Pacioli

Biografia (Itália, 1445-1517).
Matemático da Renascença, contemporâneo de Leonardo da Vinci. A sua obra mais importante foi o *Summa de Arithmetica*, embora tenha sido também o autor do primeiro manuscrito inteiramente dedicado à matemática recreativa.

PACIOLI

10 livros, 10 matemáticos, 10 puzzles para aprender e divertir-se

FIBONACCI + MISSING SQUARE (12/07/07)
PITÁGORAS + PENTALFA (19/07/07)
JOHN CONWAY + OURI (26/07/07)
LEIBNIZ + GO 9x9 (02/08/07)
MANDELBROT + TORRES DE HANÓI (09/08/07)
ARQUIMEDES + STOMACHION (16/08/07)
PACIOLI + ANÉIS CHINESES (23/08/07)
GALOIS + PUZZLE 15 (30/08/07)
AL-KWARIZMI + ALQUERQUE (06/09/07)
EULER + HEXÁGONO MÁGICO (13/09/07)

FICHA EDITORIAL
TÍTULO: Matemática Recriativa + *Puzzle* Anéis Chineses
AUTOR: Carlos Pereira dos Santos, João Pedro Neto, Jorge Nuno Silva
REVISÃO: Edimpresa
IMPRESSÃO E ACABAMENTO: Norprint **DATA DE IMPRESSÃO:** JUNHO 2007
DEPÓSITO LEGAL: 261140/07 **ISBN:** 978–989612270–6

JOGAR COM A MATEMÁTICA DOS GÉNIOS

10 MATEMÁTICOS, 10 QUEBRA-CABEÇAS, 10 LIVROS DE BOLSO. DE TALES A CONWAY, CADA LIVRO CONTÉM INFORMAÇÃO SOBRE A VIDA E OBRA DE UM DOS MAIORES MATEMÁTICOS DA HUMANIDADE, BEM COMO A DESCRIÇÃO E ANÁLISE DE UM 'PUZZLE', QUE É REPRODUZIDO EM MADEIRA E FAZ PARTE DESTA COLECÇÃO.

Veremos que Arquimedes inventou um *puzzle* diabólico há mais de dois mil anos (*Stomachion*) ou que o Pentagrama, tão respeitado pelos pitagóricos, também era um jogo de tabuleiro. E ficaremos a saber que Conway desenvolveu uma teoria de jogos, que em África se pratica um complexo jogo aritmético há séculos e que o grande filósofo e matemático Leibniz promovia os jogos de tabuleiro asiáticos. Ou ainda que a teoria dos fractais de Mandelbrot está associada também a 'puzzles', como as Torres de Hanói, que o popular jogo dos 15 é um exercício de Teoria de Grupos e que Euler, há 300 anos, já estudava o percursor do *Sudoku*. E para além de falarmos sobre alguns dos jogos que os árabes introduziram na Europa há mais de mil anos, neste primeiro livro aprenderemos também que a célebre sucessão de Fibonacci, que nasceu na resolução de um problema sobre criação de coelhos, é útil na concepção de um quebra-cabeças geométrico.
Divirta-se e aprenda matemática com os jogos que desvendam o raciocínio de alguns dos maiores génios da História.

LUCA PACIOLI

Retrato de Luca Pacioli,
por Jacopo de Barbari (1495).

Luca Pacioli (c.1445 - 1517) nasceu em Sansepolcro, em Itália, a mesma terra natal de Piero della Francesca (1410-1492) de quem pode ter sido aluno.

Ainda jovem, foi trabalhar como tutor dos três filhos do comerciante Rompiansi, em Veneza, ao mesmo tempo que estudava Matemática. Foi a estes três jovens que dedicou a sua primeira obra de Aritmética, em 1470. Neste ano, deslocou-se a Roma, onde contactou com Leone Battista Alberti (1404-1472), o autor do primeiro livro sobre perspectiva, *Della pittura*, tendo-se tornado o maior especialista no assunto.

A nova perspectiva, aqui ilustrada
por Dürer (1525)

Pouco depois, tornou-se monge franciscano, o que lhe conferiu a designação habitual de Fra Luca . Após os respectivos estudos teológicos, dedicou-se a viajar ensinando Matemática, tendo ministrado, nomeadamente em Perugia, Nápoles, Veneza e Roma.

Regressou a Sansepolcro em 1494, ano em que publicou a sua obra mais importante, a *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, obra que dedicou a Guidobaldo da Montafeltro, duque de Urbino, que, acredita-se, pode ter sido seu pupilo. Aliás, Luca posou para a pintura de Piero della Francesca do altar da Igreja de S. Bernardino, em Urbino, para a figura do Mártir S. Pedro.

