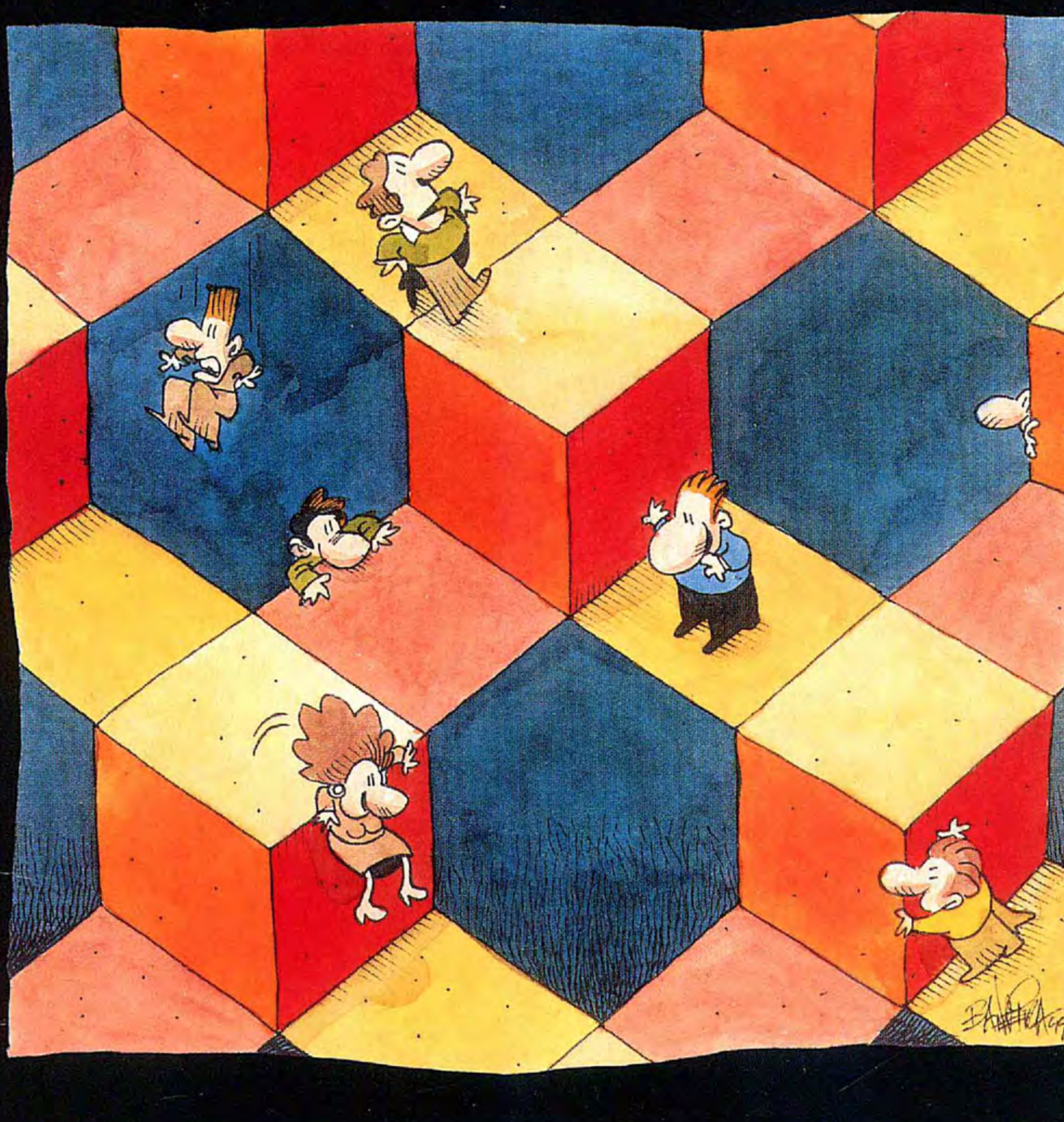
O PRAZER DA MATEMÁTICA

David W. Farmer

Grupos e Simetria

Um guia para descobrir a matemática



série A MATEMÁTICA EM CONSTRUÇÃO

O PRAZER DA MATEMÁTICA

1. Aventuras Matemáticas
   Miguel de Guzmán
2. Ah, Descobri!
   Martin Gardner
3. 100 Jogos Numéricos
   Pierre Berloquin
4. 100 Jogos Lógicos
   Pierre Berloquin
5. Contos com Contas
   Miguel de Guzmán
6. 100 Jogos Geométricos
   Pierre Berloquin
7. Actividades Matemáticas
   Brian Bolt
8. Matemática, Magia e Mistério
   Martin Gardner
9. As Enigmáticas Aventuras do Dr. Ecco
   Dennis Shasha
10. Rodas, Vida e Outras Diversões Matemáticas
    Martin Gardner
11. Mais Actividades Matemáticas
    Brian Bolt
12. Ah, Apanhei-te!
    Martin Gardner
13. Círculos Viciosos e Infinito
    Patrick Hughes e *George Brecht*
14. Matemáquinas
    Brian Bolt
15. Jogos, Conjuntos e Matemática
    Ian Stewart
16. O Festival Mágico da Matemática
    Martin Gardner
17. Códigos, Enigmas e Conspirações
    Dennis Shasha
18. *Puzzles* com Fósforos
    Liu Baifang
19. A Caixa de Pandora Matemática
    Brian Bolt
20. Dicionário de Números Curiosos e Interessantes
    David Wells
21. Uma Paródia Matemática
    Brian Bolt
22. Grandes Enigmas de Pensamento Lateral
    Paul Sloane e *Des MacHale*
23. Dicionário de Geometria Curiosa
    David Wells
24. Grupos e Simetria
    David W. Farmer

DAVID W. FARMER

GRUPOS E SIMETRIA

UM GUIA PARA A DESCOBERTA MATEMÁTICA

TRADUÇÃO
CRISTINA ISABEL JANUÁRIO

gradiva

Título original inglês: *Groups and Symmetry — A Guide to Discovering Mathematics*

Tradução: *Cristina Isabel Januário*
Revisão do texto: *Manuel Joaquim Vieira*
Capa: *Armando Lopes,* com ilustração de *José Bandeira*
Fotocomposição: *Gradiva*
Impressão e acabamento: *Tipografia Guerra, Viseu*
Reservados os direitos para Portugal por: *Gradiva — Publicações, L.da*
Rua de Almeida e Sousa, 21, r/c, esq. — 1399-041 Lisboa
Telefs. 397 40 67/8 — 397 13 57 — 395 34 70
Fax 395 34 71 — Email: gradiva@ip.pt
URL: http://www.gradiva.pt
1.ª edição: *Março de 1999*
Depósito legal n.º 134 415/99

Índice

Prefácio

Este livro é um guia para descobrir a matemática.

Todos os livros de matemática estão repletos de resultados e técnicas outrora desconhecidos. Esses resultados foram descobertos por matemáticos que fizeram experiências, conjecturas, discutiram o seu trabalho com outros, voltando depois a fazer mais experiências. Muitas ideias promissoras acabaram por morrer, tendo também muito trabalho árduo resultado em poucas descobertas. Muitas vezes, os primeiros avanços eram apenas a descoberta de alguns casos especiais. Todo o trabalho continuado conduziu a um maior conhecimento e quadros que por vezes se afiguravam complexos começaram a parecer simples e familiares. À medida que o trabalho produzido é escrito em livro a sua forma vai parecendo cada vez mais distante da inicial e os pormenores do seu nascimento e adolescência perdem-se. A exposição precisa e metódica de um livro de texto leva muitas vezes as pessoas a pensarem erradamente que a matemática é um assunto seco, rígido e estático.

A parte mais excitante da matemática é o processo de invenção e descoberta. O objectivo deste livro é apresentar este processo ao leitor. Através de uma grande diversidade de tarefas, este livro levá-lo-á a descobrir alguma matemática real. Não há fórmulas para memorizar. Não há procedimentos a seguir. Olhando para exemplos, procurando neles padrões e as razões por trás deles, poderá desenvolver as suas próprias ideias matemáticas. O livro é apenas um guia; a sua função é encaminhá-lo na direcção certa e trazê-lo de volta se for demasiado longe e se perder. A descoberta é deixada para si.

Este livro é adequado a um curso de um semestre no início dos estudos universitários. Não há pré-requisitos. Qualquer estudante interessado em descobrir a beleza da Matemática pode saborear um curso ensinado através deste livro. Um estudante interessado do ensino secundário irá achar este livro uma agradável introdução a algumas áreas modernas da Matemática.

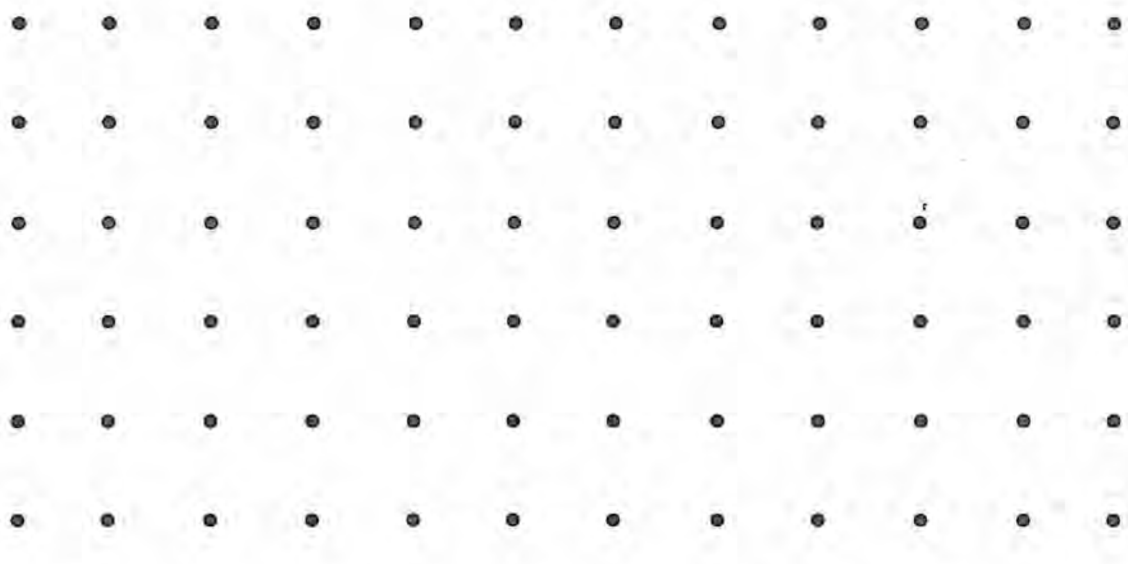
Agradeço a Dave Bayer o ter-me mostrado este método de desenhar os diagramas de Cayley dos grupos de papel de parede. Enquanto preparei este livro tive a sorte de ter acesso a excelentes notas tiradas por Hui-Chun Lee e por Elie Levine. É um prazer agradecer a Benji Fisher, Klaus Peters, Sandy Rhoades, Ted Stanford, John Sullivan e Gretchen Wright os comentários úteis a versões anteriores deste livro.

DAVID W. FARMER
Setembro, 1995.

1
Quadrados, hexágonos e triângulos

1.1 A grelha de quadrados

Imagine uma grelha de pontos infinitamente grande.



Só é possível desenhar uma pequena parte da figura; assim, terá de imaginá-la a prolongar-se indefinidamente. Pense numa parede gigante com este desenho da sua textura.

Em seguida imagine que toda a grelha se desloca uma unidade para cima. Para tal, o fechar os olhos pode ajudar. Após deslocar a grelha para cima, ela parece estar exactamente na mesma.

Onde havia uma pinta ainda existe uma pinta e nenhuma apareceu onde anteriormente não havia nenhuma. No diagrama acima pode parecer que, ao mover-se tudo uma unidade para cima, aparecerá uma linha vazia no fundo. Mas lembre-se que a grelha continua indefinidamente e existe outra linha por baixo que irá subir e tomar o seu lugar, e outra linha a seguir a essa e assim por diante. É essencial que a grelha se prolongue indefinidamente; existe sempre uma linha para ocupar o lugar de uma que se moveu para cima.

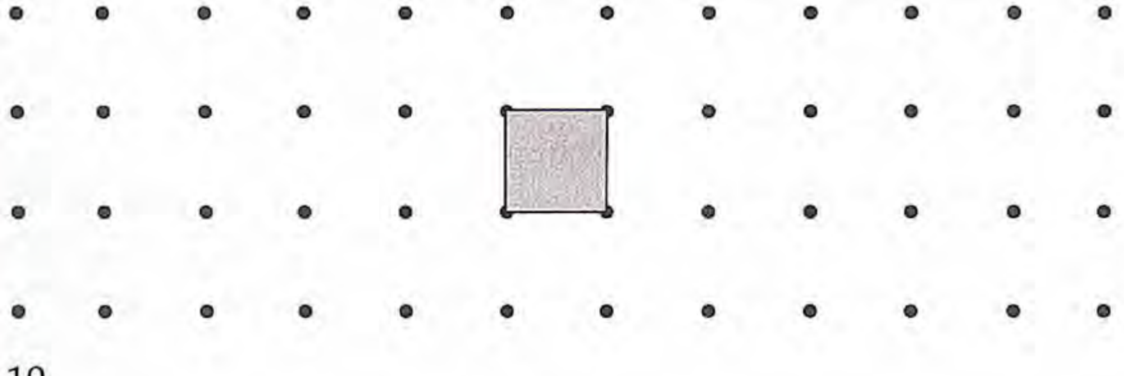
Do mesmo modo, se se mover toda a grelha para a esquerda, para a direita, para cima ou para baixo um número inteiro de unidades, a grelha acabará por parecer exactamente a mesma. Deste modo, podem estabelecer-se os seguintes movimentos permitidos actuais:

1) *Mover toda a grelha um número inteiro de unidades para cima ou para baixo;*
2) *Mover toda a grelha um número inteiro de unidades para a esquerda ou para a direita;*
3) *Qualquer combinação de 1) e 2).*

Um facto importante por agora é que os movimentos permitidos actuais deixam a grelha exactamente na mesma. Diz-se «movimentos permitidos actuais» por poderem ser alterados a qualquer altura.

Por exemplo, os movimentos permitidos actuais não permitem voltar ou rodar a grelha, mas, futuramente, estes movimentos também serão possíveis.

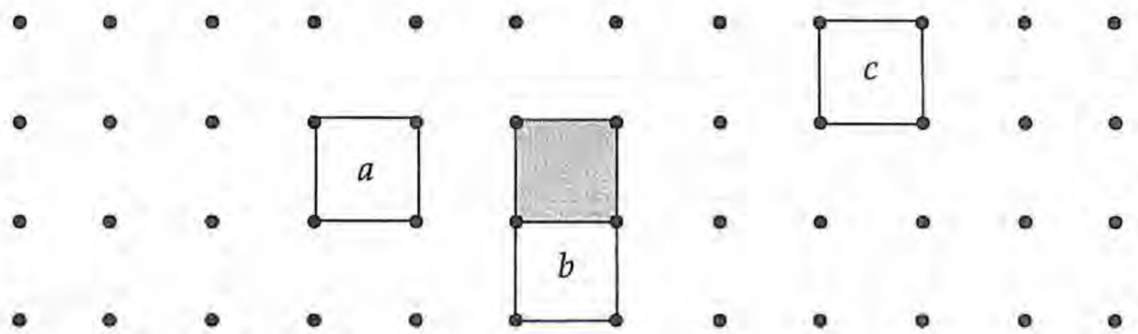
Por agora, e uma vez que os movimentos permitidos não alteram a grelha, é necessário acrescentar alguma coisa para que esta se torne interessante. Suponha que se tem um quadrado colorido:



Veja-se o que acontece quando se aplicam os movimentos permitidos. Alguns exemplos de movimentos possíveis são:

a) Esquerda 2;
b) Baixo 1;
c) Cima 1 seguido de direita 3.

Pense no quadrado como se este estivesse ligado à grelha: quando se move a grelha, o quadrado também se move com ela. À medida que se fizer qualquer um dos movimentos *a*, *b* ou *c*, o quadrado mover-se-á para os lugares indicados na figura seguinte:



Em *a*) moveu-se o quadrado original dois espaços para a esquerda. Depois, em *b*), moveu-se o quadrado original um espaço para baixo. Isto é, cada vez começa-se do princípio e todos os movimentos permitidos se referem à posição inicial. Se se pensar no quadrado original como um carimbo de borracha coberto de tinta, este irá colorir o quadrado que cada movimento legal indicar. Cada movimento legal serve para colorir um quadrado, o que conduz à seguinte pergunta:

Pergunta: O que acontece depois de se aplicarem ao quadrado original todos os movimentos permitidos possíveis?

Existem infinitos movimentos permitidos; pode imaginar-se que foram todos realizados. Se se sombrear o lugar onde o quadrado original vai parar de cada vez, então um pouco de experiência mostra que tudo acaba por se tornar colorido. Isto é:

Observação 1: Quando se aplicam todos os movimentos permitidos, o quadrado original cobre todo o plano.

Portanto, usando simplesmente os movimentos permitidos actuais, pode mover-se o quadrado original para cobrir qualquer lugar do plano. O resultado parece-se com um conjunto de azulejos que cobrem uma parede ou chão. Continuando a pensar em azulejos, pode observar-se que, à medida que se move o quadrado original, este nunca cai num lugar previamente ocupado. Isto é:

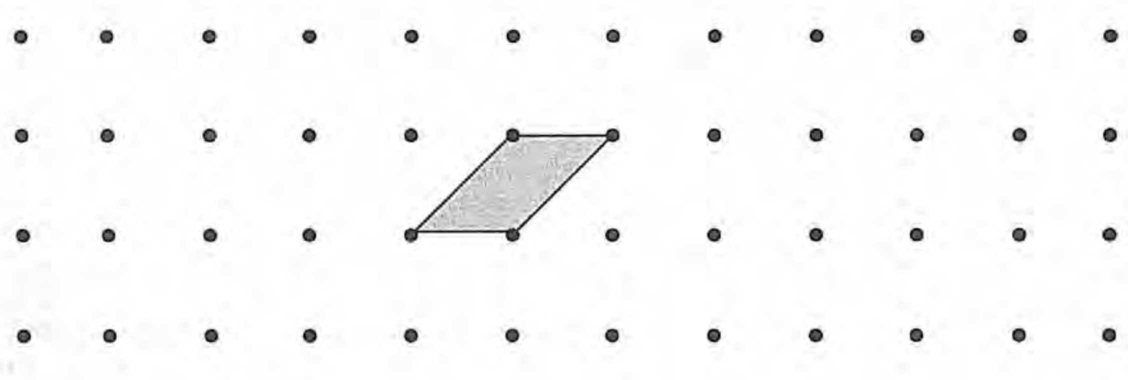
Observação 2: Movimentos permitidos diferentes nunca resultam em quadrados sobrepostos.

Na verdade, esta verificação necessita de maior precisão. Por exemplo, esquerda 2 seguida de cima 1 é um movimento permitido e cima 1 seguido de esquerda 2 é também um movimento legal e ambos movem o quadrado original para o mesmo lugar.

Tarefa 1.1.1: Descubra uma descrição de movimentos permitidos de modo que a *observação 2* seja verdadeira.

Este problema é muito frequente em Matemática: tem-se presente a ideia do que se quer transmitir, mas é necessária um pouco mais de atenção para expor correctamente as ideias no papel. Este processo é muito parecido com o de um legislador a tentar redigir uma lei sem quaisquer falhas. A primeira tarefa servirá para tentar emendar essas falhas. De seguida tente explicar claramente porque os quadrados nunca se sobrepõem.

Não há nada de especial acerca do quadrado sombreado; pode portanto tentar-se sombrear alguma outra coisa:



A figura é um paralelogramo, mas será sempre referida como «a figura». Motivadas pelos factos descobertos acerca dos movimentos permitidos aplicados ao quadrado original, considerem-se as seguintes perguntas:

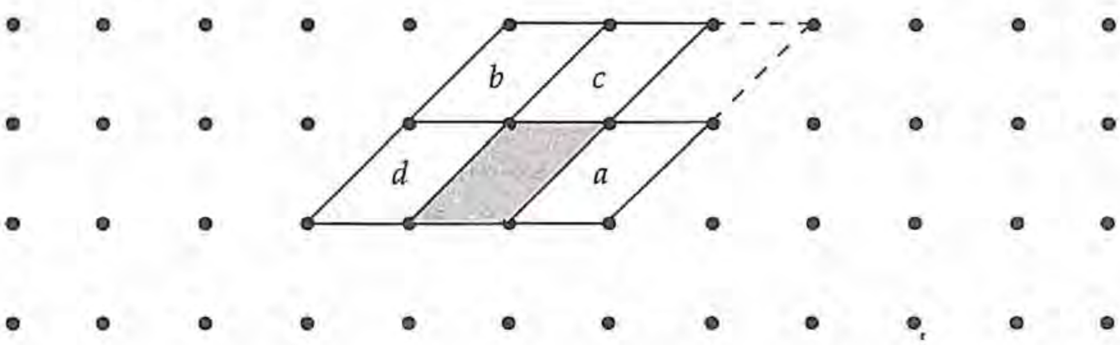
Pergunta 1: Quando se aplicam todos os movimentos permitidos, a figura cobre todo o plano?

Pergunta 2: Quando se aplicam todos os movimentos permitidos, a figura sobrepõe-se?

Para responder a estas questões, começa-se pelos movimentos permitidos mais simples:

a) Direita 1;
b) Cima 1;
c) Cima 1 seguido de direita 1;
d) Esquerda 1.

Estes movimentos permitidos movem a figura para as seguintes posições:

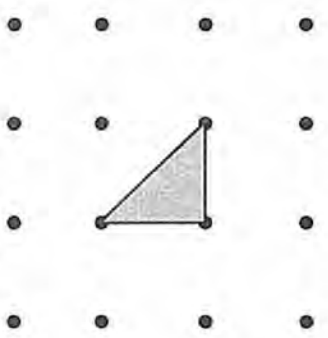


A figura de lados a tracejado ajusta-se perfeitamente, mas não provém de nenhum dos movimentos *a, b, c* ou *d.* Um pouco de experimentação mostrará que essa figura provém do movimento cima 1 seguido de direita 2. As várias cópias da figura ajustam-se perfeitamente, conduzindo a estas respostas:

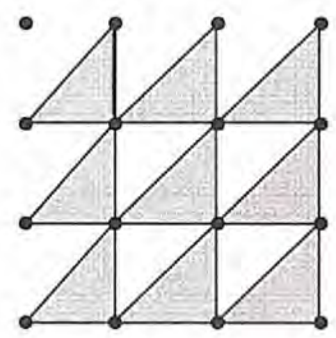
Resposta 1: Sim, a figura cobre todo o plano.
Resposta 2: Não, a figura nunca se sobrepõe.

De certa forma, estas são as «boas» respostas. A *resposta 1* diz que a figura pode ser usada para pavimentar o chão. A *resposta 2* diz que a figura não tem quaisquer partes «a mais» que possam provocar a sobreposição dos azulejos ou impedir que as diferentes cópias da figura se ajustem apropriadamente.

Mas nem todas as figuras têm estas propriedades. Por exemplo, se se considerar este triângulo:



Aplicar todos os movimentos permitidos conduz a este padrão:



Para esta figura, as respostas são:

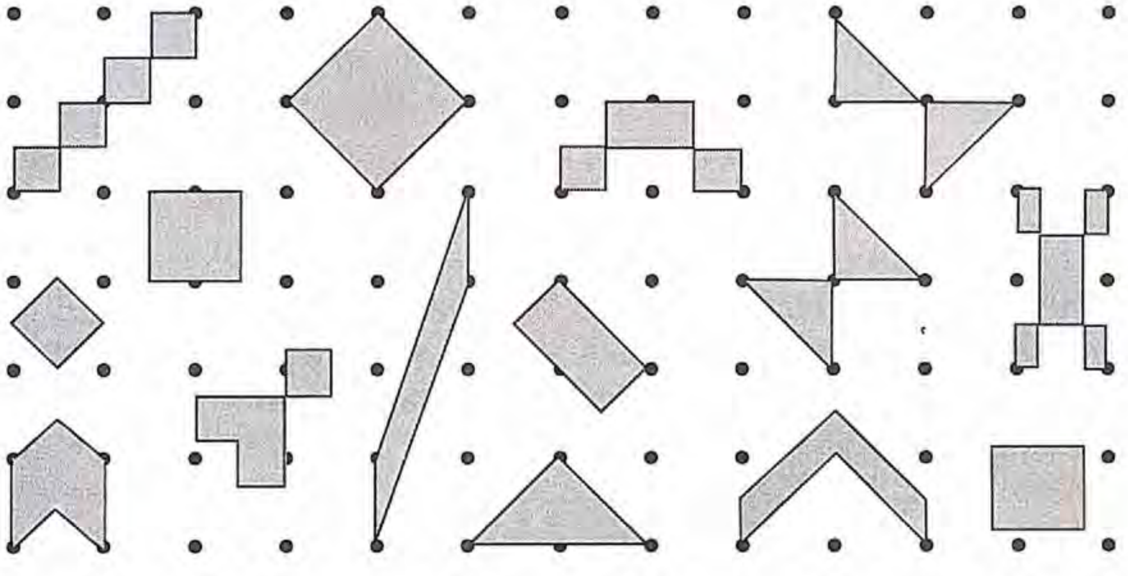
Resposta 1: Não, a figura não cobre todo o plano.
Resposta 2: Não, a figura nunca se sobrepõe.

Tarefa 1.1.2: Responda às *perguntas 1* e *2* para várias figuras, e descubra algumas interessantes que cubram o plano sem sobreposições quando se aplicam todos os movimentos permitidos. Use os exemplos para elaborar regras que permitam responder rapidamente à *pergunta 1* ou à *pergunta 2.* Na grelha seguinte são dados alguns exemplos de figuras possíveis.

Para além das figuras exemplificadas na grelha seguinte deverá também inventar outras. Por exemplo, nenhuma das figuras dadas tem arestas «curvas», devendo portanto tentar encontrar algumas que tenham. O objectivo mais importante é elaborar regras que ajudem a responder às *perguntas 1* e *2.* As regras não têm de ser aplicadas a todas as figuras: é útil ter regras que só funcionem para algumas.

Aviso: Ao longo deste livro pode achar útil registar os seus pensamentos e ideias. Arranje um bloco de notas com esse objectivo. Guarde todo o seu trabalho, e não apenas as respostas finais. É importante guardar um registo de todo o processo por que passou quando pensou no problema, incluindo trabalho que não pareceu levar a uma resposta concreta. O método que falhou num problema pode ser o método correcto para outro. Ter todo o trabalho registado num lugar especial ajudará a ver o que fez e tornará mais fácil encontrar trabalho antigo quando precisar.

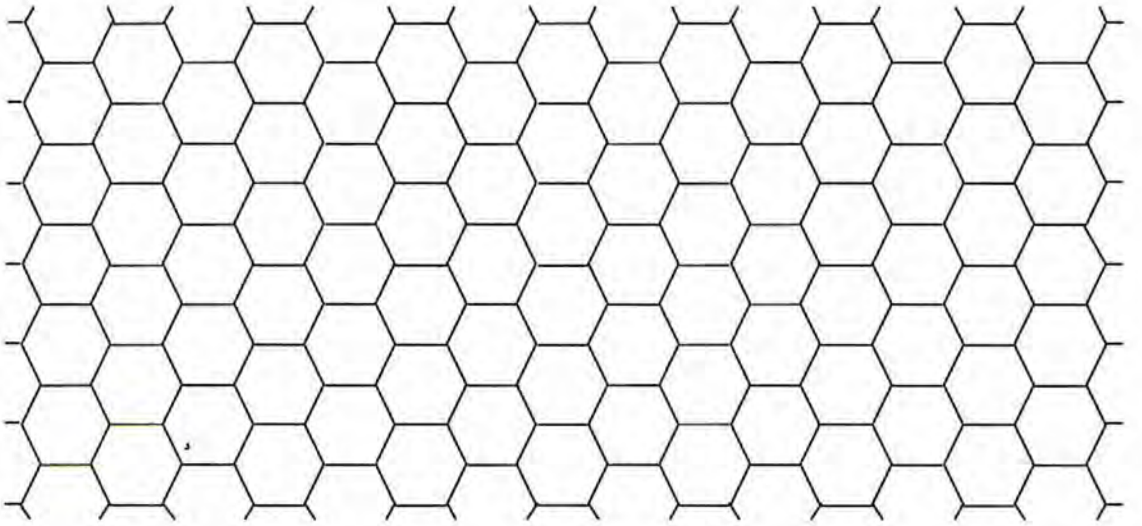
É importante que despenda tempo suficiente a pensar nas tarefas à medida que as mesmas se lhe deparem. Algumas delas são fáceis e outras bastante difíceis; assim, não deve esperar encontrar a resposta completa para todas elas. Se uma das tarefas parecer mais misteriosa, pode ser útil discuti-la com alguém. Por vezes pode saltar uma tarefa, voltando atrás mais tarde, mas saltar uma tarefa na esperança de encontrar as respostas no texto não levará a lado nenhum. A única maneira de encontrar uma resposta é descobri-la você próprio. Por vezes isso significará gastar um longo período numa tarefa. Essa é a natureza da descoberta matemática. Irá aprender que descobrir a sua própria Matemática não é de maneira nenhuma como tentar aprender a Matemática que já foi descoberta por alguém.



Existe uma grelha de quadrados no final deste capítulo.

1.2 A grelha de hexágonos

O objectivo da secção anterior era tentar imaginar uma grelha de quadrados infinita. Imagine agora uma colmeia com infinitas abelhas. O favo de mel seria mais ou menos assim:



Tal como anteriormente, o padrão continua indefinidamente; apenas se desenha uma pequena parte. Este padrão irá ser analisado de modo semelhante ao utilizado na análise da grelha de quadrados. Os principais passos desta análise são os seguintes:

— Estabelecer um conjunto de movimentos permitidos.
— Experimentar o que acontece a várias figuras numa grelha quando são aplicados os movimentos permitidos.
— Elaborar regras que determinam como os movimentos permitidos movem as figuras.

Não podem ser utilizados os movimentos permitidos anteriores porque os hexágonos não estão todos separados por um número inteiro de unidades. Contudo, se se reescrever a definição prévia de movimento legal obtém-se uma descrição que resulta para ambas as grelhas, a de quadrados e a de hexágonos.

Movimentos permitidos actuais:

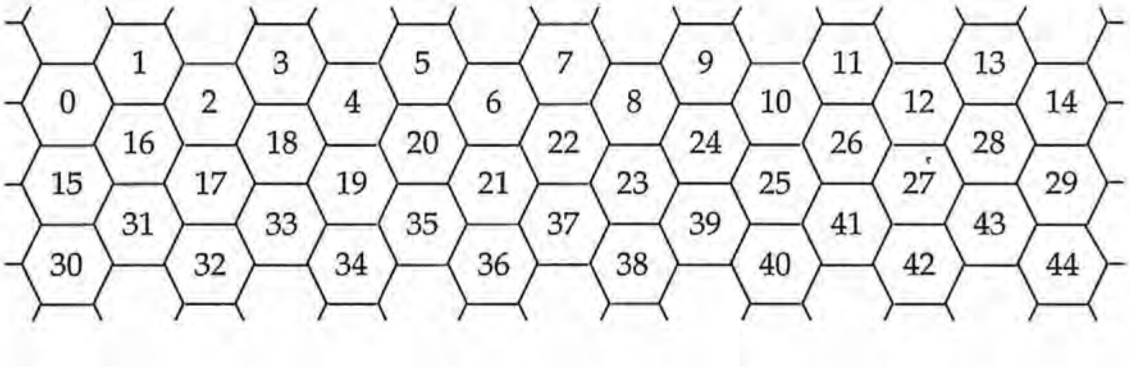
Todas as maneiras de deslocar a grelha para cima, para baixo, para a esquerda, ou para a direita, ou algumas combinações dessas direcções, de modo que a grelha pareça exactamente a mesma antes e depois do movimento.

Para a grelha de quadrados, esta definição é exactamente igual à definição anterior de movimentos permitidos. A sua vantagem deve-se ao facto de também fazer sentido para a grelha de hexágonos. Este processo de reformular uma definição antiga de modo que esta faça sentido numa nova situação irá encontrar-se muitas vezes.

Tarefa 1.2.1: Estabeleceu-se que os movimentos «diagonais» estariam incluídos na nova definição dos movimentos permitidos actuais. Explique porque são permitidos os movimentos diagonais ou reescreva a nova descrição de movimentos permitidos actuais de modo que os movimentos numa direcção diagonal sejam permitidos.

Tarefa 1.2.2: É verdade que a nova definição de movimentos permitidos actuais, quando aplicada à grelha de quadrados, dá a definição original de movimentos permitidos actuais? Se a resposta é *sim*, deve modificar a sua resposta à tarefa 1.1.1?

Descrever um movimento legal específico pode ser feito de muitas maneiras. Uma possibilidade é rotular cada hexágono e depois estabelecer para onde cada um deve ser movido. Uma possibilidade é a seguinte:

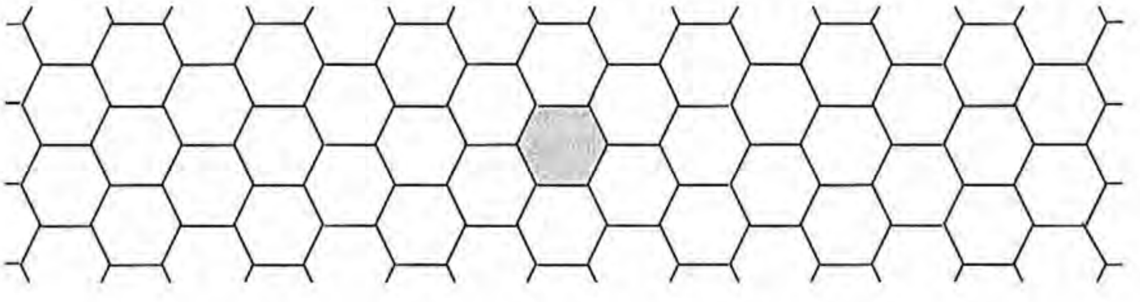


Dois movimentos permitidos possíveis a partir desta grelha são:

Movimento A:	$21 \rightarrow 19$	Movimento B:	$21 \rightarrow 8$
	$22 \rightarrow 20$		$37 \rightarrow 24$
	$20 \rightarrow 18$		$24 \rightarrow 11$
	$37 \rightarrow 35$		$22 \rightarrow 9$
	$10 \rightarrow 8$		$33 \rightarrow 20$
	$8 \rightarrow 6$		$20 \rightarrow 7$

Deve verificar que os movimentos anteriores são efectivamente exemplos de movimentos permitidos. Existem outras formas de descrever estes movimentos. Por exemplo, o movimento A pode ser referido como «esquerda 1 espaço», e o movimento B como «nordeste 2 espaços». Uma observação útil a reter é que, se se souber para onde um movimento legal leva um hexágono, pode determinar-se para onde leva todos os outros hexágonos. Por exemplo, no movimento B, o hexágono 21 vai para o hexágono 8. Uma vez que o hexágono 36 está imediatamente abaixo do hexágono 21, à medida que a grelha se move, este deve permanecer na mesma posição relativa. Portanto, o hexágono 36 deve mover-se para o hexágono 23 porque esse hexágono está directamente abaixo de para onde o hexágono 21 vai. Usando o mesmo raciocínio, pode descobrir-se para onde qualquer outro hexágono vai.

