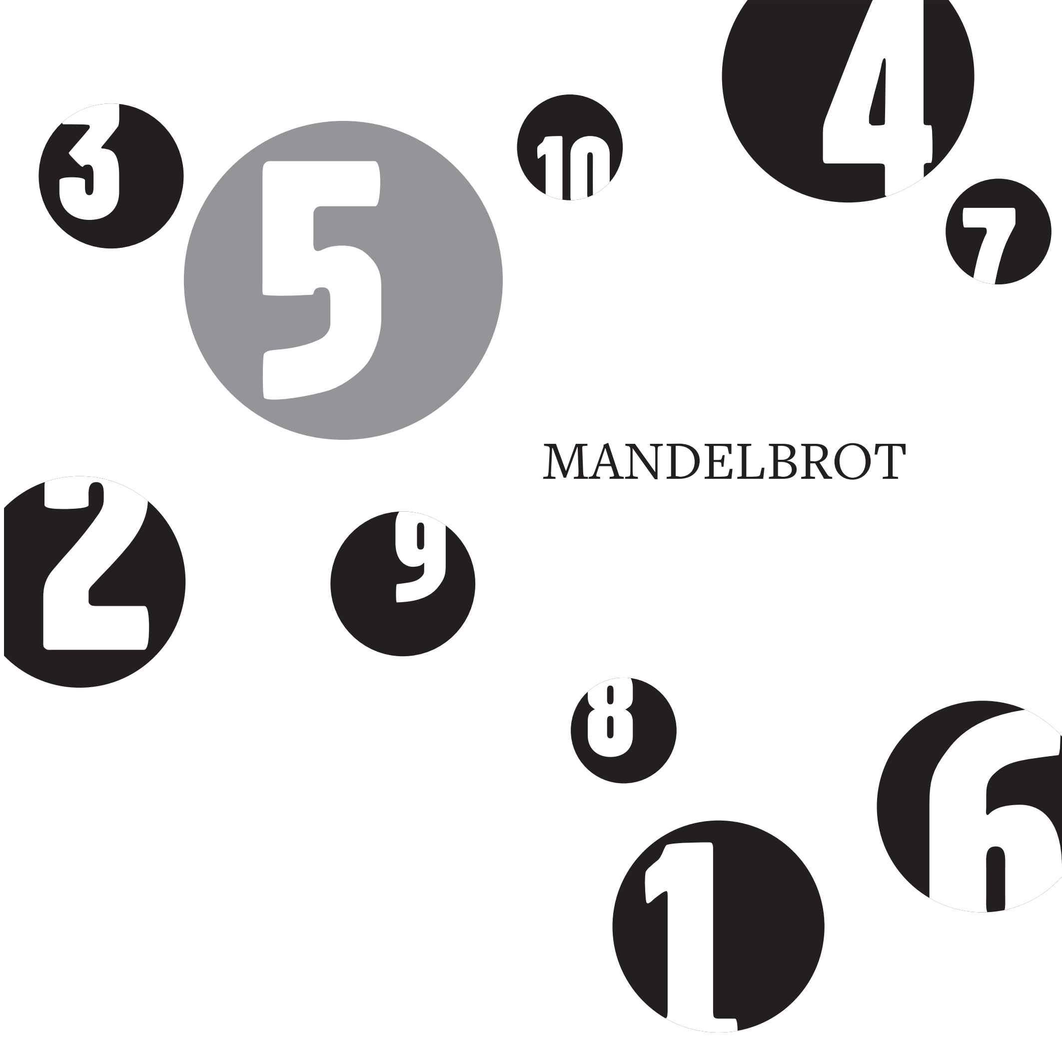
Mandelbrot

Biografia (Inglaterra, séc. XX-XXI).
Matemático polivalente e de imaginação ilimitada fez contribuições nas mais diversas áreas da Matemática. Foi o criador da *Teoria de Jogos Combinatórios* que, para além de permitir compreender muitos jogos, está relacionada com os mais fundamentais princípios da Matemática.



MANDELBROT

10 livros, 10 matemáticos, 10 puzzles para aprender e divertir-se

FICHA EDITORIAL
TÍTULO: Os fractais + Puzzle 'Torres de Hanói'
AUTOR: Carlos Pereira dos Santos, João Pedro Neto, Jorge Nuno Silva
REVISÃO: Edimpresa
IMPRESSÃO E ACABAMENTO: Norprint **DATA DE IMPRESSÃO:** JUNHO 2007
DEPÓSITO LEGAL: 261140/07 **ISBN:** 978–989612270–6

JOGAR COM A MATEMÁTICA DOS GÉNIOS

10 matemáticos, 10 quebra-cabeças, 10 livros de bolso. De Tales a Conway, cada livro contém informação sobre a vida e obra de um dos maiores matemáticos da humanidade, bem como a descrição e análise de um 'puzzle', que é reproduzido em madeira e faz parte desta colecção.

Veremos que Arquimedes inventou um 'puzzle' diabólico há mais de dois mil anos (Stomachion) ou que o Pentagrama, tão respeitado pelos pitagóricos, também era um jogo de tabuleiro. E ficaremos a saber que Conway desenvolveu uma teoria de jogos, que em África se pratica um complexo jogo aritmético há séculos e que o grande filósofo e matemático Leibniz promovia os jogos de tabuleiro asiáticos. Ou ainda que a teoria dos fractais de Mandelbrot está associada também a 'puzzles', como as Torres de Hanói, que o popular jogo dos 15 é um exercício de Teoria de Grupos e que Euler, há 300 anos, já estudava o percursor do Sudoku. E para além de falarmos sobre alguns dos jogos que os árabes introduziram na Europa há mais de mil anos, neste primeiro livro aprenderemos também que a célebre sucessão de Fibonacci, que nasceu na resolução de um problema sobre criação de coelhos, é útil na concepção de um quebra-cabeças geométrico.
Divirta-se e aprenda matemática com os jogos que desvendam o raciocínio de alguns dos maiores génios da História.