Altar da Igreja de S. Bernardino

Altar da Igreja de S. Bernardino (pormenor)

Em 1497, Luca Pacioli foi convidado para a corte de Ludovico Sforza, onde conheceu Leonardo da Vinci (1452 - 1519), com quem viria a colaborar intimamente, nomeadamente quando, fugindo aos invasores franceses, se mudaram para Florença, em 1499.

A colaboração mais bem registada entre estes dois eruditos deu-se na obra de Luca Pacioli, *Divina proportione*, publicada em 1509, dedicada principalmente à razão de ouro, a que nos referimos já, quando falámos da sucessão de Fibonacci.

Auto-retrato de Leonardo da Vinci

Trata-se da razão de comprimentos que se obtém quando se divide um segmento em dois, de tal forma que o comprimento inicial está para o maior como o maior está para o menor. Eis um exemplo de secção de ouro:

Na *Divina proportione*, Luca Pacioli estuda a secção áurea e as suas relações com a Arquitectura e os sólidos regulares, assuntos que também interessavam muito a Leonardo da Vinci. As ilustrações desta obra foram

efectuadas por Leonardo, talvez o único pintor da época capaz de produzir esse tipo de imagens dos esqueletos dos poliedros regulares.

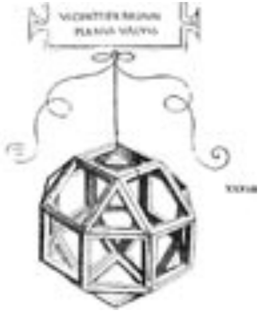


Ilustração de Leonardo da Vinci
para a *Divina proportione*

Na parte da Divina proportione dedicada à Arquitectura, Pacioli baseia-se em Vitrúvio (século I a.C.), o grande arquitecto romano, cuja obra foi recentemente traduzida entre nós (*Tratado de Arquitectura*, IST Press 2006). O *Tratado*, que só foi redescoberto no século XV, após centenas de anos de esquecimento, impressionou muito os homens da Renascença, como Leonardo.

O *Homem de Vitrúvio*,
de Leonardo da Vinci

Na mesma obra, Pacioli ilustra estudos sobre como desenhar elementos tipográficos, dando um sabor matemático à criação de caracteres.

Uma letra de *Divina proportione*

Luca Pacioli assistiu Leonardo quando este pinta a *Última Ceia*, talvez prestando aconselhamento sobre perspectiva.

A *Última Ceia*, de Leonardo da Vinci

Em 1500, Pacioli foi contratado pela Universidade de Pisa para ensinar os *Elementos de Euclides*, obra que se propôs traduzir para latim e para italiano.

Nos anos seguintes, escreveu duas obras pouco usuais em matemáticos. Um livro de xadrez, nunca publicado, cujo manuscrito se pensava perdido até há poucos meses, o *De Ludo Scacchorum*.

De Ludo Scacchorum, de Luca Pacioli

Este manuscrito está neste momento a ser estudado em Itália.

A outra obra, que também só existe em manuscrito, é o *De Viribus Quantitatis*, um livro de Matemática Recreativa, de que falaremos com algum pormenor adiante.

METER IMAGEM DO *VIRIBUS*

A imagem que colocámos no início, a pintura atribuída a Barbari, mostra-nos Pacioli a ensinar uma proposição dos *Elementos de Euclides*, ocorrendo na imagem a primeira edição impressa, de 1482. Há vários objectos relativos à prática matemática sobre a mesa. Duas ocorrências são notáveis nesta pintura. A primeira, é o jovem à esquerda de Fra Luca. Há quem acredite tratar-se de Guidobaldo, mas alguns historiadores defendem que se trata de Albrecht Dürer (1471-1528), cujo contacto com Pacioli está documentado.

Auto-retrato de Albrecht Dürer

A segunda é o sólido transparente suspenso e meio cheio de água. Trata-se de um rombicuboctaedro que somente Leonardo da Vinci teria, à época, capacidade técnica para pintar.

Este sólido de vidro, que reflecte raios luminosos, tem uma correspondência com o ovo suspenso da pintura de Piero della Francesca, onde Fra Luca aparece. Ambos pretendem representar os quatro elementos. De acordo com a filosofia platónica exposta no Timeu, os elementos fogo, terra, ar e água correspondem, respectivamente, aos poliedros tetraedro, cubo, octaedro e icosaedro. Note-se que um dodecaedro aparece sobre o livro.

Octaedro-ar, Tetraedro-fogo, Dodecaedro-zodíaco, Cubo-terra e icosaedro-água

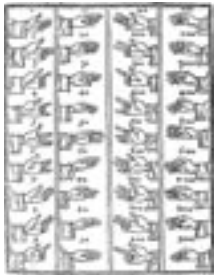
As faces do poliedro suspenso são triangulares e quadradas, estabelecendo uma referência aos quatro poliedros associados aos quatro elementos. Sendo o sólido de vidro (terra), contendo água e ar, os raios que reflecte completam outro conjunto completo de referências aos quatro elementos da concepção platónica do mundo.