Agora, que se dispõe de um conjunto de movimentos permitidos, podé desenhar-se uma figura na grelha e ver o que lhe acontece após serem aplicados os movimentos permitidos. O caso mais simples é sombrear um hexágono:

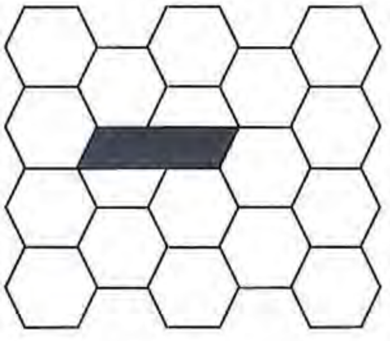


Observa-se que os movimentos permitidos são simplesmente as várias formas de mover um hexágono particular para outro hexágono. Assim, à medida que se aplicarem todos os movimentos permitidos ao hexágono sombreado, cobrir-se-á todo o plano. Verifica-se também que, uma vez que os movimentos permitidos devem mover um hexágono exactamente para cima de outro, o hexágono sombreado não se sobrepõe quando são aplicados todos os movimentos permitidos. Nos termos das *perguntas 1* e *2*, tem-se:

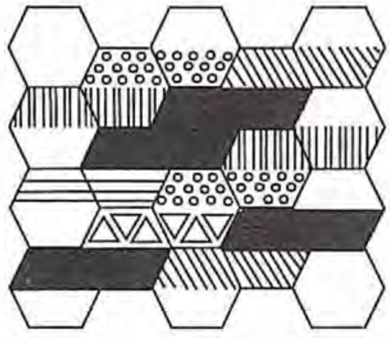
Resposta 1: Sim, a figura cobre todo o plano.

Resposta 2: Não, a figura nunca se sobrepõe quando são aplicados todos os movimentos permitidos.

Veja-se esta nova figura:



Usando várias texturas para cada movimento legal, obtém-se este padrão:



As diferentes cópias da figura ajustam-se perfeitamente, de modo que se têm novamente as seguintes respostas:

Resposta 1: Sim, a figura cobre todo o plano.

Resposta 2: Não, a figura nunca se sobrepõe quando são aplicados todos os movimentos permitidos.

As figuras estudadas foram escolhidas de modo que as respostas às *perguntas 1* e *2* fossem sempre as anteriores. Deste modo, e para facilitar, estas figuras especiais serão designadas da seguinte forma:

Definição provisória: Se uma figura numa grelha cobre todo o plano sem sobreposições quando são aplicados todos os movimentos permitidos, diz-se que a figura é uma UNIDADE BÁSICA.

Por outras palavras, uma figura é uma unidade básica se as respostas às *perguntas 1* e *2* são, respectivamente, *sim* e *não*. Diz-se definição provisória porque poderá ser necessário redigí-la de maneira diferente à medida que aparecerem novos dados. O conceito não mudará, mas a descrição desse conceito pode precisar de ser alterada. Este processo ocorre quando é necessário mudar a definição de movimentos permitidos para que esta funcione para a grelha de hexágonos.

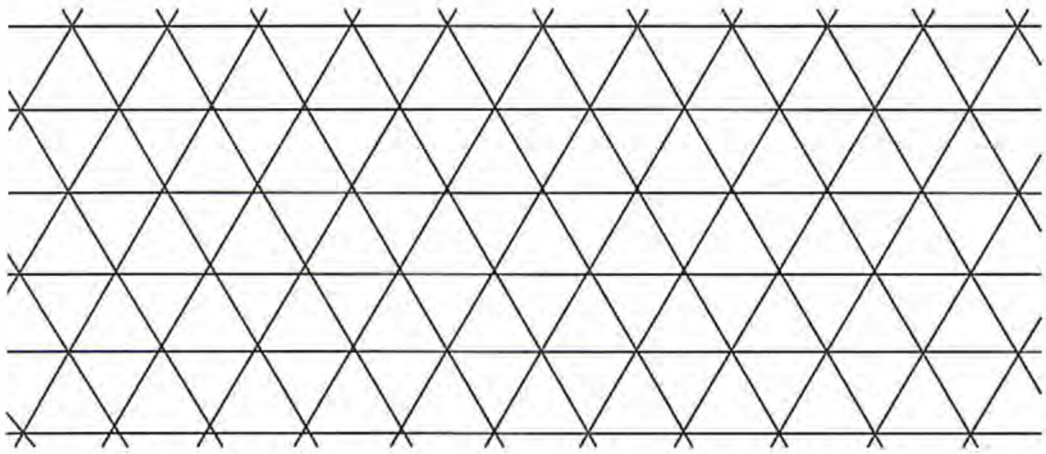
Tarefa 1.2.3: Para a grelha de hexágonos experimente utilizar várias figuras e elaborar algumas regras para as figuras que cobrem todo o plano ou se sobrepõem quando são aplicados todos os movimentos permitidos. Quando possível, use a terminologia das unidades básicas no estabelecimento das suas próprias regras.

Tarefa 1.2.4: Determine se as regras elaboradas para a grelha de quadrados também são válidas para a grelha de hexágonos. Quando possível, reescreva-as de modo que estas se apliquem a ambas as grelhas.

Existe uma grelha de hexágonos no final deste capítulo.

1.3 A grelha de triângulos

A terceira grelha que será estudada é a grelha de triângulos:



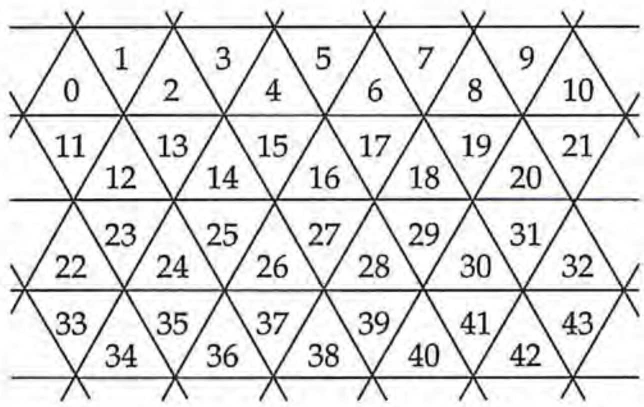
Pode ser novamente usada a definição anterior de movimentos permitidos:

Movimentos permitidos actuais:

Todas as maneiras de deslocar a grelha para cima, para baixo, para a esquerda, ou para a direita, ou algumas combinações dessas direcções, de modo que a grelha pareça exactamente a mesma antes e depois do movimento.

Tarefa 1.3.1: Repita a tarefa 1.2.1.

É agradável verificar que a definição anterior se ajusta a esta nova situação. Para descrever movimentos permitidos específicos poderão ser utilizados métodos semelhantes aos usados para a grelha de hexágonos. Uma rotulação possível para esta grelha é a seguinte:

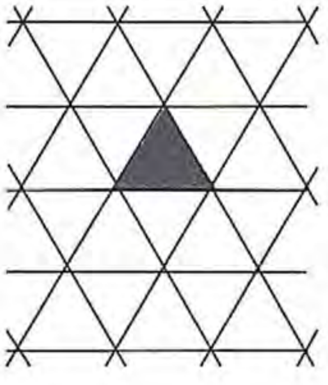


Dois exemplos de movimentos permitidos para esta grelha são:

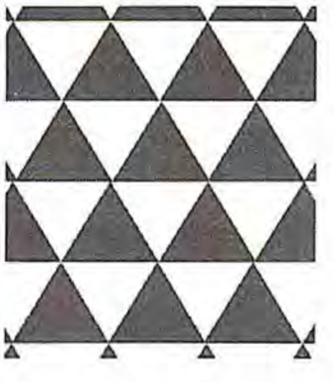
Movimento A:	37 → 25	Movimento B:	25 → 29
	25 → 13		24 → 28
	26 → 14		28 → 32
	39 → 27		14 → 18
	28 → 16		11 → 15

Estes movimentos podem também ser descritos usando termos como «noroeste 1 espaço». Pode observar-se novamente que, sabendo onde um movimento legal coloca um triângulo, se pode deduzir para onde todos os outros triângulos irão.

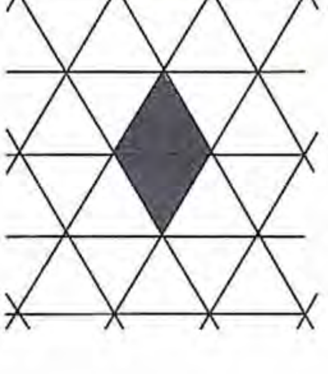
Pode desenhar-se uma figura na grelha e ver o que acontece quando são aplicados todos os movimentos permitidos. Por exemplo, se se sombrear um triângulo:



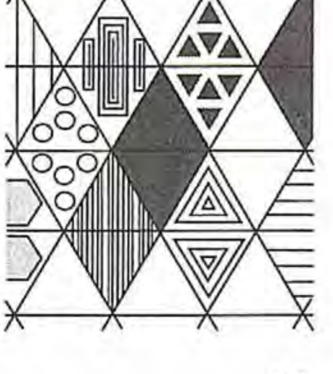
Aplicando todos os movimentos permitidos obtém-se este padrão:



Este triângulo não cobre todo o plano. Os triângulos sombreados «apontam para cima» Δ, enquanto metade dos triângulos na grelha «apontam para baixo» ∇. Se se quiser cobrir todo o plano, terá de ser também sombreado um triângulo que «aponte para baixo».



Usando várias figuras para cada movimento legal obtém-se este padrão:



Pode verificar-se que a figura composta por dois triângulos é uma unidade básica.

Tarefa 1.3.2: É verdade que uma figura que consiste exactamente de um triângulo que «aponta para cima» e outro que «aponta para baixo» é uma unidade básica para a grelha de triângulos, mesmo que estes triângulos estejam muito separados?

Nota: As figuras da tarefa 1.3.2 são formadas por duas peças separadas. Podem utilizar-se figuras compostas por peças separadas que não estão directamente ligadas.

Tarefa 1.3.3: Encontre uma figura rectangular que seja uma unidade básica para a grelha de triângulos. Faça o mesmo para a grelha de hexágonos.

Tarefa 1.3.4: Determine se as regras elaboradas para a grelha de quadrados e hexágonos também são válidas para a grelha de triângulos. Quando possível, reescreva essas regras de modo a poderem ser aplicadas às três grelhas.

Existe uma grelha de triângulos no final deste capítulo.

1.4 Síntese

O último objectivo deste capítulo é estabelecer uma regra final para determinar quando uma figura é uma unidade básica para qualquer uma das grelhas. A regra final deverá funcionar para as três grelhas, ser absolutamente segura e poder ser aplicada a todas as figuras. Pretende-se também estabelecer um método final que produza unidades básicas para cada grelha.

Tarefa 1.4.1: Dada uma unidade básica para uma grelha, estabeleça um método que utilize essa unidade básica para produzir outras unidades básicas.

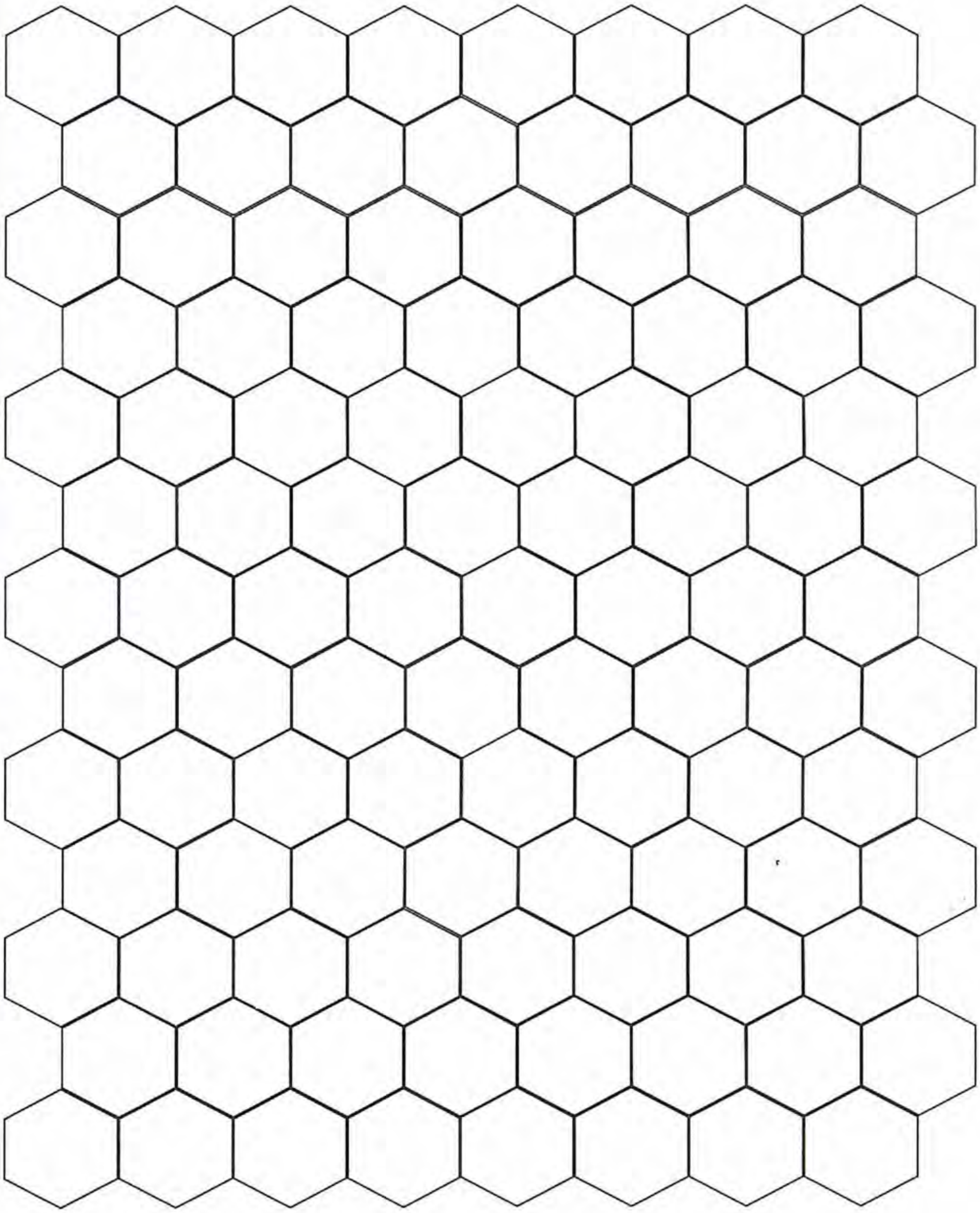
Tarefa 1.4.2: Estabeleça uma regra que indique se uma figura numa grelha é uma unidade básica.

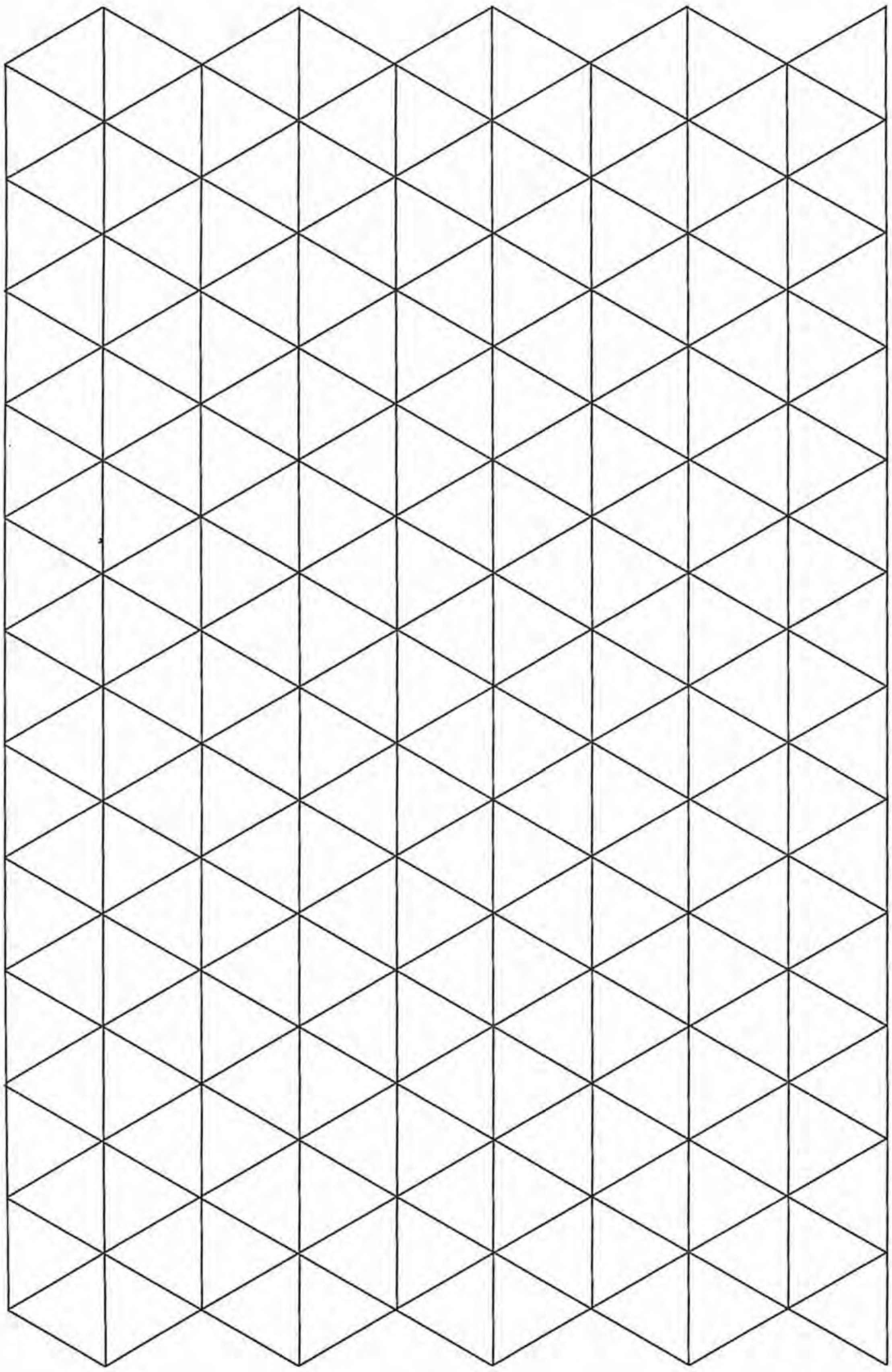
Tarefa 1.4.3: Compare as respostas das duas tarefas anteriores. Parece-lhe existir alguma ligação entre elas? Se não, tente reescrevê-las de modo que seja claro que estão relacionadas.

1.5 Notas

Nota 1.5.a: Uma *unidade básica* pode também ser chamada DOMÍNIO FUNDAMENTAL.

Nota 1.5.b: Este capítulo fala unicamente de três grelhas, uma vez que no plano há apenas três grelhas regulares diferentes. A palavra-chave aqui é *regular*. Uma vez obtida uma definição precisa de *grelha regular,* basta fazer um pouco de geometria para mostrar que estas três grelhas são as únicas possibilidades. Por exemplo, se tentar fazer uma grelha a partir de pentágonos, não chegará a qualquer conclusão, porque é impossível ajustar pentágonos regulares de modo que estes não se sobreponham e cubram todo o plano.





2

Os movimentos rígidos do plano

2.1 Translação e rotação

Todos os movimentos permitidos tratados no capítulo anterior implicam deslocar todo o plano como uma unidade rígida. Há muitas outras maneiras de mover o plano dessa forma. Este capítulo tem como objectivo descobrir esses outros movimentos rígidos e compreender como funcionam.

Definição preliminar. Um MOVIMENTO RÍGIDO do plano é qualquer maneira de mover todos os pontos do plano de modo que

— A distância relativa entre pontos permaneça a mesma.
— A posição relativa dos pontos permaneça a mesma.

Tal como anteriormente, diz-se «preliminar» porque não há a certeza de a primeira tentativa de uma definição precisa captar correctamente tudo o que se pretende. Se esta definição conduzir a resultados inesperados, ou se aceitam esses resultados, ou se muda a definição.

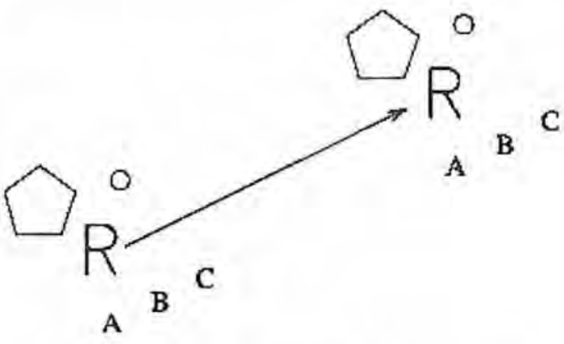
Dois exemplos de propriedades de um movimento rígido são: se os pontos A e B estão afastados 2 m, então, após aplicar um movimento rígido, eles devem manter 2 m de distância; e se o ponto C está a meio caminho entre A e B, então, após aplicar um movimento rígido, este deve permanecer a meio caminho entre A e B.

O movimento rígido mais simples é a *translação.* Os movimentos permitidos do capítulo anterior são todos exemplos deste tipo de movimento. Numa TRANSLAÇÃO, tudo é movido pela mesma distância e na mesma direcção.

Pode exemplificar-se uma translação desenhando uma seta. A seta aponta na direcção do movimento e o seu comprimento indica a distância que o todo é movido.

Pode também descrever-se uma translação especificando uma quantidade para cima/baixo e uma quantidade para a esquerda/direita para mover tudo. A translação pode ser feita com qualquer quantidade, não estando limitada a um número inteiro, tal como sucedia no capítulo anterior.

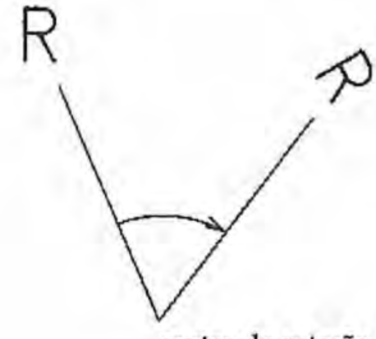
Uma translação desloca cada ponto pela mesma quantidade, pelo que, tal como este exemplo ilustra, não altera as distâncias ou posições relativas de pontos.



Por outras palavras, uma translação ajusta-se à definição de movimento rígido.

Outro movimento rígido do plano é a ROTAÇÃO. A rotação fixa um ponto e tudo roda a mesma quantidade em torno desse ponto.

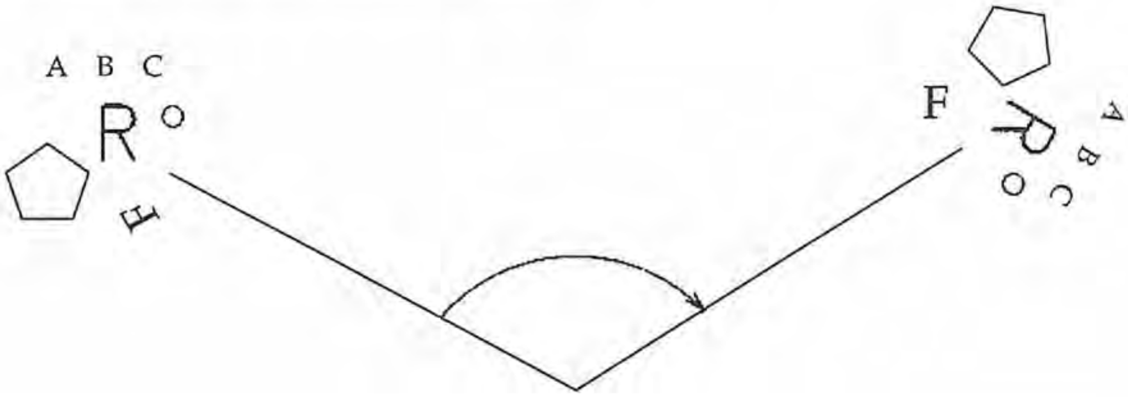
Para especificar uma rotação define-se qual o ponto que é fixado e a quantidade pela qual o todo roda em torno desse ponto. O ponto fixo, chamado CENTRO DE ROTAÇÃO, actua como um eixo e as duas linhas desenhadas indicam a rotação como se fossem os raios de uma roda.



centro de rotação

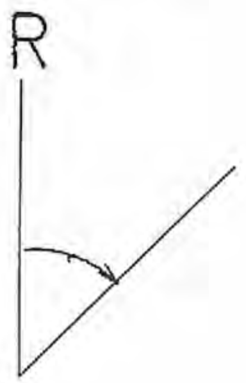
Existem muitas maneiras diferentes de medir a quantidade de uma rotação. Neste livro, as rotações são medidas como fracções de uma volta completa. Por exemplo, a rotação anterior é $\frac{1}{6}$ de uma volta no sentido dos ponteiros do relógio.

Uma rotação como a ilustrada na figura seguinte ajusta-se à definição de movimento rígido:

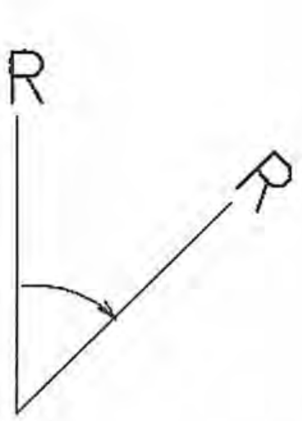


Existe um método muito útil para desenhar uma rotação.

Primeiro rode a folha de modo que a linha inicial da rotação esteja vertical e a figura inicial colocada directamente no topo dessa linha. Fixe este desenho.



Em seguida rode a folha de modo que a linha final da rotação esteja vertical. Desenhe a figura no topo dessa linha de modo que o resultado se pareça com o desenho da posição inicial que fixou. É necessária alguma prática para executar correctamente esta última parte.



Olhando para os exemplos anteriores, pode ver este processo em acção.

Outro ponto a reter quando se desenham as rotações é que os dois segmentos usados para indicar a rotação devem ser do mesmo comprimento; como foi referido anteriormente, essas linhas actuam como os raios de uma roda. É necessário formular esta observação como uma regra.

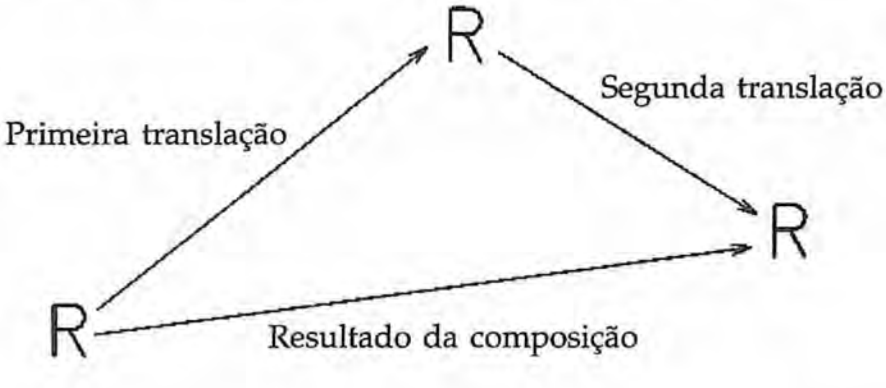
Regra. A distância da figura inicial ao centro de rotação é igual à distância da figura final ao centro de rotação.

Esta regra será uma parte-chave na próxima secção, pelo que se deve certificar de que é verdadeira.

Tarefa 2.1.1: Pratique desenhando algumas rotações. Use várias figuras e rotações, tanto no sentido dos ponteiros do relógio como no sentido contrário e com várias quantidades. Verifique que os exemplos escolhidos se ajustam à definição de movimento rígido e obedecem à regra anterior.

2.2 Combinação de translações e rotações

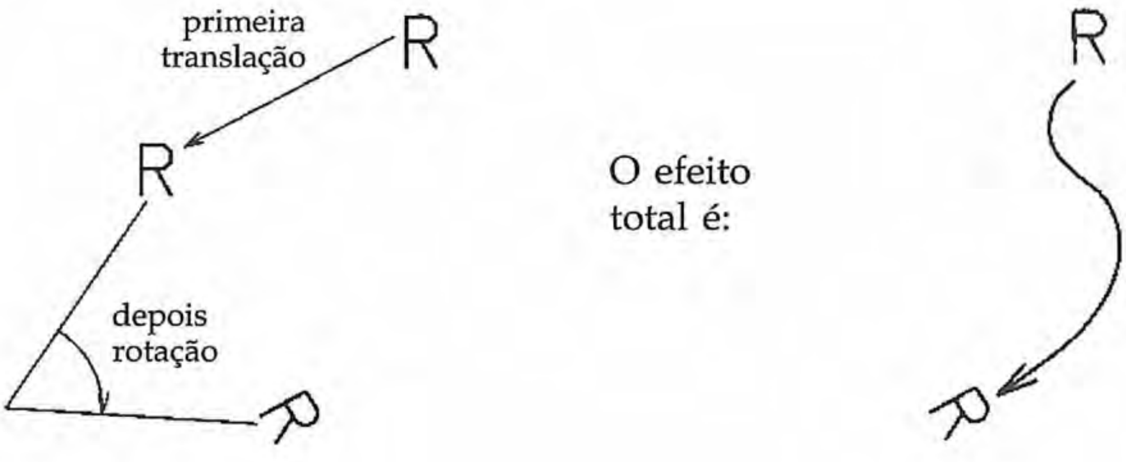
Até ao momento foram apresentados dois movimentos rígidos do plano: a translação e a rotação. O que se pretende agora é combiná-los. O caso mais simples é quando se faz uma translação seguida de outra translação. Por exemplo:



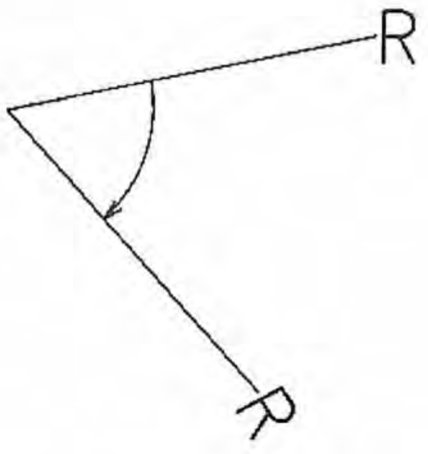
Neste exemplo verifica-se que uma translação seguida de uma translação é uma translação. Na realidade, isto acontece sempre.

Regra. Uma translação seguida de uma translação é uma translação.

É importante que se convença que a regra funciona sempre. Uma situação mais complexa é a de uma translação seguida de uma rotação.



A linha ondulada indica que existe um movimento rígido que leva o primeiro R para o segundo R. Esta linha não revela nada acerca desse movimento, sendo simplesmente um modo de mostrar qual o R inicial e o final. Neste exemplo, o movimento rígido é uma rotação.



Deve despender uns momentos a verificar que a rotação dada é correcta.

Tarefa 2.2.1: Faça algumas experiências para mostrar que uma rotação após uma translação é sempre uma outra rotação. Elabore um método para determinar qual a rotação resultante.

Isto é, descubra o centro e a quantidade de rotação para o movimento rígido resultante.

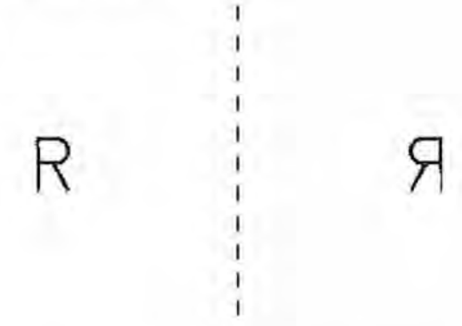
Tarefa 2.2.2: Suponha que são desenhados dois RR algures numa folha de papel. Qual o tipo de movimento rígido, translação ou rotação, que irá mover um R para o outro?

Neste momento faltam ainda abordar os seguintes casos: a translação após uma rotação e a rotação após uma rotação. Estes casos serão discutidos na secção 2.5.

2.3 Reflexão de espelho

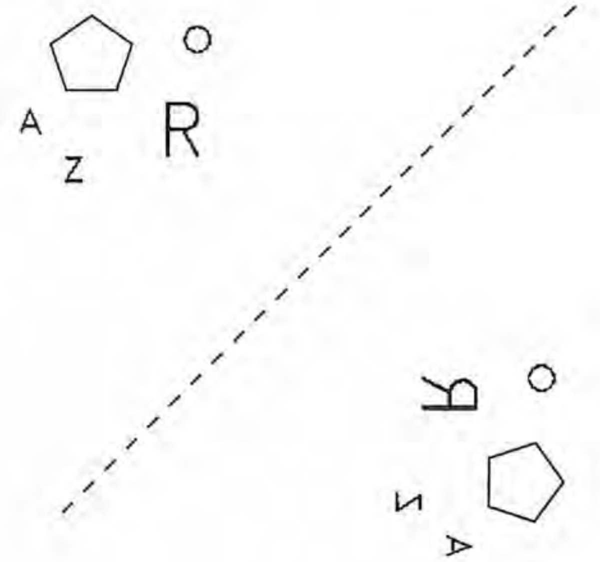
A lista de movimentos rígidos apresentada ainda não está completa: outro movimento rígido é a REFLEXÃO.

A reflexão é determinada por uma linha de espelho. Será usada uma linha quebrada para indicar o espelho.



Uma reflexão transforma a letra portuguesa R na letra russa Я, que se pronuncia «ia». Se não estudou russo, a palavra «ia» pode soar engraçada, mas rapidamente verá que é muito mais conveniente do que «R ao contrário». Diga «ia» alto algumas vezes para se habituar à sua sonoridade.