MANDELBROT

Benoit Mandelbrot

Benoit Mandelbrot nasceu em Varsóvia, na Polónia, em 1924. A sua família contava com vários académicos relevantes, nomeadamente um tio, Szolem Mandelbrojt, que era um matemático de renome, professor no Collège de France.

Em 1936 a sua família emigrou para França. A sua mãe, médica de profissão, preferiu educar Benoit em casa nos primeiros anos, tendo recorrido a um dos seus tios. Contudo, este não foi muito exigente, permitindo que Mandelbrot aprendesse a jogar xadrez antes de conhecer as primeiras letras e de saber a tabuada.

A entrada para a escola oficial deu-se aos 13 anos, quando o habitual teria sido aos 11. O eclodir da Segunda Grande Guerra levou a família a escolher mudar-se para Tulle, no centro de França. Aqui, um conjunto improvável de bons professores, também deslocados pela guerra, ajudou a recuperar o tempo perdido e promoveu um bom desempenho escolar a Benoit Mandelbrot. No fim da guerra, quando fez exames de admissão às melhores escolas de Paris, obteve resultados brilhantes. A razão por trás de tal sucesso não reside somente nos bons docentes que encontrou em Tulle, mas também a um dom que Mandelbrot reconhece possuir desde a juventude: a capacidade de geometrizar as mais diversas matérias. Questões de cálculo integral, cuja resposta correcta pressupunha grande prática e treino, eram interpretadas em figuras geométricas, com grande originalidade, relacionando-as com padrões conhecidos, levando às boas respostas sem esforço. Muitas vezes era assim conduzido às raízes históricas das próprias questões! A Geometria brotava já torrencialmente na mente do jovem estudante.

Tendo sido aceite nas escolas a que se candidatou, escolheu a de maior renome, a École Normale. Contudo, pouco depois, abandonou-a, desiludido com a tendência "purificadora" dos matemáticos de então, que tentavam refazer o conhecimento matemático de forma estruturada e muito ordenada. Este movimento, que ficou conhecido por "movimento bourbakista", tinha uma visão pouco geométrica da Matemática. Os matemáticos que a

ele aderiram tentaram reescrever toda a Matemática sob um nome comum, Nicholas Bourbaki. A respectiva concepção da disciplina, muito ordenada e lógico-dedutiva, sem enfatizar a intuição criadora, espalhou a sua influência pelas academias do mundo inteiro. Este projecto, hoje abandonado, é herança muito pesada em muitas universidades dos nossos dias. Mandelbrot sentiu a sua liberdade criadora tolhida e mudou-se para a École Polytechique. Aí conheceu Gaston Julia que, décadas antes, havia iniciado um estudo --- iteração de funções --- a que Benoit daria grande estatura mais tarde.

Mandelbrot estava também atento ao trabalho desenvolvido por matemáticos de outros países. Nomeadamente nos EUA.

John von Neumann, pai da Teoria de Jogos

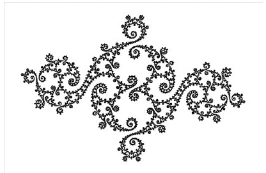
Fascinado com os trabalhos de von Neumann em Princeton, foi sob esta influência à distância que Mandelbrot elaborou a sua tese de doutoramento, Jogos de Comunicação. John von Neumann dera início a uma nova área: a Teoria de Jogos, que ainda hoje produz contribuições muito relevantes, por exemplo em Economia. É von Neumann que apadrinha a entrada de Mandelbrot em Princeton, em 1953. Aqui permanece, publicando trabalhos em várias áreas até 1958. Em 1958 foi convidado para um lugar temporário na IBM, mas o ambiente de trabalho agradou-lhe tanto que aí se estabeleceu de forma permanente. No começo da década de 1960 já tinha consciência de ter descoberto um campo novo. Utilizava então as palavras "comportamento caótico" e "caos" para nomear situações que estudava. As aplicações começaram a surgir, primeiro à Economia, depois à Física. Obteve resultados encorajadores também em estudos sobre turbulência e distribuição de galáxias.

Em 1967 formula a pergunta que ficou célebre: "Quanto mede a costa de Inglaterra?" A questão parece simples, mas não é. Se tentarmos responder fazemos uso de um mapa e de uma unidade de medida. Esta unidade, naturalmente, é linear, como um metro-padrão. Obtemos assim um resultado que acreditamos ser próximo do verdadeiro. E se usássemos uma unidade menor? Isso permitiria reconhecer alguns acidentes nos recortes costeiros que a primeira medição desprezara. Obtemos assim uma aproximação melhor do valor exacto, certo? Errado!

O que sucede é que, quanto menor for a unidade de medida, maior será o valor obtido. Para termos uma resposta maior que um milhão de quilómetros basta tomar uma unidade de medida suficientemente pequena! A conclusão segue, mas surpreende: não se pode falar do comprimento da costa. Nenhum número serve!

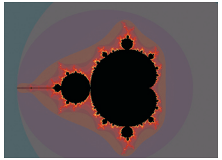
O que é relevante é que quanto melhor for o mapa utilizado, mais pormenores dos recortes costeiros surgem. Como veremos à frente, isto acarreta, como na curva de Koch, que o respectivo comprimento seja infinito!

É curioso consultar os livros de Geografia de então, por exemplo os portugueses e espanhóis, e ver as referências ao comprimento da fronteira comum. Às vezes um número chega a ser o dobro do outro. Mandelbrot estudou muitas situações deste género. Os computadores foram um auxiliar precioso ao permitir visualizar objectos matemáticos bizarros, que Mandelbrot baptizou de fractais (fractus, em latim, significa partido). A sua característica fundamental reside no facto de, ao ampliarmos uma pequena parte de um fractal, obtermos uma imagem que não se distingue da original. A esta propriedade chama-se auto-semelhança.



