Números de Kaprekar	30
3	Kaprekar e sua matemática	34
3.1	Kaprekar, a Índia	34
3.2	Os números de Kaprekar	42
3.3	A Constante de Kaprekar	46
4	Aplicação da Constante de Kaprekar na Educação Básica	49
4.1	A elaboração do livreto	49
4.2	Questionamentos sobre o Número e a Constante de Kaprekar	54
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	57
	APÊNDICE A	63

Lista de Figuras

2.1	Papiro de Rhind	13
2.2	Blaise Pascal	14
2.3	Pierre de Fermat	14
2.4	Pontes de Königsberg	15
2.5	Exemplos de Matemática recreativa praticada em sala de aula	16
2.6	Martin Gardner	17
2.7	Logo do evento Gathering for Gardner (G4G)	20
2.8	Júlio César de Mello e Souza	21
2.9	Revista ERRE	22
2.10	Livro que conta a experiência numa madrugada na época da escola	23
2.11	A história de oito pães	24
2.12	Livro de Malba Tahan: O Homem que Calculava.	25
2.13	Curso Ministrado por Júlio César para professores	26
2.14	Diagrama sobre a construção da história de um personagem	29
3.1	Localização da Índia no mapa mundi	34
3.2	Ganesha	35
3.3	Taj Mahal	36
3.4	Mahatmam Gandhi	38
3.5	Mapa mostrando o deslocamento do povo indiano após a separação	39
3.6	Dattatreya Ramchandra Kaprekar	40
3.7	Quantidade de interações e a frequência dos números de quatro dígitos	48

Lista de Tabelas

2.1	Palavras chaves mencionadas nas definições de Matemática Recreativa . . .	11
2.2	Quantidade de vezes que aparecem as palavras chaves nas definições de Matemática Recreativa	11
3.1	Alguns exemplos do Número de Kaprekar	42

1 INTRODUÇÃO

Nos anos iniciais da Educação Básica, sempre fui um aluno que me dava bem nas disciplinas. Nunca tive problema com nota e basicamente gostava do que estudava. Mas acredito que à medida que os anos vão passando e os alunos vão avançando, o nível das disciplinas vão ficando mais sofisticados e os alunos tendem a ter mais facilidade com algumas e dificuldades com outras disciplinas. Foi o que aconteceu comigo quando cheguei na quinta e sexta série do Ensino Fundamental II (atualmente sexto e sétimo ano do Ensino Fundamental II). Nessas séries, comecei a oscilar muito na disciplina de matemática. Tirava notas muito altas e notas medianas. Até que em 2005, para minha surpresa, consegui ser quarto lugar na Olimpíada de Matemática a nível estadual. Para mim, foi uma surpresa quando vi meu nome numa faixa me parabenizando, em frente ao Centro Educacional Libânea de Medeiros, o CELM (escola na qual cursei meu Ensino Fundamental II todo). A partir daquele desempenho na olimpíada, meus amigos passaram a falar que eu era o melhor aluno de matemática da minha turma e minha confiança em relação a matemática aumentou bastante. Desde então, com a confiança em alta, sempre tirava a maior nota de matemática da turma. A Olimpíada de Matemática exigia do aluno um conhecimento matemático, mas exigia muito mais o raciocínio lógico. Talvez tenha sido por esse estilo de questão que eu tenha me identificado. E por conta disso, acendeu em mim, uma paixão, que desconhecia pela matemática.

Cursei o Ensino Médio no Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte (IFRN) de 2009 a 2011 e já no primeiro ano chamei a atenção do meu professor de matemática, Antônio Roberto. Percebendo minha segurança na disciplina e o meu raciocínio lógico, ele convidou-me para integrar a equipe preparatória da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). O convite foi de pronto aceito, e todas as sextas feiras à tarde nos reuníamos para estudar para a OBMEP. Na primeira aula já me encantei com a forma que a matemática iria se apresentar, com questões bem desafiadoras e divertidas de pensar. Outra coisa que me chamou atenção, foi o fato de as aulas serem no laboratório de matemática do IFRN, acabei ficando encantado com todos aqueles jogos, materiais didáticos, materiais de manuseio, nunca tinha visto uma sala só para a matemática, acabei ficando encantado com aquilo tudo. Então, passei o meu Ensino Médio todo convivendo com uma matemática diferente daquela que meus amigos de sala de aula convivia.

Em 2012, entrei na Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) no

curso de Ciência e Tecnologia no turno noturno. Nos semestres iniciais, estava tirando notas muito boas nas disciplinas que envolvia matemática, como cálculo, geometria e álgebra linear. Entretanto, não indentifiquei-me com o curso em face de disciplinas não relacionada à matemática, fato que levou-me a desistência do curso.

Com tempo disponível, já que havia desistido do curso de Ciência e Tecnologia, e por indicação de pessoas que sabiam do meu interesse e manejo da matemática, inciei atividade laboral, ministando aulas particulares de matemática, bem como ministrei um curso preparatório para seleção do IFRN, o que fez-me ver a paixão que sentia em ministrar aulas de matemática e daí a decisão de ingressar no curso de Licenciatura em Matemática, o que aconteceu no ano de 2014 na UFRN.

Durante o curso de matemática, tive dois “sustos”. Um foi a forma como a matemática era abordada. Passei minha vida toda calculando e na graduação de matemática pensei que iria calcular ainda mais. Mas não foi isso que ocorreu. Aprendi uma matemática nova, o mundo das demonstrações. No início senti um pouco de dificuldade, mas posteriormente me acostumei e acabei me envolvendo bastante, já que as demonstrações exigiam o raciocínio lógico igual nas questões das Olimpíadas de Matemática. Outro lado da matemática que me deparei foi a parte das disciplinas de educação, como por exemplo didática da matemática. Nessas disciplinas educacionais, pude rever um laboratório de matemática, o da UFRN. Com o laboratório, pude lembrar aquela época das aulas da OBMEP que tive no laboratório do IFRN. Outro ponto positivo em relação as disciplinas de educação foi conhecer vários recursos didáticos em relação ao ensino de matemática, história, jogos, tecnologia, entre outros recursos. Acabei me encantando por essa abordagem da matemática. Confesso que nesse caso foi uma surpresa bem positiva. Desta forma, pude juntar o que aprendi nas aulas particulares que ministrava com o que aprendi nas disciplinas educacionais.

Outro momento bem oportuno na minha graduação em matemática foi ter feito parte do Programa de Educação Tutorial (PET). Lá, pude realizar pesquisas, projetos, compartilhar experiências e participar de eventos voltado a matemática. No PET fiz pesquisas na área de sequências e séries, conceito de infinito e tive um contato maior com a matemática dita pura. Então, acabei tendo facilidade quando chegou nas disciplinas que envolviam mais demonstrações, como Análise e Álgebra Abstrata. O PET me proporcionou participar de eventos que me agregaram muito no conhecimento e na interação com outros estudiosos, como encontro da Álgebra, o Encontro Potiguar dos Grupos PETs (EPOPET), além das interações com outros PET's da universidade como o de filosofia e medicina. Então, o PET foi parte importantíssima na minha graduação.

Mesmo me formando no final de 2017, não queria parar de estudar matemática. Então decidi fazer pós-graduação na área. Uma das alternativas apresentada foi o Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Como trabalho como técnico em eletrotécnica durante a manhã e a tarde, a única pós-graduação que conseguiria conciliar com o trabalho era o PROFMAT. Desta forma em 2018, consegui ingressar

no programa. Quando procurei a professora para buscar orientação para a escrita da dissertação, ela me perguntou sobre o que eu gostava na matemática, sobre o que eu queria escrever e se atuava em alguma escola como professor de matemática. Falei que nunca tinha atuado em uma escola como professor, que minha única experiência lecionando foi as aulas particulares e o curso preparatório para o exame do IFRN. Porém, veio a mente o porque eu comecei a gostar de matemática e lembrei da Olimpíada de Matemática. Desta forma, falei que gostava de uma matemática mais divertida, diferente das aulas em que o professor enche o quadro de contas e fórmulas. Falei que gostava de jogos, da parte da História da Matemática, tecnologias, entre outros recursos.

Assim, fomos em busca de algo que despertasse a nossa atenção e a atenção de quem lesse. E chegamos ao matemático Kaprekar. Um indiano que conseguiu encontrar números mágicos e muito curiosos. Exatamente o que procurávamos. Assim, desvendamos a vida de Kaprekar e os números que o levaram a fama, os Números de Kaprekar e a Constante de Kaprekar. Ao pesquisar a biografia de Kaprekar, baseamos na forma de pesquisa apresentada por Chaquiam e Mendes (2016) quando abordam a História da Matemática. Durante a pesquisa sobre Kaprekar, a orientadora apresentou a Matemática Recreativa, termo esse que não o conhecia. Ao estudar, percebi que esta matemática era a que me fez encantar pela disciplina.

Frente ao exposto, temos a seguinte questão-foco da nossa pesquisa: **De que maneira seria possível associar a Matemática Recreativa e a História da Matemática para os estudos de conteúdos do Ensino Fundamental II em sala de aula?** Assim, fizemos um levantamento sobre a Matemática Recreativa ao longo da história, sua definição segundo estudiosos e os grandes representantes desta matemática a nível nacional e mundial. Ao final do estudo da Matemática Recreativa com o matemático Kaprekar, apresentamos um produto educacional com relação nas três principais vertentes deste trabalho, Matemática Recreativa, Kaprekar e História da Matemática.

Desta forma, o objetivo geral desta dissertação é discutir e propor um livreto de atividades pautado no estudo biográfico do matemático Kaprekar e a Constante de Kaprekar. De forma mais específica, os objetivos são os seguintes:

- Discutir as diversas definições de Matemática Recreativa;
- O papel da Matemática Recreativa na História da Matemática;
- Discutir o uso da História da Matemática em sala de aula;
- Apresentar os principais resultados de aritmética para congruências;
- Apresentar a biografia do indiano Kaprekar;
- Apresentar e discutir os Números de Kaprekar;
- Apresentar um produto educacional pautado na Matemática Recreativa utilizando a História da Matemática.

Além da introdução, que é o capítulo 1, nosso texto tem outros 3 capítulos. No 2º, fizemos um levantamento sobre Matemática Recreativa, fazendo uma discussão sobre sua definição, falando seu papel ao longo da história e relatando o trabalho de dois grandes contribuintes desta matemática. Além da Matemática Recreativa, tratamos da História da Matemática e sua aplicação em sala de aula. Integra também o capítulo 2º, uma abordagem sobre a congruência matemática como instrumento utilizado na discussão sobre os Números de Kaprekar.

No 3º capítulo, apresentamos algumas informações sobre a Índia e dados biográficos do matemático Kaprekar, além de considerações sobre os temas por ele estudado. Como parte integrante do 3º capítulo, há uma abordagem de um artigo do Iannucci (2000) e sua respectiva explanação sobre os Números de Kaprekar.

O 4º capítulo é constituído de dúvidas apresentadas por alunos da UFRN, sobre os Números e a Constante de Kaprekar, quando a exposição da pesquisa. Completa o 4º capítulo, um apanhado de sugestão quanto ao texto do produto educacional.

No 5º capítulo, são feitas as considerações finais sobre o trabalho.

2 Fundamentos da pesquisa

Neste capítulo, observaremos algumas definições de Matemática Recreativa dada por vários autores. Além disso, buscaremos a importância da Matemática Recreativa ao longo da história e personagens que ajudaram na sua divulgação. Iremos ver a importância da História da Matemática para o processo de ensino e aprendizagem e alguns resultados importantes da aritmética.

2.1 Matemática Recreativa

Nesta seção, iremos abordar definições da Matemática Recreativa, seu uso em sala de aula e sua importância para alguns ramos da matemática. Traremos o principal nome da Matemática Recreativa no mundo, Martin Gardner, e o principal nome no Brasil, Júlio César de Mello e Souza.

2.1.1 O que é a Matemática Recreativa?

Ao longo dos anos, a matemática sempre foi, na maioria das vezes, a disciplina em que os alunos apresentavam maior dificuldade. A pesquisadora Sadovsky (2007, p.15 apud FRANÇA; SANTOS; SANTOS, 2007, p.13) relata que o baixo desempenho na matemática não é somente no Brasil, é um problema de ordem mundial. E segundo França, Santos e Santos (2007 p.31) “O que se observa na maioria das escolas de Ensino Fundamental e Ensino Médio é o alto índice de reprovação e de alunos com sérias dificuldades para compreender a matemática, muitas vezes, demonstram desinteresse pela disciplina.” Logo, a matemática é vista, por maior parte dos estudantes, como uma disciplina em que o aprendizado apresenta uma série de dificuldades e a maioria dos alunos acabam criando um bloqueio para a matemática, fazendo assim ser uma das disciplinas com maior índice de reprovação.

Assim, buscar uma forma de mudar a visão dos alunos e da sociedade acerca da matemática é preciso. Existem vários fatores que ajudariam nessa mudança, como por exemplo, as estruturas das nossas escolas da Educação Básica, com projetor multimídia, laboratórios de matemática, entre outras condições e espaço para que o professor pudesse planejar melhor uma aula. Mas, acreditamos que o principal fator de mudança é a forma como a matemática é apresentada. A matemática ensinada da forma tradicional ainda pre-

domina nas salas de aula, uma aula na qual o professor apresenta o assunto com fórmulas e mais fórmulas no quadro e resoluções de questões atrás de resoluções de questões. Desta forma, o professor utilizar recursos didáticos para que o aluno se atente mais as aulas de matemática é bastante importante. França, Santos e Santos (2007, p.33) fala que “Uma das alternativas de ajudar o aluno na abstração é utilizar jogos matemáticos em sala de aula, isso estimula o raciocínio-lógico que tanto estamos enfatizando que seja despertado em nossos alunos.” Sugere-se como forma de mudança, que haja iniciativas como: Trazer jogos, desafios, projetos, etc. Assim, a Matemática Recreativa pode se tornar uma alternativa para os professores nas escolas.

Mas o que seria essa Matemática Recreativa? Que tipo de matemática é esta? Acredito que muitas pessoas não tenham ouvido falar em Matemática Recreativa, já que a popularização do termo “Matemática Recreativa” e seus estudos voltado para Educação Básica é algo recente. A definição desta matemática não é algo simples de se fazer. Muitos estudiosos acabam por defini-la com palavras e termos diferentes.

Devido a essa diversidade de definições, resolvemos buscar o ponto de vista de alguns pesquisadores da área e expor suas definições ou discussões a cerca da Matemática Recreativa para que possamos entender melhor esta matemática.

Os primeiros que trataremos são Martins e Picado (2014 p.101), que procuram trazer a discussão da definição de Matemática Recreativa da seguinte forma, “Há quem diga de forma muitíssimo simplista que a Matemática Recreativa é o assunto que engloba *puzzles* e jogos matemáticos.”

O pesquisador e professor americano Singmaster procura definir da seguinte forma,

Matemática Recreativa é matemática divertida e popular [...] é uma matemática divertida e usada pedagogicamente como um desvio da matemática séria ou como uma maneira de tornar matemática séria compreensível ou palatável. (SINGMASTER, 2000, p.4, tradução do autor)

Outros pesquisadores que procuraram definir a Matemática Recreativa foram os Barves, dizendo que

a Matemática Recreativa é uma matemática divertida e usada como diversão da matemática séria ou como uma maneira de tornar a matemática séria compreensível ou palatável. [...] Uma definição óbvia é que, é a matemática levando a alguma diversão, embora para uma pessoa leiga. (BARVES, BARVES, 2012, tradução do autor)

Já a pesquisadora Bartlová procura trazer a definição de um grande pesquisador da área de Matemática Recreativa,

Talvez a definição mais concisa de Matemática Recreativa seja a que foi fornecida pela figura principal de matemática recreativa de todos os tempos, nomeadamente Martin Gardner, que alegou que Matemática Recreativa é aquela parte da matemática que “inclui qualquer coisa que tem espírito de jogo” (BARTLOVÁ, 2016, p.2, tradução do autor)

Mas também, Bartlová procura fazer sua própria definição, de uma forma muito completa, da sua visão da Matemática Recreativa, dividindo em quatro aspectos, o aspecto científico-popular, o aspecto do divertimento, o aspecto pedagógico e o aspecto pedagógico.

1. O aspecto científico-popular - a Matemática Recreativa é a parte da matemática que é divertida e popular. Ou seja, os problemas correspondentes devem ser compreensíveis para um leigo interessado, embora as soluções possam ser mais difíceis. Pela Matemática Recreativa, podemos entender a abordagem usando a qual podemos tornar a matemática séria compreensível ou, pelo menos, mais palatável.
2. O aspecto do divertimento - a Matemática Recreativa é uma matemática usada como um desvio da matemática séria para a diversão de alguém. Por exemplo, um dos proeminentes matemáticos recreativos contemporâneos Ian Stewart percebe o papel da Matemática Recreativa precisamente nesse sentido. Ele está tentando ver a matemática como uma fonte de inspiração e alegria. Ele costuma escrever em seus livros que a matemática divertida é aquela parte que não é ensinada na escola. O mesmo ponto de vista foi defendido por Martin Gardner, que, além disso, acreditava que, mesmo na escola, a matemática ensinada deveria ser divertida até certo ponto.
3. O aspecto pedagógico - a Matemática Recreativa pode ser usada para fins de ensino. É visto como uma grande utilidade pedagógica. Suas partes estão presentes na matemática mais antiga conhecida e essa situação continua até os dias atuais.
4. O aspecto histórico - a Matemática Recreativa sempre desempenhou um papel muito importante na história da matemática e foi responsável pela origem de teorias e conceitos matemáticos importantes que não existiriam sem ela.

(BARTLOVÁ, 2016, p.2, tradução do autor)

O aspecto 3 abordado por Bartlová traz a discussão principal deste trabalho, o uso pedagógico da Matemática Recreativa em sala de aula, na qual iremos discutir mais à frente. Já o aspecto 4, traremos exemplos ao longo da história em que a Matemática Recreativa foi importante para a construção da matemática como conhecemos hoje.

Assim, observamos que a Bartlová apresenta de vários pontos de vista a Matemática Recreativa, mostrando desde o seu papel ao longo da história até seu uso em sala de aula.

Com essa exposição das definições de Matemática Recreativa feita por alguns autores, podemos ter uma noção do que seja a Matemática Recreativa. Como forma de organizar as ideias e buscar uma melhor compreensão, apresentamos na tabela 2.1 algumas palavras chaves utilizadas pelos autores na discussão e definição da Matemática Recreativa.

Tabela 2.1: Palavras chaves mencionadas nas definições de Matemática Recreativa

Autores	PALAVRAS CHAVES
MARTINS, PICADO	PUZZLES, JOGOS
SINGMASTER	DIVERTIDA, POPULAR, DESVIO DA MATEMÁTICA SÉRIA, COMPREENSÍVEL
BARVES BARVES	DIVERTIDA, DESVIO DA MATEMÁTICA SÉRIA, COMPREENSÍVEL, MATEMÁTICA PARA LEIGOS
MARTIN GADNER, IAN STWART	JOGOS, ALEGRIA, DIVERTIDA
BARTLOVÁ	DIVERTIDA, POPULAR, PALATÁVEL, COMPREENSÍVEL PARA UM LEIGO, DESVIO DA MATEMÁTICA SÉRIA

A tabela 2.2 mostra os quantitativos que cada palavra chave aparece ao longo de todas as definições e discussões colocadas aqui.

Tabela 2.2: Quantidade de vezes que aparecem as palavras chaves nas definições de Matemática Recreativa

PALAVRAS CHAVES	QUANTIDADE
DIVERTIDA	4
DESVIO DA MATEMÁTICA SÉRIA	3
MATEMÁTICA PARA LEIGOS	2
JOGOS	2
COMPREENSÍVEL	2
POPULAR	2
PUZZLES	1
ALEGRIA	1

Examinando as tabelas 2.1 e 2.2, podemos observar que os autores apresentam vários termos e palavras na busca por definir a Matemática Recreativa, são elas: divertida, jogos, compreensível, popular, uma matemática para leigos, desvio da matemática séria, alegria e *puzzles*. Assim, fica claro que não temos uma definição única e representativa do termo Matemática Recreativa. Porém, a de se observar que palavras e termos aparecem com mais frequência quando os autores procuram definir, como é visto na tabela 2.2. Com o que foi expostos pelos pesquisadores e de acordo com as tabelas 2.1 e 2.2, podemos definir a Matemática Recreativa como uma matemática que procurar desviar da matemática

ensinada da forma tradicional, tornando-a mais compreensível até para leigos, desta forma, a matemática se apresenta de forma divertida e popular.