Tal como ilustra este exemplo, uma reflexão ajusta-se à definição de movimento rígido:

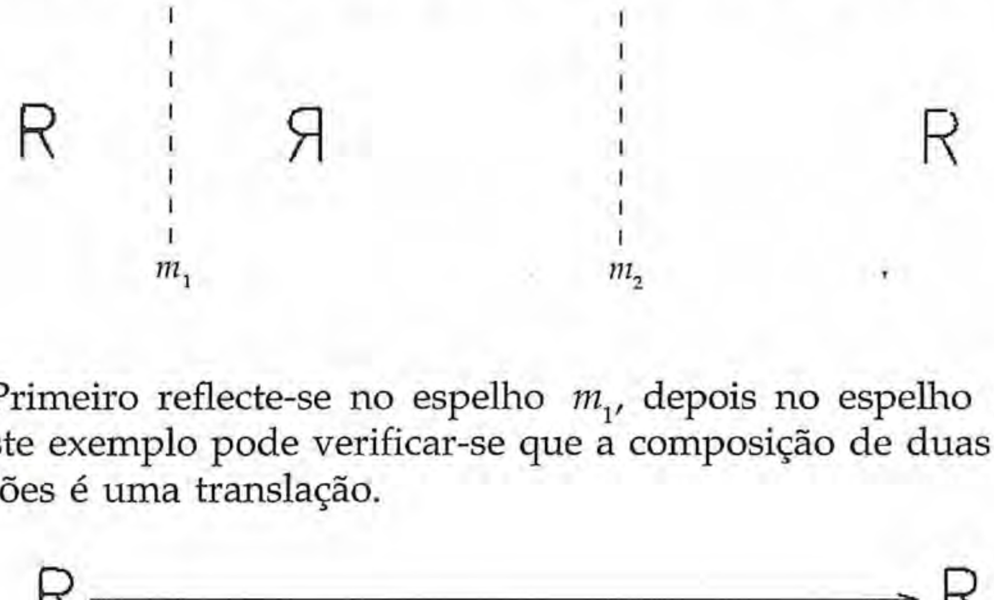


Rodando a folha de modo que a linha de espelho fique na vertical torna-se mais fácil verificar que a reflexão está correctamente desenhada. Os dois lados são realmente «imagens de espelho» um do outro, e, se a folha for dobrada ao longo da linha de espelho, a figura original e a sua imagem irão cair uma sobre a outra. Esta observação pode ajudar a desenhar o resultado de uma reflexão. Duas outras observações úteis:

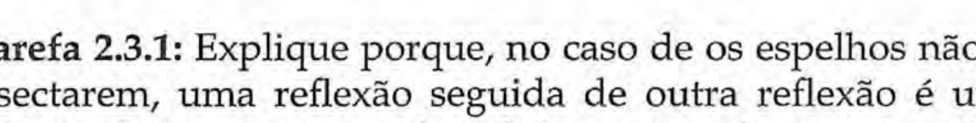
- Pontos do espelho não se movem por efeito da reflexão.
- A distância de um ponto ao espelho é igual à distância da imagem desse ponto ao espelho.

Esta observação será útil quando se tentar perceber como interage a reflexão com os outros movimentos rígidos; este será o próximo objectivo deste capítulo.

Para combinar uma reflexão com outra reflexão existem dois casos, dependendo de os espelhos se intersectarem ou serem paralelos. Um exemplo com espelhos paralelos é o seguinte:

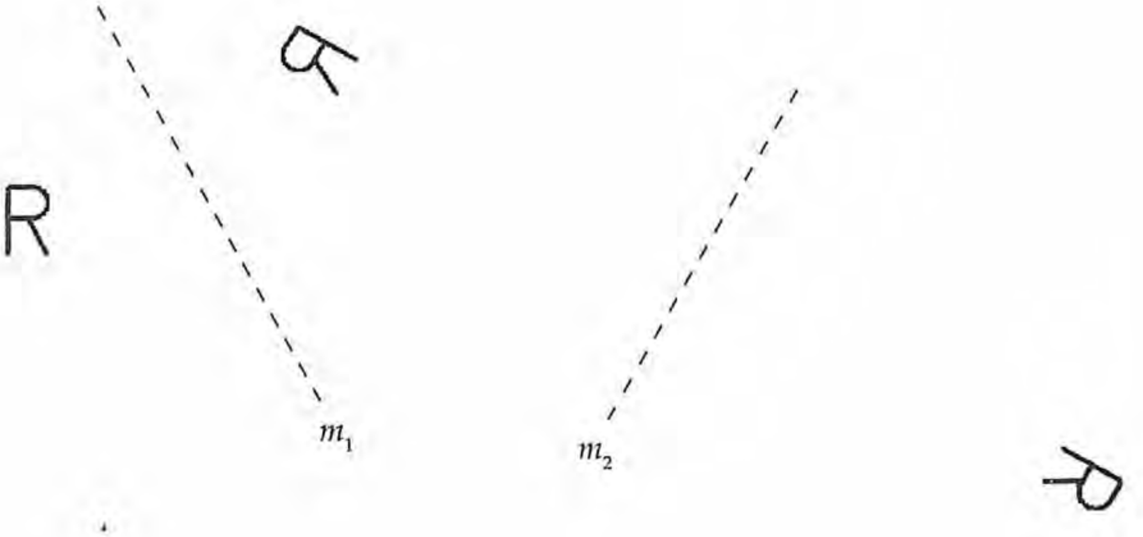


Primeiro reflecte-se no espelho m_1, depois no espelho m_2. Neste exemplo pode verificar-se que a composição de duas reflexões é uma translação.

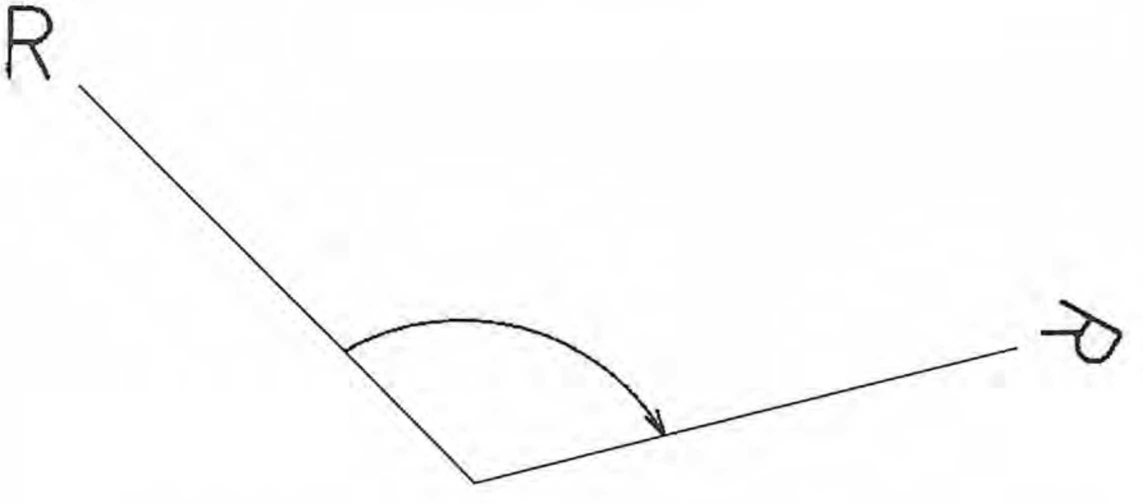


Tarefa 2.3.1: Explique porque, no caso de os espelhos não se intersectarem, uma reflexão seguida de outra reflexão é uma translação. Determine como descobrir que translação ocorre. Isto é, estabeleça um método para determinar a direcção e a quantidade da translação resultante.

Se os dois espelhos se intersectarem, a situação é ligeiramente diferente:



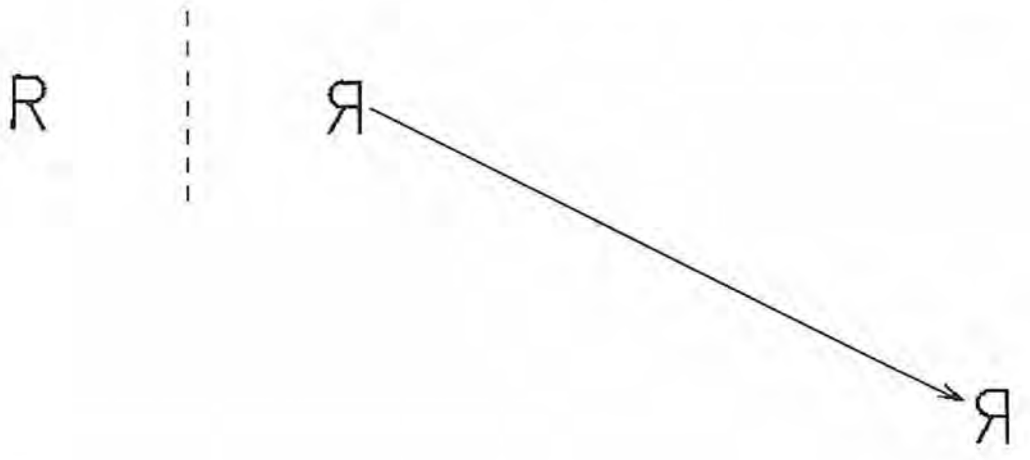
Se as linhas de espelho forem prolongadas, acabará por ser encontrado o ponto onde os espelhos se intersectam. Neste exemplo, a composição é uma rotação:



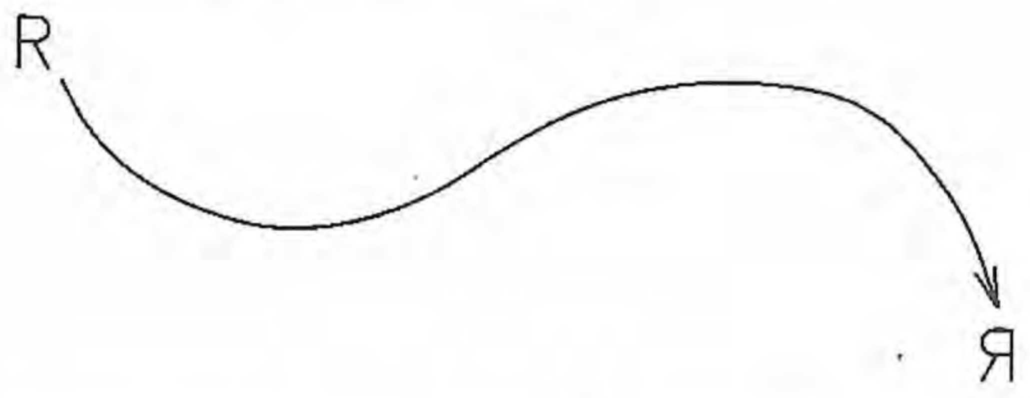
Tarefa 2.3.2: Explique porque, no caso de os espelhos se intersectarem, uma reflexão seguida de uma reflexão é sempre uma rotação. Determine como descobrir rapidamente que rotação ocorre. Isto é, estabeleça um método para determinar o centro e a quantidade de rotação.

2.4 Reflexão deslizante

De seguida combina-se uma reflexão com uma translação.



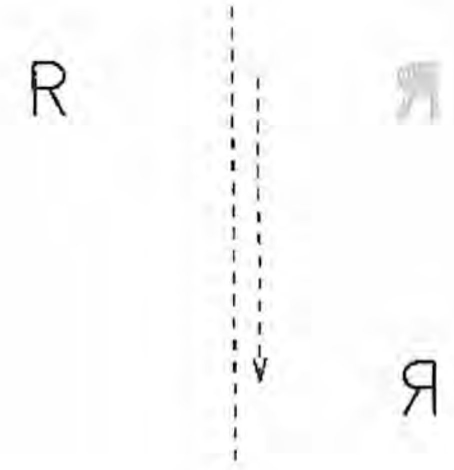
O resultado da composição é o seguinte:



Mais uma vez se utiliza uma linha ondulada para indicar movimentos rígidos ainda não determinados e que movem o R para o Я. Um pouco de experimentação leva a concluir que nenhum dos movimentos rígidos estudados pode mover o R para o Я num único movimento. É verdade que se podem combinar dois movimentos rígidos para realizar esta tarefa, mas uma simples translação, rotação ou reflexão não basta. Existem duas maneiras de resolver este problema. O método aborrecido, de vistas curtas ou de enfiar a cabeça na areia, é dizer: «OK, tem de se viver com o facto de se precisarem de combinar várias operações de modo a obter todos os movimentos rígidos do plano.» O método interessante, de vistas largas e de acção, é *inventar outro* *movimento rígido do plano.* O novo movimento rígido é chamado «reflexão deslizante».

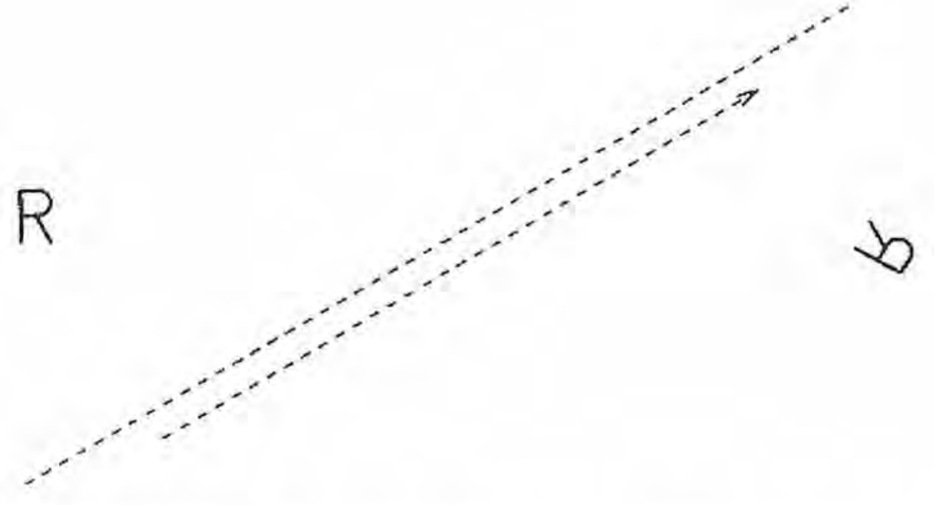
Uma REFLEXÃO DESLIZANTE é uma reflexão de espelho, seguida de uma translação paralela ao espelho. Esta operação conta como *um único movimento.*

Exemplifica-se uma reflexão deslizante desenhando um espelho, chamado LINHA DESLIZANTE, imediatamente seguido de uma seta quebrada que indica a quantidade de translação:



A figura sombreada *não* faz parte da reflexão deslizante: ela apenas ajuda esta a ser desenhada correctamente. É normalmente boa ideia esboçar ligeiramente a figura sombreada quando se pretende desenhar uma reflexão deslizante.

Eis outro exemplo:



Deve esboçar o Я sombreado para verificar que a reflexão deslizante foi desenhada correctamente. *Aviso:* a figura sombreada estará no topo desta frase.

Uma reflexão deslizante, tal como uma reflexão de espelho, transforma um R num Я. Outra semelhança com a reflexão de espelho é que o R inicial está à mesma distância da linha deslizante que o Я final. Estas observações são importantes para compreender a reflexão deslizante.

Tarefa 2.4.1: Dada uma translação ou uma reflexão existe sempre uma reflexão deslizante que acompanha o mesmo movimento? Desenhe primeiro uma reflexão deslizante que acompanhe a translação da reflexão que inicia esta secção.

2.5 Combinação de movimentos rígidos

Nesta secção examinar-se-ão as várias formas de combinar os movimentos rígidos. Existem várias combinações possíveis; pode ser aconselhável uma primeira leitura muito leve desta secção. Pode sempre voltar atrás para qualquer informação de que necessite.

O esquema seguinte é uma maneira conveniente de classificar os movimentos rígidos. Recorde que um **ponto fixo** de um movimento rígido é um ponto que não se desloca por efeito desse movimento.

Translação: move R → R, não tem pontos fixos.
Rotação: move R → R, tem um ponto fixo.
Reflexão de espelho: move R → Я, fixa a linha de espelho.
Reflexão deslizante: move R → Я, não tem pontos fixos.
Não fazer nada: move R → R, fixa todos os pontos

Estas propriedades podem fornecer alguns atalhos quando se analizam combinações de simetrias.

Tarefa 2.5.1: Use as propriedades anteriores para dar uma explicação rápida da razão por que uma reflexão após uma reflexão com espelhos que se intersectam deve ser uma rotação.

Está então concluída a análise da translação e da rotação.

Tarefa 2.5.2: Será que uma translação após uma rotação funciona da mesma maneira que uma rotação após uma translação?

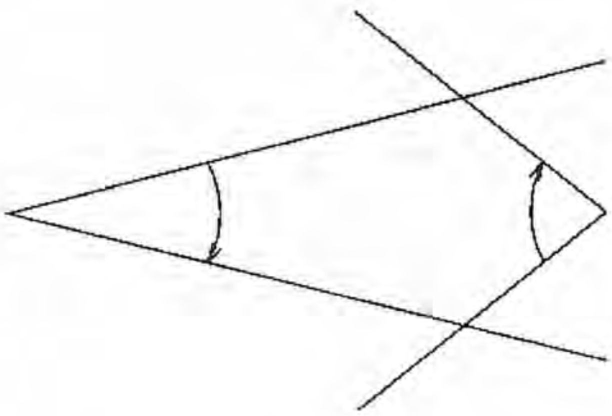
Tarefa 2.5.3: Uma rotação após uma rotação pode ser por vezes uma translação. Determine exactamente quando tal acontece.

Tarefa 2.5.4: Uma rotação de meia volta é de certa maneira mais fácil de analisar do que as outras rotações:

a) Determine o que acontece quando uma rotação de meia volta é combinada com uma translação. Isto é, descubra a nova quantidade de rotação e a localização do novo centro de rotação. Existem duas possibilidades, dependendo de fazer primeiro a rotação ou a translação.

b) Determine o que acontece quando uma rotação de meia volta é combinada com outra rotação de meia volta.

Tarefa 2.5.5: Imagine duas rotações tais que a sua combinação é outra rotação. Estabeleça uma maneira de descobrir o centro e a quantidade de rotação para esta nova rotação. A figura seguinte pode ajudar a localizar o novo centro de rotação:

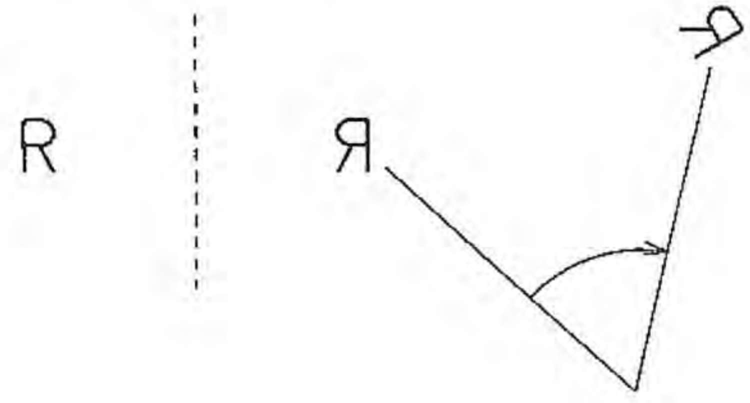


Tarefa 2.5.6: Suponha que desenha dois RR num papel de modo que um esteja inclinado em relação ao outro. Sabe-se que existe uma rotação que irá mover um R para o outro. Estabeleça uma maneira de descobrir *qual* é esta rotação. Isto é, determine o centro e a quantidade de rotação.

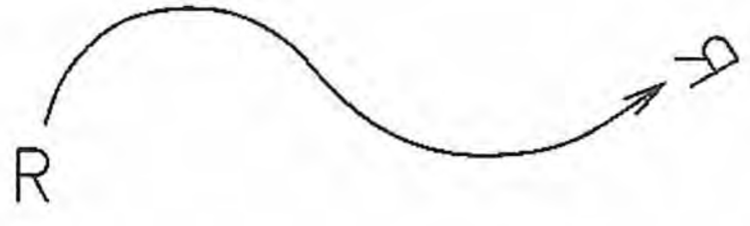
Tarefa 2.5.7: Na tarefa 2.3.2 descobriu-se que uma reflexão após uma reflexão com espelhos que se intersectam é uma rotação. Será que o contrário é verdade? Isto é, dada uma rotação, podem sempre encontrar-se duas reflexões tais que uma reflexão seguida da outra é o mesmo que a rotação dada?

Foram completamente analisadas as translações e as rotações, seguindo-se agora a reflexão de espelho e a reflexão deslizante.

O primeiro caso ainda não considerado é uma rotação após uma reflexão. Eis o exemplo seguinte:



O resultado da composição é o seguinte:



Mais uma vez, a linha ondulada indica um movimento rígido por determinar. Uma vez que a figura inicial é um R e a figura final um Я, o movimento rígido desejado é uma reflexão ou uma reflexão deslizante. Neste exemplo trata-se de uma reflexão deslizante:

Deve verificar se a resposta dada é a correcta.

As tarefas seguintes irão completar o seu estudo sobre os movimentos rígidos do plano. A primeira tarefa mostra que uma rotação após uma reflexão é sempre uma reflexão ou uma reflexão deslizante. Este resultado é usado em algumas das outras tarefas; assim, se não as fizer por ordem, pode tomar este resultado como válido.

Tarefa 2.5.8: Dados um R e um Я desenhados algures numa folha de papel, estabeleça um método para descobrir a reflexão ou a reflexão deslizante que envia uma figura para a outra. Isto é, dadas duas figuras, encontre a linha deslizante e a quantidade de translação.

Tarefa 2.5.9: Que movimento rígido se obtém quando se combinam duas reflexões deslizantes? Nota: existem dois casos, dependendo de as linhas deslizantes se intersectarem ou serem paralelas.

Tarefa 2.5.10: Dada uma reflexão e uma rotação, como pode rapidamente dizer se a rotação após a reflexão é outra reflexão ou uma reflexão deslizante?

Tarefa 2.5.11: Foi introduzida a reflexão deslizante porque se pretendia um movimento rígido do plano que fosse executado com um só movimento. Existem outros movimentos rígidos ainda não descobertos? Descubra outro ou explique porque não existem mais.

2.6 Notas

Nota 2.6.a: A operação de «não fazer nada» pode ser considerada um movimento rígido do plano que apenas leva todos os pontos para a mesma posição inicial. Irá achar muitas vezes útil classificar o não fazer nada como uma translação ou uma rotação.

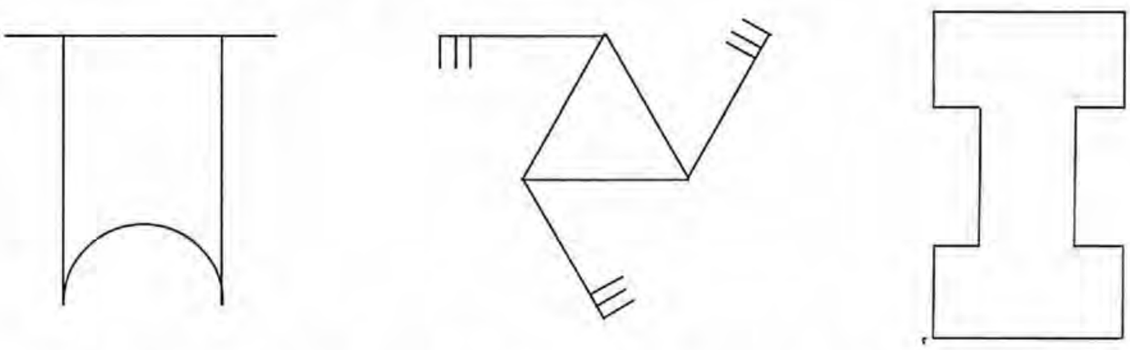
Nota 2.6.b: A frase «o conjunto de translações e rotações é fechado» é uma maneira de dizer «uma translação ou rotação após uma translação ou rotação é uma translação ou uma rotação». Da mesma forma, o conjunto de translações é fechado. O conjunto de rotações não é fechado porque podem combinar-

-se duas rotações e não se obter uma rotação. Mais geralmente, dado um modo de combinar pares de elementos de um conjunto, chamado «operação binária», o conjunto é dito fechado para a operação se o resultado desta operação está outra vez dentro do conjunto. Neste capítulo combinam-se movimentos rígidos fazendo primeiro um e depois o outro, pelo que está subentendido que esta é a operação que temos em mente quando dizemos «o conjunto das translações é fechado». Da mesma maneira, só vale a pena estudar conjuntos fechados de movimentos rígidos. Se tentasse estudar, por exemplo, apenas reflexões, estaria condenado a falhar, porque, quando se combinam duas reflexões, obtém-se uma rotação ou uma translação. Estas observações tornar-se-ão importantes no capítulo 5.

3
Figuras finitas

3.1 Simetria

O que é a simetria? As seguintes figuras ajustam-se à concepção usual da palavra «simétrica»:



A primeira figura tem simetria de espelho, a segunda tem simetria de rotação e a terceira tem simetria de espelho e de rotação. A ideia usual em cada caso é que existe um movimento rígido que deixa a figura exactamente na mesma. Esta observação será levada em conta numa definição provisória.

Definição provisória. Uma SIMETRIA de uma figura é um movimento rígido que deixa a figura exactamente na mesma.

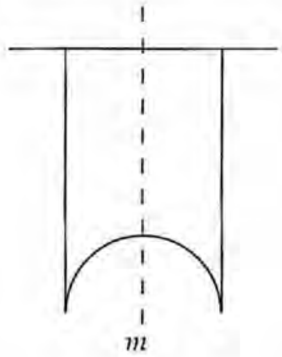
Uma simetria é um movimento rígido que deixa a figura igual à inicial. O significado usual da frase «a figura é simétrica» pode agora ser reescrita como «a figura tem uma simetria». No capítulo anterior foram descobertos todos os movimentos rígidos do plano; neste tentar-se-ão encontrar as várias simetrias das figuras planares. O conhecimento da forma como os diferentes movimentos rígidos do plano se combinam uns com os outros será muito útil neste capítulo e em todo o livro.

Convenção especial. A operação de não fazer nada é uma simetria da figura.

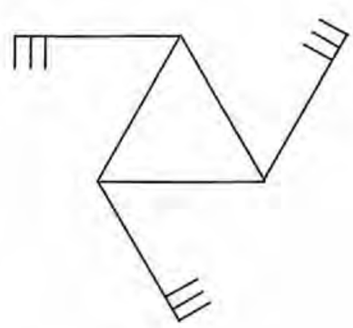
O movimento rígido que deixa tudo no lugar original será sempre uma simetria; portanto, figuras que se ajustem à concepção usual de «simétrica» terão mais do que uma simetria. Por vezes refere-se o não fazer nada como a SIMETRIA TRIVIAL da figura.

Todas as simetrias das três figuras anteriores são descritas da seguinte forma.

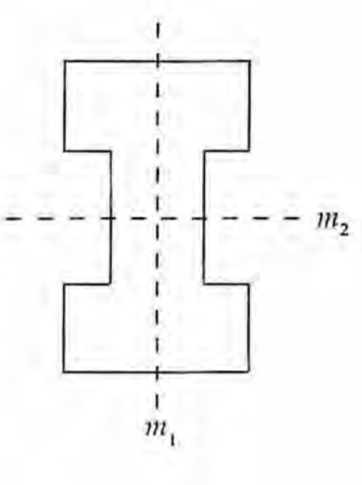
1) Não fazer nada
2) Reflexão no espelho m



1) Não fazer nada
2) Rotação de $\frac{1}{3}$ de volta
3) Rotação de $\frac{2}{3}$ de volta



1) Não fazer nada
2) Reflexão no espelho m_1
3) Reflexão no espelho m_2
4) Rotação de $\frac{1}{2}$ volta



É necessário que haja uma maior precisão na descrição das rotações da segunda figura. A simetria de $\frac{1}{3}$ de volta é ambígua, uma vez que pode referir-se a uma rotação no sentido dos ponteiros do relógio ou no sentido contrário. Para evitar esta ambiguidade adopta-se a seguinte convenção especial:

Convenção especial. Todas as rotações serão medidas no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio.

Assim, as duas rotações descritas na segunda figura são rotações no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Existe outra possibilidade de ambiguidade com as rotações. A próxima tarefa tem como objectivo resolver este problema.

Tarefa 3.1.1: Esclareça a seguinte ambiguidade: a rotação de uma volta deve ser contada como a operação de não fazer nada?

Os exemplos anteriores são figuras finitas, isto é, formas que não têm qualquer simetria de translação.

Definição. Uma FIGURA FINITA é uma figura que não tem nenhuma simetria de translação não trivial.

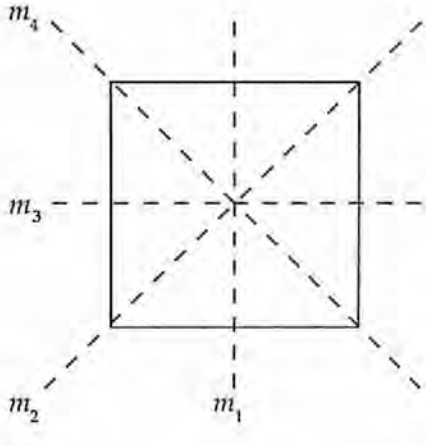
A expressão «não trivial» é necessária, uma vez que a operação de não fazer nada conta como uma translação, e, para todas as figuras, o não fazer nada é uma simetria. As grelhas do capítulo 1 não são figuras finitas porque têm simetrias de translação. De facto, os movimentos permitidos desse capítulo são exactamente as simetrias de translação dessas grelhas. Ao longo deste capítulo serão abordados os casos das figuras finitas. Nos capítulos posteriores serão estudadas as figuras com simetrias de translação.

Tarefa 3.1.2: Desenhe algumas figuras finitas e descubra todas as suas simetrias. Alguns bons exemplos para tentar são o triângulo, o quadrado e a estrela.

Tarefa 3.1.3: Uma figura finita pode ter duas simetrias de rotação com centros de rotação diferentes?

A figura seguinte indica as várias simetrias do quadrado:

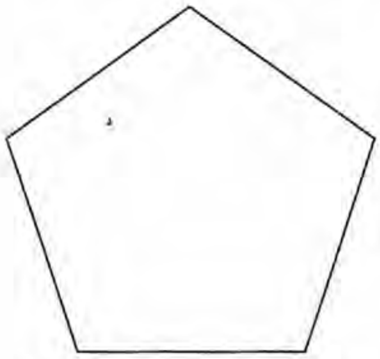
1) Não fazer nada
2) Rotação de $\frac{1}{4}$ de volta
3) Rotação de $\frac{1}{2}$ volta
4) Rotação de $\frac{3}{4}$ de volta
5) Reflexão no espelho m_1
6) Reflexão no espelho m_2
7) Reflexão no espelho m_3
8) Reflexão no espelho m_4



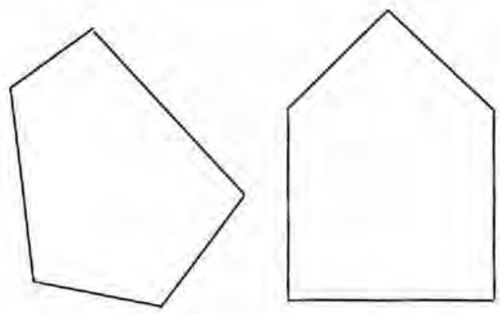
Se se contar a operação de não fazer nada como uma rotação, o que faz sentido, uma vez que esta é uma rotação por um ângulo nulo, verifica-se que o quadrado tem 4 simetrias de rotação e 4 simetrias de reflexão. Poder-se-á tomar este facto como uma regra? Ou seja, terá um pentágono 5 simetrias de rotação e 5 simetrias de reflexão? Na verdade, é necessária mais uma condição para que esta regra seja verdadeira: o pentágono tem de ser regular.

Definição. Um polígono é REGULAR se todos os seus lados e todos os seus ângulos são iguais.

Um exemplo que ilustra esta ideia é o seguinte:



Um pentágono regular



Pentágonos irregulares

Tarefa 3.1.4: Que desporto utiliza um pentágono irregular?

Tarefa 3.1.5: Explique porque é que o n-gono regular, isto é, o polígono regular com n lados, tem exactamente n simetrias de rotação e n simetrias de reflexão.

Tarefa 3.1.6: Experimente ver que simetrias um polígono irregular pode ter. Os pentágonos e os hexágonos são bons exemplos para tentar.

3.2 Combinação de simetrias

O ponto de partida para esta secção é a observação seguinte:

Observação. Se forem combinadas duas simetrias de uma figura, obtém-se outra simetria da figura.

Utiliza-se a palavra «combinar» no sentido de se aplicar primeiro uma simetria e depois a outra, tal como foram combinados os movimentos rígidos do plano do capítulo 2.

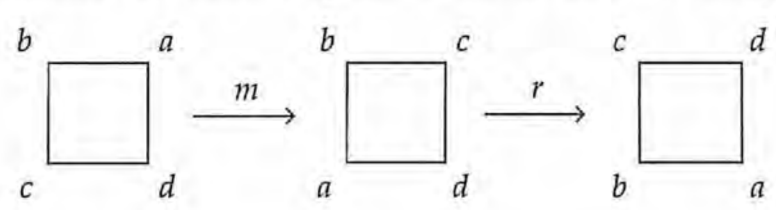
A observação anterior é correcta, uma vez que ambas as simetrias são movimentos rígidos, pelo que a sua combinação também é um movimento rígido; e ambas deixam a figura inalterada, motivo por que a combinação também deixa a figura inalterada. Por outras palavras, a combinação também é uma simetria da figura. Tomemos um exemplo concreto: de acordo com as simetrias do quadrado descritas na secção anterior, seja m a «reflexão do quadrado no espelho m_4» e r a «rotação de $\frac{1}{4}$ de volta do quadrado». Os diagramas seguintes mostram explicitamente o efeito de m e r:

Tarefa 3.2.1: Construa diagramas que mostrem as 8 simetrias do quadrado.

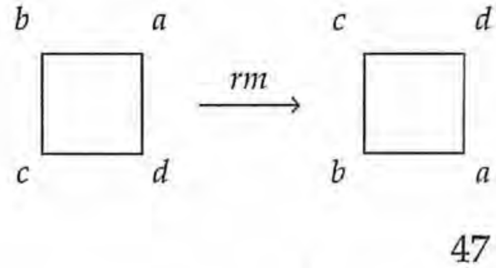
É interessante combinar agora o r e o m. A notação rm equivale à «rotação da reflexão de espelho do quadrado». Isto é, primeiro a reflexão de espelho, depois a rotação.

Nota muito importante. A simetria rm significa primeiro a reflexão de espelho, depois a rotação. As combinações de simetrias são lidas da direita para a esquerda. Por esta razão, rm significa uma rotação APÓS uma reflexão de espelho DO quadrado, fazendo-se portanto a rotação de uma figura que já foi reflectida.

Combinando os dois diagramas anteriores, o efeito de rm é:

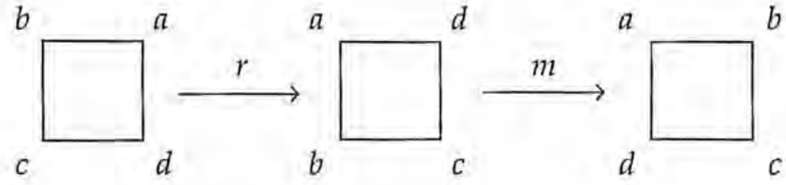


O efeito total de rm é:

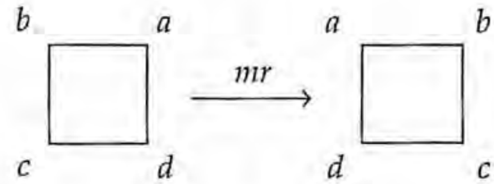


Uma vez que rm é uma simetria do quadrado, esta deve ser uma das 8 simetrias da secção anterior. Na tarefa 3.2.1, o leitor construiu os diagramas de cada simetria. De acordo com esses diagramas, pode verificar-se que rm é igual à reflexão no espelho m_3.

Outra maneira de combinar r e m é mr, o que quer dizer que primeiro se faz r e depois m. Será que é o mesmo que rm? Vamos descobrir. Combinando os diagramas de m e r na ordem inversa obtém-se o seguinte:



O efeito total de mr é, portanto:



De acordo com os diagramas realizados na tarefa 3.2.1, pode verificar-se que o efeito total é o mesmo que a reflexão no espelho m_1. É interessante verificar que rm não é igual a mr. A parte final desta secção será dedicada a tentar compreender a forma como as simetrias de rotação e reflexão de espelho de uma figura interagem umas com as outras. Para tal, um plano possível seria fazer várias experiências até se encontrarem semelhanças entre elas e depois tentar explicar essas semelhanças. Este plano é possível, mas demasiado maçador. Um método mais simples é manipular pequenos moldes das figuras.