Exemplo de um fractal

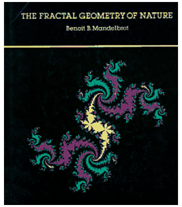
O nome de Benoit Mandelbrot surge muitas vezes associado a um fractal particular, formado por um cardióide com uma infinidade de apêndices:



Conjunto de Mandelbrot

Nas suas próprias palavras: "Concebi, desenvolvi e apliquei a muitas áreas uma nova Geometria da natureza, que encontra ordem em formas e processos caóticos. Baptizei-a em 1975 com a palavra Fractal".

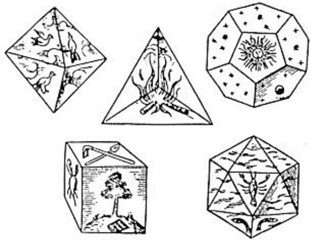
Em 1982 Mandelbrot publicou o seu famosíssimo livro, em que explica a nova teoria: A Geometria Fractal da Natureza.



A obra-prima de Benoit Mandelbrot

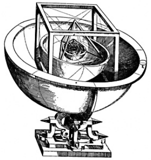
A influência desta nova Geometria não se limitou à Matemática. O conceito e representação do espaço na arte e na ciência depende da ideia que o Homem tem do mundo. Como dizia o poeta, "A Geometria está para o artista plástico como a gramática está para o escritor". As revoluções na Geometria têm sido raras, mas tiveram sempre vastas consequências culturais.

A Geometria euclidiana, ordenada e harmoniosa, com os seus sólidos platónicos muito regulares, teve a primazia durante muitos séculos. A harmonia destes sólidos tornava-os parceiros naturais dos cinco elementos



Os cinco sólidos platónicos associados aos cinco elementos

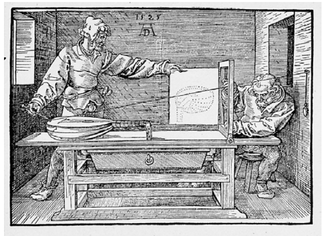
Mesmo Kepler (1571-1630) tentou explicar o sistema do mundo à custa destes sólidos



Sistema de Kepler

Os astros mover-se-iam em esferas tangentes aos diversos sólidos platónicos encaixados...

O aparecimento da Perspectiva, no Renascimento, alterou completamente as artes visuais. As capacidades de representação bidimensional de objectos sólidos multiplicaram-se.



Dürer,1525

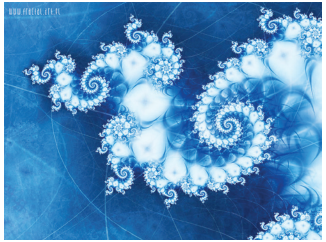
As Geometrias não Euclidianas, que surgiram no fim do século XIX, vieram também alterar as artes visuais, com a eclosão da Arte Moderna.

Picasso: Rapariga ao espelho

A Geometria Fractal teve um efeito semelhante, abrindo novos caminhos às artes. Onde Galileu (1564-1642), para ler a natureza recorreu a triângulos e outras figuras euclidianas, Mandelbrot utilizou outra linguagem para este propósito: a dos fractais.

A facilidade com que se pode hoje criar fractais novos, usando computadores, dá ilusão de proximidade com teorias científicas elaboradas, como nunca antes sucedera. Por outro lado, as imagens, sendo absolutamente novas,

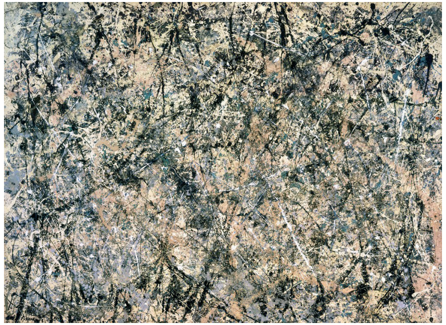
não representam nenhuma realidade em particular, mas diferentes possibilidades mais ou menos plausíveis. Enquanto não podemos esperar encontrar na natureza um triângulo perfeito, as formas fractais são muito mais verosímeis, como se fossem fruto de uma Geometria mais ligada à natureza.



www.fractal.art.pl

O impacto científico da Geometria fractal alastrou a outras áreas, tornando a palavra "fractal" vulgar em trabalhos de ciência ou mesmo de humanidades. As aplicações actuais dos fractais são inúmeras. Por exemplo, no filme O Caminho das Estrelas II, as paisagens extra-terrestres são produções computorizadas de fractais. Aquelas montanhas, vulcões e sóis nunca existiram, nem em cenário!

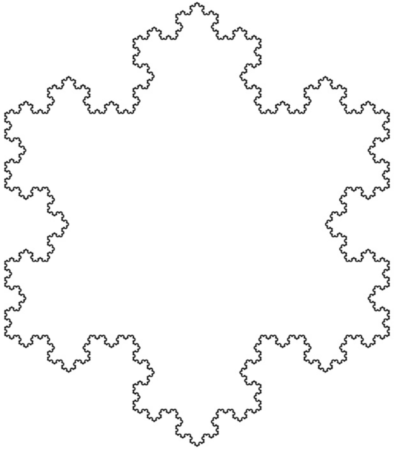
As obras do artista plástico americano Jason Pollock (1912-1956), que muitas vezes parecem um emaranhado caótico de pingos de tinta, convidam os falsários, já que atingiram grande valor.



Pollock, Lavender Mist, 1950

Para certificação de autenticidade um grupo de cientistas aplica um conceito associado aos fractais. Acontece que os originais de Pollock são todos auto-semelhantes, isto é, qualquer pequena parte de uma pintura, quando ampliada, assemelha-se ao todo original, característica esta que os falsários não conseguem imitar!

FRACTAIS



A curva de Koch

Os fractais são objectos matemáticos. Da mesma forma que uma circunferência, um quadrado ou um triângulo, eles não possuem existência real, mas muitos fenómenos em nosso redor podem ser modelados através deles, de forma a conseguirmos explicar as suas estruturas e, eventualmente, prever os seus comportamentos.