Entretanto, é mais comum encontrar estudos que preferem não definir a Matemática Recreativa. Por exemplo, Martins e Picado (2014 p.101) falam que “o melhor é mesmo não a tentar definir. As definições tendem a fechar, e a Matemática Recreativa, na sua génese, é aberta.” Mesmo construindo uma definição sobre a Matemática Recreativa, acreditamos que o melhor seria não definir, haja vista não ter uma definição concreta e unificada. Assim, quando buscamos definir o que seria Matemática Recreativa, acabamos por restringir até onde está matemática pode alcançar.

Mas uma das grandes discussões sobre a Matemática Recreativa nem é sobre sua definição, é sobre o seu uso pedagógico. Algumas pessoas tem uma certa desconfiança em relação à utilização da Matemática Recreativa nas salas de aula. Porém, acreditamos que a Matemática Recreativa pode ter um papel pedagógico muito importante no processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica. Utilizar a Matemática Recreativa para prender a atenção do aluno para o que será ensinado pode ser uma alternativa. Ou então, introduzir um assunto ou até mesmo explicar um teorema de forma mais divertida e alegre pode fazer o aluno entender melhor e até mudar um pouco sua visão do que seja a matemática. Ribeiro compartilha da mesma ideia quando diz que

A procura da solução de um problema nem sempre exige um grande conhecimento de matemática. É nesse momento que a recreação atrai a curiosidade dos que não se interessam pela matéria e os convida à prática do raciocínio lógico-dedutivo e conseqüentemente ao estudo da disciplina. (RIBEIRO, 2018, p.11)

Desta forma, a Matemática Recreativa tem papel importante na desconstrução da matemática tradicional e na quebra do paradigma de ser a disciplina com maior dificuldade entre os alunos da Educação Básica. E cada vez mais, hoje em dia, é preciso que ela se faça presente nas salas de aula para que a visão de uma matemática sistemática e as vezes que não serve para o dia a dia das pessoas seja aos poucos desconstruída.

2.1.2 Matemática Recreativa ao longo da história

A Matemática Recreativa é tão antiga quanta a própria matemática. A seguir, vamos mostrar exemplos de Matemática Recreativa de acordo com as definições e discussões feita no tópico anterior. Apresentaremos o Papiro de Rhind, a origem da probabilidade, o desafio das Pontes de Königsberg e sobre os números binários.

O primeiro exemplo que iremos abordar é um dos mais antigos documentos recreativos encontrado. É o famoso Papiro de Rhind, exposto na figura 2.1. É um documento egípcio escrito por volta de 1650 a.C, na qual foi escrito por Ahmes (por isso, algumas vezes, o papiro de Rhind é também conhecido como papiro de Ahmes). O papiro leva este nome porque o escocês Alexander Henry Rhind o adquiriu por volta 1856. Hoje em dia, todas as obras pertencentes a Rhind, inclusive o Papiro de Rhind, se encontram no

museu britânico em Londres.

Figura 2.1: Papiro de Rhind



Fonte: <https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html> Acesso em 02/02/2020

No papiro, encontra-se diversos problemas matemáticos, sua grande maioria problemas não cotidianos da época. Ribeiro (2018, p.11) fala que o papiro Rhind possui “problemas criativos e lúdicos”. Já Bartlová, explica o lado recreativo do papiro de Rhind,

Os egípcios costumavam declarar seus problemas de matemática na forma de um quebra-cabeça. Como estes problemas não tinham aplicação na vida cotidiana, talvez seu principal objetivo fosse fornecer prazer intelectual. Um dos primeiros casos tem a forma de uma canção de ninar:

Sete casas, em cada uma são 7 gatos,
cada gato mata 7 ratos,
cada rato teria comido 7 espigas de espelta,
cada orelha de espelta produzirá 7 hekat.

Qual é o total de todos eles?

(BARTLOVÁ, 2016, p.15, traduzido pelo autor)

Um outro momento importante para a matemática que teve como base a recreação foi a origem da probabilidade. A probabilidade existia em nosso meio há muito tempo, segundo Carloni (2019, p.13) os primeiros registros de probabilidade estão associados a jogos de azar na época da idade média. E foi um desses jogos de azar, que acredita-se que tenha iniciado a construção dos conceitos e cálculos de probabilidade, que foi o desafio proposto pelo Chevalier de Meré à Blaise Pascal figura 2.2. Carloni fala que o desafio proposto é

conhecido como problema dos pontos, apresenta a seguinte situação: “Dois jogadores disputavam um prêmio que seria dado a quem primeiro fizesse 6 pontos no jogo. Quando o primeiro jogador tinha 4 pontos e o segundo tinha 3 pontos, foi preciso interromper o jogo. Como dividir o prêmio? (CARLONI, 2019, p.13)

Figura 2.2: Blaise Pascal



Fonte: <https://atitudereflexiva.wordpress.com/2018/08/06/o-triangulo-de-pascal/>
Acesso em 02/02/2020

Com o problema em mãos, Pascal passou a acionar e trocar cartas com seu amigo matemático Pierre de Fermat figura 2.3 em busca de solucionar tal problema. Estas cartas são os registros do início da construção da teoria da probabilidade. Após a divulgação dos seus estudos sobre o desafio, Fermat e Pascal mudaram a visão das pessoas em relação a jogos de azar. Elas passaram a saber quem tinham mais chance de vencer certo jogo ou o modo de jogar que lhe desse mais chances de ganhar.

Figura 2.3: Pierre de Fermat

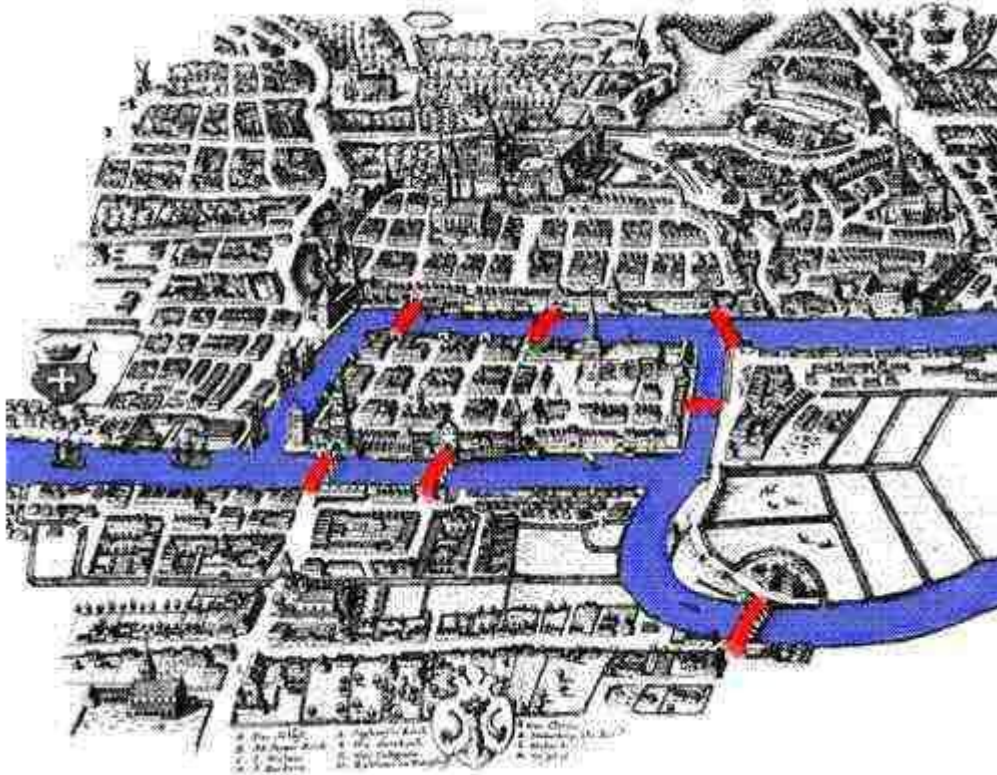


Fonte: <https://atitudereflexiva.wordpress.com/2016/09/07/o-ultimo-teorema-de-fermat/>
Acesso em 02/02/2020

Outro grande exemplo de Matemática Recreativa dando origem a uma grande teoria está associada a resolução do problema das sete pontes de Königsberg, feita por Euler. O problema se passa na cidade de Königsberg na qual possui duas ilhas e um

conjunto de pontes interligando essas ilhas e outras partes do mapa como mostra a figura 2.4. O desafio consiste em passar por todas as pontes uma única vez e retornar para o ponto de partida. Tal problema e solução deram origem a teoria de grafos.

Figura 2.4: Pontes de Königsberg



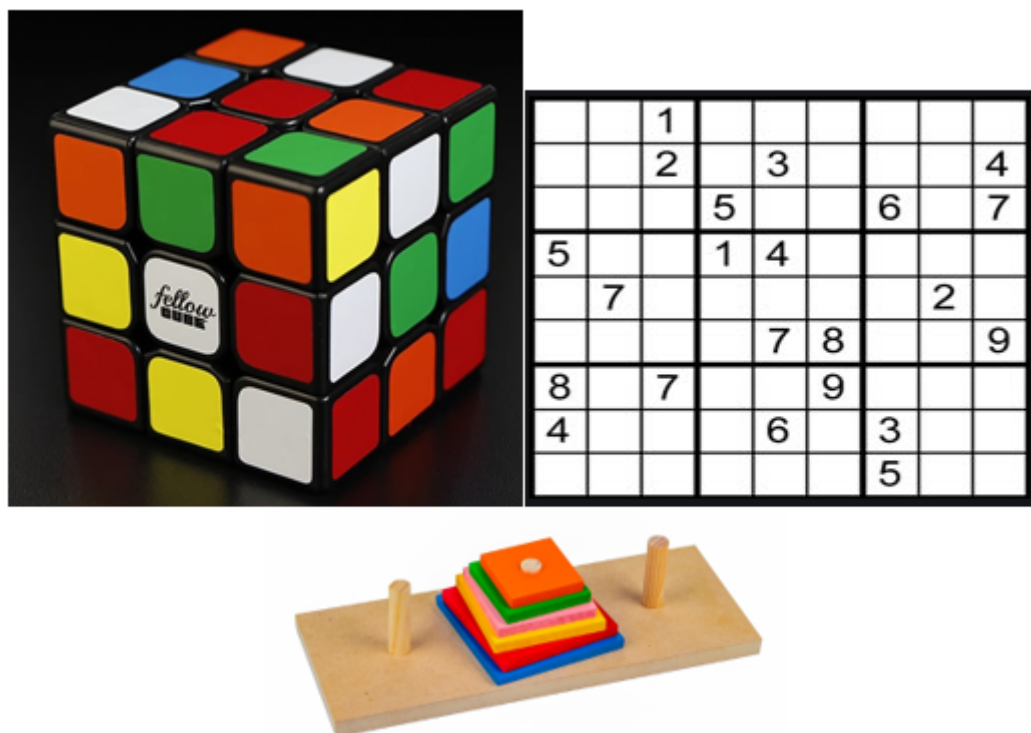
Fonte: <https://www.mat.uc.pt/alma/escolas/pontes/> Acesso em 02/02/2020

Além desses três exemplos de Matemática Recreativa durante a nossa história, existem outros inúmeros exemplos. Passando pelos números binários que foram criados apenas pela curiosidade e diversão e que hoje em dia é a linguagem da nossa computação. E chegando em desafios e jogos que encontramos hoje em dia na sala de aula, como por exemplo, o cubo mágico, Sudoku e torre de Hanoi como mostra a figura 2.5.

Assim, observamos que a Matemática Recreativa sempre esteve presente em nossa humanidade ao longo da história e que cada vez mais ela se apresenta em sala de aula. Desta forma, compreender todo o papel da Matemática Recreativa para a matemática é importante para que possamos explorá-la da melhor forma possível com os nossos alunos.

Esses e outros exemplos de Matemática Recreativa durante os anos estão presentes na tese de doutorado com o título História e estado atual de Matemática Recreativa e sua relação à matemática séria de Bártlová (2016).

Figura 2.5: Exemplos de Matemática recreativa praticada em sala de aula



Fonte: <http://www.cubovelocidade.com.br/basico/>,
<https://www.amazon.com.br/Carlu-Brinquedos-1125-Torre-Multicolor/dp/B07BH4Q3CB>
e <https://brasilecola.uol.com.br/curiosidades/sudoku.htm> Acesso em 02/02/2020

2.1.3 Dois autores da Matemática Recreativa

Na seção anterior, vimos alguns exemplos de Matemática Recreativa durante a história. Agora, iremos abordar personalidades que contribuíram para a Matemática Recreativa. Bezerra deixa bem claro a grande quantidade de contribuintes para esta matemática quando diz que

Muitos matemáticos ao longo da história dedicaram-se ao estudo de Recreações Matemáticas, como Leon Battisti Alberti (1404 – 1472), Luca Pacioli (1445 – 1517), Leonhard Euler (1707 – 1788), Pierre de Fermat (1601 – 1665), entre outros. Esses matemáticos têm sido citados em estudos de História da Matemática, sobre alguns problemas recreativos, por exemplo, o problema proposto por Euler, sobre a possibilidade de percorrer as sete pontes da cidade de Königsberg, sem passar pela mesma ponte duas vezes. (BEZERRA, 2018, p.31)

Apesar do grande número de contribuintes para a Matemática Recreativa, iremos, aqui, abordar somente dois. O grande nome da Matemática Recreativa no mundo, Martin Gardner, e o principal nome aqui no Brasil, Júlio César de Mello e Souza.

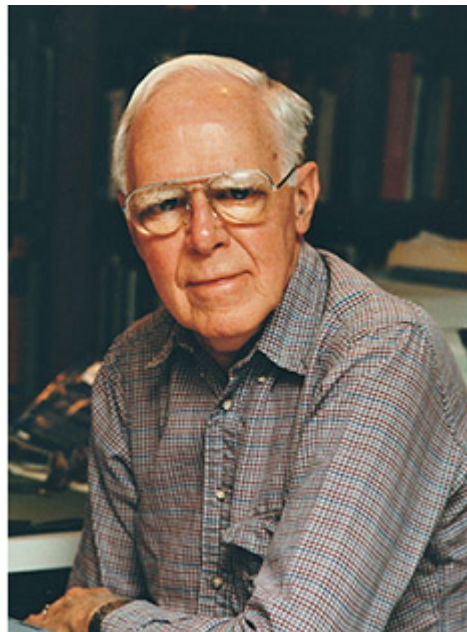
As informações que apresentaremos a seguir sobre Martin Gardner foram retiradas do site MacTutor (<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gardner>).

html)

Em 21 de outubro de 1914, na cidade de Tulsa, Oklahoma, no centro dos Estados Unidos, nasceu Martin Gardner, o nome mais famoso da Matemática Recreativa no mundo. A mãe de Martin Gardner, Willie Wilkerson Spiers, era professora dos anos iniciais, porém, após o nascimento dos seus três filhos, Martin (o mais velho), Jim e Judith, ela largou o trabalho para cuidar deles, e continuou apenas com seu hobby favorito, que era pintar. Sua mãe costumava ler muitos livros para seus filhos.

O livro preferido de Martin Gardner na infância era o mágico de Oz. Foi com esse livro, atrelado a seu lado curioso, que despertou a leitura em Martin Gardner. Por isso, antes mesmo dele entrar na escola, Martin Gardner já sabia ler. Já seu pai, James Henry Gardner, era doutor em geologia e possuía uma pequena empresa de petróleo, e muitas vezes, levava seu filho mais velho para o ambiente de trabalho. Naquela época, o negócio com petróleo estourou no mundo todo como uma riquíssima fonte de energia e a empresa James passou a ser altamente lucrativa. Desta forma, a família vivia muito bem financeiramente, não atoa, na casa deles, possuía uma quadra de tênis na qual Martin Gardner começou a jogar quando conseguiu manusear a raquete de tênis. Mais tarde, o pai de Martin Gardner acabou se tornando presidente da Associação Americana de Geólogos de Petróleo.

Figura 2.6: Martin Gardner



Fonte: <https://skepticalinquirer.org/exclusive/in-celebration-of-martin-gardner/> Acesso em 02/02/2020

Contudo, não só a mãe de Martin Gardner teve um papel importante na formação educacional do filho, com leituras de vários livros que fizeram ele saber ler até antes de entrar na escola. O pai, Henry Gardner, foi bastante importante por despertar no filho uma paixão na qual levou consigo para o resto da vida, a mágica. O pai de Martin

Gardner, segundo Lister (2005), "apresentou-o à magia quando lhe ensinou o " *Paddle Trick*", que emprega uma faca de mesa e vários pedaços de papel". Com a empolgação do filho com a mágica que acabará de descobrir, seu pai lhe deu uma cópia da *Cyclopedia of Sam Loyd 's*, um livro do matemático Samuel Loyd, que segundo O'Connor e Robertson (2003), era conhecido como San e ficou famoso pelas criações de quebra-cabeças, mágicas e interatividades matemáticas. Com todo esse aporte, Martin Gardner começou a se interessar por esse tipo de recreação: mágicas e quebra cabeças. Não à toa, de acordo com O'Connor e Robertson (2010), a mágica o levou "à sua primeira publicação, *New Color Divination in The Sphinx*, a uma revista de mágica, em maio de 1930, quando ainda era estudante do Ensino Médio".

Já na escola, Martin Gardner só tinha aptidão para a física e a matemática, as outras disciplinas ele não gostava muito. Costumava dizer que "sua professora de matemática do Ensino Médio, Pauline Baker, adorava o raciocínio dedutivo, enquanto pensava que seu professor de física, ME Hurst, era o professor mais inspirador da escola" (O'Connor e Robertson 2010).

Por influência do seu professor de física, Martin Gardner iria fazer física no Instituto de Tecnologia da Califórnia. Porém, um dos requisitos para adentrar no curso era ter dois anos de *College* e ele não possuía. Então, Martin Gardner resolveu fazer dois anos na Universidade de Chicago para posteriormente voltar para fazer física no Instituto de Tecnologia da Califórnia. Porém, o jovem americano acabou por se encantar por filosofia, curso na qual fazia na Universidade de Chicago, e resolveu continuar, se formando em 1936.

Assim que se formou, Martin Gardner teve sérias dificuldades em conseguir emprego, já que os Estados Unidos passava pela pior crise econômica de sua história, conhecida como a depressão econômica. Várias empresas falindo e pessoas que investiram pesado na bolsa de valores perdendo dinheiro. Assim, diante da situação do seu país, Martin Gardner resolveu trabalhar nas oportunidades que apareciam. Trabalhou em vários setores, como o próprio diz em Albers e Gardner

Eu tive vários empregos. Trabalhei como assistente social da Administração de Socorro de Chicago. Eu tive que visitar 140 famílias regularmente no que foi chamado de Cinturão Negro. Eu também tive vários trabalhos ímpares: garçom, propagandista de refrigerante, etc. (ALBERS, GARDNER, 2005 apud O'CONNOR; ROBERTSON, 2010)

Ainda chegou a trabalhar como repórter e como oficial de relações públicas na universidade na qual se formou em filosofia. Por volta de 1941, Martin Gardner acabou servindo à marinha americana durante a segunda guerra mundial e ficou embarcado durante cerca de três anos no oceano Atlântico dando suporte a navios de combate e impedindo qualquer tipo de invasão que os Estados Unidos acabassem por sofrer. Até que em 1945, após o fim da segunda guerra mundial, Martin Gardner retorna para o território americano.

No retorno a Chicago, após a segunda guerra mundial, Martin Gardner acabou vendendo seu primeiro conto para uma revista masculina chamada *Esquire Magazine*. Após a venda do seu primeiro conto, percebeu que poderia tirar seu sustento apenas da sua escrita, e resolveu não voltar a trabalhar como oficial de relações públicas na Universidade de Chicago, cargo que tinha antes de servir a marinha americana. Desta forma, Martin Gardner acabou conseguindo escrever para duas revistas periodicamente, uma era a própria revista *Esquire Magazine* e a outra era a *Humpty Dumpty*, uma revista infantil que fazia publicações de contos, poemas, artigos de não-ficção, jogos, quadrinhos, etc. Uma revista que fazia bem o estilo de escrita favorita de Martin Gardner.

Em 1947, o escritor americano se mudou para Nova York e continuou a escrever para a *Humpty Dumpty*. Pouco tempo depois que chegou a cidade novaiorquina, Martin Gardner conheceu Charlotte Greenwald, aquela que em 1952 se tornou sua esposa e ficaram juntos até a morte de Charlotte em 2000. Ambos tiveram dois filhos, o Jim e o Tom. No mesmo ano de seu matrimônio, Martin Gardner publicou seu primeiro livro, *In Name of Science* que posterior foi republicado em 1956 sob o título de *Fads and Fallacies in the Name of Science*.