Tarefa 3.2.2: Faça um molde em cartão de um triângulo regular, quadrado, pentágono e hexágono. Denomine ambos os lados da figura de modo que cada vértice tenha a mesma denominação dos dois lados. Isto significa que as letras *abcde* lidas no sentido dos ponteiros do relógio num lado serão lidas no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio do outro lado.

Uma maneira de fazer um pentágono é a seguinte: pegue numa tira lisa de papel e faça um nó.

Um nó: 

Puxe devagar as pontas do nó e achate-o. Junte as pontas e obterá um pentágono.

Tarefa 3.2.3: Verifique que, se virar ao contrário os moldes feitos na tarefa 3.2.2, obtém o efeito de uma reflexão de espelho.

Tarefa 3.2.4: Seja r a designação para $\frac{1}{2}$ volta do quadrado e m a designação para a reflexão no espelho m_2. rm é igual a mr? Manipulando um molde torna-se fácil resolver esta tarefa.

Ao realizar a tarefa 3.2.4 descobriu-se que rm era o mesmo que mr. Assim, por vezes tem-se $rm = mr$ e outras vezes $rm \neq mr$. Para descobrir o que pode realmente acontecer quando se estudam outros exemplos é necessária uma maior organização. Vamos primeiro fixar uma notação; essa notação será a mesma em todo o livro.

Notação

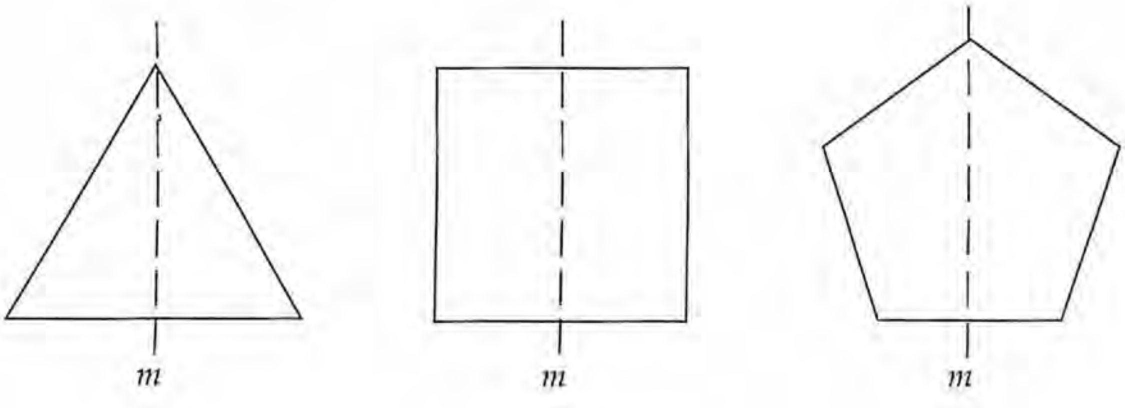
- 1 equivale à operação de não fazer nada
- r equivale à menor simetria de rotação da figura no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Para o quadrado r equivale a $\frac{1}{4}$ de volta, para o pentágono a $\frac{1}{5}$ de volta, etc. Para verificar o que r significa deve ter presente que figura está a ser discutida.
- r^2 equivale a operar r duas vezes, r^3 equivale a operar r três vezes, etc. Portanto, r^2 equivale para o quadrado a $\frac{1}{2}$ volta e para um hexágono a $\frac{1}{3}$ de volta.
- r^{-1} equivale à menor simetria de rotação da figura no sentido dos ponteiros do relógio. Isto é, r^{-1} é a rotação oposta à rotação r. Analogamente, r^{-2} é a rotação oposta à rotação r^2, etc.
- m equivale à simetria de reflexão de espelho da figura. Normalmente é necessário fazer um desenho para mostrar que reflexão de espelho se tem em mente.

Tarefa 3.2.5: Escreva, para algumas figuras, o que se entende exactamente por r, r^2, r^3 e r^{-1}. Será sempre verdade que $rr = r^2$, $rr^2 = r^3$ e $rr^{-1} = 1$?

Tarefa 3.2.6: Em álgebra existem as regras dos expoentes: $r^a r^b = r^{a+b}$ e $r^0 = 1$. Explique por que razão estas regras fazem sentido na nova notação.

Na nova notação podem exprimir-se as quatro simetrias de rotação do quadrado como sendo 1, r, r^2 e r^3. Uma regra útil é $r^4 = 1$. Para o quadrado, r equivale a $\frac{1}{4}$ de volta; esta regra diz apenas que uma volta completa é o mesmo que não fazer nada. Da mesma forma, $r^2 = r$, $r^6 = r^2$, etc. Estas equações são apenas verdadeiras para o quadrado. Equações semelhantes, mas não as mesmas, podem ser descobertas para outras figuras.

Designemos por m as seguintes reflexões de espelho:



Tarefa 3.2.7: Para as figuras anteriores verifique que mrm é uma rotação. Determine de que rotação se trata exprimindo a resposta em termos de r.

Tarefa 3.2.8: O quadrado tem 8 simetrias. Cinco delas são 1, r, r^2, r^3 e m. Exprima as outras três simetrias em termos de r e m. Faça o mesmo para o triângulo.

Tarefa 3.2.9: As quatro simetrias de reflexão de espelho do quadrado podem ser escritas como m, mr, mr^2 e mr^3. Desenhe um quadrado e denomine as linhas de espelho associadas a cada uma destas reflexões.

Nesta fase, um leitor atento terá concluído que as oito simetrias do quadrado podem ser representadas como $\{1, r, r^2, r^3, m, mr, mr^2, mr^3\}$. Portanto, qualquer simetria do quadrado se pode exprimir como uma destas oito escolhas. Por exemplo, r^2mrmr^3mr é uma simetria do quadrado, logo, uma destas oito.

A questão é: qual? Se se manipular o molde, verifica-se o seguinte:

De acordo com a tarefa 3.2.9, observa-se que é o mesmo que mr.

Convenção especial. Adopta-se a seguinte forma-padrão para escrever as simetrias de um polígono regular: as rotações serão escritas como 1, r, r^2, etc, e as reflexões de espelho como m, mr, mr^2, etc.

Dada uma simetria do quadrado, é necessário reescevê-la na forma-padrão. Para tal torna-se conveniente descobrir um método rápido e eficiente de o fazer; o método de manipular os moldes, utilizado anteriormente, torna-se fastidioso se se tiver de o usar repetidamente. É necessário um método capaz de «mover o m para a esquerda». Por exemplo, rm não está na lista das oito simetrias do quadrado, mas, estudando mais aprofundadamente esta simetria, pode verificar-se que rm é o mesmo que mr^3, e esta forma de simetria tem o m onde se pretende: à esquerda.

Nas próximas quatro tarefas é aceitável utilizar os moldes de cartão. No final destas tarefas deve ter algumas regras que o farão poder dispensar os moldes.

Tarefa 3.2.10: Para várias figuras diferentes exprima rm, r^2m, e r^3m na forma-padrão.

Tarefa 3.2.11: Verifique que a equação $rmr = m$ é verdadeira para o triângulo, o quadrado e o pentágono. Porque funciona esta regra para estas três figuras, enquanto muitas outras regras necessitam de ser modificadas, dependendo de quantos lados a figura tem? É também verdade que r^2mr^2 é sempre o mesmo que m?

Tarefa 3.2.12: Utilize as tarefas 3.2.10 e 3.2.11 para descobrir uma regra que exprima rm em termos de qualquer coisa com m na esquerda. Descubra uma regra que funcione para qualquer figura. Em seguida descubra regras semelhantes para r^2m e r^3m.

Tarefa 3.2.13: Explique porque $m^2 = 1$. Isto é, operar m duas vezes é o mesmo que não fazer nada. Outra maneira de escrever esta equação é $mm = 1$.

Os resultados das tarefas 3.2.12 e 3.2.13, juntamente com as regras $r^4 = 1$ para o quadrado, $r^5 = 1$ para o pentágono e assim por diante, é tudo o que é necessário para reduzir qualquer combinação de rr e mm à forma mais simples. Usar essas regras torna-se mais rápido e mais exacto do que manipular os moldes das figuras.

Tarefa 3.2.14: Utilize as regras das tarefas 3.2.12 e 3.2.13 para verificar as equações seguintes. Por outras palavras, simplifique o lado esquerdo de cada equação e verifique se se obtém o lado direito.

$r^2mmr^3 = r^5$	para todas as figuras
$mr^2mr^3 = r$	para todas as figuras
$mr^3mr^2 = r^{-1}$	para todas as figuras
$rmrmrmrm = 1$	para todas as figuras
$r^3mr^2mr^{-3}mr = mr^3$	para todas as figuras
$mr^6mr^{-5}m = mr^3$	para o quadrado
$r^2mr^{-3}mr^2 = r^3$	para o quadrado
$r^2mr^{-3}mr^2 = r$	para o triângulo
$mr^7mr^{-3} = r^2$	para o hexágono

A tarefa seguinte foi acidentalmente descoberta por Nicolas Timbanidis quando estava a trabalhar com uma versão anterior deste livro.

Tarefa 3.2.15: Para o quadrado, a equação $mr^3mr^2m = mr$ é verdadeira. Se escrever ambos os lados na ordem inversa, obtém $mr^2mr^3m = rm$. Esta equação também é verdadeira! A tarefa é a seguinte: determine se escrever ambos os lados de uma equação verdadeira na ordem inversa resulta sempre noutra equação verdadeira.

Tarefa 3.2.16: Seja R uma *qualquer* simetria de rotação e M uma *qualquer* simetria de reflexão de espelho de uma figura finita. A partir da tarefa 3.2.4 notou-se que, por vezes, $RM = MR$ e por vezes $RM \neq MR$. Descubra uma regra que determine, para quaisquer M e R, se RM é igual a MR ou não.

3.3 Tabelas de multiplicação

As regras descobertas para combinar simetrias são suficientes para realizar as tarefas apresentadas, mas não nos dão uma visão de conjunto. O conjunto de simetrias de uma figura tem ela própria uma estrutura interessante. O que significa exactamente «estrutura» e o que é essa estrutura são questões que serão exploradas exaustivamente noutro capítulo. Por agora será apenas dada uma rápida visão deste tópico. Para o fazer começa-se por elaborar a tabela de multiplicação para as simetrias da figura. Essa tabela contém a informação de como combinar quaisquer duas simetrias da figura com o resultado escrito na forma-padrão.

A tabela de multiplicação das simetrias do triângulo é a seguinte:

Δ	1	r	r^2	m	mr	mr^2
1	1	r	r^2	m	mr	mr^2
r	r	r^2	1	mr^2	m	mr
r^2	r^2	1	r	mr	mr^2	m
m	m	mr	mr^2	1	r	r^2
mr	mr	mr^2	m	r^2	1	r
mr^2	mr^2	m	mr	r	r^2	1

Cada linha e cada coluna desta tabela estão associadas a uma simetria escrita na forma-padrão e as entradas estão também escritas nessa forma. Cada elemento da tabela representa o resultado de multiplicar a simetria associado à linha pela simetria associada à coluna. Esta operação exprime-se normalmente como (linha)(coluna). É importante que a linha esteja situada à esquerda e a coluna à direita, devendo o resultado ser escrito na forma-padrão. Por exemplo, a 4.ª linha está associada a m e a 3.ª coluna a r^2; portanto, o elemento na 4.ª linha, 3.ª coluna, é mr^2. Alguns dos elementos são um pouco mais trabalhosos. Por exemplo, o elemento na 2.ª linha, 4.ª coluna, deveria ser rm. Mas, como rm não está na forma-padrão, usa-se mr^2, porque $rm = mr^2$ e mr^2 está na forma-padrão.

Tarefa 3.3.1: Escreva a tabela de multiplicação para as simetrias do quadrado. Use as suas próprias regras da secção anterior para simplificar os elementos.

Tarefa 3.3.2: Compare as tabelas de multiplicação para o quadrado e o triângulo, notando quaisquer semelhanças e propriedades que tenham em comum. Tente adivinhar como deve ser a tabela de multiplicação para o pentágono e depois escreva-a. Verifique alguns elementos da tabela do pentágono para ver se está correcta.

3.4 Inversos

Descreveu-se originalmente r^{-1} como o oposto da rotação r. Uma definição mais precisa seria que r^{-1} é o inverso de r e normalmente pronuncia-se r^{-1} como «inverso de r».

Definição. Diz-se que a é o inverso de b se $ab = 1$. Por outras palavras, fazer b e depois a tem como efeito final não fazer nada.

A tabela de multiplicação torna mais fácil descobrir o inverso de uma simetria. Primeiro localiza-se a simetria na primeira linha da tabela de multiplicação. Depois segue-se para baixo ao longo dessa coluna até se encontrar o 1. A simetria no lado esquerdo dessa linha é o inverso. Usando este método para o triângulo, descobre-se que r é o inverso de r^2 e mr é o inverso de mr. É interessante verificar que mr é o seu próprio inverso.

Tarefa 3.4.1: Use as tabelas de multiplicação para descobrir os inversos das simetrias do quadrado e do triângulo.

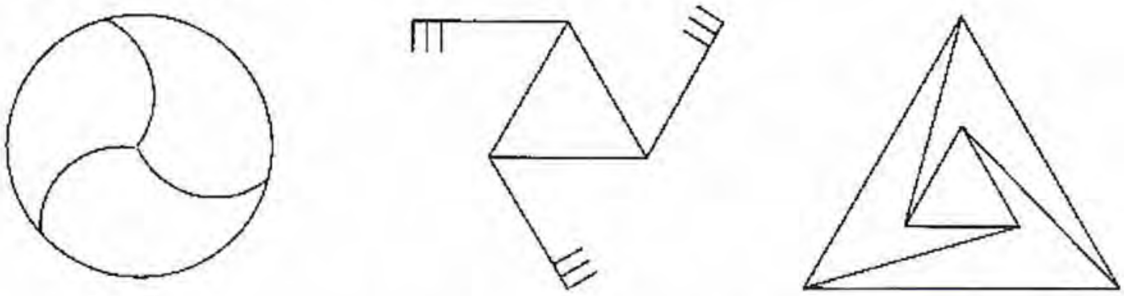
Tarefa 3.4.2: Uma simetria pode ter mais de um inverso? Que simetrias são os seus próprios inversos?

Tarefa 3.4.3: O que se obtém quando se faz o inverso do inverso de uma simetria? O que diz isto acerca da localização do 1 na tabela de multiplicação?

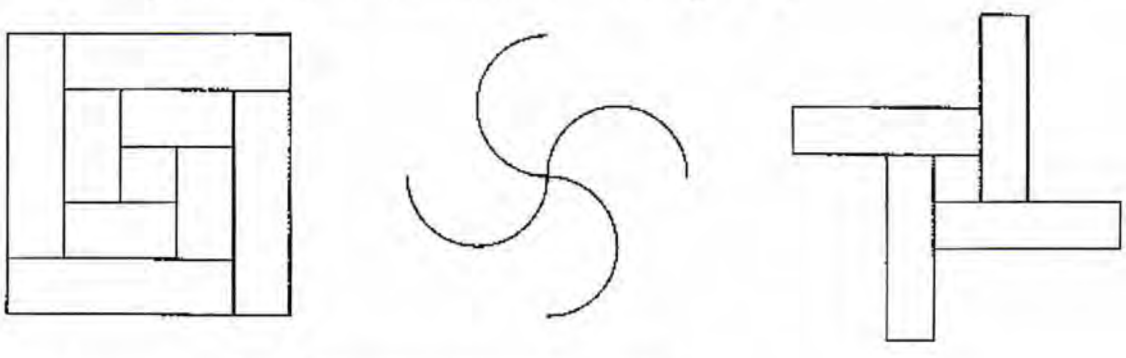
3.5 Os tipos de simetrias finitas

Qualquer das figuras finitas estudadas tem, ou apenas simetrias de rotação, ou um número igual de simetrias de rotação e reflexão de espelho. Veja os exemplos anteriores para verificar que esta observação é correcta.

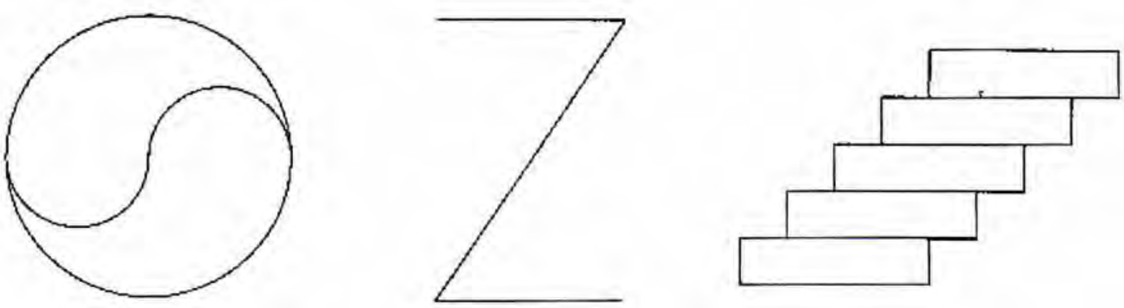
Se uma figura finita tem exactamente N simetrias de rotação e nenhuma simetria de reflexão de espelho, diz-se que a figura tem simetria de tipo C_N. O C significa «cíclico». Por exemplo, as seguintes figuras têm simetria de tipo C_3:



As figuras abaixo têm simetria de tipo C_4:



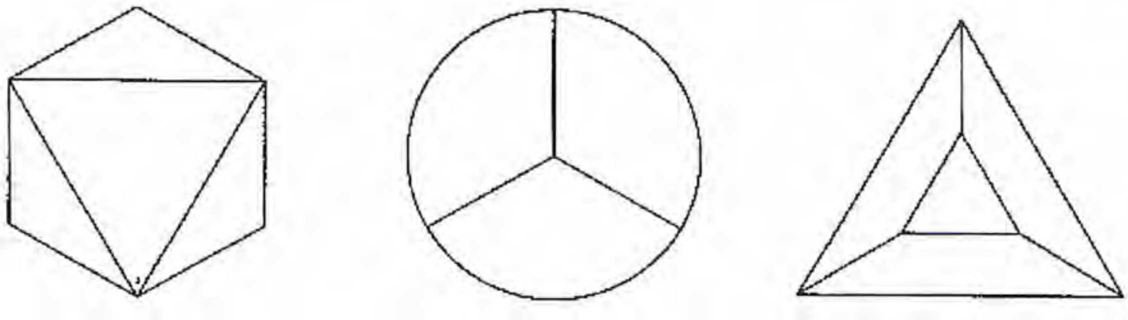
As seguintes têm simetria de tipo C_2:



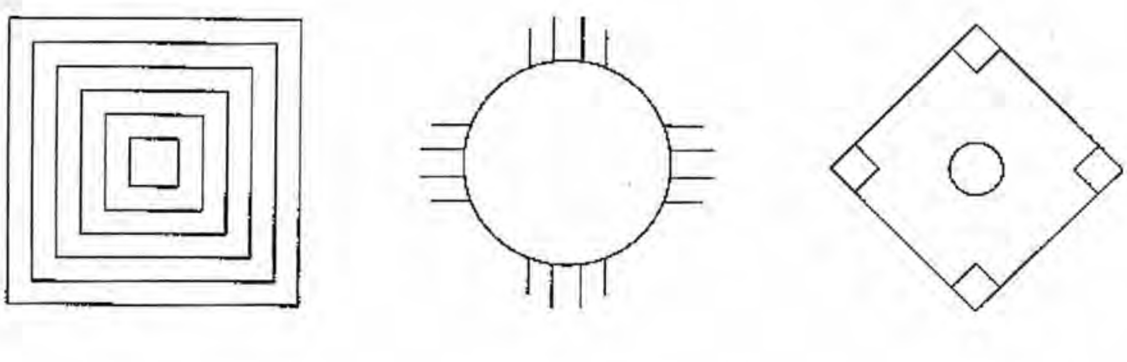
E as seguintes têm simetria de tipo C_1:

Normalmente pensa-se que as figuras com simetria de tipo C_1 não têm nenhuma simetria, mas é mais correcto dizer que têm a operação de não fazer nada como a sua única simetria.

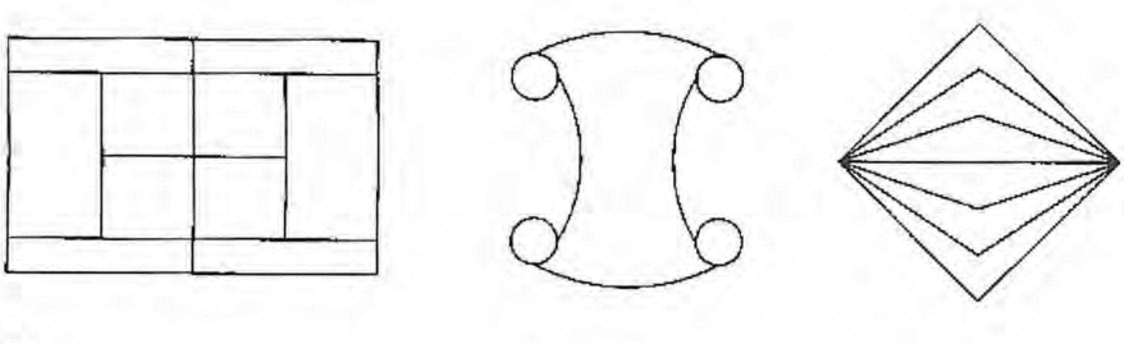
Se uma figura finita tem exactamente *N* simetrias de rotação e *N* de reflexão de espelho, diz-se que a figura tem simetria de tipo D_N. O *D* significa «diedral». Por exemplo, as figuras seguintes têm simetria de tipo D_3:



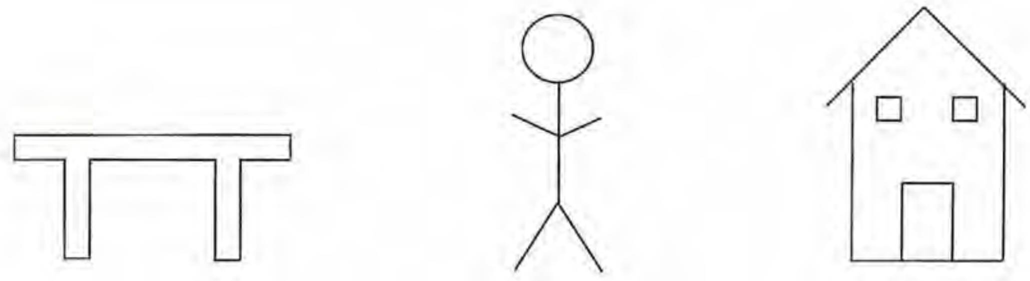
As figuras abaixo têm simetria de tipo D_4:



As seguintes têm simetria de tipo D_2:



E estas têm simetria de tipo D_1:



É comum referir-se uma figura com simetria de tipo D_1 como tendo SIMETRIA BILATERAL.

Tarefa 3.5.1: Existem figuras finitas que não tenham simetria de tipo C_N ou D_N? Invente uma figura desse tipo ou explique porque não existe nenhuma.

Tarefa 3.5.2: Suponha que duas figuras finitas são colocadas directamente em cima uma da outra. Como se compara o tipo de simetria da figura resultante com o tipo de simetria das figuras originais? Para começar, veja que tipos de simetrias se podem produzir colocando duas figuras com simetria de tipo D_3 no cimo uma da outra. As figuras iniciais têm influência no resultado final?

3.6 Notas

Nota 3.6.a: Definiu-se figura finita como sendo a que não tem simetrias de translação. Esta definição não exige que a figura seja finita. Por exemplo, um + gigante formado por duas linhas perpendiculares é uma figura finita de tipo D_4, embora a figura seja infinitamente grande.

Nota 3.6.b: Uma expressão de *mm* e *rr*, tal como mr^2mr^3mrm, é muitas vezes chamada PALAVRA em *m* e *r*.

Nota 3.6.c: Neste livro, as palavras em *m* e *r* são lidas a partir da direita. Nem sempre isto acontece em todos os livros. A maneira como se lê cada palavra é arbitrária e a tarefa 3.2.15 mostra que as equações resultantes são as mesmas independentemente da maneira como se lêem, desde que se seja consistente na escolha.

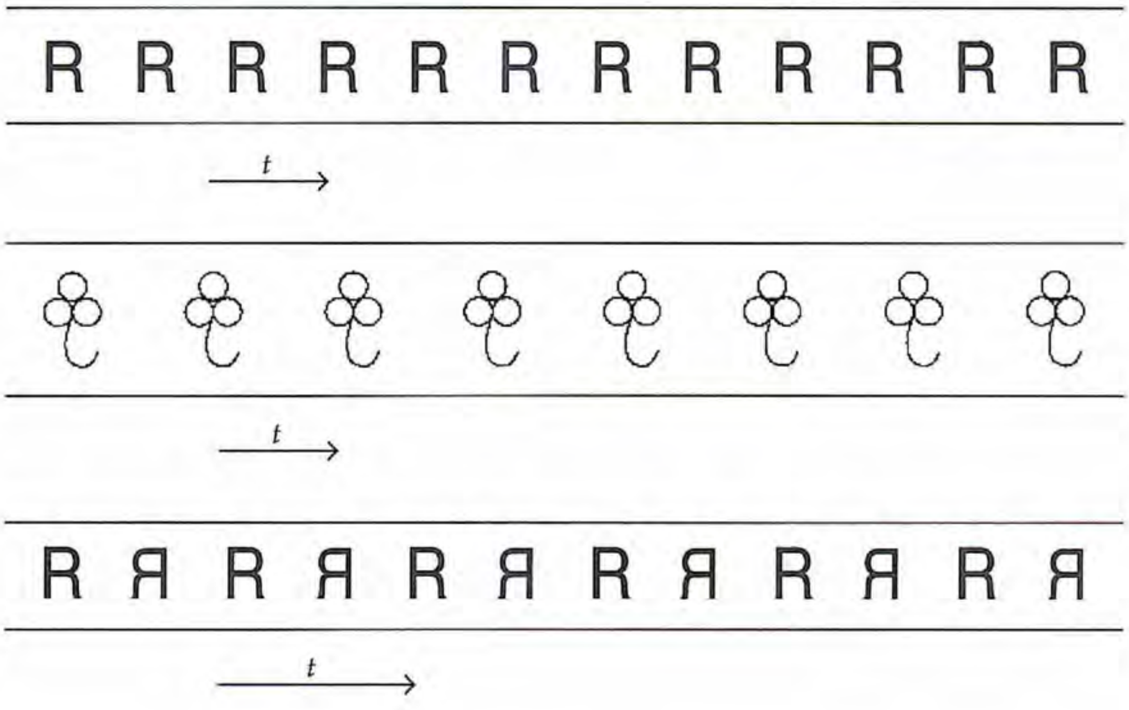
Nota 3.6.d: Definiu-se «*a* é o inverso de *b*» como significando $ab = 1$. É vulgar exigir-se ainda que $ba = 1$. Para as situações que se encontram neste livro, esta segunda equação é consequência da primeira e vice-versa. Portanto, quando dizemos $a = b^{-1}$, pode pensar em $ab = 1$, ou $ba = 1$, conforme preferir.

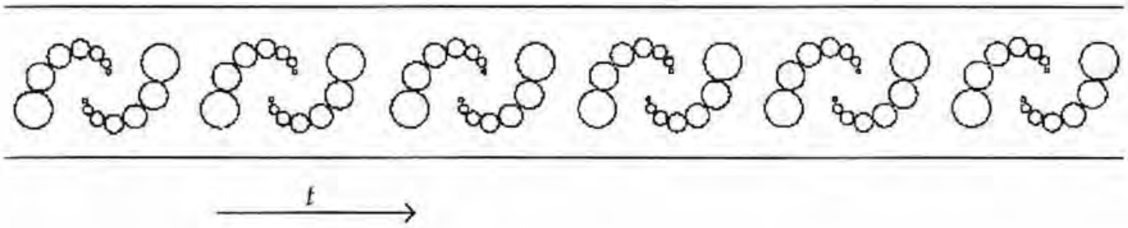
Nota 3.6.e: A classificação de figuras finitas nos tipos C_N e D_N não é completamente satisfatória. Uma maneira melhor de abordar este tópico seria definir primeiro a noção de «mesmo tipo de simetria», depois descobrir os tipos de simetria de figuras finitas possíveis e de seguida dar nomes apropriados para os diferentes tipos de simetria. Desta forma poderia ter-se a certeza de que duas figuras com simetria de tipo C_4 seriam de facto a mesma *em termos de simetria*. Uma definição precisa exige a linguagem da teoria de grupos; parte dela será introduzida nos capítulos 5 e 6. Para mais pormenores veja a secção 6.2 e as notas no final do capítulo 6.

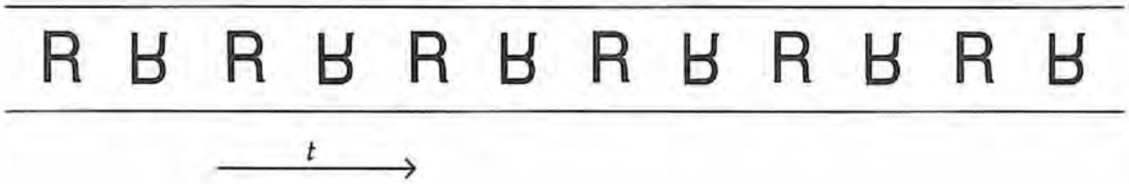
4
Padrões de faixa

4.1 Simetrias de faixas

No capítulo anterior foram estudadas figuras finitas, ou seja, figuras que não têm simetria de translação. Neste capítulo serão abordados os padrões de faixas: padrões com simetria de translação numa direcção. As figuras seguintes ilustram alguns exemplos destes casos.







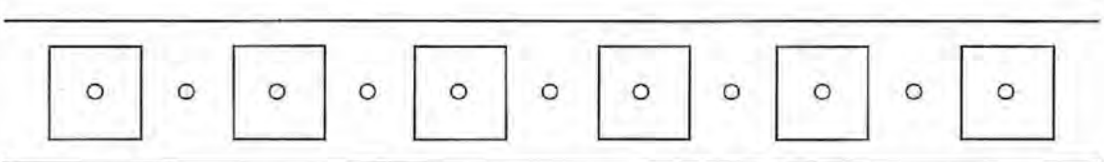
Tal como acontece nas figuras anteriores, as faixas serão sempre desenhadas na direcção esquerda/direita. Para seguir a mesma linha de raciocínio que no caso da translação adopta-se a seguinte notação:

- t representa a menor simetria de translação para a direita.

Também será mantida a expressão t^2 para a operação de realizar t duas vezes, t^{-1} para o inverso de t e assim por diante.

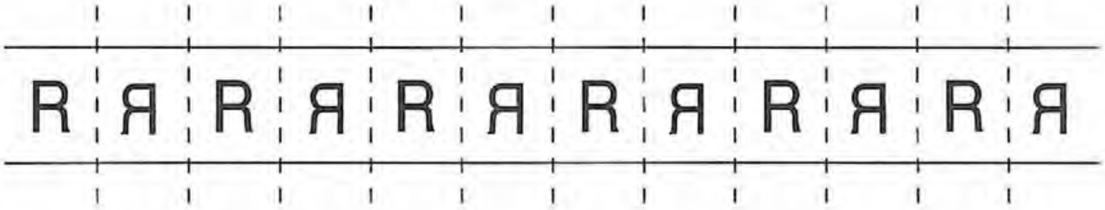
Todas as faixas consideradas terão simetria de translação e poderão igualmente ter outras simetrias. Quando se estudam as simetrias, deve ter-se em mente que a faixa é tratada como se fosse um objecto rígido. Assim, a translação, rotação, reflexão ou reflexão deslizante aplicam-se a toda a faixa, e não só às pequenas figuras que a compõem.

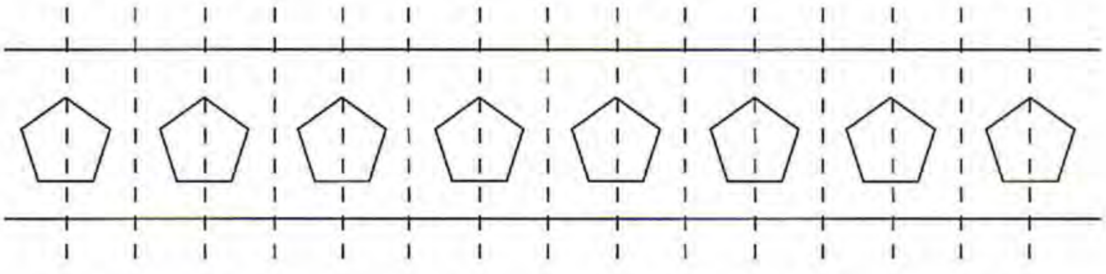
Algumas faixas têm simetria de rotação e o sinal ○ indica o centro de rotação:



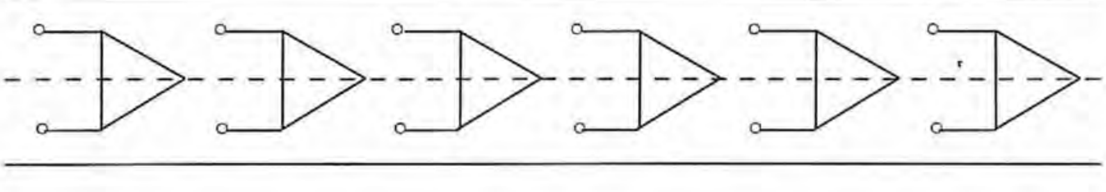
Tarefa 4.1.1: Verdadeiro ou falso: uma simetria de rotação de uma faixa tem de ser $\frac{1}{2}$ volta.