A Geometria é uma disciplina clássica, originada na Antiguidade e formalizada pelos Gregos, onde o nome de Euclides sobressai pelas obras que nos deixou. O sucesso da Geometria foi enorme, ela foi utilizada em inúmeras aplicações, como na Arquitectura e na Engenharia, na Física ou na Química. Hoje em dia é igualmente um assunto relevante no mundo dos computadores. Por isso, é natural que, quando observamos um fenómeno e tentamos criar um modelo científico para o explicar, usemos muitas das imagens geométricas tradicionais.

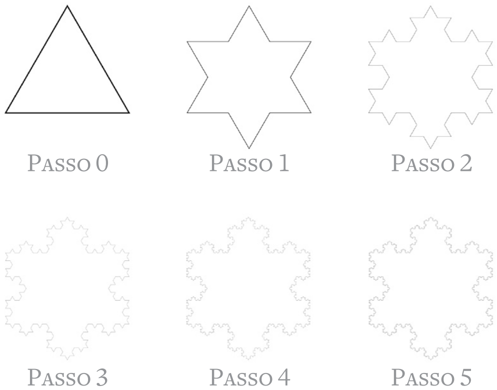
O problema é que na natureza existem múltiplas formas que não se adequam à Geometria clássica. Uma montanha não é um cone, as nuvens não são esferas nem sequer elipsóides, a linha costeira de um país não é exactamente uma linha recta ou curva, a maioria dos órgãos dos animais – como os pulmões, o sistema sanguíneo, o cérebro – possuem uma estrutura muito peculiar e estranha que se ramifica e enruga sobre si própria. Estes objectos parecem possuir algo em comum: são muito irregulares, possuem uma estrutura intrincada, e, quando vistos de perto ou de longe, há algum padrão que se mantém.

Por exemplo, as maiores artérias e veias são semelhantes aos vasos capilares, uma montanha parece ser constituída, na sua superfície, por montanhas menores, uma nuvem é definida por conjuntos de nuvens mais pequenas, os relâmpagos ramificam-se noutros relâmpagos…

Um dos motivos do sucesso dos fractais é precisamente disponibilizarem uma nova família de formas que melhor se adequa às estruturas de diversos objectos reais, como estes aqui referidos.

A imagem que inicia esta secção é um exemplo de um fractal, designado por curva de Koch, sendo um dos primeiros fractais conhecidos (apresentado em 1904 pelo sueco Helge von Koch). Como se constrói esta curva? Primeiro considera-se uma «semente», neste caso, um triângulo equilátero (os três lados de igual dimensão). Depois, em cada passo, divide-se cada segmento em três partes e substitui-se a parte do meio por duas partes de igual dimensão, obtendo uma linha quebrada composta por quatro segmentos iguais, da seguinte forma:

Se repetirmos este processo, obtemos progressivas aproximações da curva de Koch:



A forma como se constrói esta curva mostra-nos uma das características comuns nos fractais, a sua estrutura auto-semelhante. Cada parcela, por mais pequena que seja, é obtida da forma similar às maiores parcelas, fazendo com que o fractal seja invariante à escala na qual se o observa: se usássemos um microscópio para olhar as ranhuras progressivamente menores da curva de Koch não conseguiríamos adivinhar qual seria o grau de ampliação usado no microscópio. Esta é uma propriedade

à qual não estamos habituados. Quando ampliamos alguma coisa (usando um microscópio ou um telescópio) observamos coisas diferentes a diferentes escalas. Mas há situações na vida real em que isso não ocorre, como por exemplo, na estrutura de certos seres vivos (pelo menos num certo intervalo de escalas, porque, ao contrário destes objectos matemáticos, na realidade é impossível continuar a ampliar sem limites). Se olharmos para alguns vegetais, notamos que há padrões que se parecem repetir, que uma folha parece ser constituída por folhas mais pequenas. A seguinte imagem é um fractal e veja-se o quão parecido é com uma folha real:

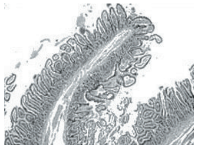
Cada ramo deste modelo de folha é, no limite, uma cópia fiel de toda a imagem. E cada ramo de cada ramo é igual a todos os outros ramos. Apesar da construção deste objecto ser mais complicada que a da curva de Koch (e está fora do âmbito deste texto ensinar como se faz), o processo é semelhante, por contínua iteração de um processo relativamente simples.

Isto tem uma implicação muito interessante. É possível, como os objectos fractais o mostram, criar estruturas complexas a partir de regras simples. A complexidade do objecto deriva não de um conjunto de regras muito complicadas, mas sim da sua interacção ao longo do tempo. É um processo elementar que, quando repetido sobre si mesmo, cria estruturas complexas.

Por que é que isto é relevante? Mostra-nos uma forma de como a natureza pode sustentar a evolução de seres vivos complexos sem haver necessidade de guardar demasiada informação. Os «planos de construção» podem, deste modo, ser codificados em menor quantidade de informação (basta armazenar no ADN as sementes iniciais e as regras de interacção) e esses planos seriam desenvolvidos iterando as respectivas regras.

Há mais vantagens. Para a curva de Koch, o matemático com o mesmo nome demonstrou que se fossemos medir o comprimento total da curva, iríamos obter um valor infinito (!). Ou seja, está perante nós um objecto que ocupa uma área finita (afinal, caberia numa destas páginas) mas de comprimento não finito. Muitos fractais têm a propriedade de, no mesmo espaço, possuir uma superfície (ou volume) muito maior que objectos clássicos de tamanho semelhante (por exemplo, um hexágono com uma área semelhante à da curva de Koch possui um perímetro finito). Mais uma vez, qual a utilidade disto? Se nessa superfície ou volume se efectuarem tarefas importantes, uma superfície fractal será mais eficiente que uma superfície «clássica».

O corpo humano (bem como na maioria dos restantes seres vivos) contém vários exemplos deste facto. Os intestinos e o cérebro são duas superfícies enrugadas sobre si mesmas, de modo a maximizar a superfície total e, assim, aumentar o seu desempenho funcional.