Luca Pacioli era o matemático mais famoso do seu tempo, tendo-se destacado no ensino das novas teorias da perspectiva, e sendo autor da obra mais importante desde o *Liber Abbaci*, de Fibonacci, a *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita*, comummente referida por *Summa*. Se bem que não se tratasse de um trabalho original, a *Summa*, escrita em italiano, continha, nas suas 600 densas páginas, material de grande utilidade e procura. Muitos conceitos matemáticos apareceram aqui impressos pela primeira vez.

Não se destinando a nenhum grupo profissional particular, consistia numa enciclopédia, teórica e prática, em matérias como Aritmética, Contabilidade, Álgebra, conversão de moeda, etc.

Pela primeira vez, as pessoas não versadas em latim, tinham acesso a um grande conjunto de conhecimentos matemáticos.

Esta colecção de saberes incluía alguns que hoje nos podem parecer estranhos, como a notação gestual para os números:



NOTAÇÃO GESTUAL, DA *SUMMA*

Também contém tópicos de Matemática Recreativa, como o problema do jogo interrompido, que está na base do desenvolvimento da Teoria das Probabilidades. A situação é a seguinte. Dois jogadores lançam uma moeda ao ar repetidamente. O jogo acaba quando um jogador tiver acertado três vezes no resultado do lançamento (cara ou coroa). O vencedor recebe uma quantia pré-estabelecida. Suponhamos que o resultado está 2-1 e o jogo tem de terminar abruptamente. Qual é a divisão justa da quantia entre os dois jogadores?

A SUMMA circulou muito pela Europa e influenciou significativamente os algebristas dos séculos seguintes.

Summa de
Arithmetica geo

PRIMEIRA PÁGINA
DA *SUMMA DE ARITHMETICA, GEOMETRIA, PROPORTIONI ET PROPORTIONALITA*

DE VIRIBUS QUANTITATIS

Este manuscrito, produzido por volta de 1500, mas que nunca foi publicado, é considerado a primeira obra dedicada inteiramente à Matemática Recreativa. O título pode traduzir-se por *O Poder dos Números* e contém maioritariamente recreações numéricas.

Está dividido em três partes:

1 - recreações aritméticas; 2 - recreações geométricas e 3 – provérbios, adivinhas e truques de magia.

Contém também as primeiras referências a truques de cartas.

Muitos dos problemas e *puzzles* que se tornaram clássicos ocorrem aqui pela primeira vez. Contudo, Luca Pacioli refere que a obra é uma colecção, levando a crer que se baseou parcialmente em criações alheias.

Vamos mostrar alguns dos itens que compõem o *De Viribus*.

Com quatro pesos, conseguir pesar qualquer quantidade inteira até 40 kg.

Este problema é relativo a uma balança de dois pratos, onde se considera que os pesos podem ocupar qualquer

um pratos. Se os pesos só se pudessem colocar num dos pratos (estando o outro ocupado com o objecto a pesar) precisaríamos de mais pesos para resolver a questão.

Comecemos por analisar esta segunda versão do problema, partindo dos objectos mais leves. Para pesar um com 1kg de peso necessitamos de um peso de 1 kg. Para pesar um de 2 temos de recorrer a mais pesos, para não recorrer a dois pesos iguais, juntamos um peso de 2 kg. Agora, com estes dois pesos podemos pesar um objecto de 3 kg, colocando os nossos dois pesos num prato da balança. Contudo, não conseguimos pesar 4 kg... Os nossos pesos são agora, omitindo as unidades: 1, 2, 4. É fácil ver que somente conseguimos pesar até 7, necessitando de um novo peso para 8.

Há aqui um padrão, o das potências de 2: 1, 2, $2^2=4$, $2^3=8$...

Para pesar todas as quantidades inteiras até 40 precisávamos dos pesos 1, 2, 4, 8, 16, 32.

Mas no problema de Pacioli é permitido introduzir pesos nos dois pratos da balança. Assim, com os pesos 1 e 3 podemos pesar um objecto que pese 2 kg, equilibrando o peso 3 com o objecto e o peso 1.

UM PESO DE 3 EQUILIBRA UM OBJECTO E UM PESO DE 1

Assim, usando este método, o menor peso de que necessitamos para ir dando conta do recado é o de 9 kg. Ilustremos com a situação em que um objecto pesa 7 kg. Neste caso, equilibramos a balança colocando junto com o objecto um peso de 3, estando no outro prato os pesos 1 e 9:

Continuando este processo, concluímos que só precisamos de novo peso de 27 kg e que este conjunto (1, 3, 9, 27) responde ao problema. De novo, temos aqui um padrão de potências, já que

$$3^0=1\ ,\ 3^1=3\ ,\ 3^2=9\ ,\ 3^3=27$$

Convidamos o leitor a produzir as restantes pesagens, de 1 até 40.