Em dezembro de 1956, Martin Gardner fez o trabalho que o projetaria para a Matemática Recreativa, foi a sua publicação sobre hexaflexágonos na revista americana *Scientific American*, revista muito importante e com divulgações mensais sobre ciência. A publicação de Martin Gardner sobre os hexaflexágonos teve um retorno tão positivo que o editor o chamou para escrever mensalmente na revista. Assim, Martin Gardner deixou seu cargo com a *Humpty Dumpty* e passou a escrever um artigo mensal na *Scientific American* na qual tinha como título *Mathematical games*. Ele escreveu na sua coluna por 25 anos e popularizou a matemática e matemáticos para todo o mundo. Mas não só de artigo de revista viveu Martin Gardner, ele publicou inúmeros livros como relata O'Connor e Robertson

Seus livros também tiveram um enorme impacto na popularização da matemática. Ele escreveu mais de sessenta livros de capa dura, bem como inúmeros panfletos de cerca de 50 páginas. Certamente, nem queremos listar os títulos de mais de sessenta obras, por isso vamos fazer uma seleção: Máquinas e diagramas lógicos (1958); A Alice anotada (1960); Relatividade para o milhão (1962); O universo ambidestro: assimetria de espelho e mundos invertidos no tempo (1964); Carnaval matemático: um novo resumo de tentadores e quebra-cabeças da "Scientific American" (1975); The Incredible Dr Matrix (1976); Aha! Insight (1978); Ciência: Bom, Ruim e Bogus (1981); Aha! Gotcha: Paradoxos de Puzzle and Delight (1982); Os porquês de um escrivão filosófico (1983); Códigos, Cifras e Escrita Secreta (1984); Divertidos enigmas matemáticos (1986); Viagem no tempo e outras perplexidades matemáticas (1987); Quebra-cabeças perplexos e provocações tentadoras (1988); Música Fractal, Hypercards e Mais (1991);

Meus melhores enigmas matemáticos e lógicos (1994); Classic Brain-teasers (1995); Calculus Made Easy (1998); Um treino de Gardner: treinando a mente e entretendo o espírito (2001); Contos Matemáticos de Quebra-Cabeças (2001); e Bamboozlers (2008) (O'CONNOR, ROBERTSON, 2010)

Martin Gardner teve uma contribuição imensurável para a matemática e a Matemática Recreativa, mesmo sem ser formado em matemática. A não formação em matemática o ajudava na hora de escrever sobre a matemática, já que o seu conhecimento era o mesmo das outras pessoas que não se aprofundaram na disciplina, isso o ajudava a escrever com uma linguagem que um leigo em matemática entendia bem.

Em maio de 2010, Martin Gardner faleceu na sua cidade natal, porém, deixou um legado na matemática que é estudado e desenvolvido até nos dias atuais. A influência de Martin Gardner na recreação é tão grande que muitos estudiosos o consideram o maior nome da Matemática Recreativa da história. Como forma de homenagem, desde de 1993, ocorre o encontro mundial de Matemática Recreativa nos Estados Unidos, o nome do evento é *Gathering for Gardner* (G4G) figura 2.7.

Figura 2.7: Logo do evento Gathering for Gardner (G4G)



Fonte: <https://www.gathering4gardner.org/> Acesso em 02/02/2020

As informações que apresentaremos a seguir sobre Malba Tahan foram retiradas do Site Oficial da Família e dos Admiradores de Malba Tahan (<https://www.malbatahan.com.br/>)

No Brasil, um autor se destacou por popularizar a Matemática Recreativa em todo território nacional, foi Júlio César de Mello e Souza Figura 2.8 que nasceu em 6 de maio de 1895, na cidade do Rio de Janeiro. Apesar de ter nascido na capital federal da época, Rio de Janeiro, Júlio César passou toda sua infância em Queluz, cidade pequena que pertence à São Paulo e fica na divisa com o estado do Rio de Janeiro.

Os pais de Júlio César, João de Deus de Mello e Souza e Carolina Carlos de Toledo, conhecida como Dona Sinhá, eram professores em Queluz e a escola funcionava nas dependências de sua casa e tinha somente eles como professores. Júlio César teve nove irmãos e com tantos irmãos, não faltava ajuda para manter o trabalho escolar, por exemplo, Júlio César e sua irmã Julieta ajudavam recolhendo lições, distribuindo cadernos e atividades, apagando a lousa, etc. O dia a dia escolar presente na família Mello e Souza e o fato de os pais serem professores, fizeram com que sete dos nove filhos de dona Sinhá e de João de Deus optassem pelo magistério como profissão. Com uma família muito

grande e pouco recurso financeiro, Júlio César teve uma infância bem simples, e acabava dividindo seu tempo entre ajudar na escola, brincar na rua e estudar.

Figura 2.8: Júlio César de Mello e Souza



Fonte: <https://www.malbatahan.com.br/biografias/julio-resumo/> Acesso em 02/02/2020

Aos onze anos, Júlio César conseguiu passar no exame de admissão da escola militar no Rio de Janeiro, assim sendo, morou por três anos na cidade maravilhosa, porém, não terminou os estudos porque a escola era paga e seu pai não tinha dinheiro para manter seu filho. Durante esses três anos na escola militar, Júlio César criou sua primeira obra literária, a revista ERRE, que no site oficial da família e dos admiradores de Malba Tahan que tem o apoio do grupo Editorial Record, fala que

Nela, ele exercia as funções de diretor, redator e ilustrador. Ao lado do título da revista que inventou, apresentou seu primeiro pseudônimo: “ERRE Redactor Salomão IV”. Depois, avisava: “Erre – crítico, ilustrado e mensal”. Tratava-se de um engenhoso caderninho, com folhas dobradas, costuradas à mão, escrito com caneta tinteiro e ilustrado pelo próprio autor com desenhos a mão livre, coloridos com lápis de cor ou guache. As histórias eram organizadas em capítulos e privilegiavam o suspense, a guerra ou ainda a ciência dos animais e do corpo humano. (<https://www.malbatahan.com.br/biografias/1895-1906/>, acesso em 02/02/2020)

A revista ERRE figura 2.9, que perdurou por entre janeiro de 1907 até novembro de 1908, já mostrava o talento de Júlio César em relação a criatividade e a escrita. Ao todo, a revista teve 25 exemplares e hoje em dia, o acervo se encontra no Centro de Memória da Faculdade de Educação da Unicamp.

Figura 2.9: Revista ERRE



Fonte: <https://www.malbatahan.com.br/biografias/1895-1906/> Acesso em 02/02/2020

Em seguida, em 1909, Júlio César conseguiu uma vaga na escola Dom Pedro II. Uma escola bastante tradicional e renomada no Rio de Janeiro até nos dias atuais. Acabou conseguindo permanecer e terminar os estudos na escola pois conseguiu uma bolsa integral. Entre vários fatos curiosos que Júlio César passou na nova escola, destacamos quando o professor de português passava redações para serem feitas e entregues, e quem não entregasse teria que passar o final de semana na escola e não poderia retornar para casa. Júlio César, amante da escrita, acabava escrevendo a sua redação e ganhando dinheiro escrevendo redações para seus colegas de classe. Outro fato interessante, foi que numa noite no final de semana, o então diretor naquela época, acordou os dois alunos que ali dormiam para poder ver o cometa *Halley* passando. Tal noite foi tão marcante para Júlio César, que quando mais velho, escreveu um conto falando sobre esta experiência que teve na escola, conhecido como *Acordaram-me de madrugada* (Figura 2.10).

Figura 2.10: Livro que conta a experiência numa madrugada na época da escola



Fonte: <https://www.malbatahan.com.br/biografias/1906-1925/> Acesso em 02/02/2020

Em 1911, seu pai acabou falecendo e sua mãe foi morar no Rio de Janeiro. Com a vinda para o Rio, sua mãe acabou fundando um externato na qual seus filhos, incluindo Júlio César, eram os professores. Em 1912, Júlio César conseguiu seu primeiro trabalho formal, era auxiliar na Biblioteca Nacional e posteriormente começou o curso superior em engenharia civil na antiga Escola Politécnica da Universidade do Brasil. Desta forma, Júlio César se dividia entre aulas na escola da mãe, auxiliar na Biblioteca Nacional e a noite fazia o curso de engenharia civil. Em 1921, já formado, na escola normal, assumiu como professor substituto de Euclides Roxo, professor que teve papel importante na educação em matemática no Brasil e na qual tinha sido seu professor anteriormente. Dois anos depois, por meio de concurso, acabou se tornando professor efetivo. Entre tantas aulas que ministrava, acabou se encantando por uma ex-aluna, Nair Marques, Mulher na qual se tornou sua esposa em março de 1925 e posteriormente tiveram três filhos, Rubens Sérgio, Sônia Maria e Ivan Gil.

Júlio César trabalhou por um tempo como tradutor de correspondências de guerra no jornal O Imparcial, no Rio de Janeiro. Segundo Neto e Salles (2015, p. 23) o jornal publicava pequenos contos para que as pessoas pudessem ler no caminho de ida e volta do trabalho. Logo, Júlio César se interessou em escrever pequenos contos para que fosse publicado no jornal. Fez alguns e deixou na mesa do diretor para que ele pudesse avaliar para uma possível publicação. Porém, toda vez que ele ia na sala do diretor, observava seus contos no mesmo lugar que os tinham deixados. Logo, percebeu que o diretor não daria importância aos seus contos. Desta forma, Júlio César resolveu alterar a assinatura do conto, de J. C. Mello e Souza para R. V. Slady, e relatou ao diretor que se tratava de um conto estrangeiro. No dia seguinte percebeu que um dos seus contos, A história

dos oito pães figura 2.11, estava na capa do jornal. Assim, observou a importância de um codinome para um escritor pouco conhecido conseguir publicar algum tipo de material. Desta forma, Júlio César resolve criar um pseudônimo que o acompanhou por vários anos, Malba Tahan.

Figura 2.11: A história de oito pães



Fonte: <https://www.malbatahan.com.br/biografias/1906-1925/> Acesso em 02/02/2020

Assim, após a idéia do pseudônimo, Júlio César começou a escrever livros e contos com a assinatura de Malba Tahan. Um grande parceiro dele nesta empreitada foi o diretor do jornal A noite, Irineu Marinho. Júlio César levou os livros e contos para o jornalista e o explicou a situação do pseudônimo Malba Tahan. Ao ler os contos, gostou muito e resolveu publicar na primeira página do seu jornal e garantiu não revelar o nome de Júlio César como autor e sim Malba Tahan. Irineu Marinho foi um dos responsáveis pelo surgimento e disseminação de Malba Tahan para o público brasileiro.

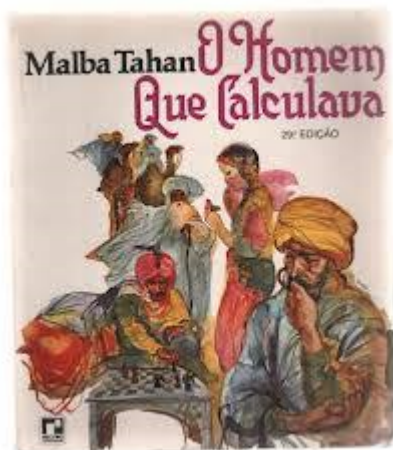
Mas de onde veio esse nome Malba Tahan? Ele existiu mesmo? Malba Tahan existiu sim. Segundo Siqueira e Filho

o personagem Malba Tahan nasceu em 06 de maio de 1885, próximo ‘a cidade de Meca. Foi prefeito da cidade árabe de El-Medina e abandonou o cargo quando seu pai morreu, em 1912, o qual deixou uma grande fortuna como herança. Então, Malba Tahan passa a viajar por vários países: Rússia, Índia, China, Japão e regressa, posteriormente, para a Arábia Saldita. Em 1921 ele morre, ainda jovem, numa luta pela liberdade de uma pequena tribo de beduínos, no deserto da Arábia Central. (SIQUEIRA, FILHO, 2008 apud FILHO, 2013, p. 25)

Desta forma, o pseudônimo, Malba Tahan tinha uma linha a ser seguida, a linha árabe. Desta forma, Júlio César ambientou as obras assinadas por Malba Tahan como sendo árabe, destacando a religiosidade, a cultura, política e o cotidiano do povo daquela região. Então, em suas obras, via-se muito elementos como camelo, deserto, oásis, entre outros elementos que caracterizasse que o autor era mesmo árabe.

Aos poucos, os livros e contos escritos por Malba Tahan iam se tornando cada vez mais populares. Em 1934, Malba Tahan tinha feito vários contos e seu primeiro livro falando sobre Matemática recreativa que se chamava Matemática divertida e curiosa. Porém, a grande obra de Malba Tahan foi o livro O homem que calculava figura 2.12. Um livro que juntava a cultura árabe com os conhecimentos matemáticos. O livro teve um grande índice de vendas e Malba Tahan ficou conhecido em todo Brasil. Segundo o que consta no site do Malba Tahan malbatahan.com.br, o grande escritor Monteiro Lobato havia afirmado que o homem que calculava seria uma obra que iria transgredir a barreira do tempo e passar de gerações em gerações. Até hoje, é um dos livros sobre Matemática Recreativa mais utilizados em sala de aula pelos professores de matemática. A obra foi tão impactante na vida de Júlio César que atualmente ele é mais conhecido pelo pseudônimo Malba Tahan do que pelo próprio nome. Mas o livro, O Homem que Calculava, rompeu as barreiras brasileiras. Malba Tahan acabou recebendo convites para ir a Portugal, Argentina, Uruguai, entre outros países para falar do famoso livro e sobre recreação matemática. O livro foi traduzido para língua espanhola e inglesa para que pudesse ser comercializado fora do país. Sabe-se que o pseudônimo Malba Tahan publicou cerca de 56 livros, com diferentes vertentes, como matemática, didática, contos infantis, teatros, etc.

Figura 2.12: Livro de Malba Tahan: O Homem que Calculava.



Fonte:

<https://www.amazon.com.br/Homem-Que-Calculava-Malba-Tahan/dp/8501023140>

Acesso em 02/02/2020

Não só com os livros e contos o Malba Tahan ficou conhecido e deu a sua contribuição para o Brasil. Outras atividades, fora da escrita, marcaram o autor brasileiro. Malba Tahan rodou o Brasil todo, cerca de 200 cidades, para ministrar palestras e cursos de aperfeiçoamento de professores Figura 2.13. Na cidade na qual moro desde da minha infância, Natal-RN, o professor Malba Tahan ministrou curso para professores das escolas públicas.

Na década de 1950 ocorreram algumas iniciativas em aprimoramento da matemática na Escola Normal de Natal, podemos citar como por exemplo o curso ministrado pelo professor Júlio César de Mello e Souza (Malba Tahan) aos professorandos da Escola e aos professores da rede pública do estado. (ASSIS, 2016, p.189)

Figura 2.13: Curso Ministrado por Júlio César para professores



Fonte: <https://www.malbatahan.com.br/biografias/1937-1957/homem> Acesso em 02/02/2020

Outra contribuição importantíssima foi a universidade do ar, projeto que através da rádio nacional procurava ministrar aulas a distância, um pequeno embrião do Ensino a Distância, EaD, tão difundido e cada vez mais presente nos dias atuais. Também criou a revista “Al Karismi”, importante meio de comunicação que era destinada a publicações de Matemática Recreativa. Segundo o que consta no site do Malba Tahan

O empenho de Malba Tahan em popularizar a Matemática foi muito grande [...] no Diário “A Noite”, Malba Tahan estreava a “Matemática Divertida e Curiosa”, talvez a primeira coluna do gênero no mundo. (<https://www.malbatahan.com.br/biografias/1937-1957/>, acesso em 02/02/2020)

Assim, Malba Tahan teve um papel importantíssimo para a matemática e para educação matemática. Ele criticava bastante a forma como a matemática era ensinada na maioria das escolas no Brasil, a forma tradicional de ensino, principalmente na disciplina de matemática. A esses professores, ele denominou de “algebristas”. Como forma de contribuição no sistema de ensino em matemática, ele publicou uma série de livros neste sentido, como a Didática da Matemática, Matemática Divertida e Pitoresca, Matemática Divertida e Diferente, Matemática Divertida e Curiosa, O Homem que Calculava, entre outras obras de suma importância para educação matemática.

Malba Tahan faleceu em 18 de junho de 1974. Ele estava em Recife para ministrar uma palestra para professores quando pela manhã sofreu um infarto vindo a óbito. Apesar

da morte, a vida e as obras de Malba Tahan perduram até hoje na educação brasileira. Sua importância e sua dedicação para com a matemática foram tão imensuráveis que mesmo depois de 39 anos de sua morte, foi promulgado o projeto de Lei 3482/04, pela deputada professora em letras da UFG Raquel Teixeira, que decreta que o dia 6 de maio, data de nascimento de Malba Tahan, é declarado o dia nacional da matemática.

2.2 História da Matemática

Com a educação cada vez mais dinamizada, utilizando como por exemplo, jogos, dinâmicas e tecnologias, a busca por alternativas de ensino para a sala de aula de modo que o aluno seja peça atuante na busca pelo conhecimento é bastante importante. A utilização da História da Matemática como recurso pedagógico no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, principalmente da Educação Básica, é uma excelente alternativa para que o professor possa introduzir os conteúdos matemáticos em sala de aula. Oliveira, Oliveira e Vaz (2014) afirma que “O uso dos fatos históricos na sala de aula proporciona um melhor entendimento dos alunos no que diz respeito à dimensão histórica dos assuntos envolvidos, despertando assim o interesse dos alunos, motivando-os ainda mais a buscar o conhecimento.” Desta forma, o uso da História da Matemática como recurso didático pode ser uma boa alternativa para prender a atenção do aluno e fugir um pouco daquela aula mais tradicional, com fórmulas e algoritmos no quadro. Desta forma, o ensino com uso da História da Matemática não é só benéfico a matemática, ela propõe uma interdisciplinaridade e aguça o poder de investigação e senso crítico do aluno. Gasperi e Pacheco (2007, p. 4) afirma que “Estudar a História da Matemática permite que o professor tenha uma visão mais ampla e contextualizada de sua disciplina interligando a matemática com outras disciplinas, respeitando suas especialidades”.

A interdisciplinaridade “Trata-se de explorar as fronteiras das disciplinas e as zonas intermediárias entre elas.” (JAPIASSU, 1976, p.57). Além disso, a interdisciplinaridade pode ser uma aliada da Matemática Recreativa, Japiassu (1976 p.54) apresentava a interdisciplinaridade como uma oposição a forma de ensino do tipo tradicional. É justamente esse tipo de oposição que abordamos na seção anterior ao tratar da Matemática Recreativa.

A interdisciplinaridade traz uma série de benefícios para o âmbito da sala de aula, Clark Abt apresenta algumas delas a seguir,

- Despertar entre os estudantes e os professores um interesse pessoal pela aplicação de sua própria disciplina a uma outra;
- Estabelecer um vínculo sempre mais estreito entre as matérias estudadas;
- Abolir o trabalho maçante e por vezes “bitolante” que constitui a especialização em determinada disciplina;
- Reorganizar o saber;

- Estabelecer comunicação entre os especialistas;
 - Criar disciplinas e domínios novos de conhecimento, mais bem adaptados à realidade social;
 - Aperfeiçoar e reciclar os professores, reorientando-os, de sua formação especializada, a um estudo que vise à solução de problemas;
 - Reconhecer o caráter comum de certos problemas estruturais, etc.
- (Clark Abt apud JAPIASSU, 1976, p. 56)

Essas características, sobre a interdisciplinaridade, foram consideradas no nosso estudo articulando a Matemática Recreativa e a História da Matemática e na elaboração do nosso produto educacional. Desse modo, buscamos promover uma integração da matemática com disciplinas como língua portuguesa, história e geografia.