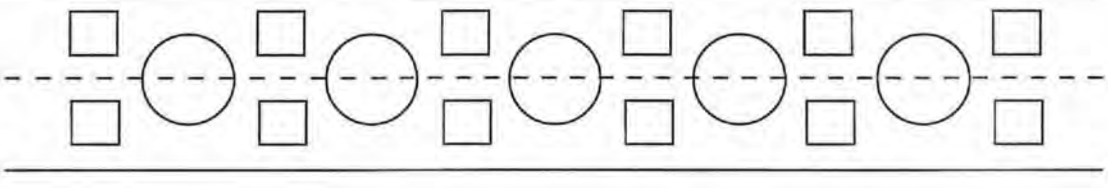
As faixas podem ter simetria de reflexão de espelho. As figuras seguintes mostram alguns exemplos de faixas com simetria de reflexão de espelho num espelho vertical:





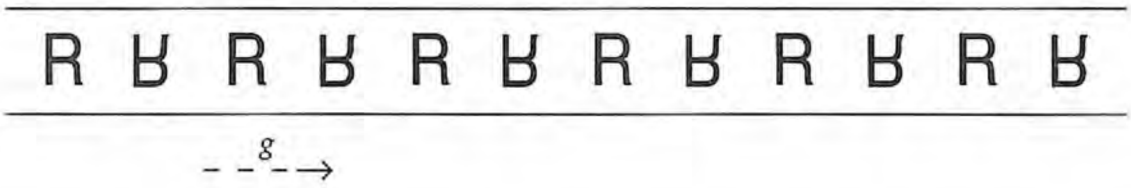
Dois exemplos de faixas com simetria de reflexão de espelho num espelho horizontal são:

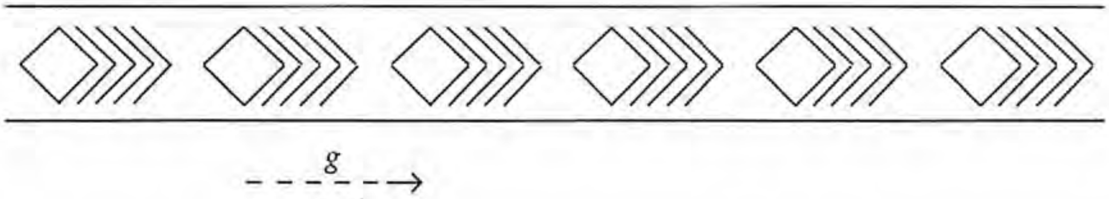




Tarefa 4.1.2: Verdadeiro ou falso: se uma faixa tem simetria de reflexão de espelho, a linha de espelho tem de ser horizontal ou vertical: o espelho não pode estar «inclinado».

As faixas seguintes têm simetria de reflexão deslizante.





Neste ponto torna-se necessário introduzir um pouco mais de notação:

- g representa a menor simetria de reflexão deslizante para a direita.

A seta quebrada localizada por baixo das faixas indica a quantidade do deslize.

Tarefa 4.1.3: Desenhe algumas faixas e para cada uma delas identifique os centros de rotação, t, g e as linhas de espelho. É claro que nem todas terão todos os tipos de simetria; portanto, identifique apenas as que ocorrerem.

Tarefa 4.1.4: Seja g^2 a operação de realizar g duas vezes. Explique porque g^2 é uma translação. Verifique qual é essa translação. *Nota:* a resposta não é igual para todas as faixas.

Tarefa 4.1.5: Descubra algumas relações entre a quantidade de t, a quantidade de g, a distância entre os centros de rotação e entre as linhas de espelho verticais.

4.2 Classificação de padrões de faixa

No estudo realizado para os padrões finitos descobriu-se que todos tinham um dos dois seguintes tipos de simetria: só simetrias de rotação ou um número igual de simetrias de rotação e reflexão. Esta informação é importante quando se realiza a classificação dos tipos de simetrias para figuras finitas. Nesta secção serão classificados os tipos de simetrias dos padrões de faixa.

Um padrão de faixa, por definição, deve ter simetria de translação. É também possível que tenha simetria de reflexão deslizante, de rotação, de reflexão horizontal ou de reflexão vertical — mas nem todas as combinações destas simetrias podem ocorrer. O objectivo desta secção será descobrir exactamente quais as combinações possíveis.

Tarefa 4.2.1: Desenhe algumas faixas e indique que simetrias tem cada uma. Tente descobrir tantas combinações quantas forem possíveis.

Tarefa 4.2.2: Indique as combinações de simetrias que não descobriu na tarefa 4.2.1.

Tarefa 4.2.3: Elabore algumas regras que expliquem porque certas combinações de simetrias não podem existir por si próprias. Um exemplo para uma das regras será: se existe um espelho horizontal e um vertical, também tem de existir uma simetria de rotação.

Tarefa 4.2.4: Explique também porque é verdadeira a regra da tarefa 4.2.3 ou dê um contra-exemplo.

Tarefa 4.2.5: Use as regras da tarefa 4.2.3 para explicar porque não podem ocorrer as combinações indicadas na tarefa 4.2.1. Aquelas regras explicam todas as possibilidades? Se não, invente mais algumas ou descubra uma faixa com as simetrias que faltam.

Tarefa 4.2.6: Explique porque são verdadeiras as regras da tarefa 4.2.3. A matéria do capítulo 2 acerca da combinação de movimentos rígidos poderá ser útil para esta tarefa.

A tarefa 4.2.6 completa a classificação dos tipos de simetria para os padrões de faixas.

Tarefa 4.2.7: O matemático John Conway, da Universidade de Princeton, deu nomes divertidos aos diferentes tipos de simetria dos padrões de faixas. Os seus nomes eram: *pulo, passo, salto, patinagem, pular à roda, andar à roda, saltar à roda* e *patinar à roda.* Estes são associados aos padrões feitos pelas marcas das pegadas de um sapato à medida que se repetem estas acções.

Desenhe as marcas das pegadas que correspondem a cada nome e mostre as diferentes maneiras de andar aos seus amigos.

4.3 Notas

Nota 4.3.a: É inerente à definição de padrões de faixa que estes têm simetria de translação. Um «faixa» de figuras não repetidas não é como um padrão de faixa. Ao longo deste capítulo supôs-se, mas nunca se estabeleceu, que as simetrias de translação devem ocorrer discretamente. Uma linha horizontal, que tem simetria de translação por quantidades arbitrariamente pequenas, não é classificada como sendo um padrão de faixa.

Nota 4.3.b: A classificação usada para os padrões de faixa não está ainda completa, uma vez que não foi demonstrado que todas as faixas com as mesmas simetrias satisfazem a definição de «mesmo tipo de simetria». Esta falha foi também cometida na classificação feita para as figuras finitas. Para mais pormenores veja as notas no final do capítulo 6.

5
Papéis de parede

5.1 Simetria de rotação

No capítulo anterior foram estudados padrões de faixa, ou seja, padrões que têm simetria de translação numa direcção. Neste capítulo serão abordados os padrões de papel de parede: padrões com simetria de translação em duas direcções diferentes. As grelhas do capítulo 1 são todas exemplos de padrões de papel de parede. Outro exemplo é o seguinte:

R R R R R R R R R R

R R R R R R R R R R

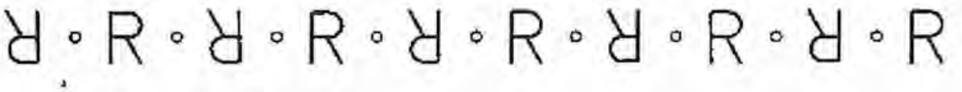
R R R R R R R R R R

R R R R R R R R R R

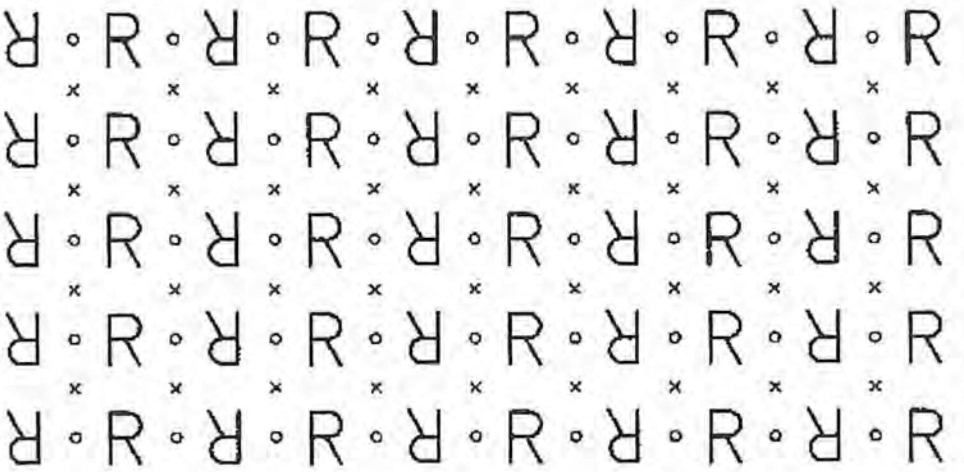
R R R R R R R R R R

É fácil verificar que as simetrias deste padrão consistem apenas em translações: o padrão parece exactamente o mesmo se for movido para cima/baixo e para a esquerda/direita um número inteiro de unidades. De facto, as suas simetrias são exactamente o conjunto dos «movimentos permitidos actuais» da primeira parte do capítulo 1. Os padrões de papel de parede apenas com simetrias de translação são fáceis de analisar; todo esse trabalho foi já realizado no capítulo 1. Os padrões de papel de parede com outros tipos de simetrias são bastante mais interessantes. O primeiro caso a abordar é o da simetria de rotação.

Começa-se por construir os papéis de parede empilhando umas por cima das outras cópias da seguinte faixa. O símbolo ○ indica o centro de rotação para as simetrias de rotação de $\frac{1}{2}$ volta da faixa:

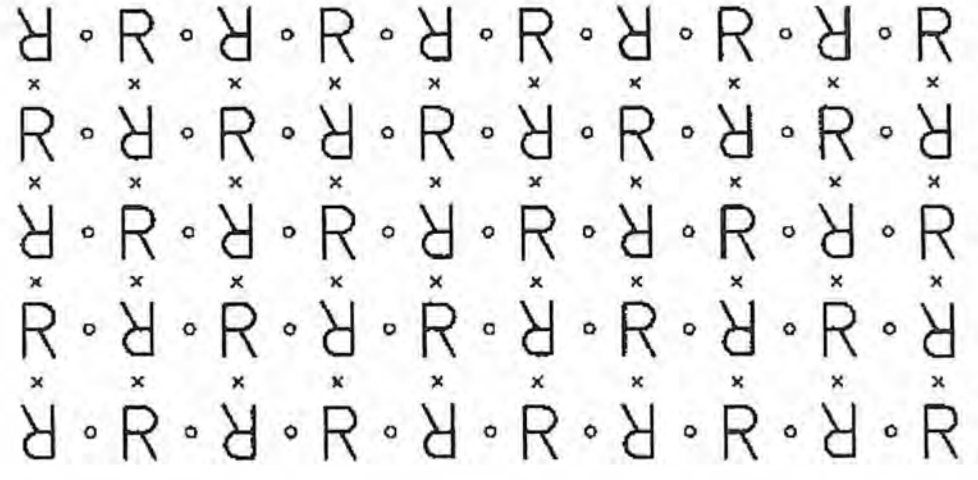


Empilhando as faixas directamente umas em cima das outras obtém-se o seguinte papel de parede:



Os símbolos ○ existentes nos padrões de faixa são também os centros de rotação para este papel de parede. Os símbolos × indicam centros de rotação «suplementares». Estes novos centros são igualmente centros de rotação para as simetrias de rotação de $\frac{1}{2}$ volta. O leitor deve tirar uns momentos para verificar que estes estão correctamente assinalados e que não falta nenhum.

O aparecimento destes centros de rotação suplementar é surpreendente? Veja-se um outro exemplo. Empilhando as faixas uma de cada vez obtém-se o seguinte papel de parede:



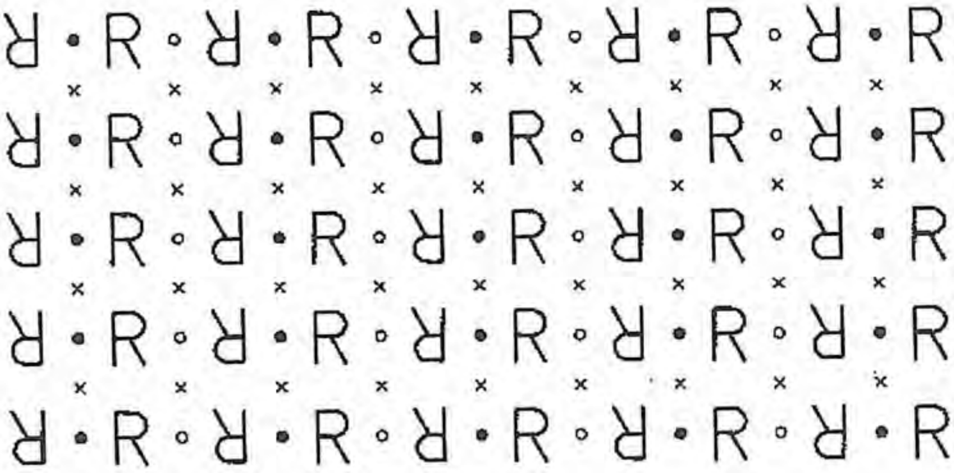
Mais uma vez, os centros de rotação originais estão assinalados com o símbolo ∘ e os suplementares com o símbolo ×; o leitor deve verificar novamente que todos os centros de rotação estão correctamente identificados.

Tarefa 5.1.1: Suponha que se empilham as faixas desviando cada uma delas ligeiramente para o lado. Serão de novo obtidos centros de rotação suplementares desviados ligeiramente para o lado, ou será que estes apenas aparecem quando se empilham as faixas de modo que os RR e ꓤꓤ fiquem em «colunas»?

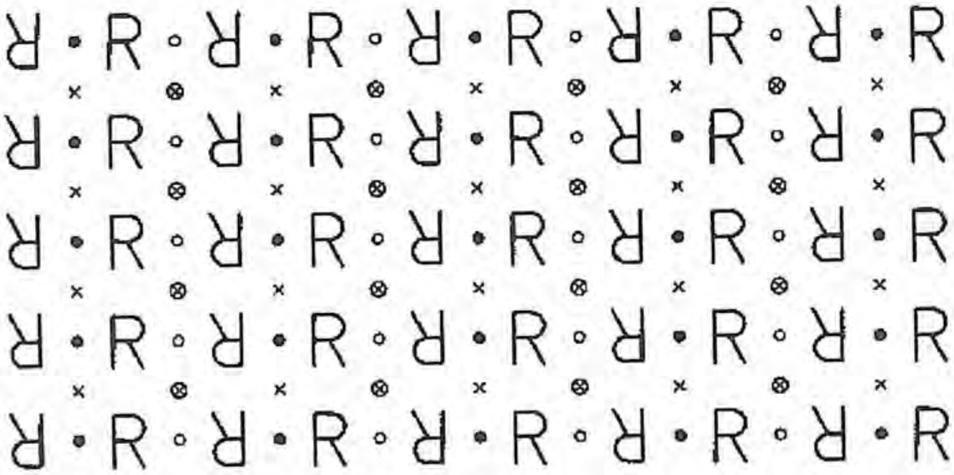
Tarefa 5.1.2: Porque aparecem os centros de rotação suplementares?

De seguida pretende-se contar os centros de rotação dos papéis de parede anteriores. A princípio tal pode parecer absurdo porque existem obviamente infinitos. A ideia é usar as simetrias para ajudar a distinguir os diferentes centros de rotação.

Diz-se que dois centros de rotação num papel de parede são EQUIVALENTES se se puder mover um centro de rotação para o outro através de uma simetria do papel de parede. No exemplo seguinte, os centros de rotação • são todos equivalentes uns aos outros e nenhum dos centros de rotação ○ ou × é equivalente a qualquer centro de rotação •.

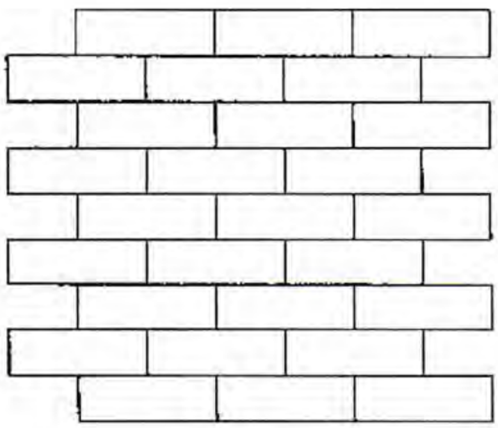


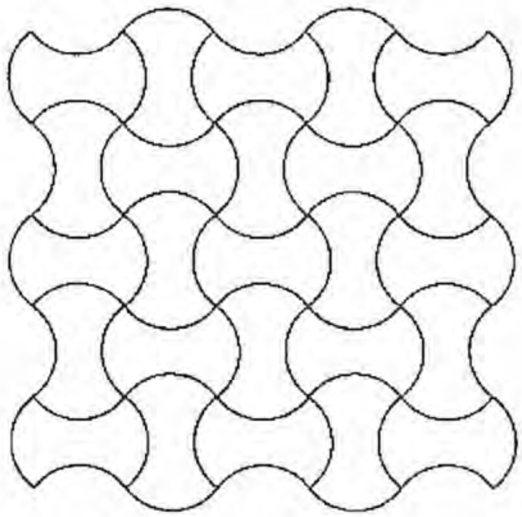
É importante que se convença de que cada • pode ser movido para qualquer outro • e nenhum • pode ser movido para qualquer ○ ou ×. Pode resumir-se este conjunto de afirmações dizendo que *o conjunto de centros de rotação • é uma classe de equivalência*. Existem quatro classes de equivalência de centros de rotação para o seguinte padrão:

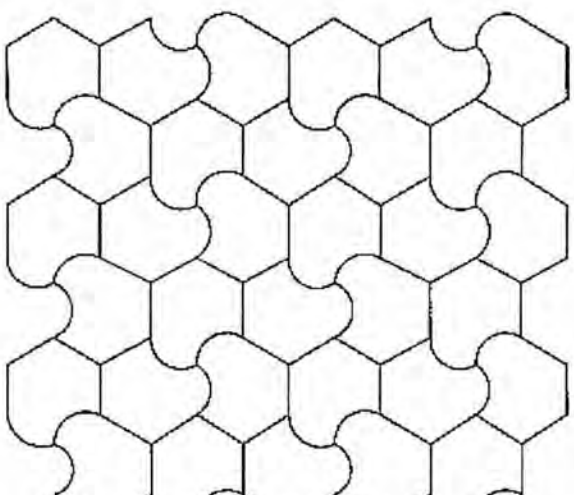


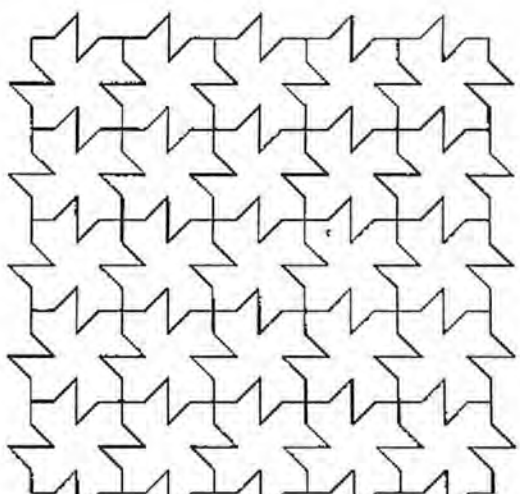
Uma maneira melhor de dizer isto é: este padrão tem quatro centros de rotação não equivalentes. A ideia dos centros de rotação não equivalentes é aplicável também aos padrões de faixa. Como se pode verificar, a faixa original tem dois centros de rotação não equivalentes; é portanto correcto afirmar que o papel de parede tem duas vezes mais centros de rotação do que a faixa usada para o construir.

Tarefa 5.1.3: Descubra para vários padrões de papel de parede os centros de rotação e determine depois quantos centros de rotação não equivalentes tem cada um. As grelhas do capítulo 1 e as figuras seguintes são bons exemplos para tentar.









Cada simetria de rotação tem um centro e pretende saber-se que rotações podem ocorrer para cada um deles. Se a menor simetria de rotação com esse centro é a rotação de $\frac{1}{2}$ volta, diz-se que o centro de rotação tem ORDEM 2; se a menor rotação é de $\frac{1}{3}$ de volta, diz-se que o centro de rotação é de ordem 3; e assim por diante. Por isso, em vez de se dizer «centro de rotação de $\frac{1}{4}$

de volta», diz-se «centro de rotação de ordem 4». Esta é uma forma de evitar o uso de fracções.

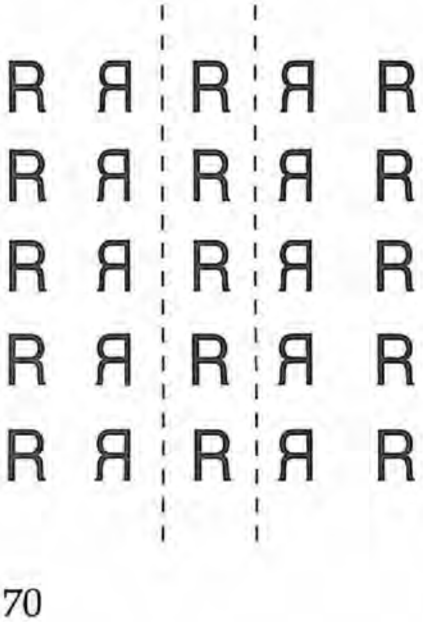
Tarefa 5.1.4: Para os exemplos da tarefa 5.1.3 determine a ordem de cada centro de rotação.

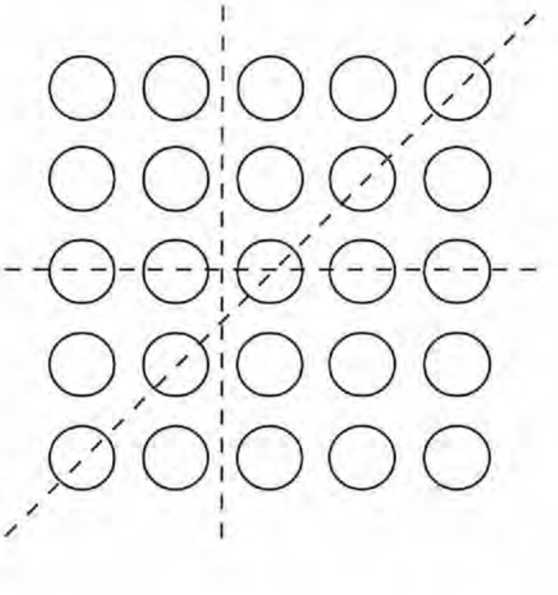
Tarefa 5.1.5: Verdadeiro ou falso: se dois centros de rotação são equivalentes, têm a mesma ordem. Verdadeiro ou falso: se dois centros de rotação têm a mesma ordem, são equivalentes.

Uma pergunta óbvia é a seguinte: que ordens são possíveis para um centro de rotação num papel de parede? A resposta é: 2, 3, 4 e 6. Nenhuma outra ordem é possível. Acha este facto surpreendente? É um exercício divertido tentar desenhar um papel de parede com centros de rotação de ordem 5 — mas sem hipóteses de sucesso. Embora se possam produzir papéis de parede engraçados com simetria de rotação de $\frac{1}{5}$ de volta, esses padrões não poderão ter simetria de translação. De facto, não pode sequer desenhar-se um padrão que tenha dois tipos de centros de rotação de ordem 5 diferentes. Nas «Notas» do final deste capítulo será dada uma prova desta afirmação.

5.2 Espelhos e deslizes

Nesta secção discute-se brevemente a simetria de espelho e a simetria de reflexão deslizante em papéis de parede. As figuras seguintes mostram papéis de parede com simetria de reflexão de espelho:





Para estes padrões não foram desenhadas todas as linhas de espelho. Em vez disso desenharam-se apenas representantes de linhas de espelho não equivalentes. Diz-se que duas linhas de espelho são EQUIVALENTES se uma simetria do padrão transforma uma linha de espelho na outra. Este conceito é idêntico ao utilizado na discussão dos centros de rotação. O leitor é convidado a verificar que as linhas de espelho dos exemplos anteriores foram correctamente desenhadas.

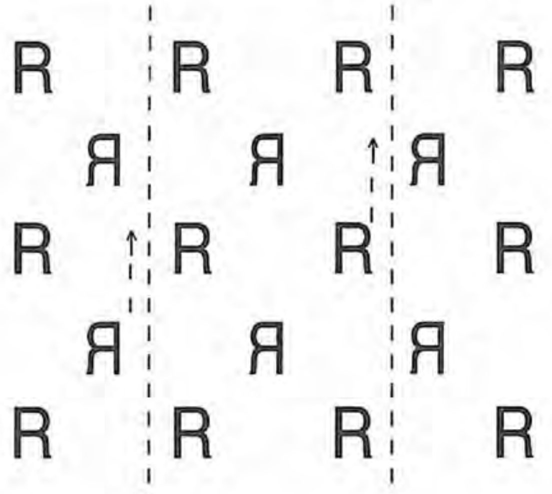
Tarefa 5.2.1: Para vários papéis de parede determine as linhas de espelho não equivalentes. Os exemplos da tarefa 5.1.3 são bons padrões para tentar.

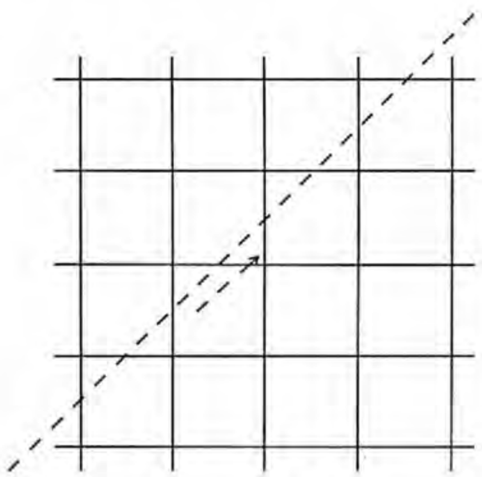
Tarefa 5.2.2: Existe alguma relação entre os centros de rotação e as linhas de espelho de um papel de parede?

Para as padrões de faixa verificou-se que uma linha de espelho horizontal é automaticamente uma linha deslizante. De maneira semelhante, qualquer linha de espelho num papel de parede deve ser também uma linha deslizante; assim, as únicas linhas deslizantes interessantes são as que não são também linhas de espelho.

Tarefa 5.2.3: Explique porque deve uma linha de espelho num papel de parede ser também uma linha deslizante.

Nos próximos exemplos determinaram-se as linhas deslizantes não equivalentes que não são também linhas de espelho. O primeiro papel de parede não tem linhas de espelho, mas tem duas linhas deslizantes não equivalentes. O segundo tem linhas de espelho, mas tem igualmente uma linha deslizante que não é uma linha de espelho.





Tarefa 5.2.4: Para vários papéis de parede determine as linhas deslizantes não equivalentes que não são também linhas de espelho. Nota: a grelha de hexágonos e dois dos padrões da tarefa 5.1.3 têm linhas deslizantes interessantes.

5.3 Classificação de papéis de parede

Os padrões de faixa foram já classificados através da descoberta de exemplos de combinações das simetrias que podiam ocorrer, inventando depois regras para explicar porque eram impossíveis quaisquer outras combinações. Se se despender bastante tempo e esforço, podem classificar-se os papéis de parede utilizando o mesmo método; no entanto, seria um processo fastidioso. O resultado final é existirem 17 tipos de simetrias diferentes de papéis de parede. Os padrões com cada um dos tipos de simetria foram produzidos por vários artistas e artesãos ao longo da história. A primeira demonstração de que existem apenas 17 possibilidades foi dada em 1891 por E. S. Fedorov. O seu artigo foi apenas publicado em russo; a demonstração só se tornou conhecida em 1924, quando George Pòlya publicou o seu artigo «Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene». O título de Pòlya reflecte o facto de os papéis de parede estarem relacionados com os cristais estudados pelos químicos. Neste livro, Pòlya deu o exemplo de um padrão de cada tipo de simetria; esses exemplos serviram de inspiração para o artista holandês M. C. Escher. No final deste capítulo podem encontrar-se exemplos de todos os 17 tipos de simetrias, sendo também apresentado um esquema baseado no excelente livro *Symmetries of Culture* [SC], de Washburn e Crowe. Este esquema irá ajudá-lo a determinar o tipo de simetria de qualquer papel de parede. Os nomes dados a cada tipo de simetria são uniformizados; pode achar engraçado tentar descobrir o que significam realmente esses nomes.

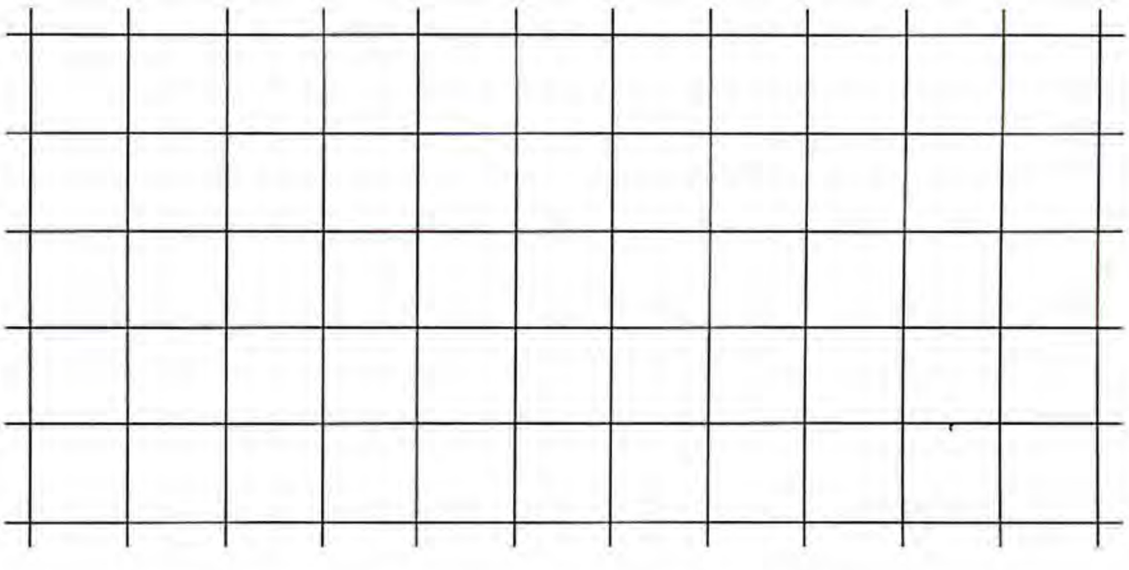
Tarefa 5.3.1: Use o esquema para classificar cada um dos vários papéis de parede apresentados. Existem mais de 17 padrões; assim, alguns tipos de simetrias aparecem mais de uma vez. Os padrões classificados como «os mesmos» parecem realmente ser semelhantes?

5.4 Unidades básicas

Os tópicos principais do capítulo 1 eram os movimentos permitidos e as unidades básicas. Nesse capítulo apenas se utilizaram as simetrias de translação. Agora volta-se a esses mesmos tópicos, fazendo uso dos outros tipos de simetria.

Suponha que se tem um conjunto de movimentos permitidos para um papel de parede. Recorde que uma UNIDADE BÁSICA é uma região que cobre o plano sem sobreposições quando se aplicam todos os movimentos permitidos. É importante reter que as unidades básicas dependem do conjunto dos movimentos permitidos. Se se mudar esse conjunto, as unidades básicas também mudarão.

Os exemplos desta secção são baseados no papel de parede de grelha quadrangular:



O primeiro conjunto de movimentos permitidos utilizado é o seguinte:

Movimentos permitidos: as simetrias de translação do papel de parede.

Esta é exactamente a situação discutida no capítulo 1; contudo, a linguagem usada para a descrever é diferente. Uma unidade básica é um quadrado. Sabe-se do capítulo 1 que existem muitas outras escolhas para unidades básicas, mas esta é a escolha que parece natural.

Utilizando agora um conjunto diferente de movimentos permitidos:

Movimentos permitidos: as simetrias de translação e rotação de um papel de parede.

Desta vez existem mais movimentos permitidos e uma unidade básica é $\frac{1}{4}$ do quadrado. Será útil gastar algum tempo para verificar que esta figura cobre todo o plano sem sobreposições quando se usam as simetrias de rotação e translação da grelha de quadrados.

O próximo exemplo tem ainda mais movimentos permitidos:

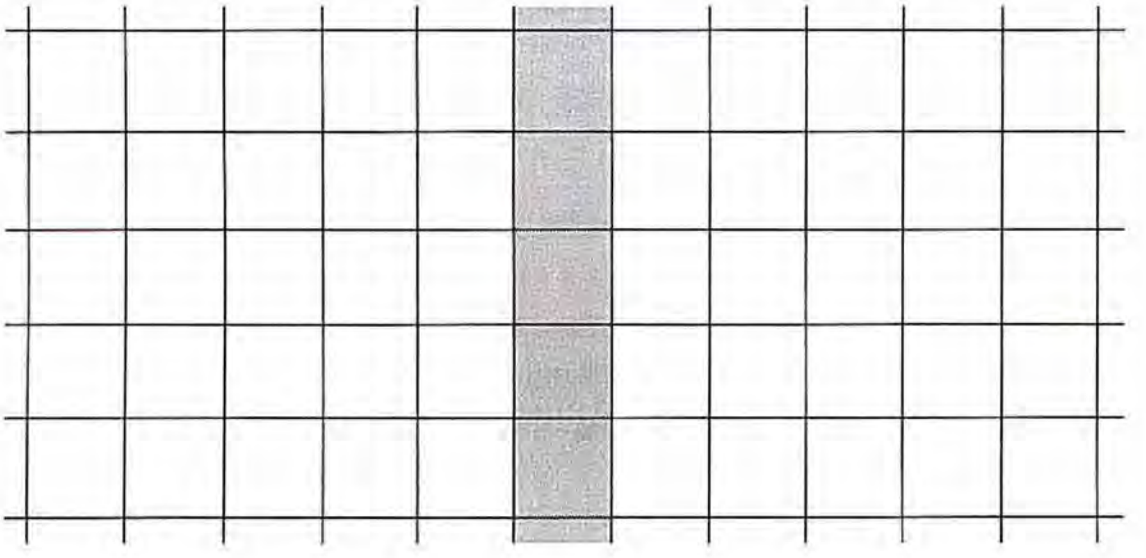
Movimentos permitidos: todas as simetrias do papel de parede.

Desta vez, uma unidade básica é $\frac{1}{8}$ do quadrado. Convém novamente verificar que esta é uma unidade básica correcta para o conjunto de todas as simetrias da grelha de quadrados.

Finalmente olha-se para um exemplo com muito poucos movimentos permitidos:

Movimentos permitidos: as simetrias de translação para a esquerda/ /direita do papel de parede.

Neste caso não é permitido mover para cima ou para baixo, rodar ou reflectir. Para este conjunto de movimentos permitidos tem-se uma unidade básica muito grande.



Tarefa 5.4.1: Por que razão ter mais movimentos permitidos resulta numa unidade básica menor?

Vamos concentrar-nos nos seguintes conjuntos de movimentos permitidos:

— Todas as simetrias do papel de parede.
— As simetrias de translação e rotação do papel de parede.
— Só as simetrias de translação do papel de parede.

Tarefa 5.4.2: Explique como a ideia de «unidade básica» para os três conjuntos de movimentos permitidos está relacionada com o problema de impressão de um papel de parede a partir de um bloco de madeira.

Tarefa 5.4.3: Para vários papéis de parede descubra a unidade básica para cada um dos três conjuntos de movimentos permitidos descritos anteriormente. Os padrões da tarefa 5.1.3 são bons exemplos para tentar.

Tarefa 5.4.4: Invente uma regra para descobrir quão maior é a unidade básica para as simetrias de translação em comparação com a unidade básica para as simetrias de translação e rotação.

Tarefa 5.4.5: Invente uma regra para descobrir quão maior é a unidade básica para todas as simetrias em comparação com a unidade básica para as simetrias de translação e rotação.