Vejamos outro problema do livro de Luca Pacioli.

Um jogo entre dois adversários consiste em acrescentar, à vez, um número de feijões, de 1 a 6, a uma pilha inicialmente vazia. Ganha quem colocar o total em 30 feijões.

Este é o antepassado mais antigo que se conhece da família de jogos NIM, que tratamos noutro livro desta colecção. Desta família fazem parte também os chamados jogos de subtracção, muito semelhantes ao de Pacioli, mas com as jogadas a consistirem em retirar feijões, em vez de os colocar.

No jogo proposto, dada a restrição no número de feijões que se pode colocar na pilha, vê-se facilmente que quem atingir 23 feijões vai ganhar. O adversário terá de somar a 23 um número entre 1 e 6, dando um resultado entre 24 e 29, que permite vencer na próxima jogada.

Mantenhamos em memória que atingir 23 é tão favorável como atingir 30, já que garante a vitória.
Agora, podemos aplicar um raciocínio semelhante ao anterior. Para atingir 23, basta-me deixar ao meu adversário 16 feijões. Este tem de me devolver uma pilha com 17 a 22 feijões e eu coloco os restantes para totalizar 23.

Mantenhamos agora em memória que atingir 16 é tão favorável como atingir 30, já que garante a vitória (com passagem pelo 23).

Como podemos estar certos de deixar 16 feijões? Bom, o processo agora está claro: deixemos 9 feijões.

E para estarmos certos de que podemos deixar 9? Basta colocar na jogada inicial 2 feijões.

Resumindo, se eu for o primeiro a jogar coloco 2 feijões. Na minha jogada seguinte altero o total para 9. Nas minhas outras jogadas vou deixar sucessivamente 16, 23 e 30 feijões, ganhando o jogo.

Claro que se eu fosse o segundo e o meu adversário soubesse esta estratégia... eu perderia!

Travessia do deserto

Luca Pacioli dá várias versões deste problema, em vários contextos. O nome travessia do deserto é o mais usado nos nossos dias, sendo o contexto o da travessia de uma zona inóspita, conduzindo um Jeep, administrando o respectivo combustível. Como transportar o maior número possível de maçãs de Sansepolcro para Perugia, que distam 30 milhas, sabendo que só posso carregar 30 de cada vez e como uma maçã por cada milha que percorro?

Este problema ocorre já na colecção de Alcuin de Yorque (732-804), *Propositiones ad Acuendos Juvenes*, e a solução não está correcta.

Como devo proceder para transportar o máximo de 100 pérolas pela distância de 10 milhas, sabendo que perco uma por cada milha que percorro e não posso carregar mais do que 10?

Fra Luca resolve bem, iniciando com dez viagens de duas milhas, o que coloca 80 pérolas à distância de 8 milhas do destino. Agora oito viagens de 8 milhas, partindo com 10 pérolas em cada uma, garante que chegam 16 pérolas ao destino.

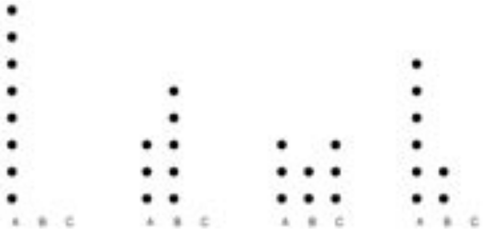
Problemas de vasilhas. Outra classe de problemas que se popularizou e chegou até nós. O mais conhecido pede para, a partir de barris de capacidade 8, 5, 3, em que o de 8 está cheio e os outros vazios, dividir o vinho igualmente por dois barris. A única operação permitida consiste em verter o conteúdo de um recipiente noutro, vertendo todo o conteúdo ou enchendo por completo o receptor.

Talvez a forma mais simples de mostrar uma solução consista em recorrer a uma figura, bem como a uma notação simples.

Consideremos um triplo de números em que o primeiro nos diz quantos litros de vinho tem o barril de 8, o segundo nos dá o conteúdo do barril de 5 e o terceiro diz quantos litros de vinho estão no barril de 3. A posição inicial é então (8, 0, 0) e queremos atingir a situação (4,4,0). Uma sucessão de estados que resolve o problema é a seguinte:

(8,0,0)->(3,5,0)->(3,2,3)->(6,2,0)->(6,0,2)->(1,5,2)->(1,4,3)->(4,4,0)

Se representarmos as vasilhas por A, B e C, por ordem decrescente de capacidades, podemos ilustrar os movimentos numa figura, onde cada ponto representa um litro de vinho:



Este tipo de problemas aritméticos está matematicamente relacionado com várias áreas, mesmo com a Geometria!

Pacioli propõe alguns problemas deste tipo que não podem ser resolvidos, aconselhando os leitores a darem esses problemas aos idiotas, para que estes assim ocupem o seu tempo! Um exemplo: medir 5 litros a partir de um barril de 10 (cheio) e de barris vazios de 6 e 4 litros de capacidade.