Nas indicações para o Ensino Fundamental I e II dos Parâmetros Curriculares Nacional (PCN) referente a matemática fala que:

A História da Matemática pode oferecer uma importante contribuição ao processo de ensino e aprendizagem dessa área do conhecimento. Ao revelar a matemática como uma criação humana, ao mostrar necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, ao estabelecer comparações entre os conceitos e processos matemáticos do passado e do presente, o professor cria condições para que o aluno desenvolva atitudes e valores mais favoráveis diante desse conhecimento. (BRASIL, (b), 1998)

O PCN foi substituído pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). A nova diretriz continua indicando o uso da História da Matemática,

Além dos diferentes recursos didáticos e materiais, [...] é importante incluir a História da Matemática como recurso que pode despertar interesse e representar um contexto significativo para aprender e ensinar matemática. (BRASIL, (a), 2017)

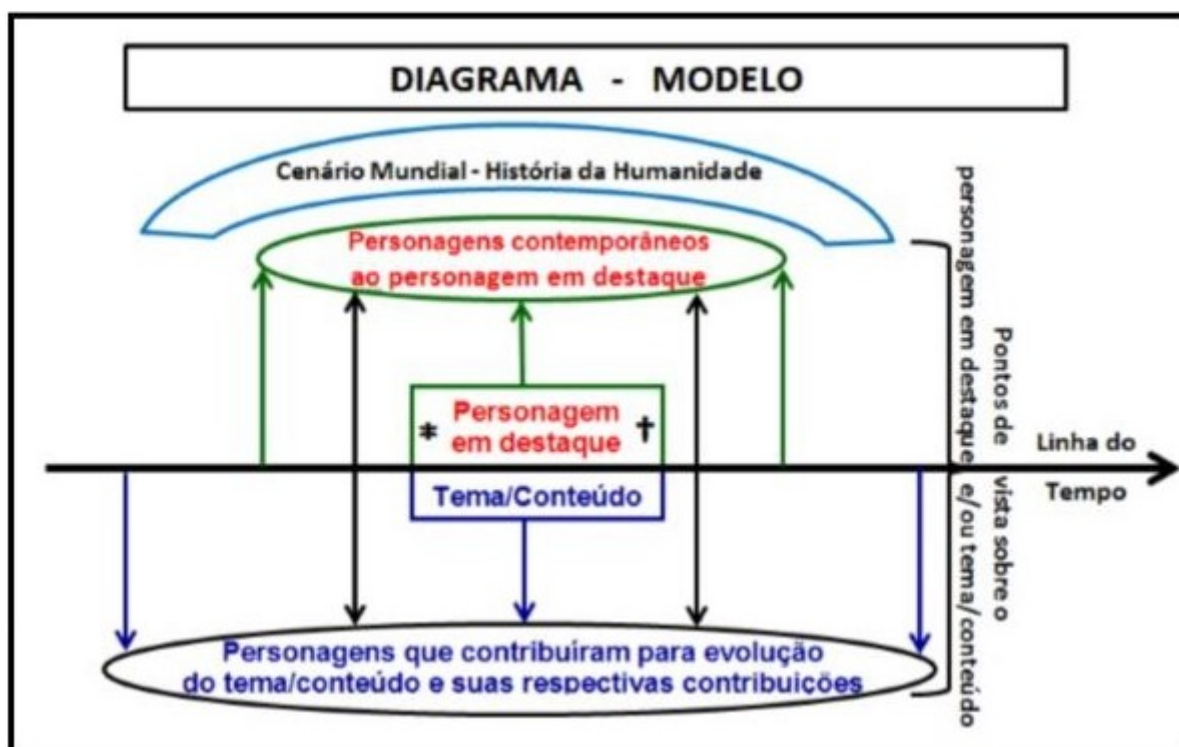
Entretanto, tem que se ter um cuidado ao usar História da Matemática no processo de ensino. Chaquiam e Mendes (2016, p. 19) alertam que os professores devem ter cuidado no uso da História da Matemática, sempre perguntando para quem e para que a usar. Esses autores chamam mais atenção quando diz que “é necessário que se tenha clareza sobre quais histórias tratamos e de que modo nos referimos direta e indiretamente à matemática a ser ensinada e até que ponto essas histórias podem ser utilizadas pedagogicamente.” Assim, devemos sempre ter a preocupação ao utilizar um recurso didático em sala de aula (como por exemplo tecnologia, jogos, dinâmicas, filmes etc) para não ser uma atividade apenas de entretenimento e sim com um fim pedagógico.

Assim, usaremos a História da Matemática para construção da experiência vivida por um personagem do século XX. Porém, a construção desta narrativa não pode ser feita como um conto de história, com relatos de fatos, datas e eventos. Mendes e Chaquiam chamam a atenção de como deve ser feito esta construção,

As histórias que tratam exclusivamente sobre a vida dos matemáticos ou apenas dos professores de matemática, e que têm apelo fortemente biográfico, podem contribuir de forma apenas ilustrativa para o ensino e a aprendizagem de conceitos, propriedades e relações matemáticas, se forem exploradas apenas no âmbito dessas biografias. Uma alternativa para a superação dessas limitações das biografias é que o professor deve planejar, executar e avaliar o **desenvolvimento de projetos de investigação histórica** que avancem com relação a conexão entre vida, obra e o fazer matemático desses sujeitos investigados de modo a ir além da simples biografia. Caso contrário essas histórias com enfoque central nas biografias poderão tender a se configurar apenas como histórias pitorescas e anedotárias a respeito de personagens da história da Matemática. (CHAQUIAM, MENDES, 2016, p.20, grifo do autor)

Para ficar bem claro a forma como devemos explorar um personagem matemático ao longo da história, Chaquiam e Mendes deixa de forma bem didática um diagrama figura 2.14 que esquematiza toda a construção de um personagem histórico.

Figura 2.14: Diagrama sobre a construção da história de um personagem



Fonte: CHAQUIAM, MENDES, 2016, p. 92

O diagrama deixa claro a forma como devemos construir uma História da Matemática com enfoque em uma personalidade. Ele expõe que não devemos apenas focar no personagem em destaque, outros elementos são bastante importantes na hora dessa construção.

No diagrama ele começa fazendo uma junção do personagem com o tema/conteúdo que está relacionado a aquele personagem. Relatar como o tema/conteúdo se desenvolveu ao longo dos anos e as personalidades que contribuíram para o seu desenvolvimento é

muito importante. Outro caminho a ser tomado na hora da investigação é sobre o que está ocorrendo no cenário mundial e local em que se encontra o personagem em estudo. Saber a cultura em que ele vive, saber a política do seu país, religião, entre outros elementos que pode influenciar no dia a dia do personagem estudado. Desta forma, ambientamos de forma bem completa todo o desenvolvimento do personagem e o leitor passa a compreender toda a construção histórica e matemática da personalidade e do assunto ali abordado. No desenvolvimento do nosso produto educacional, nos pautamos nas ideias de Chaquiam e Mendes e na interdisciplinaridade.

2.3 A aritmética para o estudo dos Números de Kaprekar

Nesta seção, abordaremos a matemática que será necessária para o estudo e entendimento dos resultados sobre os Números de Kaprekar. A aritmética é a base para o entendimento do conteúdo matemático da nossa dissertação. Parte deste ramo da matemática é uma das disciplinas obrigatórias do PROFMAT e na qual se tornou a base matemática deste texto, principalmente o conteúdo de congruência. Desta forma, estamos utilizando como base o livro de aritmética da coleção PROFMAT de Hefez (2016). Este ramo da matemática é bastante importante tanto na graduação quanto na pós graduação, já que é uma das disciplinas em que o estudante de um curso de licenciatura em matemática começa a ter um contato maior com a matemática mais formal, com teoremas e demonstrações. Já na Educação Básica, ela se faz presente do Ensino Infantil ao Ensino Médio. Serão abordados definições, proposições, corolários e exemplos para que os leitores possam compreender cada parte aqui explanada.

Seja $a, b \in \mathbb{Z}$. A notação (a, b) indica o máximo divisor comum (MDC) e $[a, b]$ indica mínimo múltiplo comum (MMC).

Dois números inteiros a e b são ditos coprimos, ou primos entre si, se $(a, b) = 1$.

Definição 2.3.1. *Seja m um número natural com $m > 1$. Diremos que dois números inteiros a e b são congruentes módulo m se os restos de sua divisão euclidiana por m são iguais. Quando os inteiros a e b são congruentes módulo m , escreve-se:*

$$a \equiv b(\text{mod } m)$$

Por exemplo, $21 \equiv 13(\text{mod } 2)$, já que os restos da divisão de 21 e de 13 por 2 são iguais a 1.

Quando a relação $a \equiv b(\text{mod } m)$ for falsa, diremos que a e b não são congruentes, ou que são incongruentes, módulo m . Escrevemos, nesse caso, $a \not\equiv b(\text{mod } m)$.

Por exemplo, $19 \not\equiv 11(\text{mod } 3)$, já que os restos da divisão de 19 e de 11 por três são diferentes, 1 e 2, respectivamente.

Assim, decorre, imediatamente, da definição de congruência, algumas implicações que iremos nunciar-lás a seguir.

Proposição 2.3.1. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Para todos $a, b, c \in \mathbb{Z}$, tem-se que*

- (i) $a \equiv a \pmod{m}$,
- (ii) se $a \equiv b \pmod{m}$, então $b \equiv a \pmod{m}$,
- (iii) se $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m}$, então $a \equiv c \pmod{m}$.

Porém, para verificar se dois número são congruentes módulo m , não é necessário efetuar a divisão euclidiana de ambos por m para depois comparar os seus restos. É suficiente aplicar o seguinte resultado:

Proposição 2.3.2. *Suponha que $a, b, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $m|b - a$.*

Demonstração: Sejam $a = mq + r$, com $0 \leq r < m$ e $b = mq' + r'$, com $0 \leq r' < m$, as divisões euclidianas de a e b por m , respectivamente. Logo,

$$b - a = m(q' - q) + (r' - r).$$

Portanto, $a \equiv b \pmod{m}$ se, e somente se, $r = r'$, o que, em vista da igualdade acima, é equivalente a dizer que $m|b - a$, já que $|r - r'| < m$.

□

Por exemplo, $21 \equiv 13 \pmod{2}$. Já que $2|(21 - 13) = 8$. Desta forma, fica mais rápido e simples identificar quando dois números são congruentes módulo m .

A seguir, teremos uma proposição na qual faz relações entre duas ou mais congruências.

Proposição 2.3.3. *Sejam $a, b, c, d, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$.*

- i) *Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.*
- ii) *Se $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$, então $ac \equiv bd \pmod{m}$.*

Demonstração: Suponhamos que $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m}$. Logo, temos que $m|b - a$ e $m|d - c$.

i) Basta observar que $m|(b - a) + (d - c)$. Fazendo uma manipulação chegamos que $m|(b + d) - (a + c)$.

ii) Como $m|b - a$ e $m|d - c$, observamos também que $m|(b - a)d$ e $m|(d - c)a$. Somando ambos temos que $m|(b - a)d + (d - c)a$. Desenvolvendo chegaremos que $m|bd - ac$. Logo, concluímos que $bd \equiv ac \pmod{m}$. Pela proposição 2.3.1 (ii), temos que $ac \equiv bd \pmod{m}$.

□

Com a proposição acima, podemos agora partir de duas ou mais congruência e chegar em outra na qual seria mais simples e fácil trabalhar. Um exemplo disto seria o corolário anunciado a seguir.

Corolário 2.3.1. *Para todos $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, se $a \equiv b \pmod{m}$, então tem-se que $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.*

Demonstração: Provaremos por indução. Para $n = 1$ temos que é verdadeiro, já que $a \equiv b(\text{mod}m)$ como diz nossa hipótese. Iremos supor válido para $n = k$. Vamos demonstrar que é válido para $n = k + 1$: Como temos que $a \equiv b(\text{mod}m)$ e $a^k \equiv b^k(\text{mod}m)$, vamos aplicar a proposição 2.3.3. (ii) nas duas congruências e teremos $a \cdot a^k \equiv b \cdot b^k(\text{mod}m)$. Chegaremos que $a^{k+1} \equiv b^{k+1}(\text{mod}m)$. □

A próxima proposição diz que para congruências vale o cancelamento com relação à adição.

Proposição 2.3.4. *Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Tem-se que*

$$a + c \equiv b + c(\text{mod}m) \iff a \equiv b(\text{mod}m).$$

Demonstração:

(\Rightarrow)

Se $a + c \equiv b + c(\text{mod}m)$, então $m|(b + c) - (a + c)$, o que implica que $m|b - a$ e, conseqüentemente, $a \equiv b(\text{mod}m)$.

(\Leftarrow)

Se $a \equiv b(\text{mod}m)$, segue-se imediatamente da Proposição 2.3.1. (i) com $c \equiv c(\text{mod}m)$ que $a + c \equiv b + c(\text{mod}m)$. □

Entretanto, não vale, em geral, o cancelamento para a multiplicação, como se pode verificar no exemplos a seguir.

Exemplo 2.3.1. *Sabemos que $54 \equiv 30(\text{mod}8)$, já que $54 - 30 = 24$ e $8|24$. Desta forma temos que $6 \cdot 9 \equiv 6 \cdot 5(\text{mod}8)$, e, no entanto, $9 \not\equiv 5(\text{mod}8)$.*

Com o exemplo acima, temos que ter sempre o cuidado no cancelamento da congruência em relação à multiplicação. A proposição abaixo nos mostra a forma correta de utilizar o cancelamento com relação à multiplicação devido a introdução de uma hipótese.

Proposição 2.3.5. *Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$. Temos que*

$$ac \equiv bc(\text{mod}m) \iff a \equiv b(\text{mod}\frac{m}{(c,m)}).$$

Demonstração:

Como $\frac{m}{(c,m)}$ e $\frac{c}{(c,m)}$ são coprimos, temos $ac \equiv bc(\text{mod}m) \iff m|(b - a)c \iff \frac{m}{c,m}|(b - a)\frac{c}{(c,m)} \iff \frac{m}{(c,m)}|b - a \iff a \equiv b(\text{mod}\frac{m}{(c,m)})$ □

Corolário 2.3.2. *Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$, com $m > 1$ e $(c, m) = 1$. Temos que*

$$ac \equiv bc(\text{mod}m) \iff a \equiv b(\text{mod}m).$$

Daremos, a seguir, algumas propriedades adicionais das congruências relacionadas com a multiplicação.

Proposição 2.3.6. *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$ e m, n, m_1, \dots, m_r inteiros maiores do que 1. Temos que*

- i) se $a \equiv b(\text{mod } m)$ e $n|m$, então $a \equiv b(\text{mod } n)$;*
- ii) $a \equiv b(\text{mod } m_i), \forall i = 1, \dots, r \iff a \equiv b(\text{mod } [m_1, \dots, m_r])$;*
- iii) se $a \equiv b(\text{mod } m)$, então $(a, m) = (b, m)$.*

Demonstração:

(i) Se $a \equiv b(\text{mod } m)$, então $m|b - a$. Como $n|m$, segue-se que $n|b - a$. Logo, $a \equiv b(\text{mod } n)$.

(ii) Se $a \equiv b(\text{mod } m_i), i = 1, \dots, r$, então $m_i | b - a$, para todo i . Sendo $b - a$ um múltiplo de cada m_i , segue-se que $[m_1, m_2, \dots, m_r] | b - a$, o que prova que $a \equiv b(\text{mod } [m_1, m_2, \dots, m_r])$.

A recíproca decorre do item (i).

(iii) Se $a \equiv b(\text{mod } m)$, então $m|b - a$ e, portanto, $b = a + tm$ com $t \in \mathbb{Z}$. Logo, temos que

$$(a, m) = (a + tm, m) = (b, m).$$

□

Com esses resultados, podemos compreender melhor a aritmética contida no artigo do Iannucci (2010), que será abordado em uma seção do próximo capítulo.

3 Kaprekar e sua matemática

Neste capítulo, falaremos sobre a Índia e alguns dos seus aspectos, como economia, cultura e religião. Pontuaremos algumas das contribuições da Índia para matemática e mostraremos a situação da Índia no século XX. Abordaremos o matemático indiano Kaprekar e suas duas principais obras, Os Números de Kaprekar e a Constante de Kaprekar.

3.1 Kaprekar, a Índia

As informações que apresentaremos a seguir sobre a Índia foram retiradas de Palma (2008) e de uma reportagem da BBC (<https://www.bbc.com/portuguese/geral-47487130>)

A Índia é um país localizado no continente asiático figura 3.1 e possui a segunda maior população do mundo, perdendo somente para a China e é o sétimo em extensão territorial. Os indianos são muito fieis a cultura e a religião, não atoa, esses dois aspectos afetam bastante a economia, a política e a vida social dos indianos.

Figura 3.1: Localização da Índia no mapa mundi



Fonte:

<https://www.istockphoto.com/br/vetor/grey-mapa-do-mundo-com-a-indica%C3%A7%C3%A3o-da-%C3%ADndia-gm480492182-68487731> Aceso em 06 de abril de 2020.

Acredita-se que cerca de 80 % da população indiana siga o Hinduísmo como religião, religião esta que possui vários deuses, como Ganesha figura 3.2, que é conhecido como deus do intelecto, da sabedoria e da fortuna. A cultura e a religião acabam por segregar classes na população. Palma fala dessa segregação da seguinte forma

A segregação da população indiana é social e religiosa. Ocorre no nascimento, no matrimônio e na vida profissional. Ela se baseia em castas. Apesar da extinção legal deste sistema em 1947, com a independência, elas permanecem embutidas nos valores e no cotidiano da sociedade indiana. A comunidade internacional e associações de direitos humanos começaram a questionar se o sistema de castas é uma tradição milenar e religiosa, ou uma forma de racismo e instrumento de manutenção dos privilégios das castas superiores. PALMA (2008, p.19)

Figura 3.2: Ganesha



Fonte: <https://www.significados.com.br/ganesha/> Acesso em 20/02/2020

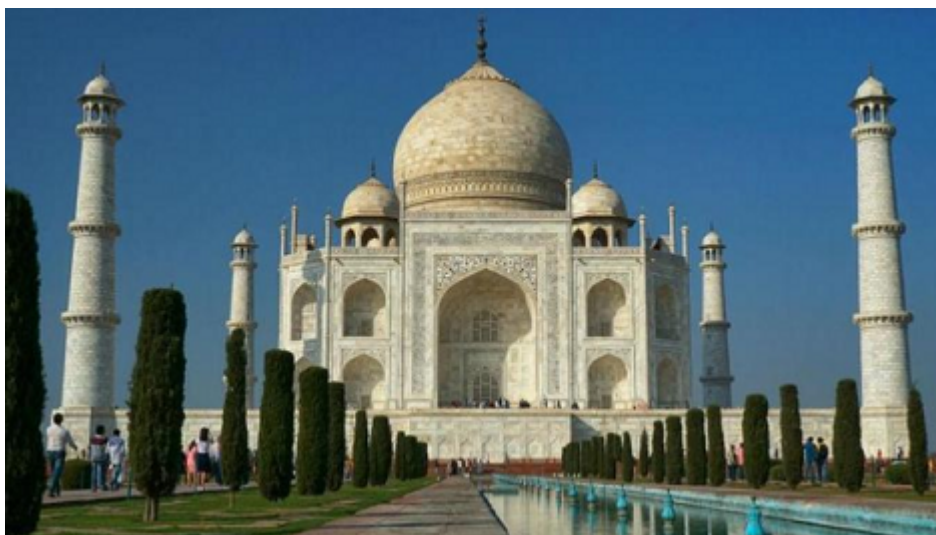
O regime de castas faz com que mulheres sejam consideradas inferiores aos homens, sendo assim, ocupando cargos de baixa expressão em todos os seguimentos econômicos, e muita das vezes acaba por ficar em casa cuidando da família. Segundo o regime, os casamentos são arranjados entre os pais das noivas e noivos, na maioria das vezes famílias amigas prometem seus filhos em futuros casamentos. Uma classe bem conhecida nesse regime são os Dalit, que são os indianos que violaram o sistema de casta. Souza [2020] diz que os Dalit “realizam trabalhos considerados desprezíveis, como a limpeza de esgotos, o recolhimento do lixo e o manejo com os mortos. Uma vez rebaixado como dalit, a pessoa coloca todos seus descendentes nesta mesma posição.”

A economia indiana era basicamente a agricultura de subsistência, cerca de 70 % da população colhia para sobreviver. Porém, em alguns produtos, a Índia se destacava,

como o cultivo de arroz, trigo, chá e fumo. Porém, na década de 90, o governo indiano permitiu que o capital estrangeiro entrasse na Índia, fazendo uma grande revolução na economia e na vida local. Devido a ser um país muito populoso e que a maioria da sua população era pobre, muitas indústrias, principalmente a americana, viu um lugar onde encontraria uma mão de obra humana barata. Desta forma, enormes fábricas de grandes empresas se instalaram na Índia. Um dos maiores *call center* do mundo se encontra na Índia, já que a sua população, como um todo, fala Hindu e o inglês, legado deixado pelos britânicos na época da colonização.