5.5 Grupos

Se se escolherem movimentos permitidos de forma descuidada, pode ser impossível descobrir uma unidade básica. Um exemplo usando a grelha de quadrados é o seguinte:

Má escolha de movimentos permitidos: as translações para a direita um número inteiro de unidades.

Este exemplo não é igual ao último exemplo da secção anterior, uma vez que neste não é permitido fazer a translação para a esquerda; pode apenas fazer-se a translação para a direita. Para esta má escolha de movimentos permitidos é impossível descobrir uma unidade básica. O leitor deve tentar encontrar uma e verificar que necessita de usar uma figura muito maior para cobrir o plano, tão grande que se sobrepõe quando se faz a translação para a direita. Se fizer a figura mais pequena de modo que esta não se sobreponha, não se conseguirá cobrir todo o plano. Por outras palavras, não existe uma unidade básica para esta má escolha de movimentos permitidos.

Pergunta: Quando tem um conjunto de movimentos permitidos uma unidade básica?

Resposta: Quando o conjunto de movimentos permitidos é um grupo.

Definição: Um conjunto de movimentos permitidos é um GRUPO se:

1) A operação de não fazer nada é um movimento permitido.
2) Realizar dois movimentos permitidos sucessivamente resulta noutro movimento permitido.
3) O inverso de um movimento permitido é também um movimento permitido.

Vemos que a má escolha de movimentos permitidos não era um grupo porque violava a condição 3). Fazer a translação para a direita era permitido, mas o seu inverso, fazer a translação para a esquerda, não era. Pode ser uma boa ideia voltar atrás, à secção 3.4, para recordar pormenores acerca dos inversos.

A ideia de grupo é de importância fundamental na Matemática. Milhares de livros, artigos e vidas foram dedicados a estudar os aspectos teóricos dos grupos. De facto, este assunto é chamado «teoria de grupos». Neste livro, o estudo de grupos será limitado à análise de exemplos, alguns dos quais já encontrámos.

Tarefa 5.5.1: Verifique se o conjunto de movimentos permitidos da secção 5.4 satisfaz as três condições para ser um grupo.

Os resultados da tarefa 5.5.1 são suficientemente importantes para os recapitularmos um por um. Cada um dos seguintes conjuntos de movimentos permitidos é um grupo:

— Todas as simetrias de um papel de parede.
— As simetrias de translação e rotação de um papel de parede.
— As simetrias de translação de um papel de parede.

Por outras palavras, para cada um dos conjuntos anteriores de movimentos permitidos pode encontrar-se uma unidade básica. A partir de agora falar-se-á do «grupo das simetrias de translação de um papel de parede», e assim por diante.

É claro que nem todos os conjuntos de movimentos permitidos serão um grupo. Foi já visto um exemplo em que a condição 3) era violada. A próxima escolha de movimentos permitidos viola a condição 2):

Má escolha de movimentos permitidos: as simetrias de rotação da grelha de quadrados.

Uma vez que uma rotação seguida de uma rotação pode por vezes não ser uma translação, esta escolha não satisfaz a condição 2).

A seguinte escolha de movimentos permitidos viola a condição 1):

Má escolha de movimentos permitidos: as simetrias de reflexão da grelha de quadrados.

Uma vez que a operação de não fazer nada não é uma reflexão, esta escolha viola a condição 1).

Para estudar mais exemplos de grupos veja o próximo capítulo.

5.6 Notas

Nota 5.6.a: O resultado que afirma que 2, 3, 4 e 6 são as únicas ordens possíveis para os centros de rotação de papéis de parede é chamado *restrição cristalográfica*. Este nome vem do facto de os cristais serem muitas vezes modelados em grelhas a 3 dimensões.

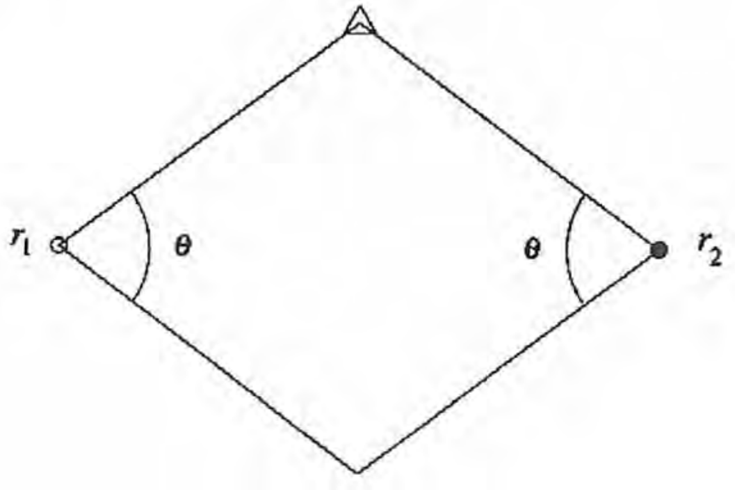
Nota 5.6.b: De seguida será feito um esboço da demonstração da restrição cristalográfica. A demonstração faz uso das ideias da tarefa 2.5.5.

Suponha que existe um papel de parede com simetria de rotação de ordem 5. Escolha uma das simetrias de rotação de ordem 5 e chame-lhe r_1 e designe o seu centro de rotação por $\circ$. Depois descubra a simetria de rotação de ordem 5 cujo centro de rotação está mais próximo de $\circ$. Chame à nova rotação r_2 e designe o seu centro de rotação com •. A figura correspondente é a seguinte:

r_1 ○ • r_2

Combinando r_1 e r_2 obtém-se $r_1 r_2$, que é igualmente uma simetria do papel de parede.

Tarefa 5.6.1: Mostre que $r_1 r_2$ é uma simetria de rotação de $\frac{2}{5}$ de volta do papel de parede com centro de rotação Δ. Note que $\theta = 72° = \frac{1}{5}$ de volta.



Tarefa 5.6.2: Explique porque $(r_1 r_2)^3$ é uma simetria de rotação de $\frac{1}{5}$ de volta do papel de parede com centro de rotação Δ.

Tarefa 5.6.3: Mostre que Δ está mais perto de ○ do que de •.

Tarefa 5.6.4: Conclua que a hipótese de o papel de parede ter um centro de rotação de ordem 5 é falsa, sendo portanto impossível para qualquer papel de parede ter simetria de ordem 5. Conclua que é impossível qualquer figura planar ter simetria de rotação de ordem 5 em mais de um centro de rotação.

Tarefa 5.6.5: Mostre que o método anterior é facilmente adaptado para provar que é impossível qualquer número ímpar maior do que 5 ser a ordem da simetria de rotação de um papel de parede. Conclua que é impossível qualquer múltiplo desse número ser a ordem de simetria de rotação de um papel de parede.

Tarefa 5.6.6: Modifique o método anterior para mostrar que é impossível 8, 12, 16, ... serem ordens de simetria de rotação de um papel de parede. Sugestão: comece de forma igual e depois use ○ e Δ.

Estas tarefas completam a prova da restrição cristalográfica.

Nota 5.6.c: Mesmo pensando que a simetria de rotação de $\frac{1}{5}$ de volta não é possível para papéis de parede, existem figuras interessantes, chamadas *ladrilhos de Penrose,* que se ajustam de uma maneira muito aproximada à simetria de ordem 5. Veja a coluna de Martin Gardner de Janeiro de 1977 na *Scientific American.* Esse artigo é reescrito no seu livro *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers,* W. H. Freeman, 1989. Veja também o capítulo 7 do *The Mathematical Tourist: snapshots of modern mathematics,* de Ivars Peterson, W. H. Freeman, 1988. O melhor lugar para aprender acerca destas pavimentações é o Centro de Geometria da Universidade de Minesota. O leitor poderá consultar pela Internet o endereço www.geom.umn.edu e procurar o programa *Quasi Tiler.* Veja também o programa *Kali* para aprender mais acerca dos 17 papéis de parede.

Nota 5.6.d: As condições da definição de grupo são muitas vezes chamadas:

1) Identidade.
2) Fecho.
3) Inverso.

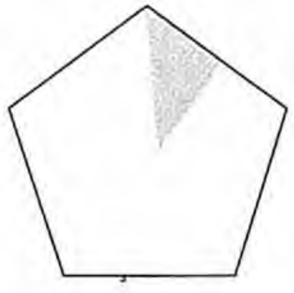
A definição usual de grupo exige também uma condição chamada associatividade:

4) $(ab)c = a(bc)$ para todo o a, b e c pertencentes ao grupo.

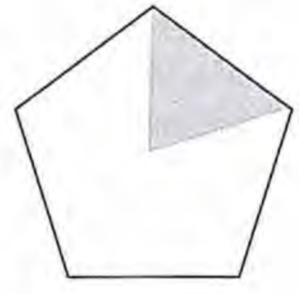
A definição de grupo dada não exige esta condição uma vez que só se consideram grupos de movimentos rígidos e para estes a associatividade é automática. Isto porque as simetrias utilizadas são funções e a composição de funções é associativa.

Nota 5.6.e: Dado um conjunto, não é razoável perguntar se este é um grupo sem primeiro descrever como os seus elementos serão combinados. Uma vez que se está a lidar com simetrias de figuras, subentende-se que estas se combinam da mesma forma que os movimentos rígidos do capítulo 2. Em alguns casos, tal como os que se irão encontrar no próximo capítulo, é necessário descrever explicitamente como serão feitas as combinações.

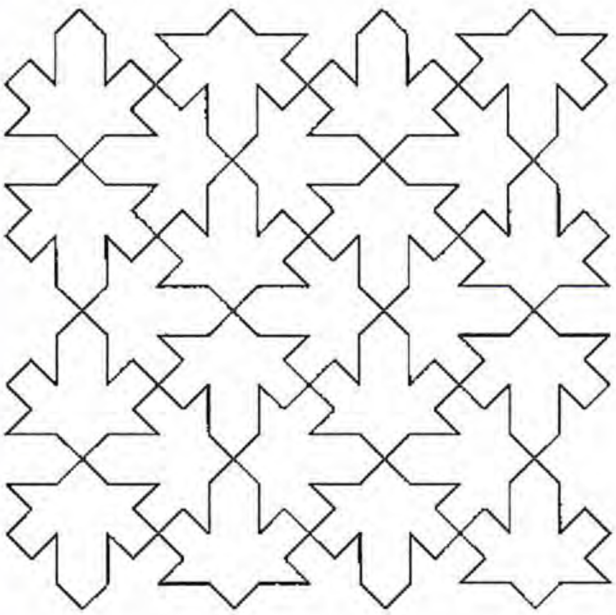
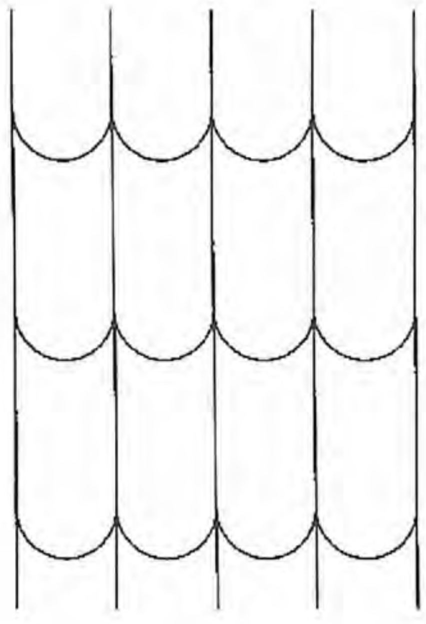
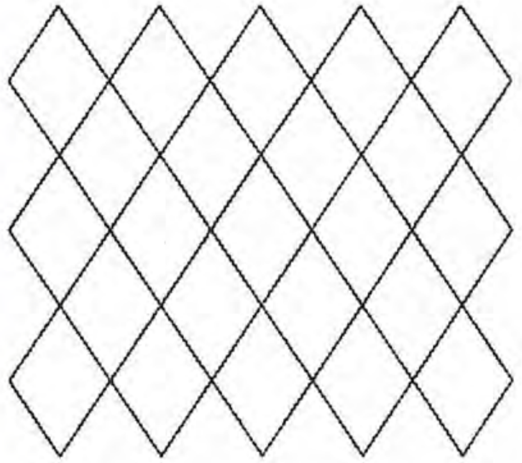
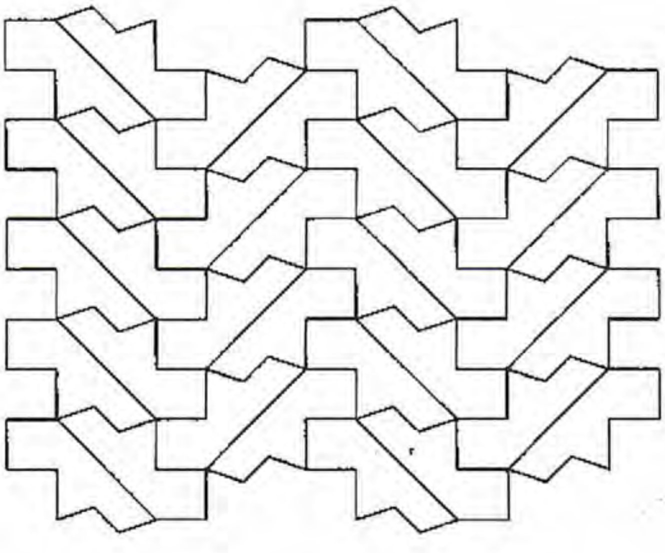
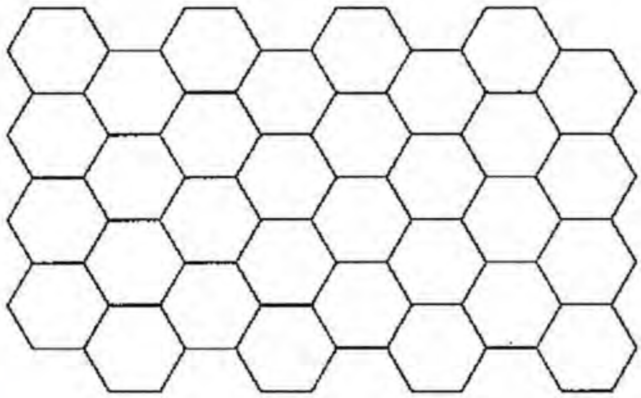
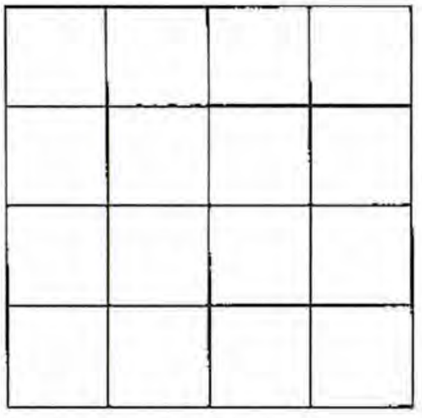
Nota 5.6.f: Foram estudadas as unidades básicas para as simetrias dos papéis de parede, mas a ideia funciona igualmente bem para as figuras finitas e os padrões de faixa. A figura seguinte ilustra um exemplo que usa o pentágono regular.

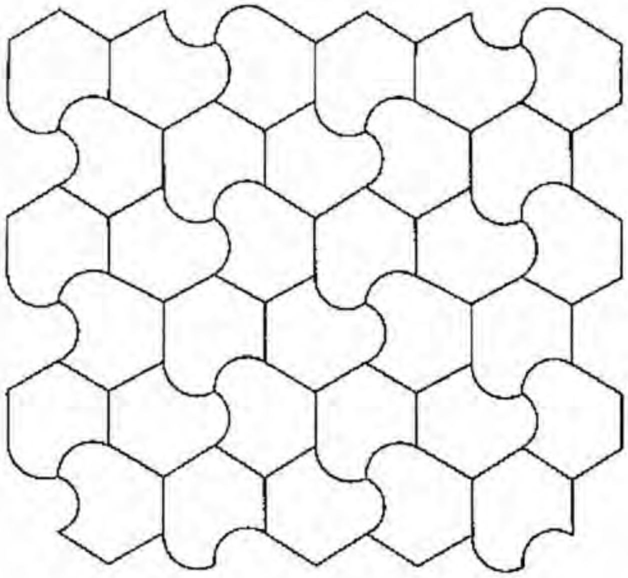


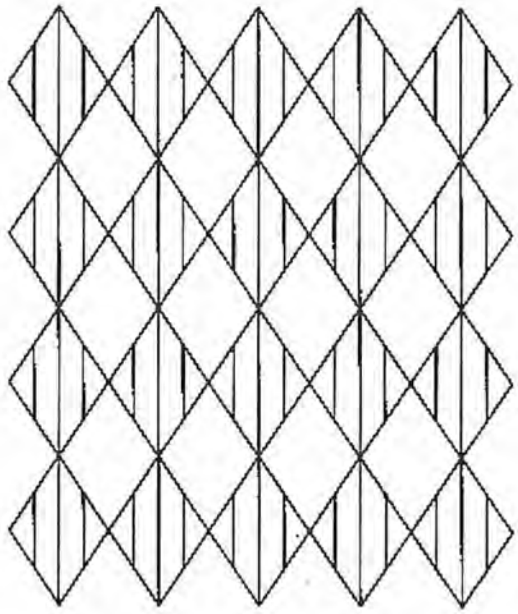
Unidade básica para o grupo de todas as simetrias

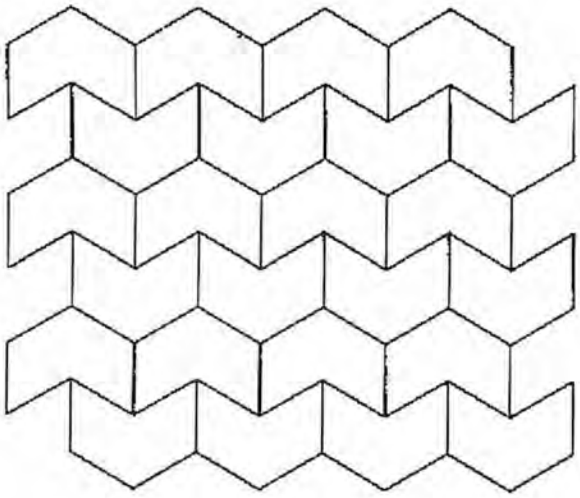


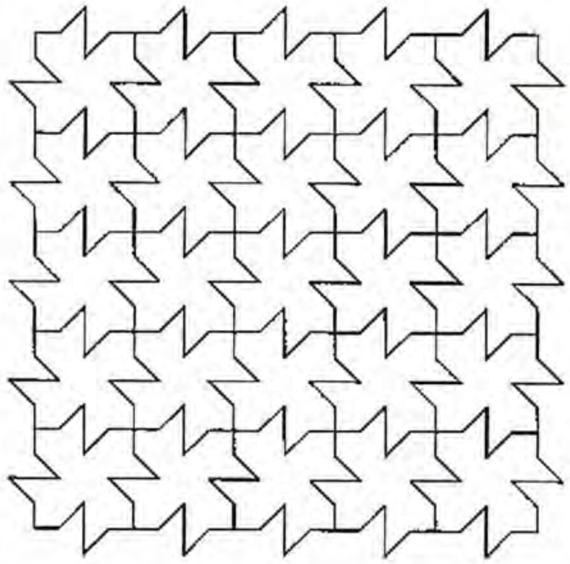
Unidade básica para o grupo das simetrias de rotação

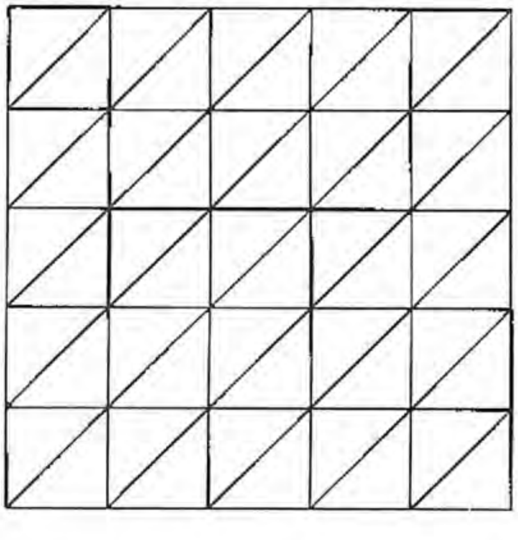







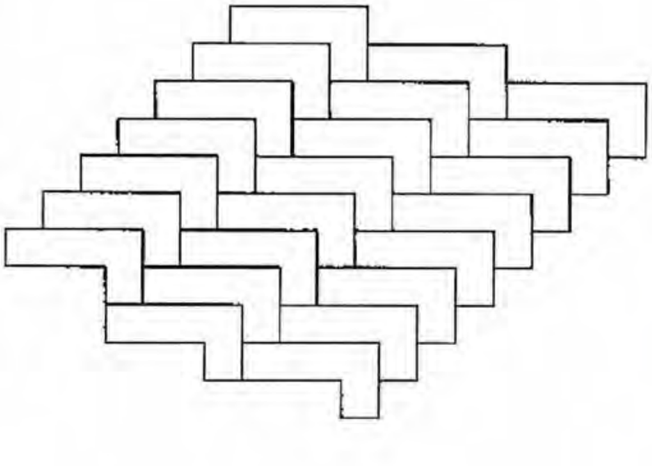


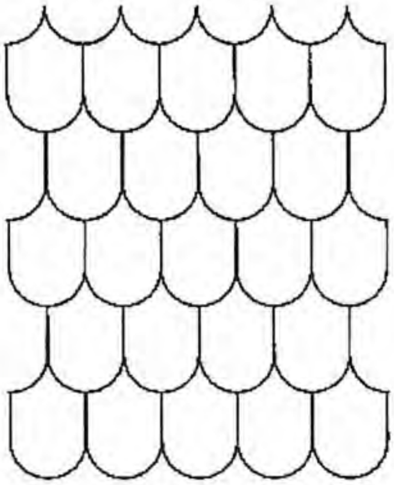


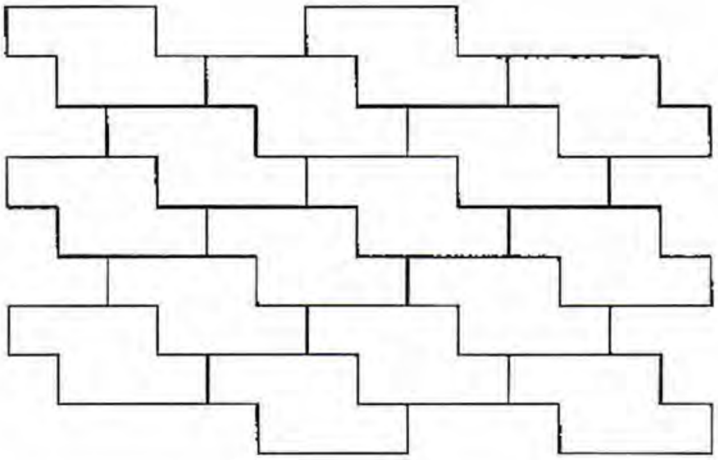


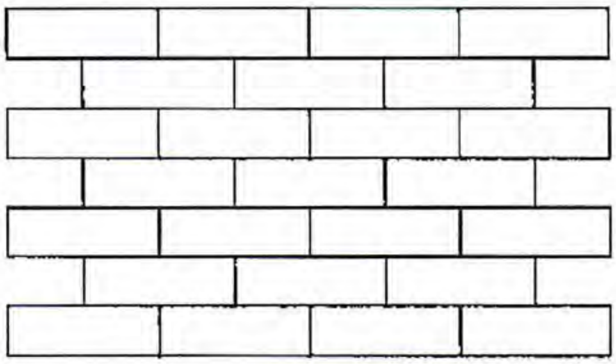


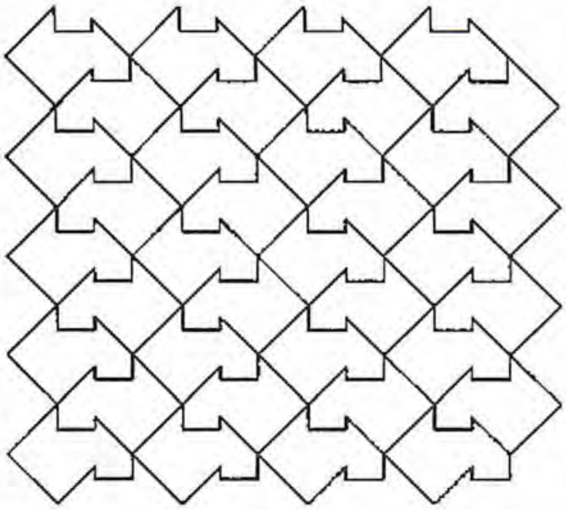


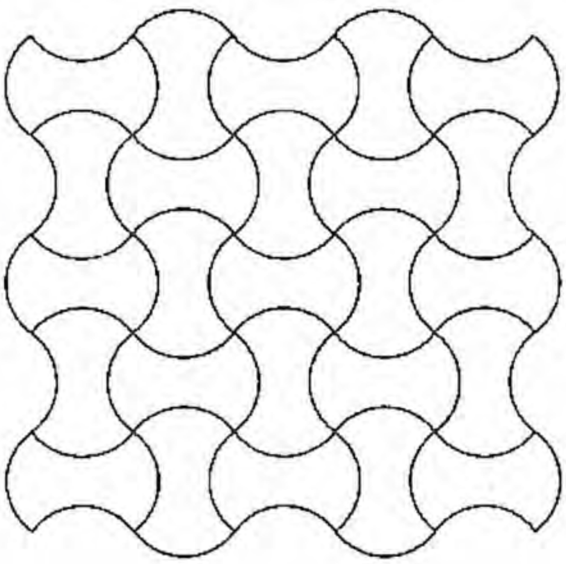


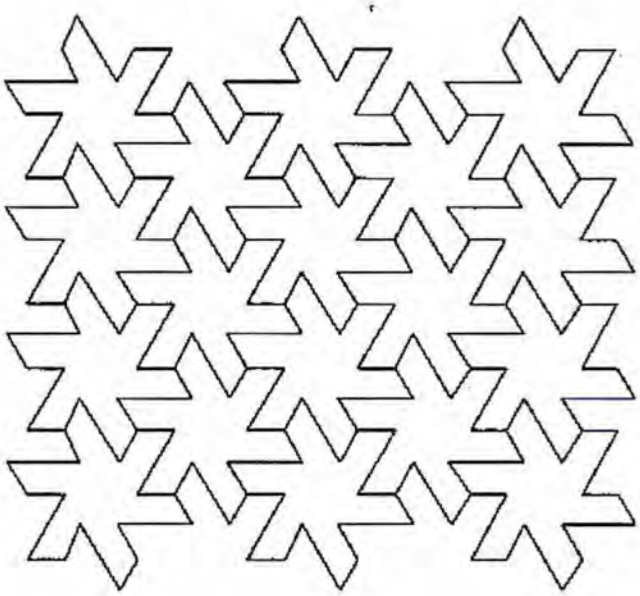


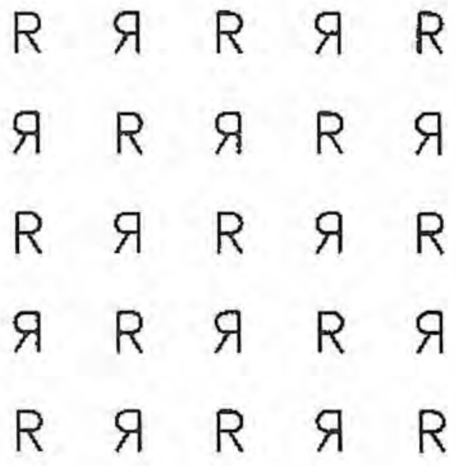


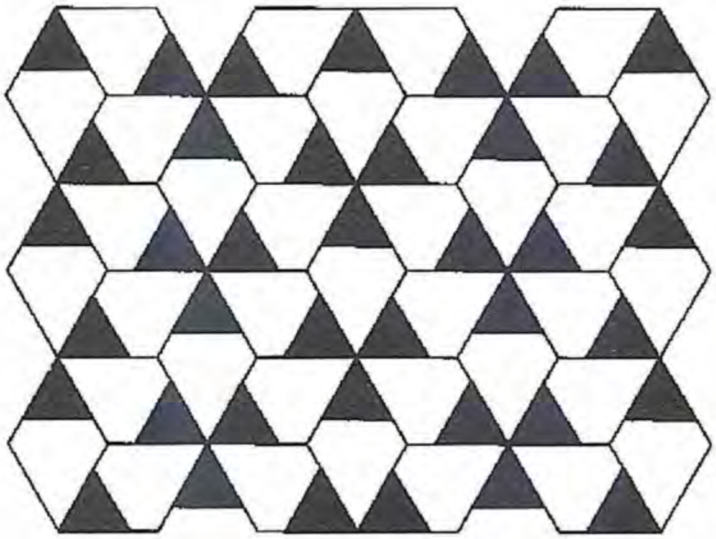


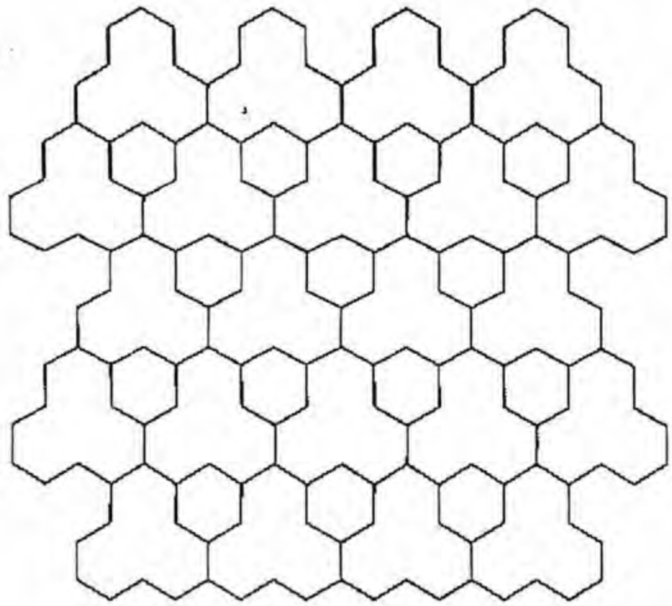


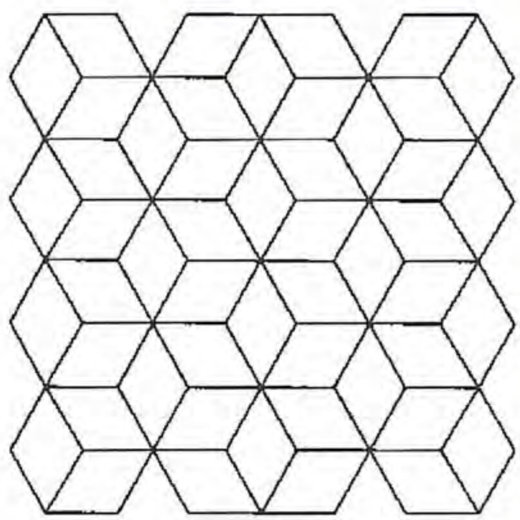


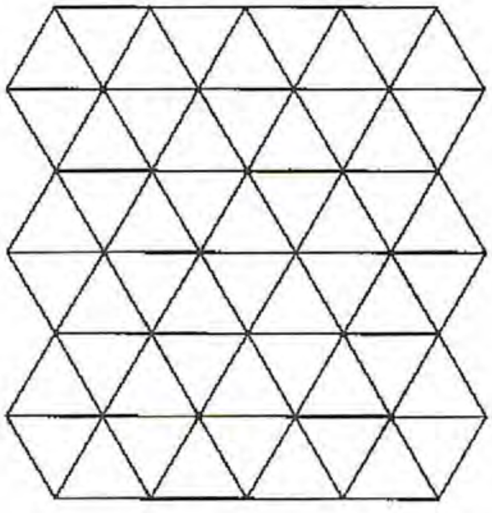


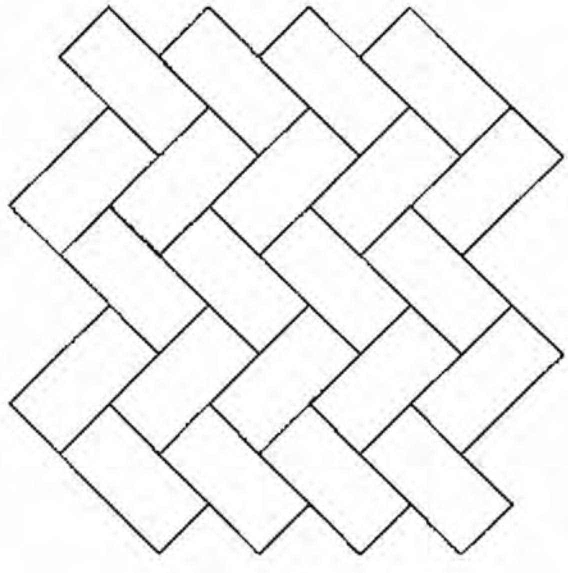

R Я R Я R
Я R Я R Я
R Я R Я R
Я R Я R Я
R Я R Я R



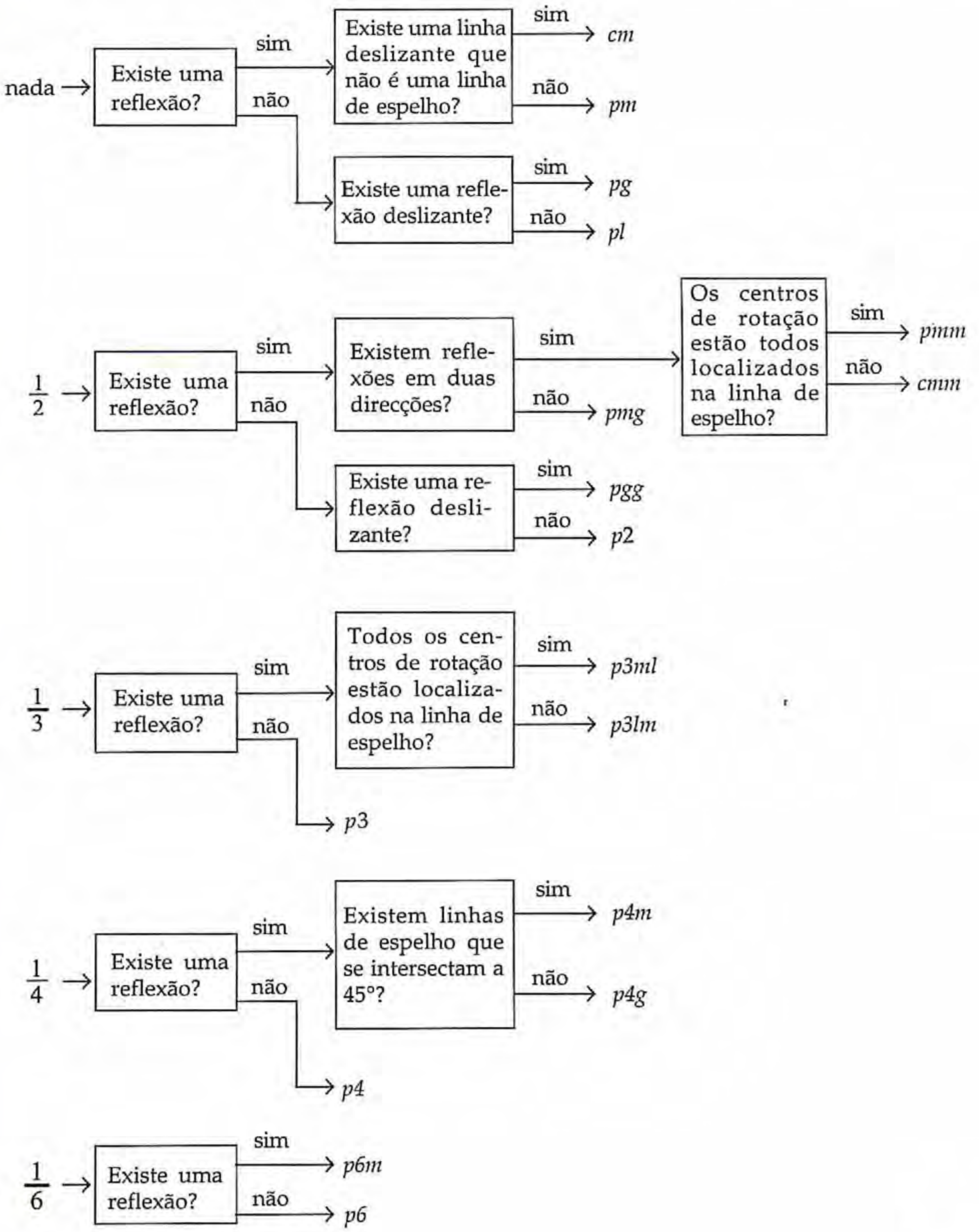








Para classificar um papel de parede descubra primeiro a menor simetria de rotação medida como fracção de uma volta completa.