Problema de Josephus. O problema clássico com este nome, que data pelo menos do século IX, tem o seguinte enunciado. Num barco viajam 30 marinheiros, dos quais 15 são piratas. Uma tempestade obriga a que seja necessário atirar borda fora 15 deles. O capitão preparava-se para tirar à sorte quem havia de saltar, quando um marinheiro sugeriu colocar os 30 em círculo, contar de nove em nove e ir escolhendo esses para abandonar a embarcação. Assim se fez. Surpresa: no fim os piratas tinham ido fazer companhia aos peixes!

O problema reside em descobrir qual há-de ser a disposição inicial que garanta a sobrevivência de todos os marinheiros honestos.

A solução é dada pela seguinte configuração, usando M para marinheiro honesto e P para pirata:

MMMMPPPPPMMPMMMPMPPMMPPPMPPMMP

Na figura, identificando os piratas com os pontos mais escuros, e operando no sentido dos ponteiros do relógio, começando no ponto maior, acima, temos uma ilustração da disposição pretendida.

Configuração inicial para o problema de Josephus

O nome desta família de problemas vem de uma lenda segundo a qual Flavius Josephus, um historiador judeu do

primeiro século da nossa era, quando, junto com outros 40, estava na iminência de ser capturado pelos romanos, viu o grupo preferir a morte a tal sorte. O estratagema concebido para os sucessivos suicídios era semelhante ao anterior. No fim, só restou Josephus, que nunca preferiu o suicídio, e acabou por ser capturado pelos romanos. Girolamo Cardano (1501-1576), o grande matemático italiano, assim descreveu o episódio.

Há outras versões, sendo as mais populares aquelas em que se procura um só sobrevivente. Luca Pacioli propõe também casos em que se procura dois sobreviventes, sendo esta a primeira ocorrência de tais versões.

Os maridos ciumentos

Há três casais que pretendem atravessar um rio, sendo que o único barco disponível só comporta duas pessoas de cada vez. Como proceder sem que nenhuma mulher esteja com outro homem a não ser na presença do próprio marido?

Antes de vermos a solução de tal imbróglio, vejamos uma versão mais simples e igualmente popular. Um barqueiro pretende atravessar um rio com um lobo, uma ovelha e uma couve. Só pode transportar um item de cada vez. Como deve proceder sabendo que não pode deixar na mesma margem o lobo e a ovelha nem a ovelha e a couve?

Aqui, a solução só implica poucas travessias: o barqueiro leva a ovelha e regressa com o barco vazio. Pega agora o lobo, mas, ao chegar à outra margem, deixa o lobo e trás de volta a ovelha. Agora deixa a ovelha e leva a couve. Só falta pegar a ovelha, o que faz na última viagem.

O problema dos maridos ciumentos é mais complexo, porque temos seis itens.

Antes de ler a solução, cremos que os leitores devem tentar descobri-la autonomamente. É divertido.

Para facilitar, vamos dar nomes às pessoas: João e Joana, Eduardo e Eduarda, Renato e Renata.

A Eduarda e a Renata atravessam o rio. A Renata regressa só.

A Joana e a Renata atravessam o rio. A Renata regressa só.

O João e o Eduardo atravessam o rio. O João e a Joana regressam.

O Renato e o João atravessam o rio. A Eduarda regressa.

A Eduarda e a Joana atravessam o rio. A Eduarda regressa.

A Eduarda e a Renata atravessam o rio.

Adivinhação binária. Pela primeira vez aparece este truque, ainda hoje popular e de belo efeito.

Dados quatro cartões com números

1	3	5	7
9	11	13	15

2	3	6	7
10	11	14	15

4	5	6	7
12	13	14	15

8	9	10	11
12	13	14	15

Se alguém pensar num número de 1 a 15 e disser em que cartões está, o mágico pode adivinhar imediatamente de que número se trata.

O funcionamento desta magia é muito instrutivo. Escrevam-se os números naturais de 1 a 15 em notação binária, isto é, como somas de potência de 2. Por exemplo, 5 é $4 + 1$, logo, em notação binária, 5 escreve-se 101 ($1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 2^0$):

1 = 0001	5 = 0101	9 = 1001	13 = 1101
2 = 0010	6 = 0110	10 = 1010	14 = 1110
3 = 0011	7 = 0111	11 = 1011	15 = 1111
4 = 0100	8 = 1000	12 = 1100	

Um exame cuidado dos cartões mostra-nos que o primeiro contém os números ímpares, isto é, os números que, em notação binária, terminam em 1. O segundo cartão contém todos os números cujos segundo dígito binário é um 1, e assim sucessivamente. Assim, basta ao mágico somar os números do canto superior esquerdo de cada cartão que contiver o número a adivinhar (os números estão por ordem crescente em cada cartão).