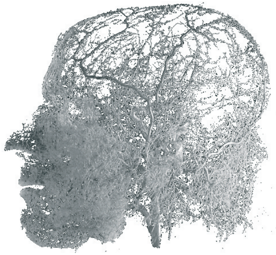


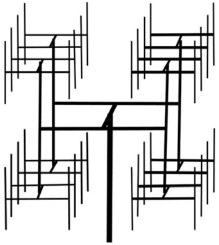
Tecido intestinal © X. Sastre / Instituto Curie

© Univ. de Alabama, Dept. de Patologia

O facto de compactar mais superfície num mesmo volume, tem como consequência que se usarmos uma medida de dimensão para classificar estes objectos, obtenhamos dimensões fraccionárias. A curva de Koch parece estar entre uma linha (que é um objecto a uma dimensão) e um polígono (que é um objecto a duas dimensões). Porquê? Afinal a curva de Koch é uma linha fechada (de comprimento infinito é certo, mas é uma linha) que parece preencher um determinado espaço bidimensional. As ferramentas matemáticas que permitem o cálculo da dimensão dão à curva de Koch uma dimensão de aproximadamente 1.26, o que vai ao encontro desta intuição.

No exemplo que se segue mostra-se um modelo fractal (diagrama à direita) para descrever o sistema sanguíneo (imagem à esquerda).



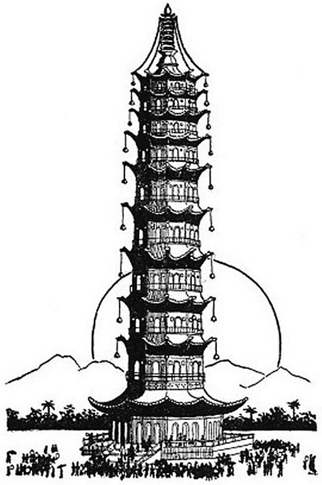


© Gould, J; William K. Biological Science, 6th Ed (1996) pg. 857

© P.R.Painter, Theoretical Biology and Medical Modelling 2005, 2:30

Uma outra vantagem dos corpos dos animais possuírem órgãos com características fractais é que se obtêm estruturas mais eficientes em termos energéticos, dado ser possível fazer com mais superfície o que, em alternativa, teria de ser realizado com mais volume. Ou seja, ao enrugar e ramificar um tecido orgânico muito fino, ocupamos praticamente o mesmo espaço que se o fizéssemos com um volume mais sólido. Encontra-se assim uma solução mais económica, resultando que o ser vivo em questão precisa de menos alimento (e de gastar menos energia na sua obtenção) para se manter vivo.

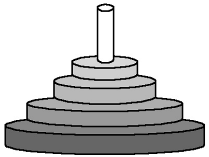
AS REGRAS DAS TORRES DE HANÓI



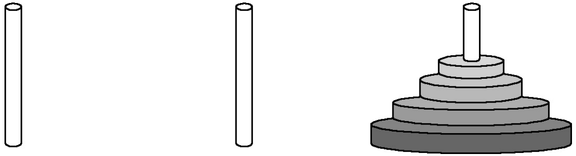
A Torre de Porcelana, Chin-ling (China)

O puzzle Torres de Hanói, que acompanha este texto, possui ?? discos mas as regras e o raciocínio de resolução são os mesmos independentemente do número inicial de discos.

Quais são as regras? Inicialmente, os discos devem ser colocados na coluna da esquerda, começando pelo maior e terminando no menor, criando uma «torre» nessa coluna:

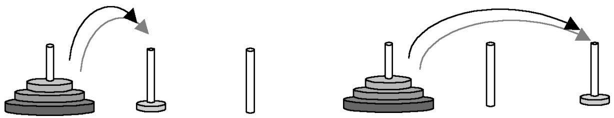


O objectivo do puzzle é simples: deslocar a torre da coluna da esquerda para a coluna da direita:



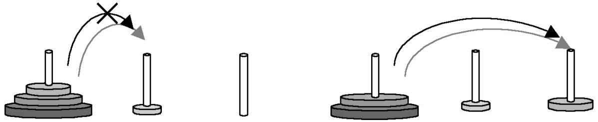
No entanto, para que o puzzle tenha algum interesse, existe um conjunto de restrições aos movimentos que podemos realizar. Estas restrições são igualmente simples: só se move um disco de cada vez; um disco só se pode deslocar para uma coluna onde não haja discos menores que o próprio (não se podem criar torres invertidas).

Por exemplo, da posição inicial só são permitidos dois movimentos: deslocar o disco do topo da única torre do jogo para a 2ª ou para a 3ª coluna.

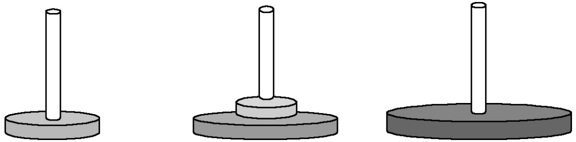


Não há restrição à movimentação de um qualquer disco para uma coluna que esteja vazia.

Vamos assumir que na primeira jogada o disco menor foi para a 2ª coluna (correspondendo ao anterior diagrama da esquerda). Nesse caso, na jogada seguinte há já uma restrição ao movimento: o disco do topo da 1ª coluna não pode ser colocado na 2ª coluna, dado que iria ficar por cima de um disco menor:



Vejamos outro exemplo. Se a situação actual for a seguinte quais são os movimentos legais que o jogador pode efectuar?



Existem apenas três jogadas legais.

1) Desloca-se o disco da 1ª coluna para a 3ª coluna (não se pode colocar na 2ª coluna porque o disco que aí se encontra no topo é menor que o disco da 1ª coluna)

2) Desloca-se o disco da 2ª coluna para a 1ª coluna

3) Descola-se o disco da 2ª coluna para a 3ª coluna

O maior disco (na 3ª coluna), considerando as regras, só se pode deslocar para colunas vazias. Nesta situação em particular, como todas as colunas estão ocupadas, o maior disco não se pode mover.