6
Grupos finitos

6.1 Figuras finitas

Nesta secção serão apresentados exemplos de grupos entre as figuras finitas. Esses exemplos serão baseados no quadrado, mas as ideias são aplicáveis a todas as figuras finitas. Recorde que as simetrias do quadrado podem ser representadas pelo conjunto $\{1, r, r^2, r^3, m, mr, mr^2, mr^3\}$, com $r^4 = 1$. Será que estas simetrias formam um grupo? Isto é, se os movimentos permitidos são as simetrias do quadrado, estes movimentos permitidos encaixam-se na definição de grupo? Três condições necessitam de ser verificadas:

1) A operação de não fazer nada é permitida? Sim, 1 é o mesmo que não fazer nada.
2) Se se combinarem dois movimentos permitidos, obtém-se outro movimento permitido? Sim, no capítulo 3 viu-se como se combinam as simetrias do quadrado.
3) O inverso de um movimento permitido é também um movimento permitido? Sim, na tarefa 3.4.1 descobriu-se o inverso de cada simetria do quadrado.

Assim, as simetrias do quadrado formam um grupo. E, na verdade, para as verificações anteriores é irrelevante o facto de se estar a lidar com um quadrado.

Tarefa 6.1.1: Explique porque o conjunto das simetrias de qualquer figura será sempre um grupo.

De seguida vejam-se as simetrias de rotação do quadrado $\{1, r, r^2, r^3\}$, onde $r^4 = 1$. Este conjunto é um grupo? Verifique as seguintes condições:

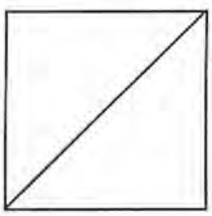
1) A operação de não fazer nada é uma rotação? Sim.
2) Duas rotações seguidas formam uma rotação? Sim.
3) O inverso de uma rotação é uma rotação? Sim.

Portanto, as simetrias de rotação do quadrado formam um grupo.

Dado um conjunto de movimentos permitidos, podem sempre verificar-se as três condições anteriores para determinar se este é um grupo. No entanto, o método muito rapidamente se torna fastidioso. É dada em seguida uma maneira mais fácil de apresentar exemplos de grupos. Este método é baseado na tarefa 6.1.1.

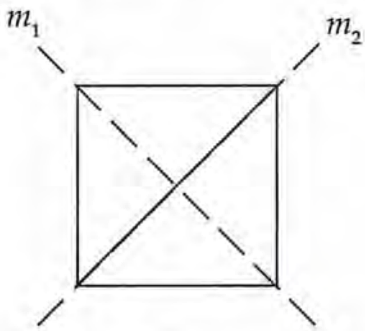
De acordo com esta tarefa, dada qualquer figura, as suas simetrias formam um grupo.

Um exemplo de uma figura possível é o seguinte:



As simetrias são:

1) Não fazer nada
2) Rotação de $\frac{1}{2}$ volta
3) Reflexão em m_1
4) Reflexão em m_2

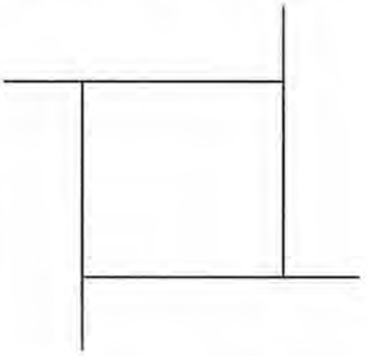


Pela tarefa 6.1.1, o conjunto das quatro simetrias tem de formar um grupo. Um truque é: exprimir essas simetrias em termos das simetrias do quadrado. Usando as respostas à tarefa 3.2.9 descobre-se a seguinte correspondência:

$$\begin{array}{rcl} \text{Não fazer nada} & \longleftrightarrow & 1 \\ \text{Rotação de } \tfrac{1}{2} \text{ volta} & \longleftrightarrow & r^2 \\ \text{Reflexão em } m_1 & \longleftrightarrow & mr^3 \\ \text{Reflexão em } m_2 & \longleftrightarrow & mr \end{array}$$

Portanto, o conjunto $\{1, r^2, mr, mr^3\}$, onde $r^4 = 1$, é um grupo. A tarefa 6.1.1 permite evitar que se verifiquem explicitamente as três condições.

Pode usar-se o mesmo método para demonstrar que o exemplo $\{1, r, r^2, r^3\}$, com $r^4 = 1$, é um grupo. Se se usar esta figura:

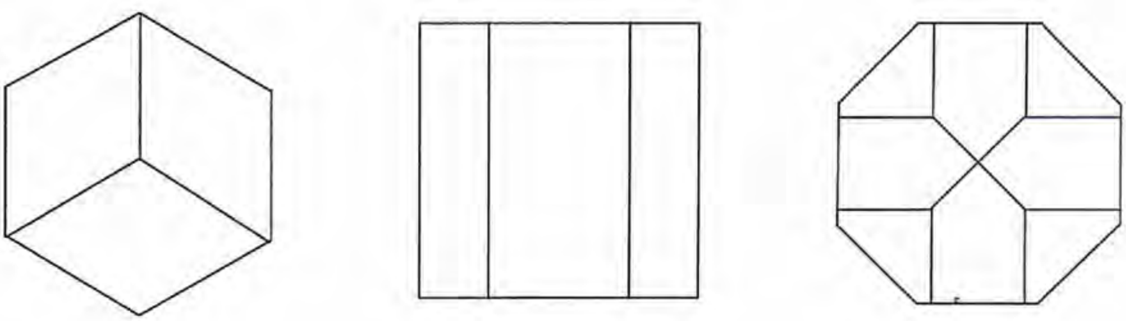


As simetrias são:

1) Não fazer nada
2) Rotação de $\frac{1}{4}$ de volta
3) Rotação de $\frac{1}{2}$ volta
4) Rotação de $\frac{3}{4}$ de volta

Estas quatro simetrias correspondem exactamente ao conjunto $\{1, r, r^2, r^3\}$, onde $r^4 = 1$; assim, esta é outra maneira de verificar que se trata de um grupo.

Tarefa 6.1.2: Use o novo método para descobrir exemplos de grupos. Algumas figuras com que pode tentar são:



Pense nas figuras começando pelo hexágono, pelo quadrado e pelo octógono, respectivamente. Em cada caso precisará de especificar $r^N = 1$ para algum N.

Quando se tem um grupo, podem escrever-se as respectivas tabelas de multiplicação. As tabelas seguintes correspondem aos dois exemplos anteriores:

	1	r	r^2	r^3
1	1	r	r^2	r^3
r	r	r^2	r^3	1
r^2	r^2	r^3	1	r
r^3	r^3	1	r	r^2

	1	r^2	mr	mr^3
1	1	r^2	mr	mr^3
r^2	r^2	1	mr^3	mr
mr	mr	mr^3	1	r^2
mr^3	mr^3	mr	r^2	1

Tarefa 6.1.3: Explique a forma como cada uma destas tabelas de multiplicação pode ser encarada como uma «parte» da tabela de multiplicação do quadrado.

O método usado para descobrir exemplos de grupos implica começar com uma figura e o respectivo grupo de simetria, alterando depois ligeiramente a figura para obter outra com um grupo de simetria menor. Este grupo de simetria menor está contido no grupo de simetria original. Um grupo contido noutro grupo é chamado SUBGRUPO. Na próxima secção serão abordados os subgrupos de forma mais exaustiva.

6.2 C_N e D_N, outra vez

No capítulo 3 foram classificados os tipos de simetria das figuras finitas e descobriu-se que todas tinham simetria de tipo C_N e D_N. Uma vez que nesse capítulo ainda não tinham sido estudados os grupos, algumas verificações feitas estavam incompletas.

A principal correcção é que C_N e D_N são de facto grupos de simetria e não só nomes dos tipos de simetria. Por exemplo, D_4 é o grupo de simetria do quadrado. De agora em diante, D_N será chamado grupo diedral e C_N grupo cíclico.

Recorde que um grupo contido noutro grupo é chamado um SUBGRUPO. Pode já ter reparado que C_N é um subgrupo de D_N. Por exemplo, a figura 1 abaixo tem grupo de simetria C_4. Na secção anterior foram descritas as suas simetrias em termos das simetrias do quadrado. Uma vez que o quadrado tem grupo de simetria D_4, segue-se que C_4 é um subgrupo de D_4. Foi já notado que a tabela de multiplicação para C_4 se assemelha a parte da tabela de multiplicação para D_4. Será uma coincidência? É claro que não.

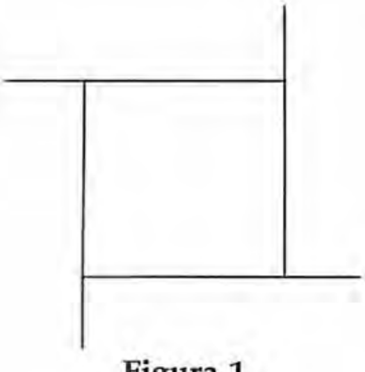


Figura 1

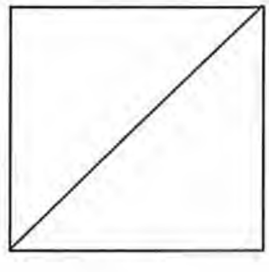


Figura 2

Existem muitas outras relações entre estes grupos. Por exemplo, D_2 é um subgrupo de D_4. Esta verificação deriva directamente do que foi feito com a figura 2 acima. Esta figura tem grupo de simetria D_2 e na secção anterior descreveram-se as suas simetrias em termos das simetrias do quadrado. Assim, D_2 é um subgrupo de D_4.

Existe alguma informação suplementar contida na análise anterior. Uma vez que C_2 é um subgrupo de D_2 e D_2 é um subgrupo de D_4, conclui-se que C_2 é um subgrupo de D_4.

A frase «D_2 é um subgrupo de D_4» esconde um pormenor subtil. No capítulo 3 escreveram-se os elementos de D_2 como $\{1, r, m, mr\}$, com $r^2 = 1$. Na secção anterior, estes elementos foram escritos como $\{1, r^2, mr, mr^3\}$, com $r^4 = 1$. Ambas são descrições do mesmo grupo. De facto, não existe a maneira «melhor» de escrever os elementos de um grupo. Podem escolher-se representações diferentes, dependendo do que serve melhor as necessidades. O ponto importante é que, embora a descrição possa mudar, o grupo permanece o mesmo.

Vejam-se agora mais de perto os subgrupos de C_N. Os elementos de C_N são representados por $\{1, r, r^2, ..., r^{N-1}\}$, com $r^N = 1$. Existem dois casos triviais:

Tarefa 6.2.1: Explique porque $\{1\}$ e C_N são subgrupos de C_N.

Verifica-se assim que C_N tem pelo menos dois subgrupos. Para alguns valores de N terá também outros.

Tarefa 6.2.2: Verifique que $\{1, r^2\}$ é um subgrupo de C_4. Verifique ainda que $\{1, r^3\}$ e $\{1, r^2, r^4\}$ são subgrupos de C_6.

Tarefa 6.2.3: Descreva todos os subgrupos de C_N.

Tarefa 6.2.4: Descreva todos os subgrupos de D_N.

6.3 Soma

Todos os grupos estudados até agora são conjuntos de movimentos. Para mudar a ênfase vamos ver alguns grupos que são conjuntos de números.

Será usada uma nova forma de soma para definir estes grupos e tornar claro que esta não é a operação usual; a nova soma designa-se por $\oplus$.

Esta funciona da seguinte forma:

$$a \oplus b = \text{resto da divisão de } a + b \text{ por } 7$$

Por exemplo, $3 \oplus 6 = 2$ porque $3 + 6 = 9$, e quando se divide 9 por 7 o resto é 2. Outros exemplos são: $5 \oplus 2 = 0$ e $1 \oplus 3 = 4$. Esta operação é chamada SOMA MÓDULO 7, que normalmente se diz abreviando «soma mod 7».

Este método de soma é algo que usamos todos os dias: utilizamos a soma mod 7 para calcular os dias da semana. Por exemplo, daqui a 7 dias será o mesmo dia da semana que é agora e 9 dias a partir de hoje é o mesmo dia da semana que 2 dias a partir de agora.

Pergunta: Se hoje é quarta-feira, que dia será daqui a 100 dias?

Resposta: Se se dividir 100 por 7, o resto é 2; portanto, daqui a 100 dias será sexta-feira.

Pode fazer-se a soma módulo qualquer número, e não só 7. Por exemplo, seja agora $\oplus$ a soma módulo 12. O símbolo é o mesmo, mas a nova definição é:

$$a \oplus b = \text{resto da divisão de } a + b \text{ por } 12$$

Por exemplo, $8 \oplus 9 = 5$, $6 \oplus 6 = 0$ e $3 \oplus 5 = 8$. Contar mod 12 é a forma de calcular as horas e os meses do ano. Daqui a 12 horas será a mesma hora que agora, se ignorarmos o facto de ser manhã ou tarde, e daqui a 14 meses será o mesmo mês que daqui a 2.

Pergunta: Suponha que agora são 10 horas. Que horas serão daqui a 100 horas?

Resposta: Se se dividir 100 por 12, o resto é 4; portanto, daqui a 100 horas serão 2 horas.

Se se quiser distinguir se 2 horas é dia ou noite, deve contar-se mod 24.

Voltemos ao estudo dos grupos. Como exemplo serão usados os números {0, 1, 2, 3}, e será feita a soma mod 4. Este conjunto é um grupo! Para o verificar veja apenas as três condições:

1) Existe a operação de não fazer nada? Sim, 0 é igual a não fazer nada. Por exemplo, $0 \oplus 3 = 3$; portanto, o 0 não faz

nada ao 3. É fácil verificar que o 0 também não faz nada aos outros números.

2) Se se combinarem dois elementos do grupo, obtém-se outro? Sim, através da operação ⊕ obtém-se o resto da divisão por 4 e os restos possíveis são 0, 1, 2 e 3.
3) Todos os números têm inverso? Sim, pode verificar-se cada caso:

$0 \oplus 0 = 0$, portanto o 0 é o inverso do 0
$3 \oplus 1 = 0$, portanto o 3 é o inverso do 1
$2 \oplus 2 = 0$, portanto o 2 é o inverso do 2
$1 \oplus 3 = 0$, portanto o 1 é o inverso do 3

Portanto, tem-se um grupo. Exactamente da mesma forma, {0, 1, 2, 3, 4, 5} é um grupo quando se usa ⊕ como a soma mod 6, e assim por diante.

Quando se tem um grupo, pode escrever-se a respectiva tabela de multiplicação.

A tabela de multiplicação para a soma mod 4 é a seguinte:

⊕	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Olhe para a tabela por um instante. Este padrão não é desconhecido. Esta tabela parece exactamente igual à tabela para as rotações do quadrado do final da secção 6.1. A única diferença é que essa tinha muitos *rr* por todo o lado; veja-se livre de todos esses *rr* e acabará por encontrar esta tabela. O que significa isto? Significa que o grupo {0, 1, 2, 3} com a soma mod 4 é de facto o mesmo que o grupo das rotações do quadrado! A tentativa de lidar com um grupo de números em vez de com um grupo de movimentos falhou redondamente, visto que este grupo de números é na verdade o mesmo que o grupo de movimentos.

São necessárias mais explicações acerca do que se entende por «os grupos são os mesmos». Essas explicações são compostas por duas partes. A primeira é construir uma correspondência entre os elementos dos grupos:

$$\begin{aligned} 0 &\longleftrightarrow 1 \\ 1 &\longleftrightarrow r \\ 2 &\longleftrightarrow r^2 \\ 3 &\longleftrightarrow r^3 \end{aligned}$$

A segunda é verificar que elementos correspondentes se comportam da mesma maneira. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 1 \oplus 2 = 3 &\longleftrightarrow r\,r^2 = r^3 \\ 2 \oplus 3 = 1 &\longleftrightarrow r^2\,r^3 = r \\ 0 \oplus 2 = 2 &\longleftrightarrow 1\,r^2 = r^2 \end{aligned}$$

Estes três pares de equações são apenas algumas das muitas que têm de ser verificadas. Felizmente, não é necessário escrever todas as equações possíveis. As tabelas de multiplicação contêm toda a informação sobre a forma como os elementos se combinam uns com os outros; assim, ao verificar que as tabelas de multiplicação são idênticas, vê-se que os elementos se comportam da mesma maneira.

Tarefa 6.3.1: Escreva a tabela de multiplicação para C_6, isto é, as rotações do hexágono, e para a soma mod 6 usando os números $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Verifique que as tabelas de multiplicação coincidem.

Tarefa 6.3.2: Invente uma fórmula para os inversos quando o símbolo $\oplus$ significa soma mod N. O que pode concluir acerca do local onde se encontram os 00 na tabela de multiplicação?

6.4 Multiplicação

Em seguida usa-se uma nova forma de multiplicação muito semelhante ao novo tipo de soma da secção anterior. Utiliza-se o símbolo $\otimes$ para esta nova multiplicação, definida por

$$a \otimes b = \text{resto da divisão de } a \times b \text{ por } 5$$

Por exemplo, $3 \otimes 4 = 2$ porque $3 \times 4 = 12$ e 12 dividido por 5 dá resto 2. De uma forma semelhante, $3 \otimes 2 = 1$ e $2 \otimes 2 = 4$. Esta operação chama-se «multiplicação módulo 5», mas, para simplificar, utiliza-se sempre «multiplicação mod 5». Usando a multiplicação mod 5, o conjunto {1, 2, 3, 4} é um grupo. Para comprovar este facto é necessário verificar as três condições:

1) Existe a operação de não fazer nada? Sim, multiplicar por 1 é igual a não fazer nada. Por exemplo, $1 \otimes 3 = 3$, portanto 1 não faz nada ao 3. É fácil verificar que o 1 também não faz nada aos outros números.
2) Quando se combinam elementos do grupo, obtém-se outro elemento do grupo? Sim, mas é necessária uma explicação mais pormenorizada. Multiplicam-se dois números e depois divide-se por 5, e não é suposto obter-se 0 como resto, porque 0 não pertence ao grupo. Quando se divide por 5, a única maneira de obter 0 como resto é começar com um múltiplo de 5. Neste caso, tal não pode acontecer porque é impossível obter um múltiplo de 5 multiplicando dois números do conjunto {1, 2, 3, 4}.
3) Todos os elementos têm inverso? Sim, podendo verificar-se cada caso:

$1 \otimes 1 = 1$, portanto o 1 é o inverso do 1
$3 \otimes 2 = 1$, portanto o 3 é o inverso do 2
$2 \otimes 3 = 1$, portanto o 2 é o inverso do 3
$4 \otimes 4 = 1$, portanto o 4 é o inverso do 4

Portanto, {1, 2, 3, 4} é um grupo para a operação de multiplicação mod 5. Da mesma maneira, o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} é um grupo para a operação de multiplicação mod 7. As tabelas de multiplicação para estes grupos são as seguintes:

⊗	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

⊗	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Tarefa 6.4.1: As tabelas de multiplicação para a soma mod N e para a multiplicação mod N parecem mais simétricas que as tabelas de multiplicação escritas na secção 3.3. Porque acontece isto?

Na tarefa 6.3.2 descobriu-se que, quando se utiliza a soma mod 7, o inverso de um número a era $7 - a$. Descobrir os inversos para a multiplicação mod 7 não é tão fácil. A tabela de multiplicação permite-nos descobrir o inverso de um número; no entanto, não existe uma fórmula simples para o fazer.

Outros exemplos de grupos são os seguintes:

{1, 5, 7, 11} usando a multiplicação mod 12
{1, 3, 5, 7} usando a multiplicação mod 8
{1, 3, 5, 9, 11, 13} usando a multiplicação mod 14
{1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14} usando a multiplicação mod 15

Deve estar a pensar que foi usado um método estranho para escolher estes números. Para descobrir o que se está a passar deve primeiro verificar que esses exemplos são efectivamente grupos. Isso exige algum trabalho, mas pode ser feito de uma forma mais interessante do que verificando fastidiosamente as três condições. Uma sugestão de um método aplicado ao primeiro dos anteriores exemplos é o seguinte. É fácil ver que o 1 é apenas a operação de não fazer nada, faltando portanto ser verificadas duas condições.

Primeiro escreva a tabela de multiplicação:

$\otimes$	1	5	7	11
1	1	5	7	11
5	5	1	11	7
7	7	11	1	5
11	11	7	5	1

De seguida use a informação contida na tabela de multiplicação para verificar as restantes condições. Para confirmar que os elementos se combinam para dar outros elementos do grupo precisa somente de verificar que as entradas dentro da tabela são apenas números da primeira linha ou, o que é o mesmo, primeira coluna. Para ver se todos os elementos têm inverso precisa de verificar que o número 1, correspondente à operação de não fazer nada para este grupo, aparece exactamente uma vez em cada linha e coluna. Uma vez que ambas são verdadeiras para a tabela anterior, o conjunto é um grupo.

Tarefa 6.4.2: Use o método anterior para verificar se os outros três exemplos também são grupos.

Tarefa 6.4.3: Experimente ver se mudar os números nos exemplos anteriores destrói o facto de se ter um grupo. Em particular, os números dados não foram escolhidos ao acaso.

Tarefa 6.4.4: Que números usaria para formar um grupo para a multiplicação mod 10? E para a multiplicação mod 18? Verifique se as suas respostas estão correctas escrevendo a tabela de multiplicação.

Aparentemente, os grupos desta secção são apenas grupos de números, e não grupos de movimentos. Mas, na verdade, eles também são grupos de movimentos! É este o assunto da próxima secção.

6.5 Rearranjos

Nesta secção serão usadas as tabelas de multiplicação para mostrar que todos os grupos são grupos de movimentos.

Analisando as tabelas de multiplicação que foram escritas, poderá ver que as afirmações seguintes são verdadeiras:

- Cada elemento do grupo aparece exactamente uma vez em cada linha.
- Cada linha é diferente.

Estas afirmações continuam verdadeiras se se substituir a palavra «linha» por «coluna».

Tarefa 6.5.1: Explique porque as afirmações são verdadeiras.

Outra forma de exprimir estas observações é afirmar que «cada linha é um rearranjo diferente do grupo». Ora cada linha é designada por um elemento do grupo; assim, *cada elemento indica como rearranjar o grupo*. Por outras palavras, cada elemento é um movimento; é o movimento de rearranjar o grupo! Isto é espantoso. Qualquer grupo é automaticamente um grupo de movimentos.

Um movimento de rearranjo não é exactamente o mesmo que um movimento rígido do plano, mas isto não ofusca o facto interessante de todos os grupos poderem ser considerados grupos de movimentos. A observação de que todos os grupos são na verdade grupos de rearranjos foi feita pela primeira vez, em meados do século XIX, por um matemático chamado Arthur Cayley. Este resultado é geralmente chamado «teorema de Cayley».

Na próxima secção serão explorados os rearranjos com mais pormenor.

6.6 Permutações

A palavra usual para rearranjo é PERMUTAÇÃO. Nesta secção serão utilizados ambos os termos.

Os primeiros exemplos serão baseados no rearranjo dos números 1 2 3 4 5 6. Uma maneira de descrever uma permutação é mostrar para onde cada número vai. Eis dois exemplos de permutações, a que se chamou f e g:

$$f \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{array} \qquad\qquad g \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{array}$$

Por exemplo, f pega na lista 1 2 3 4 5 6 e rearranja-a para obter 3 5 4 6 2 1. Pode também pensar-se em f como rearranjando qualquer lista de 6 elementos. Esta leva o 1.º elemento e coloca-o em 3.º, pega no 2.º e põe-o em 5.º, e assim por diante.

Como estamos interessados em estudar grupos, o facto de o conjunto de todas as permutações de 1 2 3 4 5 6 formar um grupo é uma boa notícia. Tanto f como g são elementos desse grupo. Para se saber que se tem um grupo devem verificar-se as três condições:

1) Existe a operação de não fazer nada? Sim, não fazer nada é um rearranjo que apenas deixa tudo no lugar onde está.

2) Combinando duas permutações obtém-se outra permutação? Sim, fazer um rearranjo seguido de um novo rearranjo é o mesmo que fazer um grande rearranjo. Como exemplo podem combinar-se as permutações f e g para obter uma nova permutação fg. Recorde que fg significa primeiro fazer g e depois f:

$$\begin{array}{r cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\text{Primeiro fazer } g & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 2 & 6 & 5 & 3 & 1 & 4 \\
\text{Depois fazer } f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 5 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\text{O resultado é } fg & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 5 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6
\end{array}$$

3) Toda a permutação tem inverso? Sim, simplesmente «desarranje». Por exemplo, a permutação seguinte é o inverso de f:

$$\begin{array}{r cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
h & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 6 & 5 & 1 & 3 & 2 & 4
\end{array}$$

Para mostrar que h é o inverso de f tem de se verificar que hf é o mesmo que a operação de não fazer nada.

$$\begin{array}{r cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
f & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \\
h & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r cccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
hf & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}$$

Assim, é correcto afirmar que h é o inverso de f.

Uma vez que o conjunto de todas as permutações de 1 2 3 4 5 6 satisfaz as três condições, conclui-se que é um grupo. Este grupo é chamado S_6 e pronuncia-se «esse seis». O S indica «simétrico». De uma forma semelhante, o grupo das permutações de 1 2 3 4 5 é chamado S_5, e assim por diante.

A notação usada até agora para descrever uma permutação é muito pesada. Introduz-se agora um método melhor chamado NOTAÇÃO CÍCLICA. Eis um exemplo de um ciclo: (5 2 1 3). Este ciclo é interpretado como «o 5 vai para o 2, o 2 para o 1, o 1 para o 3 e o 3 para o 5». Lê-se da esquerda para a direita e, quando se chega ao fim, volta-se ao início. Se um ciclo não refere um número, esse número não se move. Por exemplo, o ciclo dado não afecta o número 4. Uma vez que os números não mencionados num ciclo não se movem, o «ciclo vazio» () é igual à operação de não fazer nada. Um ciclo com apenas um número, tal como (3), é também igual à operação de não fazer nada. Isto porque o 3 vai para o 3, portanto o 3 não se move e nada mais é referido, pelo que também nada mais se move.

Para combinar ciclos começa-se da direita para a esquerda. Por exemplo, (3 5 2)(6 3 1) significa «o 6 vai para o 3, o 3 vai para o 1 e o 1 vai para o 6, depois o 3 vai para o 5, o 5 vai para o 2 e o 2 vai para o 3». Note que o 3 foi mudado mais de uma vez.

Aviso. Quando se combinam ciclos, faz-se primeiro o ciclo da direita. Mas dentro de cada ciclo lê-se da esquerda para a direita.

Se se tem de lidar com vários ciclos, é mais fácil se cada número aparecer apenas num ciclo. Estes são chamados CICLOS DISJUNTOS. Por exemplo, (2 3 5)(7 4 6 1) é um produto de ciclos disjuntos. Um facto importante é que cada permutação pode ser escrita como um produto de ciclos disjuntos. Por exemplo:

$$f \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{array} \qquad \text{é o mesmo que } (2\ 5)(1\ 3\ 4\ 6)$$

$$g \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 6 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{array} \qquad \text{é o mesmo que } (1\ 2\ 6\ 4\ 3\ 5)$$

$$fg \quad \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 & 6 \end{array} \qquad \text{é o mesmo que } (6)(4)(1\ 5\ 3\ 2)$$

Pode também representar-se *fg* como (1 5 3 2) porque tanto (4) como (6) não fazem nada. As representações cíclicas foram descobertas seguindo as permutações e descobrindo sucessivamente para onde cada número vai.

Tarefa 6.6.1: Mostre que as permutações em S_3 podem ser representadas por {(), (1 2), (2 3), (3 1), (1 2 3), (1 3 2)}.

Se se tem um produto que não é disjunto, pode-se transformá-lo num produto de ciclos disjuntos. Por exemplo, (3 5 2 1)(6 2 1) = (6 1)(2 3 5). Esta resposta foi descoberta seguindo os ciclos. Os passos a dar são os seguintes:

Primeiro escolha qualquer número. Começa-se com o 6.	(6
Primeiro o 6 vai para o 2, depois o 2 para o 1, portanto o resultado da composição é que o 6 vai para o 1.	(6 1
De seguida descobre-se para onde o 1 vai. Primeiro o 1 vai para o 6, depois o 6 não se move, portanto o resultado da composição é que o 1 vai para o 6. Um ciclo está completo.	(6 1)
De seguida escolhe-se outro número. Escolheu-se o 2.	(6 1)(2
Primeiro o 2 vai para o 1, depois o 1 vai para o 3, portanto o resultado da composição é que o 2 vai para o 3.	(6 1)(2 3
Primeiro o 3 fica onde está, depois vai para o 5, portanto o efeito total é que o 3 vai para o 5.	(6 1)(2 3 5
Primeiro o 5 fica onde está, depois vai para o 2, portanto o efeito total é o 5 ir para o 2. Este passo completa outro ciclo. Todos os números foram usados, e portanto o processo está concluído.	(6 1)(2 3 5)

Este método pode ser usado para transformar qualquer produto de ciclos num produto de ciclos disjuntos. Um exercício útil é multiplicar as representações cíclicas de f e g, verificando que se obtém a representação cíclica de fg.

Tarefa 6.6.2: Escreva um produto de ciclos e use o método anterior para o transformar num produto de ciclos disjuntos.

Tarefa 6.6.3: O que é o inverso de um ciclo?

Tarefa 6.6.4: Escreva a tabela de multiplicação para S_3. Use os elementos de S_3 da tarefa 6.6.1.

Tarefa 6.6.5: Explique porque pode o produto de ciclos disjuntos ser rearranjado sem mudar o resultado da permutação. Por exemplo, (1 2 3)(4 5 6 7) é o mesmo que (4 5 6 7)(1 2 3).

Tarefa 6.6.6: Dê um exemplo para mostrar que o rearranjo de ciclos não disjuntos pode conduzir a permutações diferentes.

Para completar o círculo de ideias desta secção mostra-se como a notação para os ciclos pode ser utilizada para descrever as simetrias do quadrado. Eis duas simetrias:

Podem descrever-se estas simetrias mostrando como cada uma rearranja os vértices do quadrado: $m = (c\ d)(b\ a)$ e $r = (a\ b\ c\ d)$. Qualquer simetria de qualquer figura pode ser descrita desta forma.

Tarefa 6.6.7: Usando as designações anteriores para os vértices do quadrado, determine que simetria do quadrado corresponde a $(a\ c)(b\ d)$ e a $(a\ c)$.

Tarefa 6.6.8: Quantos elementos tem o grupo S_n? Por outras palavras, quantas maneiras existem de rearranjar os números 1 2 3 ... n?

Um ciclo contendo dois elementos, tal como (3 5) é chamado um 2-CICLO, ou uma TRANSPOSIÇÃO. Esta troca dois elementos, deixando tudo o resto na mesma. É possível escrever qualquer permutação como produto de 2 ciclos; os 2 ciclos podem, no entanto, não ser disjuntos. Por exemplo, (1 2 3) = (2 3)(1 3).

Tarefa 6.6.9: Descubra outra expressão para (1 2 3) como produto de 2-ciclos.

6.7 Notas

Nota 6.7.a: O termo técnico para dois grupos que sejam «os mesmos» é *isomorfos*. A correspondência dos elementos dos dois grupos é chamado *isomorfismo*. Estas palavras têm raízes gregas: *iso* significa «igual» e *morfo* significa «forma». Para repetir a definição da secção 6.3, um ISOMORFISMO entre dois grupos é uma correspondência entre os elementos desses grupos que faz corresponder entre si as respectivas tabelas de multiplicação. Se tal correspondência existe, os dois grupos são ISOMORFOS.

Tarefa 6.7.1: Mostre que S_3 é isomorfo a D_3. Nota: já escreveu as tabelas de multiplicação de ambos os grupos; portanto, uma vez encontrada uma correspondência, será fácil verificar se ela funciona.

Uma maneira de responder à tarefa 6.7.1 é identificar com letras os vértices de um triângulo, observando depois como as simetrias do triângulo rearranjam essas letras. É simplesmente uma coincidência S_3 ser o mesmo que D_3. Para valores de N maiores, os grupos S_N e D_N são diferentes. Contudo, identificando os vértices de um N-gono regular verifica-se que D_N é um subgrupo de S_N para $N \geq 4$.

Nota 6.7.b: No capítulo 3 foram classificadas as figuras finitas em simetrias de tipo C_N e D_N. Nessa altura não se explicou porque as figuras com o mesmo tipo de simetria são de facto «as mesmas». Agora pode dar-se a definição oficial.

Definição. Duas figuras planares finitas têm o mesmo tipo de simetria se existe um isomorfismo entre os seus grupos de simetria tal que esse isomorfismo faz corresponder rotações a rotações e reflexões a reflexões.

A definição anterior não diz somente que os grupos de simetria de duas figuras devem ser isomorfos; existe a condição adicional de as reflexões deverem corresponder a reflexões e rotações a rotações. Esta diferença é relevante, como se demonstra na tarefa seguinte.

Tarefa 6.7.2: Mostre que C_2 é isomorfo a D_1. Explique porque C_2 e D_1 são tipos de simetrias diferentes.

Para obter a definição do *tipo de simetria* dos padrões de faixa e papéis de parede junte apenas a condição de as translações deverem corresponder a translações e as reflexões deslizantes a reflexões deslizantes.