A apanha das maçãs

Outro problema ainda hoje muito popular. O patrão manda um criado apanhar maçãs. Este assim faz mas é assaltado, e roubam-lhe metade das maçãs que trazia mais uma maçã. Azarado como era foi assaltado mais duas vezes. De cada vez tiraram-lhe metade das maçãs que trazia mais uma maçã. Chegou a casa com uma maçã. Quantas maçãs colheu?

Partindo do fim para o princípio, o problema não é difícil. Para o deixar com uma maçã, antes do último assalto devia ter 4 maçãs. Assim, imediatamente antes do segundo assalto devia ter 10 maçãs e antes do primeiro 22.

Para além dos anéis chineses, em que esta ocorrência é a mais antiga que se conhece e de que nos ocuparemos mais à frente, Pacioli aborda vários outros *puzzles* geométricos, hoje conhecidos por *puzzles* topológicos, alguns ainda populares.

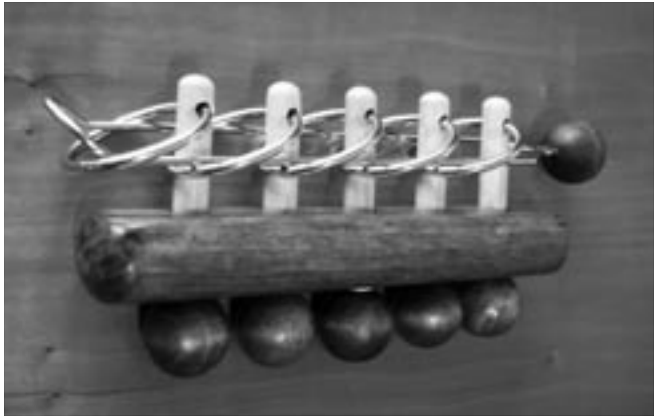
Pela primeira vez aparecem ilusões de óptica, como a de discutir se são ou não iguais em comprimento as peças das figuras

Ilusão de óptica:
qual é o rectângulo maior?

Não vamos abordar os truques de cartas, que preferimos efectuar presencialmente. Terminamos com uma pergunta de algibeira também bem conhecida:

Como podemos em três pessoas ter dois pais e dois filhos?

ANÉIS CHINESES



Os anéis chineses na sua posição inicial

O objectivo dos anéis chineses é fácil de explicar: retirar a estrutura de metal presa pelos anéis. O *puzzle* que acompanha este texto é composto por cinco anéis, apesar de existirem variações com diferentes números de anéis. Cada anel restringe a mobilidade dos restantes, o que exige a elaboração de uma estratégia não trivial para resolver o *puzzle*.

Neste texto, consideramos os anéis da esquerda para a direita (ver as fotografias), sendo o primeiro anel aquele mais à esquerda. Diz-se que um anel está solto se estiver abaixo da estrutura metálica (a coluna que prende o anel estará, nas fotos, para baixo), caso contrário está preso.

Assim, o nosso problema pode ser apresentado da seguinte forma:

A partir da posição onde todos os anéis estão presos, como chegar à posição onde todos os anéis estão soltos?

Se observarmos o *puzzle* com atenção reparamos em dois factos:

1) O primeiro anel pode soltar-se e prender-se em qualquer posição;

2) Um outro anel só se solta/prende se o imediatamente à esquerda estiver preso e os restantes anéis à esquerda estiverem soltos.

situação 1: o 1º anel solto e o 2º preso
situação 2: soltam o 3º anel

Pedimos aos leitores para confirmar estes dois pontos. A seguir, e antes de ler a solução nas páginas seguintes, tentem, baseados nestas duas informações, resolver o problema.

Veremos que o método de resolução é o mesmo para qualquer número de anéis que prendem a estrutura. Já o número mínimo de movimentos necessário para resolver o problema cresce rapidamente com o número inicial de anéis. Com cinco anéis são precisos, pelo menos, 21 movimentos. Consegue atingir este resultado?

SOLUÇÃO DOS *ANÉIS CHINESES*

Para facilitar a explicação vamos escolher uma representação do *puzzle* que se foca no essencial. Como? Primeiro, cada anel tem apenas dois estados possíveis, ou está solto ou está preso à estrutura metálica. Usamos o dígito 1 para indicar um anel preso e 0 para indicar um anel solto. Segundo, há vários aneis, mas eles nunca trocam de posições (por exemplo, o primeiro anel é sempre o primeiro anel). Logo, podemos codificar uma dada situação do *puzzle* numa sequência de zeros e uns, em que a posição relativa de cada dígito corresponde a um anel. O dígito mais à esquerda vai corresponder

ao estado do primeiro anel; o dígito seguinte ao estado do segundo anel e assim sucessivamente.