Mas a cultura e a religião indiana atraem turistas do mundo todo. Devido ter uma moeda desvalorizada a nível mundial, a Índia acaba por atrair turistas pelo baixo custo diário que o visitante terá. Porém, o que acaba chamando a atenção dos turistas são as grandes construções religiosas e culturais da Índia. O Taj Mahal figura 3.3 é um dos maiores símbolos do povo indiano, recebe milhões de turistas todo ano e chama a atenção pela sua beleza e arquitetura.

Figura 3.3: Taj Mahal



Fonte: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-foi-construido-o-taj-mahal/>
Acesso em 20/02/2020

Além da cultura e das grandes construções arquitetônicas da Índia, outro ponto que chama a atenção do país é a sua contribuição para a matemática ao longo dos anos. O maior legado deixado pela Índia para a matemática foi o sistema de numeração decimal. O sistema que adotamos hoje em dia, o posicional, com unidade, dezena, centena, milhares e assim por diante, veio dos indianos, não atoa é conhecido como sistema de numeração indo-arábico, indo devido aos Hindus terem descoberto e Árabe porque foi o povo Árabe que popularizou o sistema de numeração.

Um grande matemático e também astrônomo muito famoso na Índia é o Aryabhata, do século VI. Sua grande contribuição fica por conta da trigonometria. Ele fez grandes avanços nas funções trigonométricas seno e cosseno. Porém, ele é muito conhecido pelo

valor aproximado que acabou encontrando para o número π . Sautoy (2019) diz que “Ele também usou o π para medir a circunferência da Terra, chegando ao valor de 39.968 km - um número muito próximo daquele que conhecemos hoje (40.075 km).”

Outro matemático indiano que deu sua contribuição ao longo da história foi Brahmagupta. No início do século VII, Brahmagupta, que viveu por volta de 628, escreveu trabalhos falando sobre os números negativos e como fazer as quatro operações básicas da matemática com esses números. Este foi o trabalho mais influente de Brahmagupta na matemática, mas não foi o único, ele se aprofundou em resoluções de equações quadráticas e de equações com duas variáveis. O estudo de equação pelo matemático indiano foi tão primórdio que Fermat apresentou estudos parecidos no mundo ocidental quase um milênio depois.

Outro matemático indiano bastante importante foi Srinivasa Ramanujan, que nasceu em 22 de dezembro de 1887 e faleceu em 26 de abril de 1920. Um matemático extraordinário que viveu no final do século XIX e início do século XX. Teve uma contribuição imensurável para a matemática mais avançada. O atual diretor-geral do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) Marcelo Viana relata, em sua coluna na Folha de São Paulo, que

No século 19, a Índia produziu um dos matemáticos mais extraordinários da história: Srinivasa Ramanujan (1887-1920), cuja vida foi contada no filme “O homem que viu o infinito.” Dotado de intuição fora do comum para descobrir fórmulas matemáticas complexas, Ramanujan atribuía sua inspiração à deusa Namagiri. (VIANA, 2019)

Muitas descobertas e pesquisas feitas, principalmente no primeiro milênio depois de Cristo, pelos matemáticos indianos acabaram não se espalhando pelo mundo. Como havia uma divisão bem clara entre ocidente e oriente, muito da matemática desenvolvida no mundo oriental só veio ao ocidente muitos séculos depois. Provavelmente esta desconexão fez com que muitos matemáticos orientais não tivessem a fama que os ocidentais tiveram.

Mas vamos falar como estava a Índia no século XX, já que nosso personagem principal viveu nesta época. No início do século XX, a Índia vivia sobre controle do império inglês. Após o fim da primeira guerra mundial, o parlamento britânico acabou fazendo inúmeros reformas na comunidade indiana afim de amenizar os efeitos que a guerra trouxe a nação inglesa. Tais reformas trouxeram indignação ao povo e ao parlamento indiano e uma onda em busca da independência da Índia começa a ganhar força. Neste momento, surge um personagem que iria unificar a Índia em busca da independência, Mohandas Karamchand Gandhi, nascido em 02 de outubro de 1869 e faleceu em 30 de janeiro de 1948. Também conhecido como Mahatmam Gandhi figura 3.4.

Figura 3.4: Mahatmam Gandhi

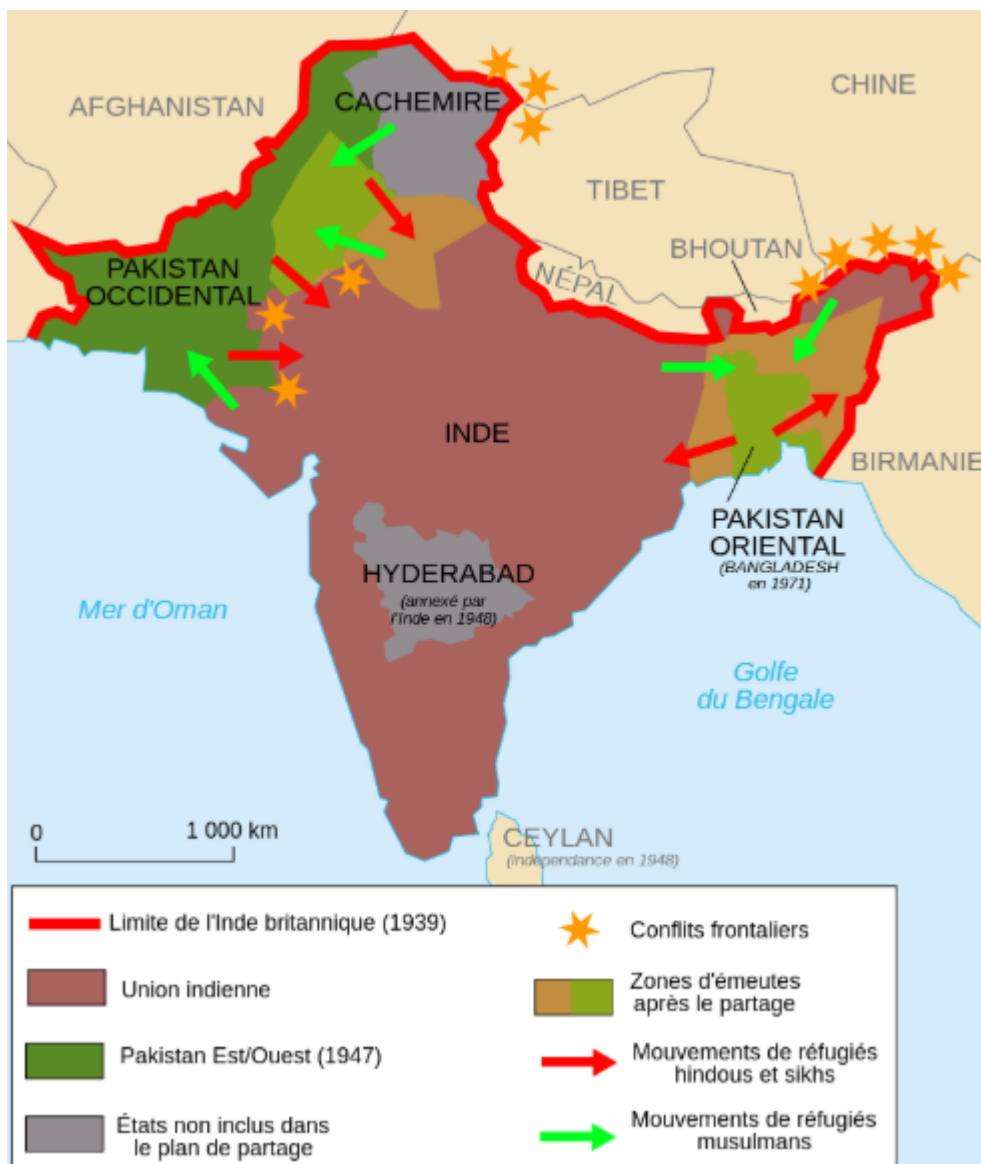


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Mahatma_Gandhi Acesso em 20/02/2020

A Índia possuía uma disputa religiosa entre os Hindus e os Mulçumanos pela predominância no território indiano. Porém, Gandhi, Hindu, pediu trégua nesta disputa e que as duas vertentes religiosas se juntassem em pró da independência da Índia. Com seu discurso de luta não armada, sempre pregando a paz, Gandhi passou a contar cada vez mais com seguidores, chegando a ser a principal figura política da Índia naquele momento. Assim, cada vez mais a luta pela independência da Índia ficava forte e a presença britânica em território indiano insustentável. Após o fim da segunda guerra mundial, a Inglaterra vê insustentável o domínio do território indiano e resolve fazer transição de independência da Índia.

Porém, o clima entre Hindus e Mulçumanos estava cada vez pior. Confrontos, atrás de confrontos entre os seguidores das vertentes religiosas, milhares de pessoas chegaram a morrer nestes confrontos. A solução foi dividir o país para que cada seguimento religioso tivesse sua terra. Assim, os Mulçumanos ficaram com 20 % do território indiano, na qual chamaram de Paquistão e os Hindus ficaram com o restante que ainda permaneceu com o nome de Índia. Neste período a tensão era muito grande no país. Até que em 1947, os ingleses reconheceram a Índia como o país independente. Mesmo após a independência e a separação dos povos Hindus e Mulçumanos figura 3.5, o clima de conflito esteve presente na Índia, não a toa em 1949 o ativista Mahatmam Gandhi acabou morto em confronto religioso. Um filme que retrata bem esse momento de tensão entre os Hindus, Mulçumanos e os Ingleses é “O último vice-rei” dirigido por Gurinder Chadha.

Figura 3.5: Mapa mostrando o deslocamento do povo indiano após a separação



Fonte: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Parti%C3%A7%C3%A3oda%C3%8Dndia> Acesso em 20/02/2020

As informações que apresentaremos a seguir sobre Kaprekar foram retiradas do site MacTutor (<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kaprekar.html>)

Diante deste cenário no início do século 20, em 17 de janeiro de 1905, nascia na cidade de Dahanu, a cerca de 100 quilômetros da capital indiana Mumbai, Dattatreya Ramchandra Kaprekar figura 3.6, também conhecido como Ganitanand. Kaprekar nasceu em uma família muito humilde e foi basicamente criado pelo pai, já que sua mãe faleceu quando ainda tinha apenas oito anos de idade. O pai de Kaprekar era fascinado pela astrologia. Muito das vezes o jovem indiano acompanhava seu pai nos estudos sobre os astros. Provavelmente deve ser o motivo pelo encantamento que Kaprekar adquiriu pelos números, já que o estudo da astrologia necessita um certo conhecimento matemático.

Figura 3.6: Dattatreya Ramchandra Kaprekar



Fonte: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kaprekar.html> Acesso em 20/02/2020

Kaprekar frequentou a escola secundária em Thane (às vezes conhecido como Thana), muito próximo da capital indiana Mumbai. Naquela época, Kaprekar já mostrava o seu gosto por uma matemática mais divertida, mais recreativa. O'Connor e Robertson (2007) confirma quando diz que na escola, Kaprekar “passava muitas horas felizes resolvendo quebra-cabeças matemáticos.”. Posteriormente, em 1923, Kaprekar estudou no *Fergusson College* em Pune. A escola é bastante conceituada na Índia, muitas pessoas importantes do povo indiano estudaram nesta instituição de ensino. No site da escola <https://www.fergusson.edu/article/history.html> diz que “Mahatma Gandhi, em sua mensagem ao Dr. GS Mahajani, nesta ocasião, escreveu: “Quem deixará de se entusiasmar com o registro nobre do serviço prestado pela DE Society e pelo Fergusson College à causa da educação?” Assim, temos a noção da importância da escola na educação indiana. No *Fergusson College*, em 1927, Kaprekar ganhou o prêmio *Wrangler R.P. Paranjpe*, que é concedido pela melhor matemática original produzida por um aluno. Assim, o jovem indiano começou a mostrar a sua aptidão pela matemática.

Em 1929, na Universidade de Mumbai, Kaprekar se formou bacharel em matemática. Após sua formação, começou a lecionar numa cidade ao centro da Índia, chamada Devlali. A medida que os anos iam passando, Kaprekar chamava a atenção da forma como os seus alunos se encantavam pela matemática, muito pela forma que o professor transmitia o seu conhecimento. Assim, Kaprekar passou a dar palestras nas universidades e escolas da redondeza sobre os métodos que praticava em sala de aula e revelar um pouco sobre suas pesquisas.

Mesmo após formado, Kaprekar continuou a estudar e praticar a matemática mais

avançada. Um dos ramos que mais gostava de estudar e se identificava era a teoria dos números. Para expressar sua paixão pela matemática, ele costumava falar que “Um bêbado quer continuar bebendo vinho para permanecer naquele estado agradável. O mesmo acontece comigo no que diz respeito aos números.” (O’CONNOR, ROBERTSON, 2007)

À medida que Kaprekar pesquisava, percebeu a necessidade de divulgar os resultados. Porém, Kaprekar sempre encontrou dificuldade em divulgar suas pesquisas em revistas renomadas da Índia. Malheiro e Gomes explicam que

Os problemas matemáticos a que Kaprekar se dedicava eram considerados pelos matemáticos mais iminentes como triviais e pouco importantes, de tal forma que dificilmente ele conseguia publicar os seus trabalhos em revistas renomadas, sendo conhecido fundamentalmente no nível da Matemática recreativa e dos jogos matemáticos. (GOMES, MALHEIROS, 2011, p.1)

Como Kaprekar não fez pós-graduação, nunca recebeu um treinamento formal da matemática superior, que na época era peculiar aos estudantes de pós-graduação. Esta falta de conhecimento de uma matemática mais formal era comum em alguns matemáticos indianos. Um grande exemplo disso foi o matemático Ramanujan, que fez grandes descobertas, mas não tinha o aparato da matemática formal. Precisou viajar para a Inglaterra afim de aperfeiçoar sua matemática para fazer valer suas descobertas. Isto foi retratado no filme que conta a vida de Ramanujan, O Homem que viu o Infinito. Essa falta de formalização da sua matemática e o ramo em que gostava de pesquisar, fez com que Kaprekar sofresse julgamentos negativos dos companheiros indianos matemáticos acerca dos trabalhos divulgados, como por exemplo Decimais Recorrentes, Quadrados Mágicos, Números Inteiros, entre outros. Falavam que eram trabalhos sem importância e muito triviais.

Durante toda a sua vida, trabalhou sozinho nas suas pesquisas. Após o falecimento da sua esposa em 1966, percebeu que a pensão que ganhava não era o suficiente para se manter. Então, Kaprekar começou a dar aulas particulares de ciência e matemática para complementar a renda, pois sempre viveu em situação bem humilde.

A fama de Kaprekar a nível mundial só veio em 1975, quando o grande precursor da Matemática Recreativa no mundo, Martin Gardner, escreveu sobre uma das pesquisas de Kaprekar em sua coluna *Mathematical Games*, na edição de março da *Scientific American*. Assim, os trabalhos de Kaprekar começaram a ter reconhecimento de ordem mundial. Pesquisas, como a Constante de Kaprekar e Números de Kaprekar, passaram a ser conhecidas e estudadas pelo mundo todo. Nas seções seguintes trataremos uma discussão acerca destas duas descobertas de Kaprekar. Após 11 anos da publicação de Martin Gardner, em 1986, Kaprekar faleceu, mas deixou um legado importante para os números e para Matemática Recreativa.

3.2 Os números de Kaprekar

A aritmética vista na seção 2.3 será de extrema importância para entender esta seção sobre os Números de Kaprekar. Assim, caso tenha alguma dúvida sobre algum procedimento aqui exposto, volte a seção de Aritimética e tente compreender.

Alguns números do nosso sistema de numeração indo-arábico apresentam propriedades particulares. Podemos formar conjuntos de números que possui propriedades semelhantes. Como por exemplo os números 2, 4, 6, 8, 10, 12... são todos divisíveis por 2 e por isso são chamados de números pares. Outro exemplo são os números 2, 3, 5, 7, 11... que possui a característica semelhante de que são divisíveis só por 1 e por eles mesmos, conhecidos como números primos.

Abaixo, apresentaremos números que possui uma característica semelhantes entre si. Conhecidos como Números de Kaprekar.

9,	$9^2 = 81,$	$8 + 1 = 9;$
45,	$45^2 = 2025,$	$20 + 25 = 45;$
297,	$297^2 = 88209,$	$88 + 209 = 297;$
4879,	$4879^2 = 23804641,$	$238 + 04641 = 4879;$
17344,	$17344^2 = 300814336,$	$3008 + 14336 = 17344;$
538461,	$538461^2 = 289940248521,$	$289940 + 248521 = 538461.$

Tabela 3.1: Alguns exemplos do Número de Kaprekar

Os números indicados anteriormente apresentam a seguinte característica:

- Inicialmente pegamos um número e o elevamos ao quadrado;
- Agora desmembramos o número obtido em duas partes;
- Em seguida, somamos esses dois números obtidos e obtemos o número inicial.

Em seu artigo, Iannucci (2000) chama os números que possui estas características de Números de Kaprekar. A seguir, traremos a definição que Carosh apresenta, no artigo do Iannucci (2000), acerca do número n-Kaprekar.

Formalmente, um número n-Kaprekar, $k \geq 1$ (para $n = 1, 2, 3, \dots$) satisfaz o par de equações a seguir,

$$k = q + r, \quad q \geq 1$$

$$k^2 = q \cdot 10^n + r, \quad 0 \leq r < 10^n$$

Por exemplo,

$$k = 45 = 20 + 25 \Rightarrow q = 20 \text{ e } r = 25;$$

$$k^2 = 20 \cdot 10^2 + 25 = 2025.$$

Desta forma, o 45 é um 2-Kaprekar. Outro exemplo é,

$$k = 297 = 88 + 209 \Rightarrow q = 88 \text{ e } r = 209;$$

$$k^2 = 88 \cdot 10^3 + 209 = 88209.$$

Desta forma, o 297 é um 3-Kaprekar.

Por convenção, é adotado que 1 é um n -Kaprekar, para todos $n \geq 1$ e que 0 e 10^m , para todo $m \geq 1$, não são n -Kaprekar.

Kaprekar, ao listar os Números de Kaprekar, apresentou número 9. Porém, não listou os números 99, 999, 9999,... (números que possui somente 9 como dígito). No entanto, todos os números da forma $10^n - 1$ (para todo $n \geq 1$) é um n -Kaprekar.

Proposição 3.2.1. *Todo número da forma $10^n - 1$, n inteiro, $n \geq 1$, é um número n -Kaprekar.*

Demonstração: Suponha $k = 10^n - 1$, n inteiro, $n \geq 1$; podemos escrever:

$$\begin{aligned} k &= 10^n - 1 = (10^n - 2) + 1 \\ \text{e } k^2 &= (10^n - 1)^2 = (10^n)^2 - 2 \cdot 10^n + 1 = 10^n \cdot 10^n - 2 \cdot 10^n + 1 \\ &= (10^n - 2) \cdot 10^n + 1, \text{ no qual } q = 10^n - 2 \text{ e } r = 1. \end{aligned}$$

□

Para apresentar o principal resultado do artigo do Iannucci (2000), sobre o número n -Kaprekar, teremos que entender a definição e o lema a seguir.

Definição 3.2.1. *Se $(a, b) = 1$, denotaremos por $(a^{-1})_b$ o menor inteiro positivo m tal que $am \equiv 1 \pmod{b}$. Segue que $m = (a^{-1})_b$ se, e somente se, $1 \leq m < b$ e $am \equiv 1 \pmod{b}$.*

Vamos estabelecer alguns exemplos, para melhor esclarecer a definição e a notação anterior:

Exemplo 3.2.1. *Vamos fazer com $a = 5$ e $b = 7$. Como $(5, 7) = 1$, temos na nossa notação $m = (5^{-1})_7$. Desta forma, o menor inteiro positivo m que satisfaz $5m \equiv 1 \pmod{7}$ é 3. Logo, $m = (5^{-1})_7 = 3$*

Exemplo 3.2.2. *Vamos fazer com $a = 3$ e $b = 10$. Como $(3, 10) = 1$, temos na nossa notação $m = (3^{-1})_{10}$. Desta forma, o menor inteiro positivo m que satisfaz $3m \equiv 1 \pmod{10}$ é 7. Logo, $m = (3^{-1})_{10} = 7$*

Lema 3.2.1. *Suponha que $(a, b) = 1$. Então $m = (a^{-1})_b$ e $n = (b^{-1})_a$ se, e somente se m e n são positivos e $am + bn = ab + 1$.*

Demonstração:

(\Rightarrow)

Pela definição, temos que

$$m = (a^{-1})_b \Rightarrow am \equiv 1(\text{mod } b), \text{ com } 1 \leq m < b$$

$$n = (b^{-1})_a \Rightarrow bn \equiv 1(\text{mod } a), \text{ com } 1 \leq n < a.$$

Logo, observamos que m e n são positivos.