Deixamos ao leitor uma questão: qual o número mínimo de movimentos necessários para concluir o puzzle a partir deste diagrama? (de notar que o maior disco já se encontra na coluna final)

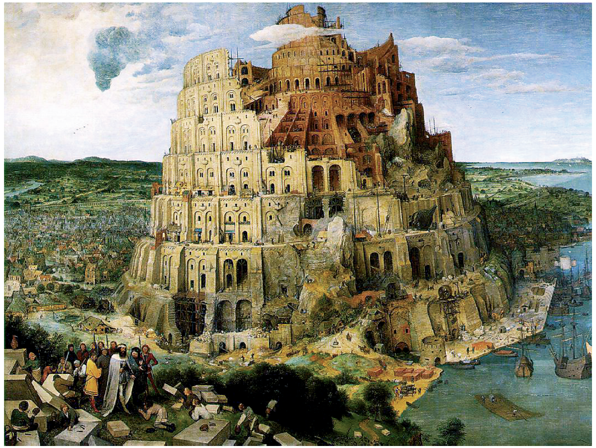
Um pouco de contexto

As Torres de Hanói é um puzzle inventado em 1883 pelo francês Édouard Lucas. O puzzle original era composto por oito discos de dimensões progressivamente menores e três colunas onde os discos podiam ser inseridos. O puzzle foi comercializado em 1883, com a seguinte capa:

As Torres de Hanoï – Um verdadeiro puzzle dos Anamitas
Jogo trazido de Tonkin pelo Professor N.Claus (de Siam)
Mandarim do colégio de Li-Sou-Stian

O referido «N.Claus (de Siam)» é um anagrama do inventor Édouard «Lucas (D'Ameins)».

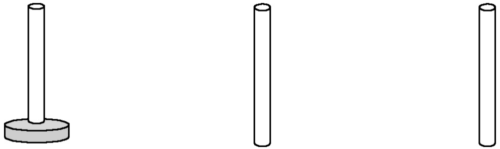
RESOLVENDO AS TORRES DE HANÓI



A Torre de Babel (Pieter Bruegel, 1563)

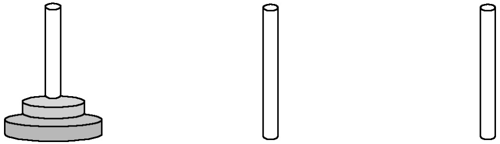
Vamos resolver as Torres de Hanói usando um raciocínio recursivo. Como referido nas secções iniciais, a recursão é uma forma de abordar problemas, tentando decompô-los em subproblemas similares mas que, por serem problemas menores, são mais fáceis de resolver.

Seja o problema em que a torre inicial tem apenas um disco e queremos deslocá-la para a coluna destino:



A resolução deste caso é trivial, basta deslocar o único disco do puzzle da coluna origem para a coluna destino. Designamos esta resolução por R1.

E o mesmo caso mas para uma torre com dois discos?



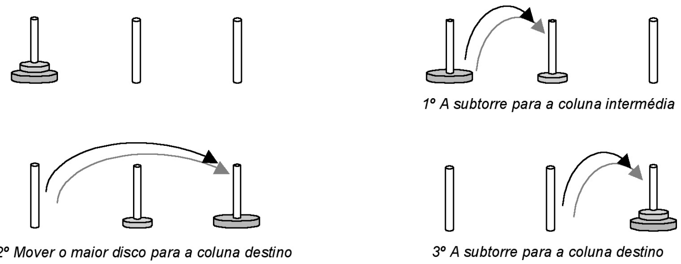
Existem duas formas de tentar resolver este puzzle. Ou por extenso, encontrando a sequência de movimentos que resolvem o problema, ou então pensando recursivamente. Como?

Podemos olhar para o problema desta forma:

1) Consideramos uma subtorre inicial com todos os discos menos o disco maior (o disco maior não limita o movimento dos restantes discos). Resolvemos o subproblema de deslocar essa subtorre para a coluna intermédia através da resolução R1.

2) Após esse subproblema estar resolvido, podemos deslocar o disco maior para a coluna destino;

3) Finalmente, repetimos a resolução R1, mas agora da coluna intermédia para a coluna destino.



E chamamos a esta resolução R2.

Qual é a vantagem de complicar a resolução do puzzle com todos estes passos se este problema é ainda tão simples? É que este raciocínio que consiste em aplicar sucessivamente uma resolução já conhecida pode ser usado para resolver torres de qualquer dimensão, sejam torres com quatro discos, com oito discos ou mesmo com mil discos!

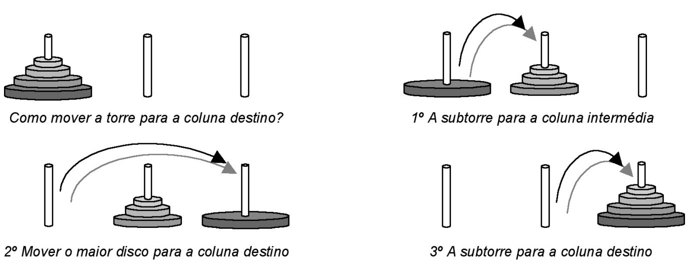
Reescrevamos os passos anteriores para o problema geral de deslocar n discos para uma coluna vazia (que será designado por resolução Rn):

1) Consideramos a subtorre sem o disco maior (a subtorre irá ter n-1 discos). Resolvemos o subproblema de deslocar essa subtorre para a coluna intermédia através da resolução Rn-1.

2) Após esse subproblema estar resolvido, podemos deslocar o disco maior para a coluna destino;

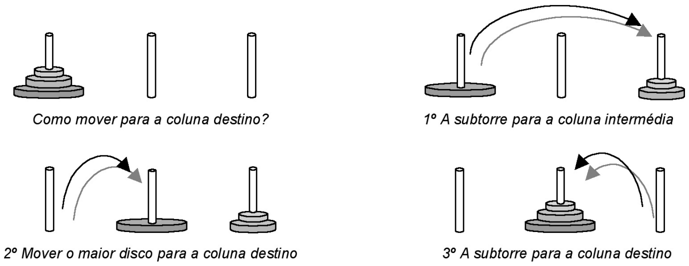
3) Finalmente, repetimos a resolução Rn-1, mas agora da coluna intermédia para a coluna destino.