Por exemplo, a posição inicial é dada por 11111 (os cinco aneis estão presos) e a posição final por 00000 (os cinco anéis estão soltos). Dois outros exemplos:

SITUAÇÃO 1: É REPRESENTADA POR 10110
SITUAÇÃO 2: É REPRESENTADA POR 01010

Nas páginas anteriores, referimos uma propriedade dos anéis chineses: um outro anel só se solta/prende se o imediatamente à esquerda estiver preso e os restantes anéis à esquerda estiverem soltos.

Ou seja, no nosso puzzle de cinco anéis, para soltar o quinto anel (o último anel, aquele mais à direita) precisamos de ter preso o quarto anel e os restantes soltos. Ao soltar o quinto anel podemos esquecê-lo para o resto do puzzle, que se transforma, assim, num problema mais pequeno com quatro anéis. Para soltar o quarto anel, podemos usar a mesma propriedade: para o quarto anel ficar solto é preciso prender o terceiro anel e soltar o primeiro e o segundo.

Logo, para soltar o quinto anel temos de chegar à posição 00011 (como foi dito no parágrafo anterior, o quarto anel preso e os três primeiros soltos) e ao soltar o quinto anel passamos para a posição 00010 (todos os anéis soltos excepto o quarto).

Assim, a sequência de resolução terá de passar pelos seguintes passos:

11111 (posição inicial) → ... → 00011 (pronto para soltar o 5º anel) →
00010 (5º anel solto) → ... → 00110 (pronto para soltar o 4º anel) →
00100 (4º anel solto) → ... → 01100 (pronto para soltar o 3º anel) →
01000 (3º anel solto) → 11000 → 10000 → 00000 (posição final)

A resolução é um conjunto de sub-resoluções progressivamente mais simples, em que cada sub-resolução é similar ao problema principal. Este facto indica-nos uma estrutura recursiva na resolução dos anéis chineses (falámos da recursão no texto sobre as *Torres de Hanói*).

Os casos triviais dos anéis chineses são os *puzzles* com um e dois anéis. Para soltar um anel basta um movimento, para soltar dois aneis bastam dois movimentos (desafio ao leitor: qual a ordem destes dois movimentos?).

Se definirmos M_n como o menor número de movimentos para resolver o problema dos anéis chineses com *n* anéis, podemos já escrever:

$M_1 = 1$ ← um movimento para soltar um único anel

$M_2 = 2$ ← dois movimentos para soltar dois anéis

E no caso geral? Isto é, se tivermos *n* anéis? Qual o valor de M_n? Como foi dito, para libertar o último anel é necessário obter a seguinte posição 00...0011 (com *n-2* zeros à esquerda). Chegar a esta fase corresponde, se esquecessemos os dois últimos anéis, a resolver o problema com *n-2* anéis:

$$M_n = M_{n-2} + \ldots$$

Neste momento tiramos o último anel (e gastamos mais um movimento):

$$M_n = M_{n-2} + 1 + \ldots$$

... e obtemos a posição 00...0010.

Para continuar a resolver o *puzzle* torna-se agora necessário prender todos os anéis para poder soltar o penúltimo anel. Isto significa que é necessário desfazer os passos iniciais para passarmos da posição 00...0010 para 11..1110. Temos, assim, de gastar o mesmo número de movimentos necessários a resolver o problema dos *n-2* anéis (só que agora pela ordem inversa):

$$M_n = M_{n-2} + 1 + M_{n-2} + \ldots$$

Ao fazer isso, obtemos o subproblema de resolver o *puzzle* com todos os anéis presos menos o último, ou seja, o *puzzle* com *n-1* anéis:

$$M_n = M_{n-2} + 1 + M_{n-2} + M_{n-1}$$

Simplificando a expressão, e juntando os casos triviais, obtemos a seguinte relação de recorrência:

$$M_1 = 1$$

$$M_2 = 2$$

$$M_n = M_{n-1} + 2.M_{n-2} + 1$$

Fazendo as contas para alguns valores de *n*:

$M_1 = 1$

$M_2 = 2$

$M_3 = 5$

$M_4 = 10$

$M_5 = 21$ ← o nosso *puzzle* com cinco anéis

$M_6 = 42$

$M_7 = 85$

$M_8 = 170$

$M_9 = 341$

Facilmente se repara que o número de movimentos necessários para resolver cada *puzzle* cresce depressa. Por exemplo, para vinte anéis são necessários 699.050 movimentos e para trinta anéis seriam precisos 715.827.882 movimentos! (eis uma prenda diabólica...).

Existem formas de tratar estas expressões chegando ao termo geral:

$$M_n \text{ (com n par)} = \frac{2^{n+1}-2}{3}$$

$$M_n \text{ (com n ímpar)} = \frac{2^{n+1}-1}{3}$$

Destas várias expressões, concluímos que os movimentos necessários para resolver o *puzzle* crescem exponencialmente com o número inicial de anéis presos.