Multiplicando a primeira desigualdade por a e a segunda por b, teremos

$$a \leq am < ab$$

$$b \leq bn < ab.$$

Somando as duas novas desigualdade obteremos $am + bn < 2ab$. (1)

De acordo com o que foi visto na seção 2.3, temos

$$bn \equiv 0(\text{mod } b).$$

Somando a congruência anterior com $am \equiv 1(\text{mod } b)$ temos $am + bn \equiv 1(\text{mod } b)$.

Como o $[a, b] = ab$ por $(a, b) = 1$, temos pela Proposição 2.3.6 (ii)

$$am + bn \equiv 1(\text{mod } ab) \Rightarrow am + bn = 1 + abt, \text{ com } t \text{ inteiro.}$$

Basta provar que $t=1$ que terminamos a demonstração. Vamos supor que $t \geq 2$.

$$am + bn = 1 + abt \geq 1 + 2ab > 2ab \Rightarrow am + bn > 2ab.$$

Uma contradição pela desigualdade (1). Desta forma, $t < 2$. Porém, temos que $am + bn - 1$ é maior que 1, já que a, m, n e b são inteiro positivos maiores que 1. Assim, para manter a desigualdade (1) verdadeira, temos que t é inteiro positivo. Logo, $t = 1$.

(\Leftarrow)

Suponha que $am + bn = ab + 1$ com $m, n > 0$. De acordo com o que foi visto na seção 2.4, temos que

$$am \equiv 0(\text{mod } a)$$

$$ab \equiv 0(\text{mod } a)$$

Com as duas congruências anterior, temos que $bn \equiv 1(\text{mod } a)$. Ou seja, $n = (b^{-1})_a$. Analogamente, segue que $m = (a^{-1})_b$.

□

Com a definição 2.2.1 e o Lema 2.2.1, iremos anunciar o principal resultado do artigo do Iannucci (2000).

Para cada número inteiro $N > 1$, denotaremos $K(N)$ o conjunto de números inteiros positivos k para que existam números positivos q e r tal que

$$k^2 = qN + r, \quad 0 \leq r < N \quad (2)$$

$$k = q + r, \quad (3)$$

Por uma questão de convenção, devemos ignorar a solução $k=N$ (para qual $q=N$ e $r=0$). Desta forma, Iannucci em seu artigo, busca caracterizar N .

Subtraindo (3) de (2), temos:

$$k^2 - k = k(k - 1) = q(N - 1) \quad (4)$$

Como desconsideramos a solução $k=N$, temos $1 \leq k \leq N - 1$. Pois, se $k \geq N$, então por (4) implica que $q > N$, contradizendo a equação (3).

O conjunto $K(N)$ não é vazio, pois o 1 sempre está em $K(N)$. Suponhamos que k estivesse em $K(N)$. Como $(k, k - 1) = 1$, segue por (4) que $d|k$ e $d'|k - 1$ para alguns d e d' positivos tais que $dd' = N - 1$ e $(d, d') = 1$. Agora, vamos supor um $k' = N - k$. Como $1 \leq k \leq N - 1$, temos que $k' > 0$. Com $k' = N - k \Rightarrow k' = (N - 1) - (k - 1)$. Desta forma, como $d'|(N - 1)$ e $d'|(k - 1)$, temos que $d'|k'$. Assim, temos que $k = dm$ e $k' = d'm'$, para alguns m e m' positivos. Desta forma, segue a equação abaixo,

$$dm + d'm' = N = dd' + 1 \quad (5)$$

Agora, aplicando o Lema 3.2.1 em (5), teremos

$$k = d(d^{-1})_d; \quad k' = d'(d'^{-1})_{d'}$$

Porém, temos $dd' = N - 1$, $(d, d') = 1$ e $m = (d^{-1})_d$ e $m' = (d'^{-1})_{d'}$. Então, pelo Lema 2.2.1, temos $dm + d'm' = N$. Portanto,

$$\begin{aligned} dm &= N - d'm' = (N - d'm' - mm') + mm' \\ &\text{e disso } (dm)^2 = (N - d'm')^2 \\ &= N^2 - 2d'm'N + (d'm')^2 \\ &= N^2 - Nd'm' - Nd'm' + (d'm')^2 \\ &= N^2 - Nd'm' - d'm'(dm + d'm') + (d'm')^2 \\ &= N^2 - Nd'm' - d'm'dm - (d'm')^2 + (d'm')^2 \\ &= N^2 - Nd'm' - mm'(N - 1) \\ &= N^2 - Nd'm' - mm'N + mm' \\ &= (N - d'm' - mm')N + mm' \end{aligned}$$

Desta forma, temos o seguinte par de equações,

$$\begin{aligned} dm &= k = (N - d'm' - mm') + mm' & mm' < N \\ (dm)^2 &= k^2 = (N - d'm' - mm')N + mm' \end{aligned}$$

Assim, observamos que dm satisfaz (2) e (3) (com $q = N - d'm' - mm'$ e $r = mm'$), onde dm pertence a $K(N)$. Caso substituísse dm por $d'm'$, encontraremos que $d'm'$ pertence a $K(N)$. Desta forma, falamos que por simetria, $d'm'$ pertence a $K(N)$.

O que acabamos de discutir é o seguinte teorema,

Teorema 3.2.1. $K \in K(N)$ se, e somente se, $k = d(d^{-1})_{(N-1)/d}$ para algum divisor unitário d de $N-1$.

Falamos que um número natural a é um divisor unitário de b , se $(a, \frac{b}{a}) = 1$. Por exemplo, 5 é um divisor unitário de 60, pois $(5, 12) = 1$. Já o 10 não é divisor unitário de 60, já que $(10, 6) \neq 1$.

Exemplo 3.2.3. Vamos fazer um exemplo para $N = 10^2$. Como iremos trabalhar com $N-1$, temos que estudar os divisores de 99, $D(99) = 1, 3, 9, 11, 33, 99$. Assim, temos o 1 e 99 e o 9 e 11 como divisores unitários. Por convenção já adotada nesta seção, já sabemos que o 1 pertence ao conjunto $K(N)$. Vamos analisar os outros números.

- $d = 99$,
 $k = d(d^{-1})_{(N-1)/d} \Rightarrow k = 99.(99^{-1})_{99/99} = 99.(99^{-1})_1$
 $X = (99^{-1})_1 \Rightarrow 99X \equiv 1(\text{mod}1) \Rightarrow X$ é qualquer número inteiro positivo. Porém, como $k < N$, temos que X só pode ser 1. Desta forma, $k = 99.(99^{-1})_1 = 99.1 = 99$.
- $d = 9$,
 $k = d(d^{-1})_{(N-1)/d} \Rightarrow k = 9.(9^{-1})_{99/9} = 9.(9^{-1})_{11}$
 $X = (9^{-1})_{11} \Rightarrow 9X \equiv 1(\text{mod}11) \Rightarrow$ Logo X é 5. Desta forma,
 $k = 9.(9^{-1})_{11} = 9.5 = 45$.
- $d = 11$ Por simetria, temos que $d = 9$ e $d' = 11$. Assim, $dm = 45$ e $d'm' = N - dm = 100 - 45 = 55$.

Desta forma, $1, 45, 55, 99 \in K(10^2)$

Assim, podemos encontrar os Números de Kaprekar por meio do Teorema 3.2.1.

3.3 A Constante de Kaprekar

O trabalho mais famoso de Kaprekar no mundo todo é a Constante de Kaprekar, muito pela publicação do Martin Gardner em sua coluna. Aqui no Brasil, a Constante de Kaprekar vem aparecendo recentemente, alguns portais como Globo, Uol, Folha de São Paulo e BBC vem publicando matérias acerca da constante desde do ano passado. Na vigésima nona edição da Olimpíada de Matemática do Brasil, uma das questões voltada para o público do oitavo e nono ano do Ensino Fundamental II era sobre a Constante de Kaprekar. Assim, nos últimos anos, com o crescimento da Matemática Recreativa, a Constante de Kaprekar aparece com mais frequência em nosso meio.

05. Em 1949 o matemático indiano D. R. Kaprekar, inventou um processo conhecido como Operação de Kaprekar. Primeiramente escolha um número de quatro dígitos (não todos iguais), em seguida escreva a diferença entre o maior e o menor número que podem ser formados a partir de uma permutação dos dígitos do número inicial. Repetindo o processo com cada número assim obtido, obtemos uma seqüência. Por exemplo, se o primeiro número for 2007, o segundo será $7200 - 0027 = 7173$. O terceiro será $7731 - 1377 = 6354$.

Começando com o número 1998, qual será o 2007-ésimo termo da seqüência?

(XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática. Segunda Fase. Nível 2. www.obm.org.br 2007)

Para conhecer como funciona a Constante de Kaprekar, devemos seguir as seguintes instruções:

1º Escolha um número qualquer inteiro positivo de quatro dígitos, desde que possua pelo menos dois dígitos diferentes;

2º Em seguida, reorganize os dígitos do número escolhido em ordem decrescente e subtraia da ordem crescente dos dígitos;

3º Pegamos o resultado da subtração e repetimos o procedimento anterior até encontrar uma constante.

Para facilitar o entendimento, vamos fazer o procedimento acima para o número 1956.

1º passo é a escolha o número de 4 dígitos: 1956;

2º passo é reorganizar o número em ordem decrescente, 9651. Depois em ordem crescente, 1569. Após isso, fazer a subtração destes dois números, $9651 - 1569 = 8082$.

3º passo, caso não tenha chegado no número 6174, é realizar o procedimento novamente. Reorganizar em ordem decrescente, 8820, e na ordem crescente, 0288. E fazer a subtração, $8820 - 0288 = 8532$.

Repetiremos novamente a instrução 2. Reorganizamos na ordem decrescente, 8532, e na ordem crescente, 2358. E fazer a subtração, $8532 - 2358 = 6174$.

Reorganizando na ordem decrescente, 7641, e na ordem crescente, 1467, e fazendo a subtração obteremos, $7641 - 1467 = 6174$. Assim, observamos que chegamos ao número 6174.

Agora vamos realizar o procedimento com o número 8349, porém de forma mais rápida e intuitiva:

$$9843 - 3489 = 6354$$

$$6543 - 3456 = 3087$$

$$8730 - 0378 = 8352$$

$$8532 - 2358 = 6174$$

$$7641 - 1467 = 6174$$

Observamos que chegamos no mesmo número que no exemplo anterior. Vamos realizar agora com o número 1993:

$$9931 - 1399 = 8532$$

$$8532 - 2358 = 6174$$

$$7641 - 1467 = 6174$$

Os três exemplos acima nos fizeram chegar no mesmo número, 6174. É justamente este número que é conhecido como Constante de Kaprekar. Independentemente do número que se escolha, seguindo as instruções acima, sempre chegaremos na Constante de Kaprekar, 6174. Esta descoberta foi feita por Kaprekar em 1946 e anunciada em 1949 na conferência nacional de Madras, na Índia, e posteriormente publicada no artigo Problemas Envolvendo Reversão de Dígitos, em 1953.

Uma das grandes dúvidas acerca da Constante de Kaprekar é sobre a quantidade de vezes que tenho que repetir as instruções. Em estudos feitos, chegaram à conclusão que o número máximo de vezes em que precisaremos repetir as instruções são sete. A seguir, mostraremos uma tabela 3.7 de Gomes e Malheiro na qual faz relação entre quantidade de número de quatro dígitos e quantas interações precisamos fazer.

Figura 3.7: Quantidade de interações e a frequência dos números de quatro dígitos

Iteração	Frequência
0	1
1	356
2	519
3	2124
4	1124
5	1379
6	1508
7	1980

Fonte: GOMES, MALHEIROS 2011, p.2

Desta forma, podemos responder a questão da XXIX Olimpíada de Matemática. Assim, depois de fazer 2007-ésimo interações da Constante de Kaprekar, chegaremos ao número 6174. Já que em no máximo 7 interações se chega à Constate.

Vale salientar que foi testado esses mesmos procedimentos para outras quantidades de dígitos. Foi verificado que com três dígitos, repetindo o mesmo procedimento acima, chegaremos sempre no número 495. Caso queira se aprofundar no estudo da Constante de Kaprekar ou até entender o porquê de isto acontecer, sugiro o artigo de Oliveira (2013) cujo o título é 6174: Um problema com números de quatro algarismos.

4 Aplicação da Constante de Kaprekar na Educação Básica

Neste capítulo, apresentaremos os percursos de elaboração do produto educacional com base na História da Matemática e Matemática Recreativa. Além disso, faremos a descrição e indicação da possível aplicação do livreto de atividades por parte dos professores de matemática, e comentaremos sobre o processo de refinamento feito após nossas reflexões.

4.1 A elaboração do livreto

Após o nosso estudo sobre como seria possível associar a Matemática Recreativa e a História da Matemática para os estudos de conteúdos do Ensino Fundamental II em sala de aula, que foi aqui apresentado, desenvolvemos um livreto de atividades que contempla essa dimensão. O objetivo desse produto educacional é oportunizar aos professores de Matemática do Ensino Fundamental II uma forma de apresentar uma curiosidade matemática por meio da História da matemática, promover a interdisciplinaridade e aguçar o poder de investigação dos estudantes. Destacamos que no âmbito de alcance do professor de matemática, esperamos que este, de forma particular, amplie seus conhecimentos sobre Matemática Recreativa e História da Matemática e, mais particularmente, sobre a história da Índia e o matemático indiano Kaprekar.

O livreto de atividades é composto basicamente por duas partes, uma dedicada ao professor de matemática e outra por atividades voltadas aos estudantes do Ensino Fundamental II que chamaremos de **Revistinha sobre o número mágico**. A parte dedicada ao professor dá uma visão resumida da pesquisa que foi feita nesta dissertação e que delineou a elaboração das atividades para os estudantes, além da indicação de materiais de consulta para que o professor possa enriquecer o seus conhecimentos sobre a Índia. As atividades dedicadas aos estudantes, que compõem a Revistinha sobre o número mágico, contém um texto (narrativa) e tarefas que emergiram a partir da nossa visão sobre o uso da História da Matemática como terreno fértil para interdisciplinaridade e o desenvolvimento de projetos de investigação que mostre uma conexão entre a vida, obra e o fazer matemático de uma personalidade que viveu em época anterior a nossa.

O trabalho que antecedeu a elaboração do livreto de atividades, iniciou-se com um

estudo biográfico sobre Kaprekar, que abrangeu aspectos da história da Índia e vida e obra desse matemático indiano. O contexto histórico revelou que a Índia passava por um momento de grandes mudanças políticas no cenário mundial durante a vida de Kaprekar. Isso delineou alguns questionamentos que foram propostos na Revistinha sobre o número mágico como tarefas para os estudantes do Ensino Fundamental II. A pesquisa sobre as obras de Kaprekar, indicaram que este matemático dedicou parte de seus estudos em descobrir relações e propriedades aritméticas dos números naturais, como por exemplo, as que foram apresentadas nessa dissertação, a saber, os Números de Kaprekar e a Constante de Kaprekar nas seções 3.2 e 3.3, respectivamente.

Escolhemos a Constante de Kaprekar como o conteúdo matemático a ser levados para os alunos, pois acreditamos que esse tema é mais facilmente compreendido, pois envolve apenas operações simples, como, por exemplo, subtração de números naturais com quatro dígitos. E que pode ser levado a qualquer ano do Ensino Fundamental II, diferentemente do conteúdo de potenciação que está presente nos Números de Kaprekar. Além disso, consideramos que o assunto é divertido, desafiador e envolvente.

A Revistinha sobre o número mágico não foi aplicada em uma turma do Ensino Fundamental II, mas tivemos a oportunidade de apresentar parte de seu conteúdo a uma turma do curso noturno de Licenciatura em Matemática da UFRN que cursava a disciplina de Teoria dos Números no semestre 2019.2. Isso ocorreu em forma de dois seminários, onde apresentamos e discutimos uma primeira versão do texto que introduz a vida do matemático indiano Kaprekar e sua constante. Esses dois momentos foram importantes para refinamento do texto e direcionamento para elaboração das tarefas que compõem a Revistinha sobre o número mágico.

Em um desses seminários, levamos uma primeira versão do texto (uma narrativa escrita pelo mestrando) ainda sem título e pedimos para que os estudantes de licenciatura o lessem. Antes da leitura, informamos a esses estudantes o propósito daquele texto, que seria o de levar para um aluno da Educação Básica, particularmente para o Ensino Fundamental II. Após a leitura, fizemos uma discussão e coletamos algumas observações e sugestões, que esboçamos um pouco mais a frente. Antes, porém apresentamos, a seguir, o texto que foi levado para discussão. O texto era provisório e ainda não tinha título, segue o texto:

Numa pequena cidade no interior da Índia, morava o jovem menino chamado Kaprekar. Quando pequeno, brincava muito com seus amigos na floresta da cidade em que nasceu, Dahanu. Fazia trilha, tomava banho de cachoeira, entre outras brincadeiras. Claro, que sempre acompanhado de um dos pais dos amigos.

À noite, Kaprekar gostava de ficar com seu pai e observar o céu. O pai de Kaprekar era astrônomo e ele tinha um telescópio e assim, o jovem garoto passava a noite olhando as estrelas e os astros no céu, principalmente a Lua, seu astro favorito. Kaprekar, ao olhar o céu pelo telescópio, fazia perguntas bem interessantes para si mesmo. Qual a distância da terra para lua? Quanto tempo vive uma estrela? Quão maior é a terra em relação a lua? Ou será que a lua é maior que a terra?

Como a maioria das respostas sobre os astros eram números, o jovem indiano passou a gostar mais de matemática. Kaprekar passou a prestar mais atenção e se dedicar mais nas aulas de matemática, na tentativa de encontrar e entender as respostas para seus questionamentos.

Quando adolescente, no ensino médio, Kaprekar se divertia com os números. Sempre desafiava os colegas de sala com jogos e mágicas envolvendo matemática. Até que um dia, investigando os números, descobriu algo muito interessante. Ele pegou o número 1993 e reorganizou em ordem decrescente (9931) e subtraiu da ordem crescente (1399). Achou o número 8532. Depois fez o mesmo procedimento e achou o número 6174. Repetiu o processo e achou o mesmo número que havia achado anteriormente, 6174. Curioso como era, Kaprekar resolveu pegar outro número e testar para ver o que acontecia. Resolveu pegar o número 1995. Repetiu o processo anterior e encontrou o mesmo número, 6174.

Kaprekar ficou muito feliz com sua descoberta. Chegou em casa todo animado e foi mostrar ao seu pai o que tinha desvendado. O pai do jovem indiano escolheu novos números de quatro dígitos e chegou ao número 6174. Ele ficou impressionado com a descoberta do filho. E chamou o número 6174 de mágico. Encantado com o que acabou de descobrir, Kaprekar decidiu procurar alguém que possa explicar para ele o porquê de isto ocorrer. Então, Kaprekar fez suas malas, e resolveu ir para Mumbai, capital da Índia para poder encontrar alguém que pudesse resolver o problema do número mágico 6174.

Ao chegar em Mumbai, observou que havia muito tumulto e um aglomerado de pessoas. Percebeu ali que estava havendo uma revolução na Índia. Sem entender muito bem o que se passava, resolveu procurar alguém para falar sobre seu número mágico. Ao observar ao redor, percebeu que havia um homem que fala para uma multidão atenta à sua fala. Pensou logo que se tratava de uma pessoa importante e inteligente e que poderia ajudar a desvendar o mistério do tal número mágico.

Quando o senhor terminou de proferir suas palavras para a multidão, Kaprekar chegou perto dele e pediu ajuda, prontamente o senhor perguntou no que ele poderia ajudar, o jovem indiano falou que buscava uma resposta para o número mágico que havia descoberto. O senhor, muito prestativo, observou os cálculos que Kaprekar tinha feito no papel e falou para o jovem que não poderia ajudar por não entender quase nada com os números. Foi aí que o senhor se apresentou como Mahatman Gandhi, advogado e bom com as palavras e oratória, e não com os números. Curioso, Kaprekar então perguntou o que tanto ele falava para toda aquela multidão. Gandhi respondeu que a Índia vivia um período de revolução em busca da sua independência e que o país vivia em constante conflito. Então Gandhi falava para o povo que devíamos fazer a revolução na forma mais pacífica do mundo, sem luta armada, só com a paz. Ao escutar aquilo, Kaprekar reconheceu que Gandhi era genial com as palavras. Agradeceu a atenção que o senhor indiano teve com ele e resolveu seguir em frente.