Seja o seguinte exemplo para n=4:



Se o passo 2 representa um único movimento – mover o disco maior da coluna origem para a coluna destino –, os passos 1 e 3 incluem movimentos múltiplos, sendo, na verdade, subproblemas similares ao problema original (com um disco a menos). São, assim, puzzles mais simples de resolver e (agora vem o truque) também resolúveis por recursão.

No caso do diagrama anterior, n=4, os passos 1 e 3 são puzzles Torres de Hanói com n-1=3 discos. Por exemplo, o passo 1 pode ser resolvido, recursivamente, da seguinte forma (usamos a resolução R2 para deslocar da 1ª coluna para a 2ª coluna):

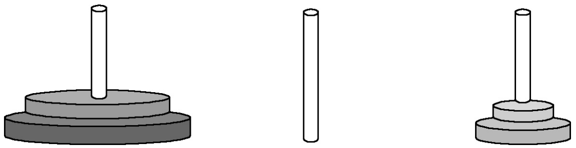


Cada uma das resoluções R3 decompõem-se recursivamente em duas resoluções R2. Esta decomposição em subproblemas e subsubproblemas não continua para sempre. A cada subproblema a dimensão da torre decresce uma unidade. Quando atingimos o caso trivial da resolução R1 resolvemos a questão com um único movimento (mover o único disco da coluna origem para a coluna destino).

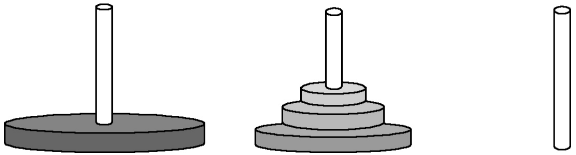
Entendendo este mecanismo, como traduzir esta resolução no conjunto de movimentos que me garantam a solução?

Seja uma torre com quatro discos. Se precisamos deslocar a sua subtorre para a coluna intermédia (neste caso, a 2ª coluna), então o disco maior desta subtorre tem de se deslocar para essa coluna. Para isso, a sua própria subtorre (neste caso com dois discos) tem de ser deslocada para uma coluna que não seja essa intermédia (porque senão, iria impedir o deslocar do maior disco para aí). Isso deixa-nos a 1ª e a 3ª coluna. Como a torre com dois discos ainda tem de ser decomposta em subproblemas, o problema repete-se.

Se é necessário colocar a torre com dois discos numa outra coluna que não a 2ª, o seu menor disco tem de descolar-se para a 2ª coluna. Depois, deslocamos o disco maior de para a 3ª coluna e voltamos a mexer o menos disco agora para a 3ª coluna. Após este passo, resolvemos o primeiro passo da resolução R3:

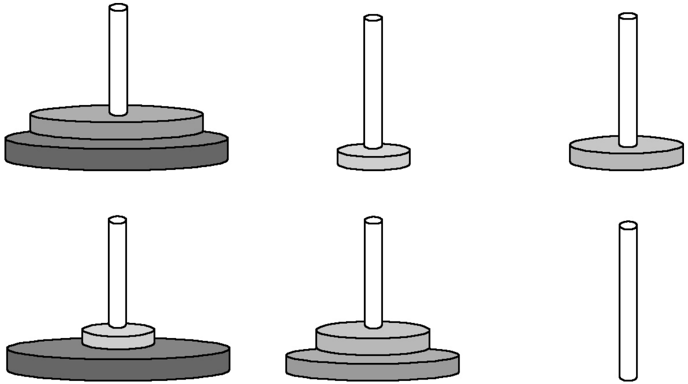


Podemos deslocar o maior disco e repetir a resolução R2. Após esses movimentos, concluímos o primeiro passo da resolução R4:



Movemos, em seguida, o maior disco para a coluna destino e repetimos a resolução R3.

É possível determinar para onde começar a mover o disco menor, observando se a torre tem um número par ou ímpar de discos. Se a torre tem um número par de discos, então deve-se iniciar o movimento do disco menor para a coluna intermédia. Se o número de discos for ímpar, deve dirigir-se, de início, para a coluna destino. Esta regra aplica-se tanto à torre inicial como a qualquer torre intermédia durante o desenrolar da solução recursiva.
Encontre o movimento seguinte em cada um destes exemplos:



Como já sabemos por onde começar a colocar o disco menor, é possível traduzir o raciocínio exposto anteriormente num algoritmo muito simples que nos garante a resolução do puzzle:

1) Começar por mover o disco mais pequeno para a coluna certa (para a coluna intermédia se os discos forem em número par, para a coluna destino se forem em número ímpar);

2) Movimentar outro disco (só haverá uma jogada válida);

3) Mover o disco mais pequeno para a coluna onde ele não esteve da última vez;

4) Voltar ao passo 2

Ainda a recursão nas Torres de Hanói

É possível determinar qual o número mínimo de movimentos para resolver um puzzle da Torres de Hanói com n discos. Vamos designar esse número, para n discos, por Mn.

Seja o caso trivial n=1. Nesta situação basta um movimento (mover o disco da coluna origem para a coluna destino). Assim, M1=1.
No caso geral, com n>1, podemos usar a resolução recursiva para obter Mn. Como observámos, a resolução de uma torre com n discos pode decompor-se em três pas-

sos: mover uma torre com n-1 discos, mover um disco, e mover novamente uma torre com n-1 discos, ou seja:

$$Mn = Mn\text{-}1 + 1 + Mn\text{-}1 = 2\_Mn\text{-}1 + 1$$

Adicionando o caso trivial obtemos as duas seguintes expressões:

$$M0 = 1$$

$$Mn = 2\_Mn\text{-}1 + 1$$

Estas expressões, em Matemática, são designadas por relações de recorrência e denotam a existência de uma estrutura recursiva.