Mas como usar esta informação para criar um procedimento que nos resolva o *puzzle*?

Seja R_n a resolução de um *puzzle* com os primeiros n anéis presos (isto para *n*>2, ou seja, com pelo menos três anéis). Podemos descrevê-la recursivamente da seguinte forma:

Executar R_n corresponde a

1) Soltar os *n–2* anéis à esquerda (ou seja, realizar R_{n-2})
2) Soltar o *n*–ésimo anel
3) Prender os *n–2* anéis à esquerda (fazer o inverso de R_{n-2})
4) Executar R_{n-1}

No nosso caso, com *n*=5 anéis, temos de:

1) Soltar os 3 anéis à esquerda
2) Soltar o 5º anel
3) Prender os 3 anéis à esquerda
4) Executar R_4

Vejamos o percurso da solução com imagens do *puzzle*:

A posição inicial: 11111

1.1) soltar o 1º anel: 01111

1.2) soltar o 3º anel: 01011

1.3) prender o 1º anel: 11011

1.4) soltar o 2º anel: 10011

1.5) soltar o 1º anel: 00011

Neste momento foi concluído o primeiro passo (soltar os três primeiros anéis).

Já podemos soltar o último anel:

2) soltar o 5º anel

Passamos para o terceiro passo: reverter o primeiro passo e voltar a prender os três primeiros anéis:

3.1) prender o 1º anel: 10010

3.2) prender o 2º anel: 11010

3.3) soltar o 1º anel: 01010

3.4) prender o 3º anel: 01110

3.5) PRENDER O 1º ANEL: 11110

E terminamos o terceiro passo de R_5. O que resta fazer corresponde ao sub-problema de um *puzzle* com quatro anéis, ou seja, a resolução R_4:

1) Soltar os 2 anéis à esquerda

2) Soltar o 4º anel

3) Prender os 2 anéis à esquerda

4) Executar R_3

1.1) SOLTAR O 2º ANEL: 10110

1.2) SOLTAR O 1º ANEL: 00110

2) SOLTAR O 4º ANEL: 00100

3.1) PRENDER O 1º ANEL: 10100

3.2) PRENDER O 2º ANEL: 11100

E terminamos o terceiro passo de R_4. O que resta fazer corresponde ao subproblema de um *puzzle* com três anéis, ou seja a resolução R_3:

1) Soltar o anel à esquerda

2) Soltar o 3º anel

3) Prender o anel à esquerda

4) Realizar R_2

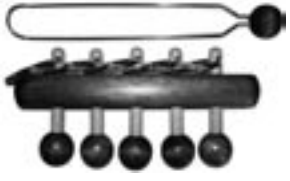
1) soltar o 1º anel: 01100

2) soltar o 3º anel: 01000

3) prender o 1º anel: 11000

E terminamos o terceiro passo de R_3. O que resta fazer corresponde ao subproblema de um *puzzle* com dois anéis, ou seja, a resolução R_2 que é um dos casos triviais:

1) soltar o 2º anel: 10000



2) soltar o 1º anel: 00000

Concluímos, desta forma, a resolução do *puzzle* (com os prometidos 21 movimentos). Para repor o *puzzle* na sua posição inicial basta executar estes passos na ordem inversa (onde se lê soltar leia-se prender e vice versa).

UMA CURIOSIDADE: CÓDIGOS GRAY

Considerando a representação anterior, que descreve um estado do *puzzle* (onde 1 significa preso e 0 solto, e cada dígito representa um determinado anel), a sequência de resolução dos anéis chineses gera uma lista de números binários. O *puzzle* começa com todos os anéis fechados (ou seja, o estado 11111 e termina com os anéis todos soltos, representado pelo estado 00000).

Vejamos novamente a lista da resolução para cinco anéis, onde os dígitos sublinhados correspondem a alterações:

11111 → 01111 → 01011 → 11011 → 10011 → 00011 → 00010 →
10010 → 11010 → 01010 → 01110 → 11110 → 10110 → 00110 →
00100 → 10100 → 11100 → 01100 → 01000 → 11000 → 10000 → 00000

Esta sequência tem uma propriedade interessante: cada número apenas difere um dígito do número anterior e do número seguinte (repare que há sempre só um dígito sublinhado em cada transição).

Na Matemática e na Informática, este tipo de sequência designa-se por um código Gray, cujo nome deriva do investigador Frank Gray que, em 1947, patenteou um método que usava este tipo de sequências. Os códigos Gray são úteis em diversos campos, desde a implementação de certos aparelhos mecânicos, a algoritmos de conversão e correcção de dados utilizados nas mais modernas telecomunicações.

Os anéis chineses, um puzzle já conhecido na Idade Média, é um gerador de códigos Gray de dimensão arbitrária (!). Se quisermos produzir códigos Gray com n dígitos, basta começar a resolver o respectivo *puzzle* com n anéis...