Kaprekar pareceu abatido por não ter conseguido a resposta do seu número mágico, mas não desistiu e resolveu andar pela cidade em busca de outras pessoas que podem o ajudar. Até que ele achou uma escola enorme, chamada Fergusson College. Logo pensou que ali poderia ter alguém que entendessem de número e que poderia ajudá-lo a descobrir o mistério do número 6174. Ao entrar na escola, se deparou com um senhor bem vestido e de óculos. Logo pensou que este homem poderia o ajudar. Chegou perto e perguntou quem era o senhor. Ele falou que era Subramanyan Chandrasekhar, ganhador do prêmio Nobel da física de 1983. Sem muito conhecimento, Kaprekar perguntou a Chandrasekhar o que seria prêmio Nobel. Ele tratou logo de explicar que se tratava do maior prêmio da ciência no mundo. Que todo ano eles premiam os maiores cientistas por suas contribuições para com a sociedade. Impressionado com tamanha homenagem que o senhor indiano ganhou, Kaprekar não pensou duas vezes, ele poderia ajudar a desvendar o mistério do tal número mágico.

Agora, apresentaremos algumas observações e comentários feitos pelos estudantes de Licenciatura em Matemática:

- Uma observação foi que o texto estava muito extenso e isso seria um ponto negativo à aplicação em sala de aula.
- Na narrativa, Kaprekar encontra em um único dia duas figuras importantes da Índia, Gandhi e Subramanyan Chandrasekhar, e os estudantes indagaram sobre a possibilidade disso acontecer a um menino na vida real.
- Alguns estudantes se manifestaram dizendo que o texto era divertido até a apresentação da Constante de Kaprekar e que depois ficou chato. Isso colabora com a nossa visão sobre Matemática Recreativa.

- Vimos que alguns estudantes testaram outros números para verificar a propriedade que foi descoberta por Kaprekar. E alguns fizeram questionamentos sobre a constante de Kaprekar, esses questionamentos serão apresentados na próxima seção.

Depois, de nossas reflexões feitas à luz da nossa pesquisa e das considerações dos estudantes, reelaboramos o nosso texto, e escolhemos um título, que ficou assim:

KAPREKAR E MÁGICA DO NÚMERO 6174

Numa pequena cidade no interior da Índia, morava o jovem menino chamado Kaprekar. Quando pequeno, durante o dia, se reunia com os amigos e brincava pelas ruas da cidade e pela floresta que tinha perto da sua casa. À noite, Kaprekar gostava de ficar com seu pai e observar o céu. O pai de Kaprekar era astrônomo e ele tinha um telescópio e assim, o jovem garoto passava a noite olhando as estrelas e os astros no céu, principalmente a Lua, seu astro favorito.

Kaprekar, ao olhar o céu pelo telescópio, fazia perguntas bem intrigantes para si mesmo. Qual a distância da terra para lua? Quanto tempo vive uma estrela? Será que a lua é maior que a terra?

Como a maioria das respostas sobre os astros era números, o jovem indiano passou a gostar mais de matemática. Kaprekar passou a prestar mais atenção e se dedicar mais nas aulas de matemática, na tentativa de encontrar e entender as respostas para seus questionamentos.

Fascinado pelos números e pela matemática, Kaprekar passou a conhecer jogos envolvendo a matemática, o cubo mágico, Torre de Hanoi, sudoku e mágicas matemáticas. Mas o que chamou a sua atenção foi o número mágico 6174.

Por exemplo, pegando o número 1993 e reorganizando em ordem decrescente (9931) e subtrair da ordem crescente (1399), achamos o número 8532. Depois fazemos o mesmo procedimento e achamos o número 6174. Repetimos o processo e achamos o mesmo número que havíamos achado anteriormente, 6174. Assim, se fizermos esse joguinho com números de quatro dígitos teremos sempre o número 6174, exceto se escolhermos o número com todos os dígitos iguais.

Graças a este número mágico, Kaprekar ficou conhecido em toda a escola e posteriormente em toda cidade. Seu pai chegou a brincar com Kaprekar falando que ele ia ser famoso igual a Mahatmam Gandhi ou até ganhar um prêmio Nobel. Sem saber quem era Gandhi, Kaprekar pergunta quem é? Seu pai responde que é um famoso indiano que luta pela paz do mundo e pelo povo indiano.

Feliz pela comparação, Kaprekar resolve estudar mais ainda para ser reconhecido como Gandhi. Seus estudos fizeram que Kaprekar se tornasse o professor de matemática mais famoso da cidade, suas aulas eram as mais divertidas e apaixonantes que já existiu. Tudo isso, porque quando criança gostava das mágicas e jogos matemáticos.

No segundo seminário, foi dedicado aos Números de Kaprekar. Como esses estudantes estavam cursando a disciplina de teoria dos números e já haviam estudado o conteúdo de congruências, apresentamos os resultados discutidos na seção 3.2 desta dissertação. Durante e após nossa apresentação vários questionamentos por parte dos estudantes foram sendo colocados. Juntamos a esses, alguns dos nossos próprios questionamentos acerca do tema e apresentaremos na próxima seção.

4.2 Questionamentos sobre o Número e a Constante de Kaprekar

Nesta seção, apresentamos alguns questionamentos feito pelos estudantes de Licenciatura (na apresentação do segundo seminário) e alguns feitos por nós mesmos. Fizemos pesquisas em artigos e em sites em busca das respostas a esses questionamentos. Para aqueles que encontramos respostas, nós a apresentamos a seguir ou então indicaremos os sites para consultas e aprofundamentos no tópico. Para algumas perguntas, não encontramos respostas em nossa pesquisa, isso imediatamente nos revela dois pontos, ainda há muito a ser pesquisado e descoberto pelos estudiosos dos Números e Constante de Kaprekar e muito a ser estudado por nós que gostamos de matemática.

Seguem os questionamentos:

- **Quantas interações no máximo precisamos fazer para chegar na Constante de Kaprekar?**

São no máximo 7 interações. Na seção 3.3, na figura 3.7, mostra uma tabela com a quantidade máxima de interações;

- **Todo Número de Kaprekar é ímpar?**

Não, 2728 é um número de Kaprekar par.

$$2728, \quad 2728^2 = 7.441.984, \quad 744 + 1.984 = 2728$$

- **Existem números primos que sejam de Kaprekar?**

Sim, o número 1.111.111.111.111.111 é um número de kaprekar primo que foi divulgado por R. Gerbicz em https://www.primepuzzles.net/puzzles/puzz_837.htm

- **Como saber qual o próximo Número de Kaprekar?**

O artigo *Some Properties of the Kaprekar Numbers and a Means of Generation* de Colin G Black (http://www.scienceasia.org/2001.27.n2/v27_133_136.pdf) descreve um método de implementação para gerar números inteiros de Kaprekar, usando o pacote de software de álgebra computacional: Mathcad.

- **O número 1 pode ser considerado Número de Kaprekar?**

Sim. No início da seção 3.2, relatamos que o número 1 é um Número de Kaprekar.

- **Qual a forma correta de desmembrar o quadrado de um número para depois fazer a adição (de acordo com a definição de Números de Kaprekar apresentada na seção 3.2)?**

Sem usar um recurso computacional, seria por inspeção.

- **Os Números de Kaprekar só funciona para a base 10?**

Sim. Pois a definição de Número de Kaprekar é na base 10. Porém, no artigo do Iannucci (2000), ele traz outras bases, como a binária, que possui compartimento semelhante com a dos Número de kaprekar.

- **Qual a utilidade dos estudos Kaprekar na matemática ou em outro campo da ciência?**

Apontamos os aspectos indicados Bartlová (2016) que discutimos na seção 2.1, que são o aspecto científico-popular, o aspecto do divertimento, o aspecto pedagógico e o aspecto histórico na qual os estudos de Kaprekar podem ser inseridos.

- **Como os Números de Kaprekar podem ser usados na matemática da Educação Básica?**

Uma resposta para isso vem diretamente de um dos objetivos dessa dissertação, que é a elaboração de um produto educacional. Então, para ver um exemplo de como os Números de Kaprekar podem ser usados na matemática da Educação Básica, veja o nosso produto educacional elaborado, explorando a Constante de Kaprekar.

- **Quantos números n-kaprekar existem entre 1 e 100?**

Existem 5 números n-kaprekar entre 1 e 100. São 1, 9, 45, 55 e 99. Como a quantidade de números entre 1 e 100 é finita e em quantidade relativamente pequena, podemos fazer as contas de acordo com o teorema 3.2.1. ou basta olhar para uma das tabela dos Números de Kaprekar que já se encontra elaborada e divulgada na internet por várias pessoas. Uma dessas tabelas se encontra em <https://oeis.org/A006886/b006886.txt> os 51.514 primeiros Números de Kaprekar.

- **Observe os valores nos conjuntos abaixo: $K(10)=1, 9, K(5)=1, 4, K(3)=1, 2$. Pode-se afirmar que $K(N)=1, (N-1)$?**

Não. Já que $K(100) = 1, 45, 55, 99$. Porém, observamos que 1 e $N-1$ pertencem a $K(N)$.

- **Para encontrar o conjunto $K(N)$ é necessário sempre ir atribuindo valores ou existe uma maneira mais rápida?**

Basta usar o teorema 3.2.1. para poder encontrar Números de Kaprekar sem ser por tentativa.

- **Dado um número natural k , caso elevar a 3, é possível obter um Número de Kaprekar?**

O artigo de Ianucci publicado no *Journal of Integer Sequences*, Vol. 8 (2005), (<https://cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL8/Iannucci/iannucci45.pdf>) apresenta as chamadas triplas de Kaprekar.

$$\begin{array}{lll} 8, & 8^3 = 512, & 5 + 1 + 2 = 8 \\ 45, & 45^3 = 91.125 & 9 + 11 + 25 = 45 \\ 297, & 297^3 = 26.198.073 & 26 + 198 + 073 = 297 \end{array}$$

- **Existe alguma nomenclatura para os elementos q e r da definição?**

Não encontramos nos artigos que pesquisamos.

- **Existe outra maneira de descobrir se um número pode ser escrito da forma de Kaprekar?**

Sim. Basta usar a escrita do teorema 3.2.1. para base 10.

- **O conjunto $K(N)$ é também um conjunto de Números de Kaprekar?**

Só se for N na base 10.

- **Porque os Números de Kaprekar tem que ser com k maior ou igual 1, ou seja, porque não é válido para os números negativos?**

O zero não pode ser por convenção adotada no início da seção 3.2. E não podem ser negativos, pois ao elevar ao quadrado, obterei números positivos e posteriormente não conseguirei chegar no número inicial que era negativo.

- **Qual a relação $K(N)$ e divisores unitários?**

Isso pode ser visto na demonstração do teorema 3.2.1.

- **Existe alguma forma de definição análoga ao Números de kaprekar para números racionais não inteiros?**

Não foi encontrado nenhum trabalho a respeito dos números racionais não inteiro com comportamento semelhante ao de Kaprekar.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente trabalho teve como objetivo a utilização da Matemática Recreativa e da História da Matemática no ambiente escolar. Inicialmente, fizemos um levantamento das definições de Matemática Recreativa e trouxemos a discussão sobre seu uso em sala de aula. Falamos de exemplos ao longo da história para mostrar que a Matemática Recreativa sempre esteve presente na construção da matemática que conhecemos hoje em dia. Para dar exemplos, falamos sobre duas grandes personalidades da Matemática Recreativa, Martin Gardner e Malba Tahan. Falamos sobre suas vidas e apresentamos algumas de suas obras para a Matemática Recreativa. Obras essas que podem fazer parte do dia a dia escolar.

Como forma de exemplificar a Matemática Recreativa em sala de aula, resolvemos falar sobre a matemática descoberta por Kaprekar. Matemático pouco conhecido aqui no Brasil. Para explorar Kaprekar, usamos como base o livro do Chaquiam e Mendes (2016), que nos mostra como abordar a história de um personagem matemático para uso em sala de aula.

A matemática de Kaprekar que aprofundamos foram os Números e a Constante de Kaprekar. Para os números, resolvemos enfatizar o artigo do Iannucci (2000), na qual traz uma forma genérica de encontrar os números de Kaprekar sem ser por tentativa e aborda a aritmética, uma das disciplinas do PROFMAT. Já em relação à Constante de Kaprekar, apresentamos as suas características e elaboramos um produto educacional para ser abordado em sala de aula com os alunos pelo professor de matemática.

Além destas explanações, fizemos sugestões de aprofundamento de alguns assuntos aqui abordados. Como por exemplo, a Matemática Recreativa ao longo da história com a Bartlová (2016) na seção 2.1.1 e o artigo do Oliveira (2013), na seção 3.3, na qual sugerimos para quem quer aprofundar na Constante de Kaprekar, assim como nos aprofundamentos nos Números de Kaprekar através do artigo do Iannucci (2000) na seção 3.2. Na seção 4.1 deixamos várias sugestões para se iniciar estudos futuros, alguns com referências e outros não.

Referências Bibliográficas

ARAÚJO, Adérito. **As pontes de Königsberg**. Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra. Disponível em: <https://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes/>. Acesso em 02 de fevereiro de 2020.

ASSIS, Márcia Maria Alves de. **MATEMÁTICAS ELEMENTARES NA ESCOLA NORMAL DE NATAL Legislação, Programas de Ensino, Material Didático (1908-1970)**. 2016. 224f. Tese (Doutorado em Educação). Centro de Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. 2016.

BARTLOVÁ, Tereza. **History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics**. 2016. 148f. Tese (Doutorado em matemática). Departamento de análise matemática. Universidade Charles em Praga. 2016.

BARVE, Vasant; BARVE, Minakshi. **Recreational Mathematics**. Departamento de Educação em Ciência e Matemática. 2012.

BEZERRA, Maria da Conceição Alves. SOBRE A MATEMÁTICA RECREATIVA algumas contribuições iniciais. **Revista História da Matemática para Professores**. Ano 4, n. 1. p. 29-36. Mar. 2018.

BRASIL. (a) **Parâmetros curriculares nacionais : Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998.

BRASIL. (b) **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 22 de fevereiro de 2017.

BROWN, Matthew. **O homem que viu o infinito**. 2016.

CARLONI, Paula Carolina. **O Estudo de Probabilidade no ensino médio**. 2019. 59f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). PROFMAT. Universidade Federal do Espírito Santo. 2019.

CHADHA, Gurinder. **O último vice rei**. 2017.

CHAQUIAM, Miguel; MENDES, Iran Abreu. **História nas Aulas de Matemática**. Fundamentos e Sugestões didáticas para professores. Belém (PA). SBHMat. 1º edição. 2016.

CORDEIRO, Tiago. **Como foi construído o Taj Mahal?**. Super Interessante. 2013. Disponível em: <https://super.abril.com.br/mundo-estranho/como-foi-construido-o-taj-mahal/>. Acesso em 20 de fevereiro de 2020.

FILHO, Mário Roberto. **Júlio César de Mello e Souza - o Malba Tahan: O Homem que Calculava, a vida e o legado**. 2013. 72f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). PROFMAT. Universidade Federal do Triângulo Mineiro. 2013.

FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Josiel Almeida; SANTOS, Lúcia S. B. dos. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. 2007. 41f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática). Centro Universitário Adventista de São Paulo Campus São Paulo. 2007.

GASPERI W. N. H. de; PACHECO, E. R. **A história da matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na Educação Básica**. PDE: Programa de Desenvolvimento Educacional da Secretaria da Educação do Estado do Paraná. 2007.

GOMES, Alexandra; MALHEIRO, Catarina. A Rotina de Kaprekar. **Jornal de Matemática Elementar**, nº 292. 2011.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro (RJ): SBM, 2016.

IANNUCCI, Douglas E. **The Kaprekar Numbers**. 2000. Department of Mathematics. University of the Virgin Islands;

JAPIASSU, Hilton. **Interdisciplinaridade e a patologia do saber**. Rio de Janeiro. Imago Editora LTDA. 1976.

LISTER, David. **Martin Gardner and Paperfolding**. 2005. Disponível em: https://britishorigami.info/academic/lister/martin_gardner.php Acesso em 25 de fevereiro de 2020.

MARTINS, Paula Mendes; PICADO, Jorge. Cinco tributos a Martin Gardner. **Sociedade Portuguesa de Matemática**. Periódico 71. p. 97-111. 2014.

NETO, Andre Pereira; SALLES, Pedro Paulo. **MALBA TAHAN: MUITO ALÉM DO PSEUDÔNIMO** . 2015.

O'CONNOR, JJ. ROBERTSON, EF. **Samuel Loyd**. 2003. Disponível em: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Loyd.html> . Acesso em: 21 de fevereiro de 2020.

O'CONNOR, JJ. ROBERTSON, EF. **Dattatreya Ramachandra Kaprekar**. 2007. Disponível em: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kaprekar.html> . Acesso em 25 de fevereiro de 2020.

O'CONNOR, JJ. ROBERTSON, EF. **Martin Gardner**. 2010. Disponível em: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gardner.html> . Acesso em 22 de fevereiro de 2020.

OLIVEIRA, Vanessa Castro de; OLIVEIRA, Cristiano Peres; VAZ, Francieli Aparecida. **A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM**. XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.

OLIVEIRA, Paulo Eduardo. **6174: um problema com números de quatro algarismos** 2013. CMUC, Departamento de Matemática. Universidade de Coimbra.

PALMA, Luciana dos Santos. **O cinema indiano: a maior indústria cinematográfica do mundo** 2008. 62f. Trabalho de Conclusão de Curso (Comunicação Social). Universidade Federal do Rio de Janeiro, Centro de Filosofia e Ciências Humanas, Escola de Comunicação. 2008.

PERCÍLIA, Eliene. **”Sudoku** ; Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/curiosidades/sudoku.htm>. Acesso em 02 de fevereiro de 2020.

RIBEIRO, Bruno da Silva. **Matemática Recreativa: Uma Experiência Baseada em Clubes** . 2018. 58f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). PROFMAT. Colégio Pedro II. 2018.

SAUTOY, Marcus Du. **Como a Índia revolucionou a matemática séculos antes do Ocidente**. BBC. 2019. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-47487130> . Acesso em 23 de fevereiro de 2020.

SINGMASTER, David. The Utility of Recreational Mathematics. **Proceedings of Recreational Mathematics Colloquium v - G4G (Europe)**. p. 3-46. 2000.

Site Amazon. Disponível em: <https://www.amazon.com.br>. Acesso em 02 de fevereiro de 2020.

Site Atitude Reflexiva. Disponível em: <https://atitudereflexiva.wordpress.com/>. Acesso em 02 de fevereiro de 2020.

Site Cubo Velocidade. Disponível em: <http://www.cubovelocidade.com.br/basico/>. Acesso em 02 de fevereiro de 2020.

Site Istock. Disponível em: <https://www.istockphoto.com/br/vetor/grey-mapa-do-mundo-com-a-indica%C3%A7%C3%A3o-da-%C3%ADndia-gm480492182-68487731>. Acesso em 06 de abril de 2020.

Site Matemática é fácil. Disponível em: <https://www.matematicaefacil.com.br/2015/11/papiros-matematica-egipcia-papiro-rhind-ahmes.html>. Acesso em 02 de fevereiro de 2020.

Site Oficial da Família e dos Admiradores de Malba Tahan. Apoio: Grupo Editorial Record. Disponível em: <https://www.malbatahan.com.br/biografias/sumario/>. Acesso em 15 de janeiro de 2020.

Site Oficial da Fergusson College. Disponível em: <https://www.fergusson.edu/article/history.html> . Acesso em 25 de fevereiro de 2020.

Site Significados. Disponível em: <https://www.significados.com.br/ganesha/>. Acesso em 20 de fevereiro de 2020.

Site Skeptical Inquirer. Disponível em: <https://skepticalinquirer.org/>

[exclusive/in-celebration-of-martin-gardner/](#). Acesso em 02 de fevereiro de 2020.

Site Wikipedia. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org>. Acesso em 20 de fevereiro de 2020.

SOUSA, Rainer Gonçalves. **As castas indianas** . Brasil Escola. Disponível em: <https://brasilecola.uol.com.br/sociologia/as-castas-indianas.htm>. Acesso em 23 de fevereiro de 2020.

VIANA, Marcelo. **Índia tem 3.000 anos de matemática**. Folha de São Paulo. 2019. Disponível em: <https://www1.folha.uol.com.br/colunas/marceloviana/2019/10/india-tem-3000-anos-de-matematica.shtml> . Acesso em 23 de fevereiro de 2020.