Assim,

$$M1 = 2\_M0 + 1 = 3$$

$$M2 = 2\_M1 + 1 = 7$$

$$M3 = 2\_M2 + 1 = 15$$

$$M4 = 2\_M3 + 1 = 31$$

$$M5 = 2\_M4 + 1 = 63$$

$$M6 = 2\_M5 + 1 = 127$$

...

É possível encontrar uma expressão geral de Mn sem ser recursiva :

$$Mn = 2n - 1$$

Ou seja, o número mínimo de movimentos para resolver as Torres de Hanói é exponencialmente proporcional ao número inicial de discos.

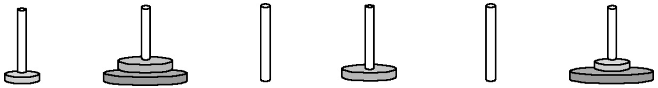
Uma das lendas associadas a este puzzle é a existência de um mosteiro budista, numa floresta escondida no Extremo Oriente, onde vários monges estariam a resolver um puzzle destes com 64 discos e, quando terminassem, o mundo acabaria.

O interessante neste caso é que, se os monges demorassem um segundo a mudar cada disco (já de si, uma estimativa optimista), demorariam 264-1 segundos na sua resolução (por extenso, 18 446 744 073 709 551 615 segundos), ou seja, cerca de 585 mil milhões de anos.

As Torres de Hanói e os Fractais

Seja um puzzle de Hanói com n discos. As posições legais são aquelas que conseguimos obter a partir de uma sequência de movimentações válidas (e descritas anteriormente quando descrevemos as regras). O que vamos fazer em seguida é criar uma estrutura que descreva todas as posições legais.

Para facilitar esta descrição, designamos as colunas por 1, 2 e 3 (respectivamente, a 1ª, 2ª e 3ª coluna). A descrição de uma posição corresponde à sequência de colunas onde se encontram os discos (do menor para o maior disco). Por exemplo, (1,1,1) corresponde à posição inicial do puzzle para três discos. Já a respectiva posição final seria dada pela descrição (3,3,3). Seguem mais dois exemplos, para se entender como funciona esta descrição:

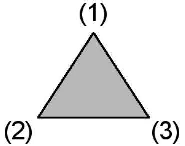


Posição (1,2,2) *Posição (3,1,3)*

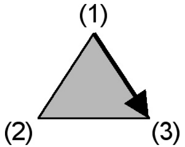
Quando surgem posições como (1,2,2) assume-se que os dois discos na 2ª coluna estão pela ordem correcta (os menores por cima dos maiores).

Cada jogada legal altera o puzzle e, assim, modifica a posição. Da posição (1,1,1), as jogadas possíveis resultam em (2,1,1) e (3,1,1) porque, no início, só é possível mover o disco menor para a 2ª ou 3ª coluna.

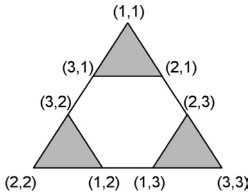
Comecemos pela descrição das jogadas do puzzle com um disco:



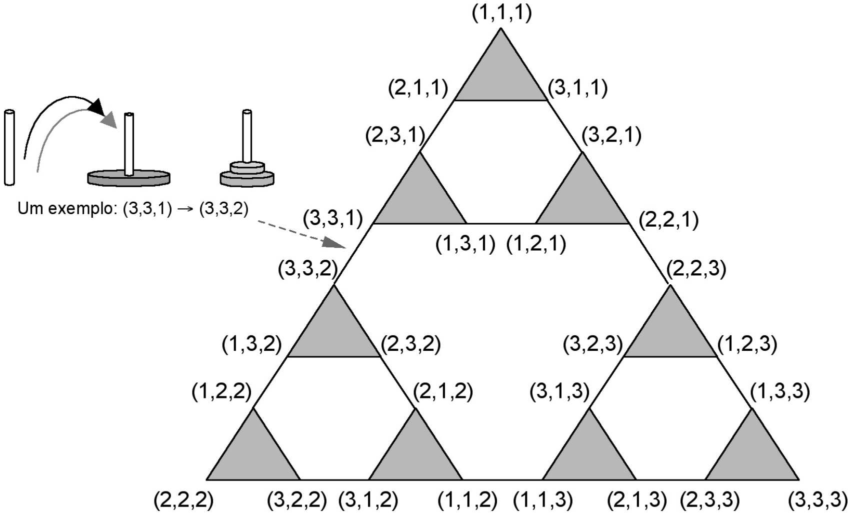
O único disco pode deslocar-se entre qualquer uma colunas. O caminho mais curto da posição inicial (1) até à posição final (3) corresponde a um único movimento:



Como é a descrição para o puzzle com dois discos? Esta descrição terá semelhanças com a anterior, dado o menor disco pode mover-se dessa forma, estando o disco maior ou na 1ª, 2ª ou 3ª coluna. Assim, o diagrama para duas torres será a composição de três diagramas similares ao anterior:



E o diagrama para três discos?



Cada um dos triângulos maiores corresponde às posições legais do jogo quando o maior disco está parado. O triângulo superior corresponde ao maior disco na 1ª coluna, o da esquerda ao maior disco na 2ª coluna e o da

direita ao maior disco na 3ª coluna. No exemplo observa-se a mudança do disco maior da 1ª para a 2ª coluna, logo a posição actual muda de triângulo principal. Cada um dos triângulos menores corresponde à posição fixa do segundo menor disco e assim recursivamente...
Os diagramas foram organizados para que a resolução com o menor número de movimentos entre a posição inicial e a posição final seja o percurso mais em linha recta entre o vértice superior do triângulo e o vértice mais à direita (neste exemplo, verificamos que para torres com três discos precisamos de sete movimentos).
Se repetíssemos o processo para valores de n crescentes, iríamos obter aproximações sucessivas do triângulo de Sierpinski (conferir a secção sobre fractais). Esta relação estabelece-se na estrutura recursiva como as posições válidas do puzzle podem ser combinadas.