XXIX Olimpíada Brasileira de Matemática. Segunda Fase. Nível 2. Disponível em: www.obm.org.br. Acesso em 20 de fevereiro de 2020.

APÊNDICE A

Tarefas que compõem a **Revistinha sobre o número mágico**, parte do produto educacional, voltado para aplicação por parte dos professores de matemática e seus alunos do Ensino Fundamental.



KAPREKAR E MÁGICA DO NÚMERO 6174

Autor: Arthur Henrique da Silva

Numa pequena cidade no interior da Índia, morava o jovem menino chamado Kaprekar. Quando pequeno, durante o dia, se reunia com os amigos e brincava pelas ruas da cidade e pela floresta que tinha perto da sua casa. À noite, Kaprekar gostava de ficar com seu pai e observar o céu. O pai de Kaprekar era astrônomo e ele tinha um telescópio e assim, o jovem garoto passava a noite olhando as estrelas e os astros no céu, principalmente a Lua, seu astro favorito.

Kaprekar, ao olhar o céu pelo telescópio, fazia perguntas bem intrigantes para si mesmo. Qual a distância da terra para lua? Quanto tempo vive uma estrela? Será que a lua é maior que a terra?

Como a maioria das respostas sobre os astros era números, o jovem indiano passou a gostar mais de matemática. Kaprekar passou a prestar mais atenção e se dedicar mais nas aulas de matemática, na tentativa de encontrar e entender as respostas para seus questionamentos.

Fascinado pelos números e pela matemática, Kaprekar passou a conhecer jogos envolvendo a matemática, o cubo mágico, Torre de Hanoi, sudoku e mágicas matemáticas. Mas o que chamou a sua atenção foi o número mágico 6174.



Por exemplo, pegando o número 1993 e reorganizando em ordem decrescente (9931) e subtrair da ordem crescente (1399), achamos o número 8532. Depois fazemos o mesmo procedimento e achamos o número 6174. Repetimos o processo e achamos o mesmo número que havíamos achado anteriormente, 6174. Assim, se fizermos esse joguinho com números de quatro dígitos teremos sempre o número 6174, exceto se escolhermos o número com todos os dígitos iguais.

Graças a este número mágico, Kaprekar ficou conhecido em toda a escola e posteriormente em toda cidade. Seu pai chegou a brincar com Kaprekar falando que ele ia ser famoso igual a Mahatmam Gandhi ou até ganhar um prêmio Nobel. Sem saber quem era Gandhi, Kaprekar pergunta quem é? Seu pai responde que é um famoso indiano que luta pela paz do mundo e pelo povo indiano.

Feliz pela comparação, Kaprekar resolve estudar mais ainda para ser reconhecido como Gandhi. Seus estudos fizeram que Kaprekar se tornasse o professor de matemática mais famoso da cidade, suas aulas eram as mais divertidas e apaixonantes que já existiu. Tudo isso, porque quando criança gostava das mágicas e jogos matemáticos.



ATIVIDADES

- Em que continente fica a Índia? O que você sabe sobre este país?
Pinte de verde o seu país e de vermelho a Índia.



- Quais as respostas para as três perguntas que Kaprekar fez ao olhar pelo telescópio?



- Escolha um número qualquer de quatro dígitos, desde que não tenha todos os dígitos iguais, e faça a mágica 6174 no esquema feito a seguir. OBS: Não pode usar os exemplos da história.

Coloque aqui o número escolhido:

				-				=			
(Dígitos em ordem decrescente) (Dígitos em ordem crescente) (Número encontrado)											

				-				=			
(Dígitos em ordem decrescente) (Dígitos em ordem crescente) (Número encontrado)											

				-				=			
(Dígitos em ordem decrescente) (Dígitos em ordem crescente) (Número encontrado)											

				-				=			
(Dígitos em ordem decrescente) (Dígitos em ordem crescente) (Número encontrado)											

Caso não tenha chegado ao número 6174, continue os cálculos no espaço da página seguir.

Porque o número mágico não pode ter todos os dígitos iguais?



Esta é fácil! Na hora que fizer a subtração, o resultado dará zero. Por isso não pode ser um número de 4 dígitos iguais.



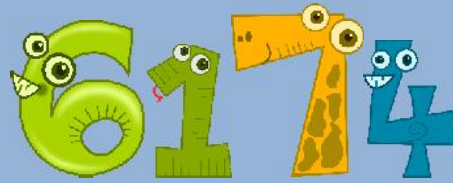


Você já tinha ouvido falar em Mahatmam Gandhi? Faça uma pesquisa e escreva um pouco mais sobre ele.

O que é o prêmio Nobel? Conhece algum dos ganhadores?

Conte para os seus familiares as suas descobertas sobre a Índia, Kaprekar e sua constante.





Arthur Henrique da Silva
Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes

Uso da Constante de Kaprekar no Ensino Fundamental II

Natal-RN

2020



Arthur Henrique da Silva
Gabriela Lucheze de Oliveira Lopes

*Uso da constante de Kaprekar
no Ensino Fundamental II*

Natal – RN
2020



SUMÁRIO

Apresentação.....	4
Introdução.....	5
Orientação ao professor.....	6
Proposta de atividades.....	8
Objetivos	
Materiais	
Kaprekar e a Mágica do Número 6174	9
Sugestões de materiais.....	16
Considerações finais.....	17
Referências.....	18

Apresentação

Caro(a) professor(a),

esse livreto é fruto de uma dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, que teve como tema central o uso da Matemática Recreativa e a História da Matemática nas aulas de matemática no Ensino Fundamental II. O assunto matemático escolhido como condutor foi a constante de Kaprekar.

As atividades contidas nesse material, que foram elaboradas para o uso em sala de aula, incluem um texto que introduz o matemático indiano Kaprekar e tarefas para serem realizadas com os alunos que envolvem perspectivas da Matemática Recreativa e da história da Índia.

Ao término da atividade para sala de aula, trazemos uma lista contendo sugestões de filmes que retratam a Índia daquela época e de links que podem subsidiar as discussões em sala e ajudar na elaboração de outras atividades.

Arthur e Gabriela

Introdução

Ao longo dos anos, a matemática sempre foi, na maioria das vezes, a disciplina em que os alunos apresentavam maior dificuldade. A pesquisadora Sadovsky (2007, p.15 apud FRANÇA; SANTOS; SANTOS, 2007, p.13) relata que o baixo desempenho na matemática não é somente no Brasil, é um problema de ordem mundial. E segundo França, Santos e Santos (2007 p.31) “O que se observa na maioria das escolas de Ensino Fundamental e Ensino Médio é o alto índice de reprovação e de alunos com sérias dificuldades para compreender a matemática, muitas vezes, demonstram desinteresse pela disciplina.” Logo, a matemática é vista, por maior parte dos estudantes, como uma disciplina em que o aprendizado apresenta uma série de dificuldades. Então, para contrapor esta dificuldade de ensino, a Matemática Recreativa pode ter papel fundamental.

Uma das grandes discussões sobre a Matemática Recreativa é sobre o seu uso em sala de aula. Algumas pessoas tem uma certa desconfiança em relação a essa utilização, porém, acreditamos que a Matemática Recreativa pode ter um papel pedagógico muito importante no processo de ensino e aprendizagem na Educação Básica. Utilizar a Matemática Recreativa para prender a atenção do aluno para o que será ensinado pode ser uma alternativa, ou então, introduzir um assunto ou até mesmo explicar um teorema de forma mais divertida e alegre pode fazer o aluno entenda melhor e até mudar um pouco sua visão do que seja a matemática. No entanto, a utilizaremos aqui na intensão de despertar a curiosidade dos alunos para uma propriedade interessante sobre alguns números de quatro algarismos. E acreditamos que com a descoberta dessa propriedade eles poderão ser instigados a buscar novas indagações, contribuindo assim para o crescimento de um espírito investigativo. Ribeiro compartilha da mesma ideia quando diz que

A procura da solução de um problema nem sempre exige um grande conhecimento de matemática. É nesse momento que a recreação atrai a curiosidade dos que não se interessam pela matéria e os convida à prática do raciocínio lógico-dedutivo e conseqüentemente ao estudo da disciplina. (RIBEIRO, 2018, p.11)

A Matemática Recreativa teve papel importante durante a história e na construção de grandes teorias matemáticas. E cada vez mais, hoje em dia, é preciso que ela se faça presente nas salas de aula para que a visão de uma matemática dura, sistemática e as vezes que não serve para o dia a dia das pessoas seja aos poucos desconstruída. Bartlová (2016) deixa isso bem claro quando diz que “a matemática recreativa sempre desempenhou um papel muito importante na história da matemática e foi responsável pela origem de teorias e conceitos matemáticos importantes que não existiriam sem ela.”

Com a educação cada vez mais dinamizada, utilizando como, por exemplo, jogos, dinâmicas e tecnologias, a busca por alternativas de ensino para a sala de aula de modo que o aluno seja peça atuante na busca pelo conhecimento é bastante importante. A utilização da história da matemática como recurso pedagógico no processo de ensino e aprendizagem dos alunos, principalmente da educação básica, é uma excelente alternativa para que o professor possa introduzir os conteúdos matemáticos em sala de aula. Oliveira, Oliveira e Vaz (2014) pontuam que “O uso dos fatos históricos na sala de aula proporciona um melhor entendimento dos alunos no que diz respeito à dimensão histórica dos assuntos envolvidos, despertando assim o interesse dos alunos, motivando-os ainda mais a buscar o conhecimento.” Desta forma, o uso da história da matemática como recurso didático pode ser uma boa alternativa para prender a atenção do aluno e fugir um pouco daquela aula mais tradicional, com fórmulas e algoritmos no quadro. Desta forma, o ensino com uso da História da Matemática não é só benéfico à aprendizagem da matemática, ele propõe uma interdisciplinaridade e aguça o poder de investigação e senso crítico do aluno. Gasperi e Pacheco (2007) alarga essa discussão afirmando que “Estudar a História da Matemática permite que o professor tenha uma visão mais ampla e contextualizada de sua disciplina interligando a matemática com outras disciplinas, respeitando suas especialidades”, o que nos diz que o professor também é será beneficiado quando estuda a História da Matemática.



Orientação ao professor

É importante que você, professor, amplie seus conhecimentos sobre a história da Índia e seus costumes de modo a poder orientar uma discussão em sala de aula. Os livretos para os alunos contendo o texto e as tarefas devem ser entregues aos alunos da sala, de forma individual, duplas ou trios, vai depender da quantidade de livretos que estará à disposição. Com o material em mãos, os alunos devem ser orientados a fazer a leitura. Após a leitura de todos, abre-se um tempo para discutir o que eles acharam do texto e explicar algumas dúvidas que possam ter aparecido durante a leitura. Após a leitura, os alunos devem começar a resolver os exercícios. Como algumas atividades exigem pesquisa, o ideal seria a atividade ser realizada em um laboratório com computadores. Caso a escola não disponha de laboratórios com computadores, utilizar alguma sala com projetor multimídia ou um projetor multimídia móvel e realizar as pesquisas em sala de aula. Após dar um tempo para resolver as questões, abre-se um espaço para discutir os resultados encontrados e uma avaliação da atividade desenvolvida.

Para auxiliar os alunos e os professores em relação à pesquisa, na seção de sugestões de materiais, possui links falando um pouco sobre o que está sendo abordado neste livreto. Caso o professor queira se ambientar e ambientar os alunos, passar alguns dos filmes sugeridos nas sugestões seria bastante proveitoso na hora da atividade.



Proposta de atividades

As atividades dedicadas aos estudantes que, compõem a Revistinha sobre o número mágico, contêm um texto (narrativa) e tarefas que emergiram a partir da nossa visão sobre o uso da História da Matemática como terreno fértil para interdisciplinaridade e o desenvolvimento de projetos de investigação que mostre uma conexão entre a vida, obra e o fazer matemático de uma personalidade que viveu em época anterior a nossa.

Objetivos

- Utilização da História da Matemática com a Matemática Recreativa;
- Promover a interdisciplinaridade;
- Aguçar o raciocínio lógico e o poder de investigação dos alunos;

Materiais

- **Revistinha sobre o número mágico** impressa;
- Quadro Branco e pincel para quadro branco;
- Projetor multimídia;
- Computador;
- Lápis grafite e de cor, de preferência verde e vermelho.



KAPREKAR E MÁGICA DO NÚMERO 6174

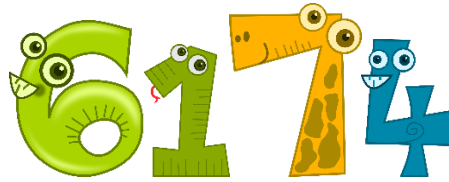
Autor: Arthur Henrique da Silva

Numa pequena cidade no interior da Índia, morava o jovem menino chamado Kaprekar. Quando pequeno, durante o dia, se reunia com os amigos e brincava pelas ruas da cidade e pela floresta que tinha perto da sua casa. À noite, Kaprekar gostava de ficar com seu pai e observar o céu. O pai de Kaprekar era astrônomo e ele tinha um telescópio e assim, o jovem garoto passava a noite olhando as estrelas e os astros no céu, principalmente a Lua, seu astro favorito.

Kaprekar, ao olhar o céu pelo telescópio, fazia perguntas bem intrigantes para si mesmo. Qual a distância da terra para lua? Quanto tempo vive uma estrela? Será que a lua é maior que a terra?

Como a maioria das respostas sobre os astros era números, o jovem indiano passou a gostar mais de matemática. Kaprekar passou a prestar mais atenção e se dedicar mais nas aulas de matemática, na tentativa de encontrar e entender as respostas para seus questionamentos.

Fascinado pelos números e pela matemática, Kaprekar passou a conhecer jogos envolvendo a matemática, o cubo mágico, Torre de Hanoi, sudoku e mágicas matemáticas. Mas o que chamou a sua atenção foi o número mágico 6174.



Por exemplo, pegando o número 1993 e reorganizando em ordem decrescente (9931) e subtrair da ordem crescente (1399), achamos o número 8532. Depois fazemos o mesmo procedimento e achamos o número 6174. Repetimos o processo e achamos o mesmo número que havíamos achado anteriormente, 6174. Assim, se fizermos esse joguinho com números de quatro dígitos teremos sempre o número 6174, exceto se escolhermos o número com todos os dígitos iguais.

Graças a este número mágico, Kaprekar ficou conhecido em toda a escola e posteriormente em toda cidade. Seu pai chegou a brincar com Kaprekar falando que ele ia ser famoso igual a Mahatmam Gandhi ou até ganhar um prêmio Nobel. Sem saber quem era Gandhi, Kaprekar pergunta quem é? Seu pai responde que é um famoso indiano que luta pela paz do mundo e pelo povo indiano.

Feliz pela comparação, Kaprekar resolve estudar mais ainda para ser reconhecido como Gandhi. Seus estudos fizeram que Kaprekar se tornasse o professor de matemática mais famoso da cidade, suas aulas eram as mais divertidas e apaixonantes que já existiu. Tudo isso, porque quando criança gostava das mágicas e jogos matemáticos.



ATIVIDADES

- Em que continente fica a Índia? O que você sabe sobre este país?
Pinte de verde o seu país e de vermelho a Índia.



- Quais as respostas para as três perguntas que Kaprekar fez ao olhar pelo telescópio?



- Escolha um número qualquer de quatro dígitos, desde que não tenha todos os dígitos iguais, e faça a mágica 6174 no esquema feito a seguir. OBS: Não pode usar os exemplos da história.

Coloque aqui o número escolhido:

--	--	--	--

	-		=	
(Dígitos em ordem decrescente)		(Dígitos em ordem crescente)		(Número encontrado)

	-		=	
(Dígitos em ordem decrescente)		(Dígitos em ordem crescente)		(Número encontrado)

	-		=	
(Dígitos em ordem decrescente)		(Dígitos em ordem crescente)		(Número encontrado)

	-		=	
(Dígitos em ordem decrescente)		(Dígitos em ordem crescente)		(Número encontrado)


Caso não tenha chegado ao número 6174, continue os cálculos no espaço da página seguir.

Porque o número mágico não pode ter todos os dígitos iguais?



Esta é fácil! Na hora que fizer a subtração, o resultado dará zero. Por isso não pode ser um número de 4 dígitos iguais.



	<p>Você já tinha ouvido falar em Mahatmam Gandhi? Faça uma pesquisa e escreva um pouco mais sobre ele.</p> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/> <hr/>
---	--

O que é o prêmio Nobel? Conhece algum dos ganhadores?

Conte para os seus familiares as suas descobertas sobre a Índia, Kaprekar e sua constante.





Sugestões de materiais

Filmes:

Gandhi, dirigido por Richard Attenborough de 1983:

O filme conta a vida de Gandhi. Ótimo filme para entender um pouco sobre esta personalidade mundial e entender um pouco sobre a Índia.

O homem que viu o infinito, dirigido por Matthew Brown de 2016:

O filme conta a vida do matemático indiano Rmanajuam. Desde suas descobertas matemáticas na Índia até sua ida á Inglaterra. Ótimo filme para fazer o paralelo à vida do matemático indiano Kaprekar.

O último vice-rei, dirigido por Gurinder Chadha de 2017:

O filme se passa no meio do século XX e conta o processo de independência da Índia e os conflitos religiosos. Ótimo filme para compreender um pouco da história da Índia.

Sites:

Biografia de Gandhi: https://www.ebiografia.com/mahatma_ghandi/

Biografia de Kaprekar: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kaprekar.html>

Curiosidade do prêmio Nobel: <https://brasilecola.uol.com.br/curiosidades/premio-nobel.htm>

História da Índia: <https://brasilecola.uol.com.br/historia/india-antiga.htm>

Pontos turísticos da Índia: <http://tudoindia.com.br/pontos-turisticos-da-india/>

Para a produção deste livreto utilizamos o site de figuras grátis: <https://pixabay.com/pt/>



Considerações finais aos professores de matemática

Consideramos que este livreto pode ser um meio pelo qual você, professor de matemática, pode levar conteúdos matemáticos para a sala de aula abordando a Matemática Recreativa associada a História da Matemática. Além disso, destacamos que consultando a sugestão de materiais que deixamos neste texto, você pode ampliar seus conhecimentos sobre Matemática Recreativa, História da Matemática e, mais particularmente, sobre a história da Índia e o matemático indiano Kaprekar.

Enfatizamos que nossa escolha por abordar a história da Matemática se baseia, principalmente, na vertente que com o seu uso proporcionamos um terreno fértil para promover a interdisciplinaridade e aguçar o poder de investigação dos estudantes. A Matemática Recreativa pode desempenhar um papel importante na sala de aula, despertando o interesse dos alunos em aprender matemática, além de servir para que a visão de que a matemática é dura, sistemática e as vezes que não serve para o dia a dia das pessoas seja aos poucos desconstruída.

Desejamos que você, professor, faça mais investigações e que se inspire neste livreto para elaborar outras tarefas e desafios para os seus alunos.

Referências

- BARTLOVÁ, Tereza. **History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics**. 2016. 148f. Tese (Doutorado em matemática). Departamento de análise matemática. Universidade Charles em Praga. 2016.
- FRANÇA, Kleber Vieira; SANTOS, Josiel Almeida; SANTOS, Lúcia S. B. dos. **Dificuldades na Aprendizagem de Matemática**. 2007. 41f. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática). Centro Universitário Adventista de São Paulo Campus São Paulo. 2007.
- GASPERI W. N. H. de; PACHECO, E. R. **A história da matemática como instrumento para a interdisciplinaridade na Educação Básica**. PDE: Programa de Desenvolvimento Educacional da Secretaria da Educação do Estado do Paraná. 2007.
- O'CONNOR, JJ. ROBERTSON, EF. **Dattatreya Ramachandra Kaprekar**. 2007. Disponível em: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Kaprekar.html>. Acesso em 05 de março de 2020.
- OLIVEIRA, Vanessa Castro de; OLIVEIRA, Cristiano Peres; VAZ, Francieli Aparecida. **A HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E O PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM**. XX EREMAT - Encontro Regional de Estudantes de Matemática da Região Sul Fundação Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), Bagé/RS, Brasil. 13-16 nov. 2014.
- RIBEIRO, Bruno da Silva. **Matemática Recreativa: Uma Experiência Baseada em Clubes**. 2018. 58f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática). PROFMAT. Colégio Pedro II. 2018.

Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Departamento de Matemática
PROFMAT – Mestrado Profissional em Rede Nacional