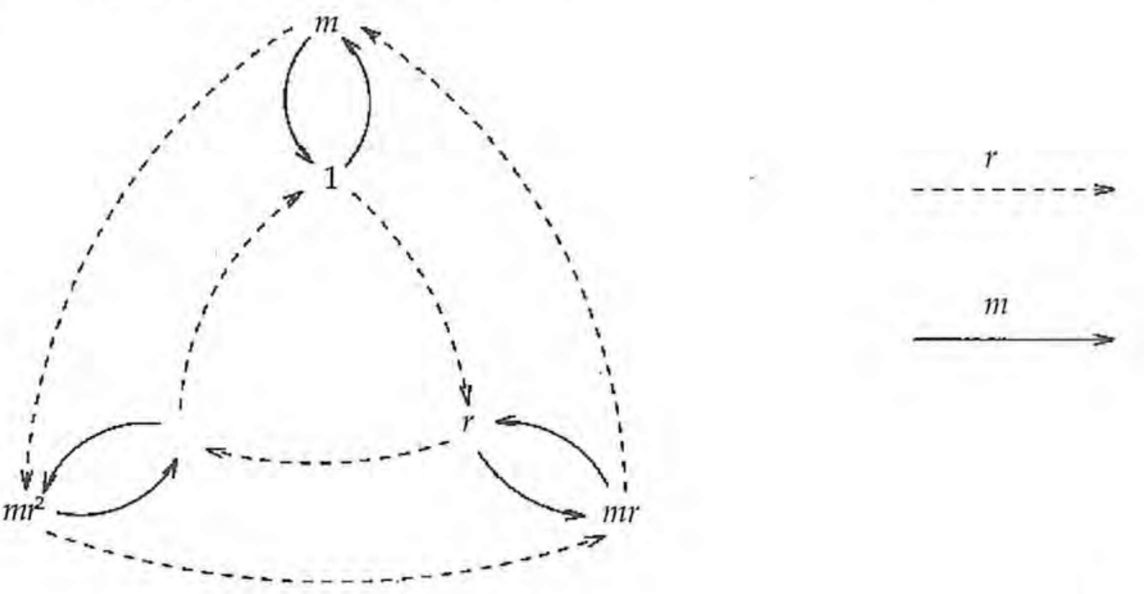
7
Diagramas de Cayley

7.1 Geradores

Neste capítulo investiga-se uma forma de olhar para um grupo como uma unidade inteira, e não apenas como um conjunto de elementos separados. Este estudo será acompanhado pelo estudo dos diagramas de Cayley de um grupo.

No capítulo 3 observou-se que o grupo de simetria do triângulo pode ser representado por $\{1, r, r^2, m, mr, mr^2\}$. Para o nosso objectivo, a observação-chave é que tudo é construído a partir de r e m. Uma vez que estes podem ser combinados para produzir todos os outros elementos, diz-se que r e m GERAM o grupo.

Saber que r e m são geradores do grupo não explica de maneira precisa como estes se combinam para originar os outros elementos. Um método para seguir a forma como estas combinações ocorrem é o diagrama de Cayley. A figura seguinte mostra o diagrama de Cayley para o grupo de simetria do triângulo e de seguida uma explicação acerca do que as diferentes partes do diagrama representam.



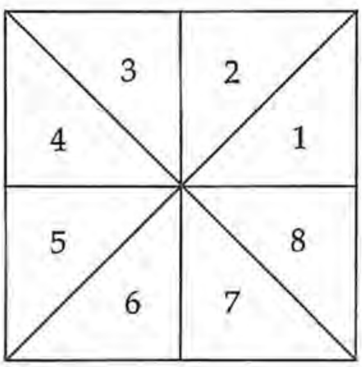
O diagrama tem duas partes: cada elemento do grupo aparece uma vez e cada gerador tem uma seta associada a ele. As setas funcionam da seguinte forma: considere-se o elemento mr^2. Se o multiplicarmos por m, obtém-se $m(mr^2) = r^2$. Por outras palavras, o m «move» mr^2 para r^2. Portanto, existe uma seta $m \longrightarrow$ que vai de mr^2 para r^2. De uma forma semelhante, $r(mr^2) = mr$. Assim, existe uma seta r ----→ de mr^2 para mr. De cada elemento sairá uma seta m e uma seta r. Para descobrir onde a seta vai parar multiplica-se à esquerda e simplifica-se. O leitor pode verificar que todas as setas foram desenhadas correctamente.

Tarefa 7.1.1: Use os diagramas de Cayley para mostrar que $rmr^2mrmr^2 = mr^2$.

7.2 Rearranjo de unidades básicas

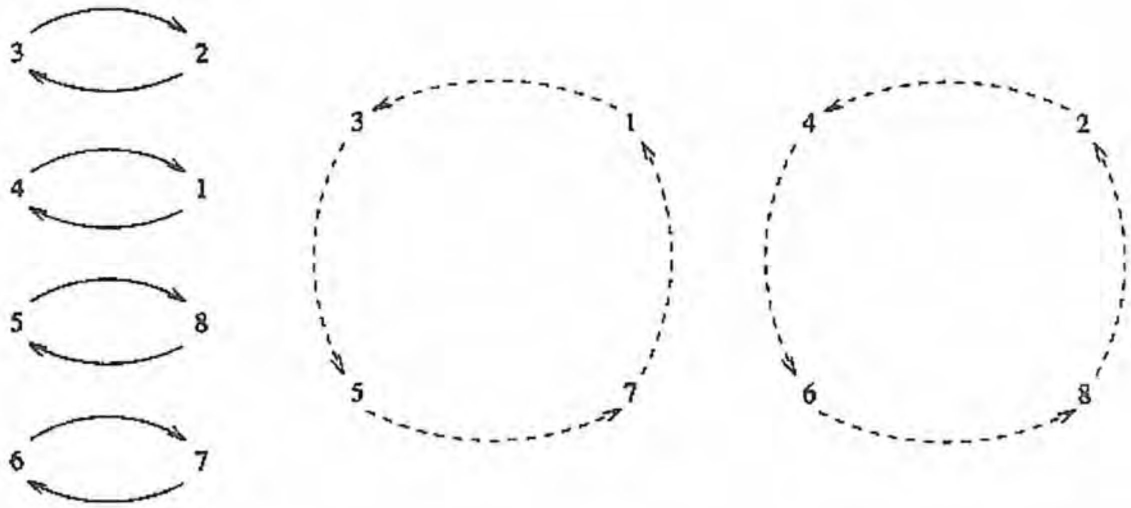
Uma vez visto o diagrama de Cayley para o grupo de simetria do triângulo, é bastante fácil imaginar como será o diagrama de Cayley do quadrado. Vamos construir em seguida o diagrama de Cayley para o grupo de simetria do quadrado; será usado um método que também é útil para construir os diagramas de Cayley para os grupos de simetria de outras figuras. O método utiliza as unidades básicas do grupo de simetrias. As unidades básicas para os grupos de simetria de figuras finitas estão referidas na nota 5.6.f no final do capítulo 5.

Passo 1. Divida o quadrado em unidades básicas para o grupo de todas as simetrias. Identifique cada unidade básica com números.

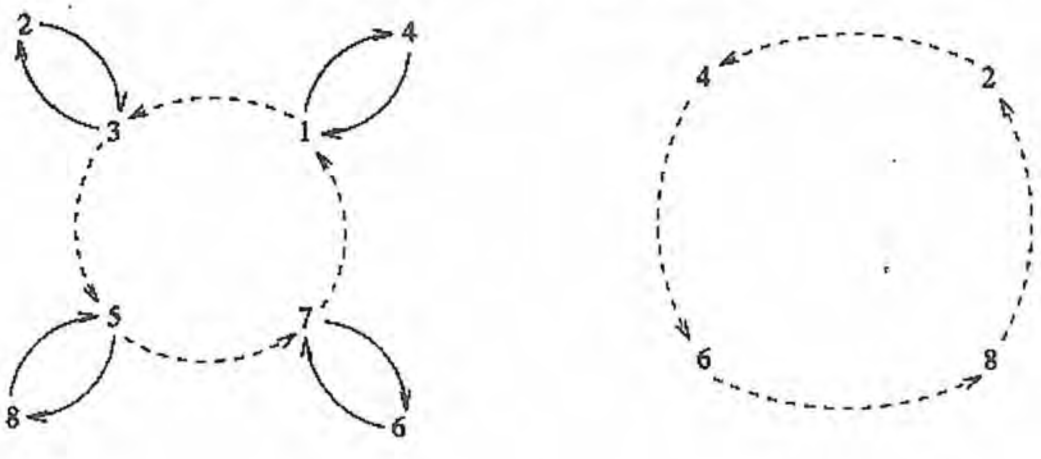


Passo 2. Faça pequenos diagramas que mostrem como o m e o r rearranjam as unidades básicas. Será ainda usada a seta →

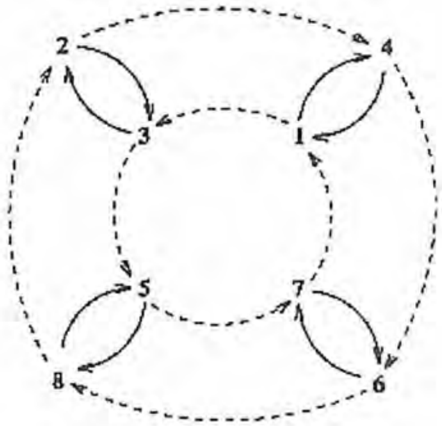
para m e $-\!-\!\rightarrow$ para r. Recorde que m indica a reflexão num espelho vertical.



Passo 3. Imagine que os diagramas pequenos são instruções de montagem. Cole os *uns* todos juntos, os *dois* também e assim por diante. Aqui está uma colagem parcial para o quadrado:



Para terminar devem colar-se estas duas peças. Isto pode ser feito se se colocar uma peça por cima da outra. O resultado é o da figura ao lado. Este é o diagrama de Cayley para o grupo de simetria do quadrado.



Após ver estes dois exemplos é fácil construir o diagrama de Cayley de qualquer figura finita.

Pode parecer desagradável que o diagrama seja construído a partir das unidades básicas em vez de elementos de grupo. No entanto, existe uma solução simples. Para converter os números que identificam as unidades básicas em elementos de grupo comece por escolher uma unidade básica e chame-lhe «1», o elemento neutro do grupo. Siga depois as setas do diagrama, substituindo os números que identificam as outras unidades básicas pelo elemento do grupo apropriado. Esta é a ideia por detrás da tarefa 7.1.1.

7.3 Padrões de faixa

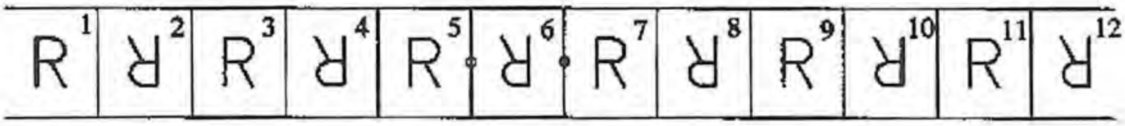
Em seguida tentamos construir o diagrama de Cayley para o grupo de simetria de alguns padrões de faixa. Serão usados os mesmos três passos utilizados para construir o diagrama de Cayley do quadrado.

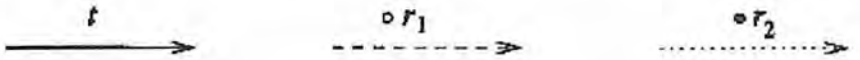
Depara-se-nos imediatamente uma dificuldade: descobrir geradores para o grupo de simetrias da faixa. Mais precisamente, o problema é encontrar um «bom» conjunto de geradores. Uma vez que se terão de juntar os pequenos diagramas que cada gerador contém, pretende-se usar o menor número de geradores possível e aqueles cujos pequenos diagramas sejam fáceis de se ajustar. O plano é o seguinte: primeiro descobrir um conjunto gerador e formar todos os diagramas pequenos. Depois usar o menor número de geradores necessários para formar um diagrama completamente conexo. Se as peças escolhidas não se ajustarem facilmente, substitui-se um dos geradores escolhidos por um gerador não usado ainda. Repete-se este processo até que surja um bom diagrama de Cayley.

O conjunto de geradores com que se começará são as rotações e reflexões de espelho não equivalentes em conjunto com as menores simetrias de translação e reflexão deslizante. O leitor deve considerar porque é este um bom conjunto para começar.

Eis um exemplo:

Esta faixa tem simetria de translação t e duas simetrias de rotação não equivalentes r_1 e r_2, com centros de rotação ○ e •, respectivamente. A figura sombreada é uma unidade básica. De seguida divide-se a faixa em unidades básicas e identifica-se cada uma escolhendo uma seta diferente para cada gerador. Quando tentar fazer isto sozinho, deve usar canetas de cores diferentes para as diferentes setas.

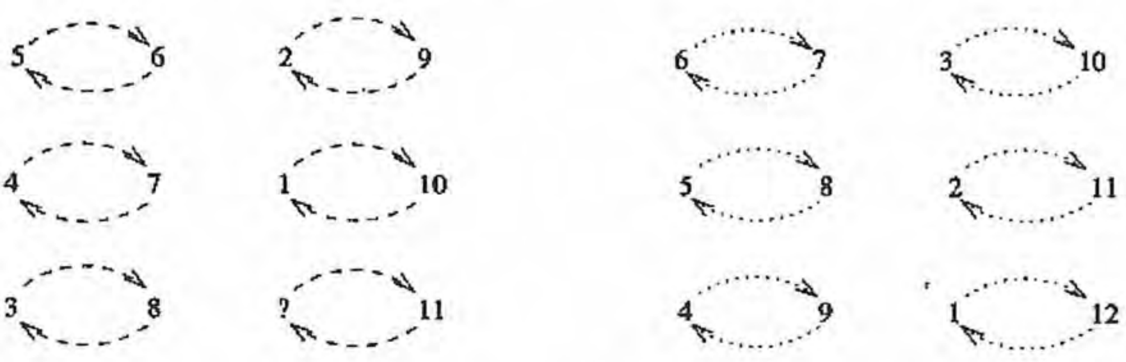




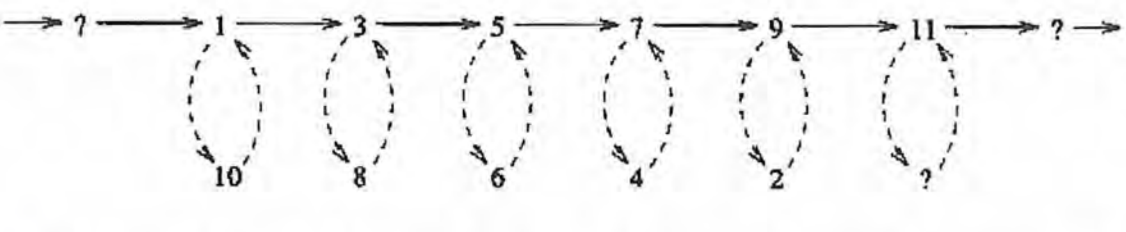
Os pequenos diagramas obtidos para cada gerador são:

→ ? → 1 → 3 → 5 → 7 → 9 → 11 → ? →

→ ? → 2 → 4 → 6 → 8 → 10 → 12 → ? →

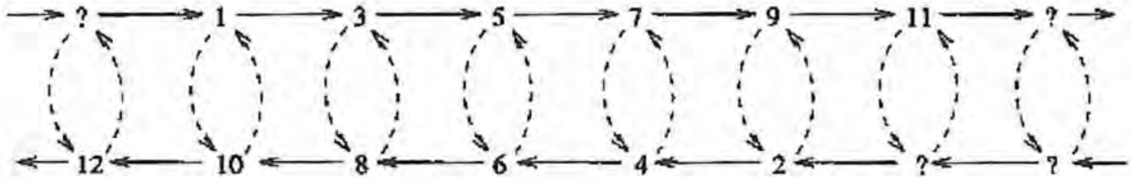


O ? representa as várias unidades básicas não identificadas. Pode então começar-se a juntar tudo. Ter-se-á terminado quando se tiver um diagrama conexo no qual todos os números aparecem exactamente uma vez. Começa-se por escolher os geradores t e $\circ r_1$. Eis uma junção parcial:

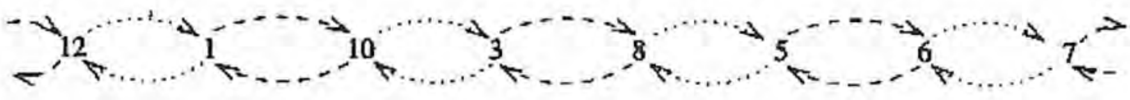


→ ? → 2 → 4 → 6 → 8 → 10 → 12 → ? →

Todos os números aparecem neste esquema, pelo que este estará terminado se se conseguirem juntar as duas peças. Para o fazer deve inverter uma das peças. O resultado final é o diagrama de Cayley para o grupo de simetria da faixa:

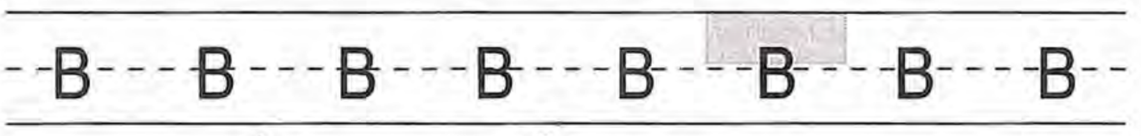


Esta não é a única resposta possível. Se se usar t e $\bullet r_2$ como geradores obtém-se essencialmente o mesmo desenho mas se se usar $\circ r_1$ e $\bullet r_2$ obtém-se este diagrama de Cayley muito diferente:

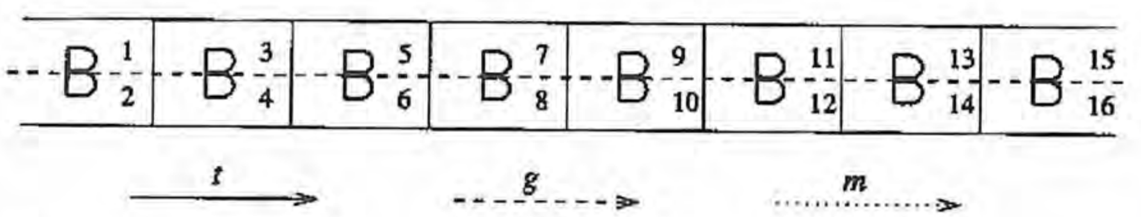


Comparando estes dois diagramas verifica-se que a maneira como t e $\bullet r_1$ se combinam para produzir todas as simetrias da fila é muito diferente da forma como $\circ r_1$ e $\bullet r_2$ se combinam para dar as outras simetrias.

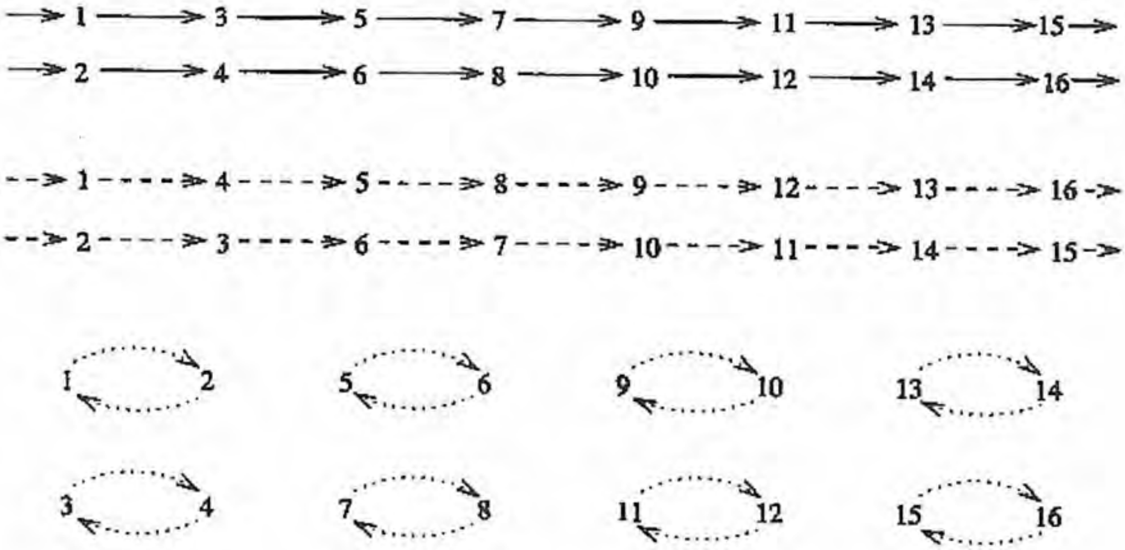
Eis uma outra faixa:



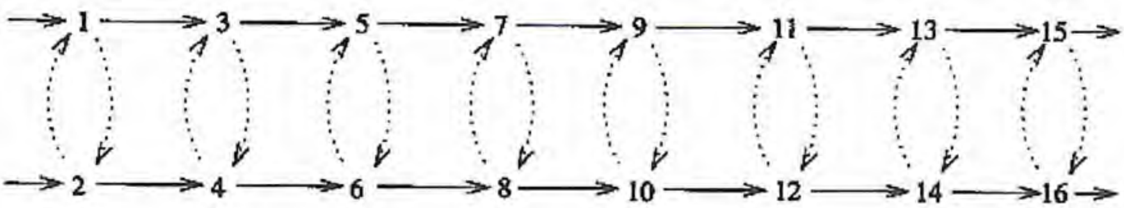
Desta vez tem-se uma translação t, uma reflexão deslizante g e uma reflexão de espelho m num espelho horizontal. A figura sombreada é uma unidade básica. Em seguida pode ver uma identificação das diferentes unidades básicas com números e a seta correspondente a cada gerador:



Os diagramas pequenos são:



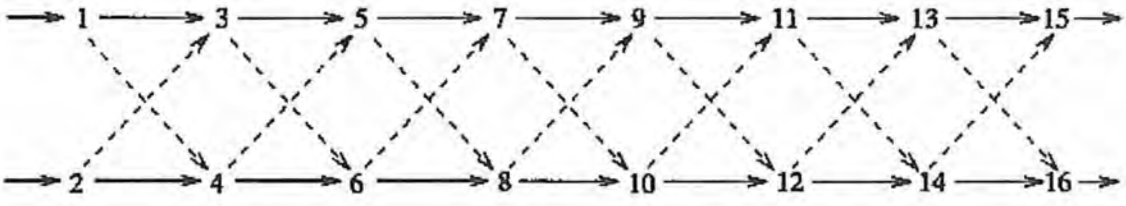
Colando *t* e *m* obtém-se o seguinte diagrama de Cayley:



Note que este não é o mesmo diagrama de Cayley que o da faixa anterior.

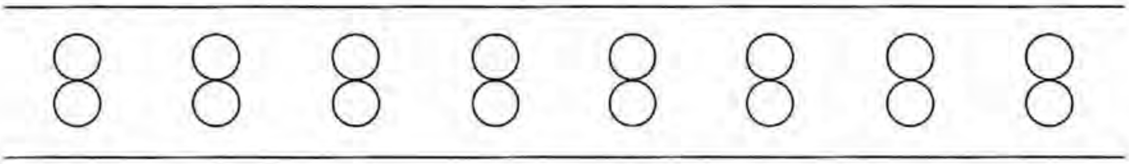
Colando *g* e *m* obtém-se uma figura semelhante.

Pode também colar-se *t* com *g*, mas não é possível desenhar o diagrama resultante sem que se verifique o cruzamento de setas:



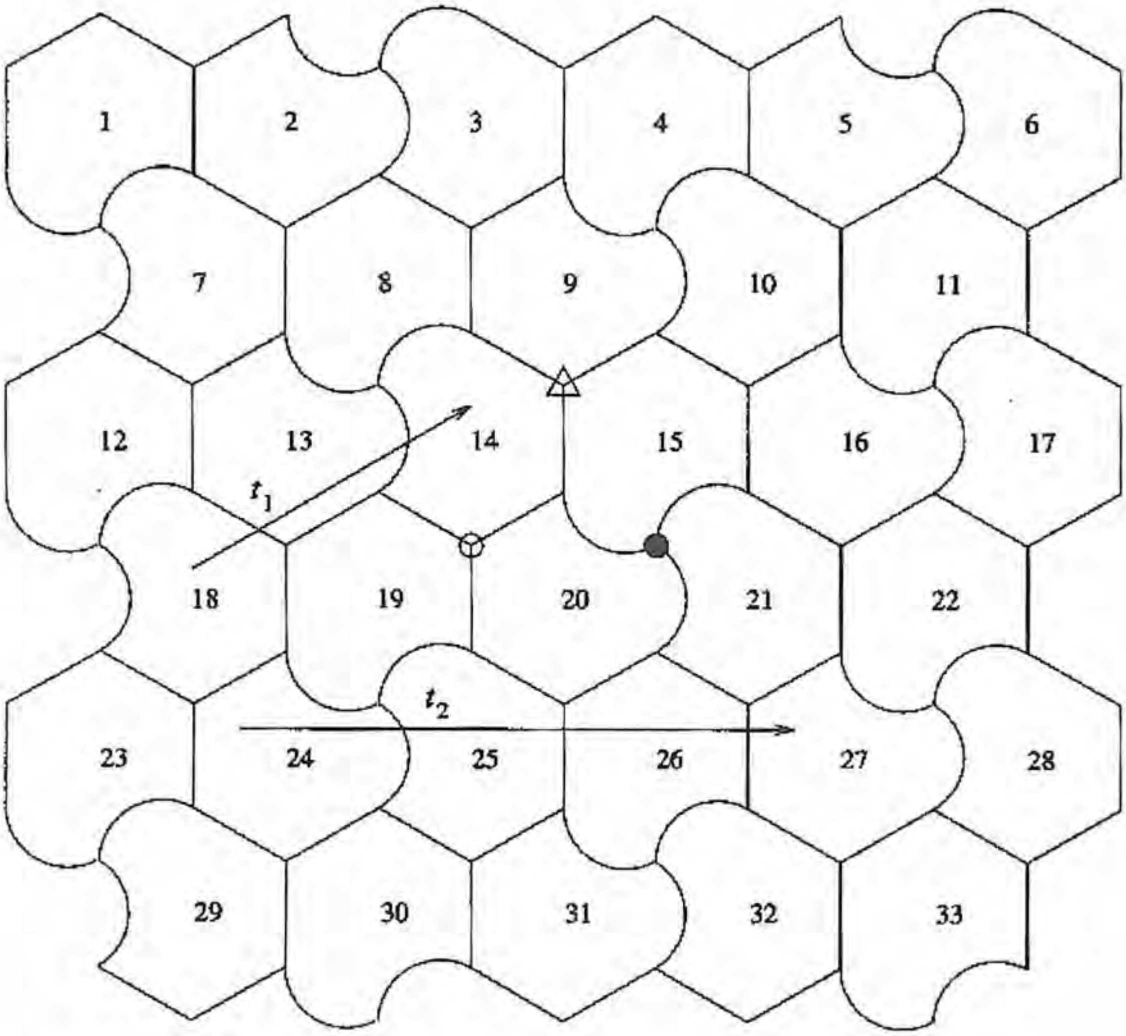
O diagrama não é interessante: o que se pretende é construir diagramas de Cayley sem cruzamento de setas. Se este tivesse sido o resultado obtido para a primeira tentativa com a faixa, ter-se-ia abandonado t ou g e usado m. Este processo de substituição de um gerador quando os diagramas pequenos não se ajustam apropriadamente é da maior importância quando se estuda um exemplo mais complicado.

Tarefa 7.3.1: Construa um diagrama de Cayley para o grupo das simetrias desta faixa:

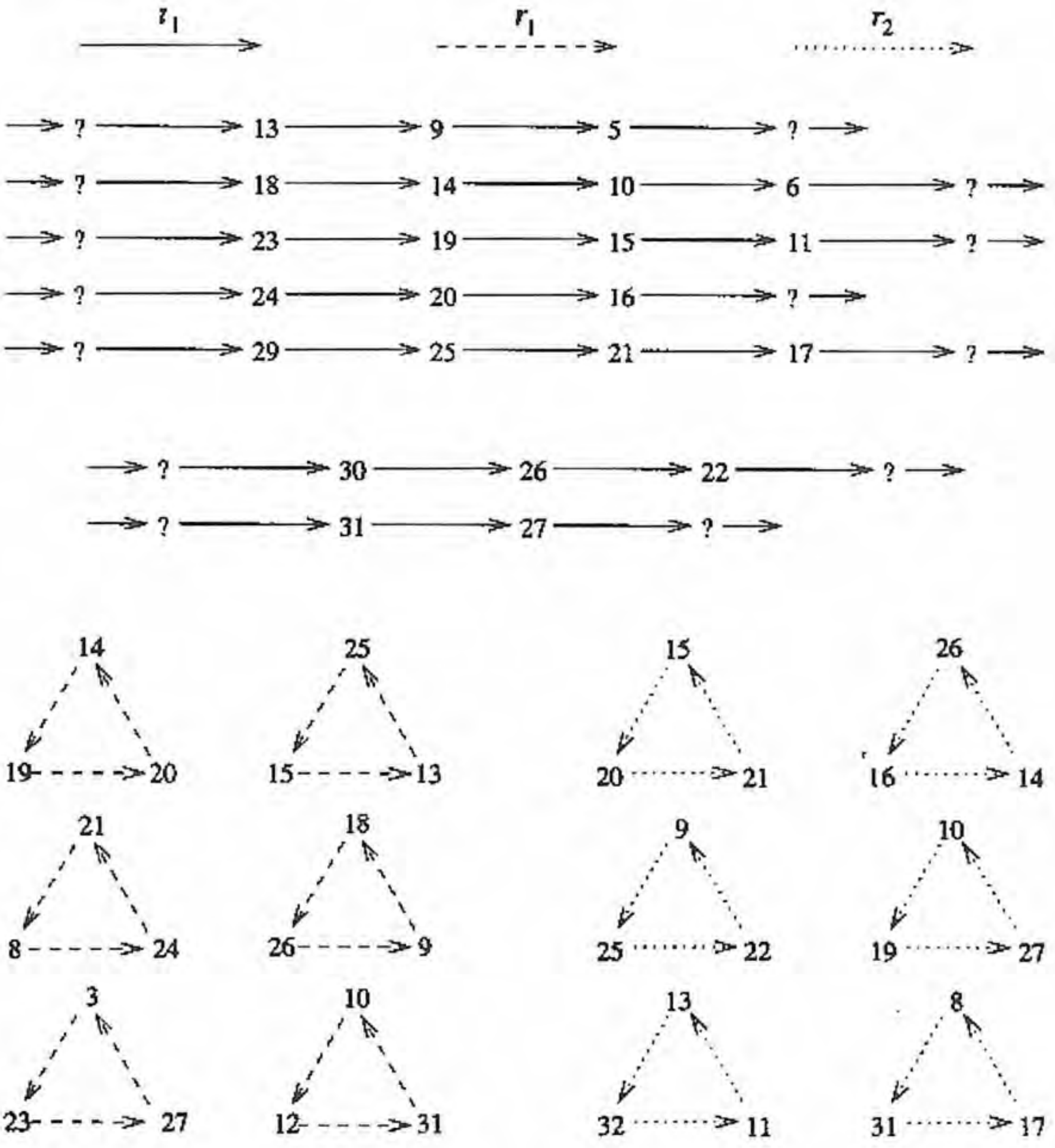


7.4 Papéis de parede

Vamos em seguida construir o diagrama de Cayley do grupo de simetria deste papel de parede:



Estão identificadas as unidades básicas, duas simetrias de translação t_1 e t_2 e três centros de rotação não equivalentes ○r_1, •r_2 e Δr_3. Isto esgota as simetrias do papel de parede. Para construir o diagrama de Cayley segue-se o plano usado na última secção. Primeiro escrevem-se os diagramas pequenos para cada gerador.

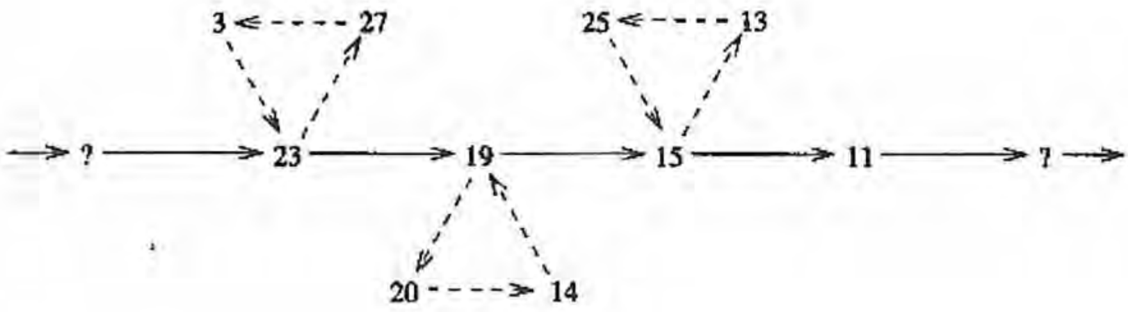


Para poupar espaço não se desenharam os diagramas pequenos para t_2 ou r_3, mas pode-se fazê-lo mais tarde se for necessário. Agora passamos a colar os diagramas. Neste ponto não sabemos quantos geradores serão precisos, mas esperamos que dois sejam suficientes. Por nenhuma razão em especial, começamos com t_1 e r_1.

Começando com esta peça relativa a t_1,

$$\to ? \to 23 \to 19 \to 15 \to 11 \to ? \to$$

colamos as peças relativas a r_1, obtendo

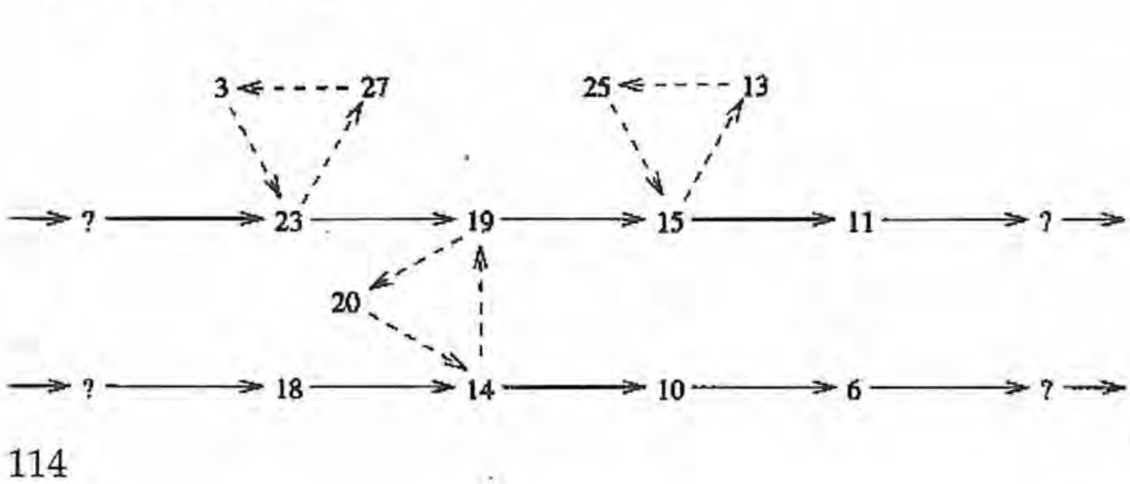


A forma exacta como as várias peças estão orientadas é arbitrária e poderá ser necessário rearranjá-las mais tarde. Em seguida colamos outra peça relativa a t_1. A seguinte escolha é razoável

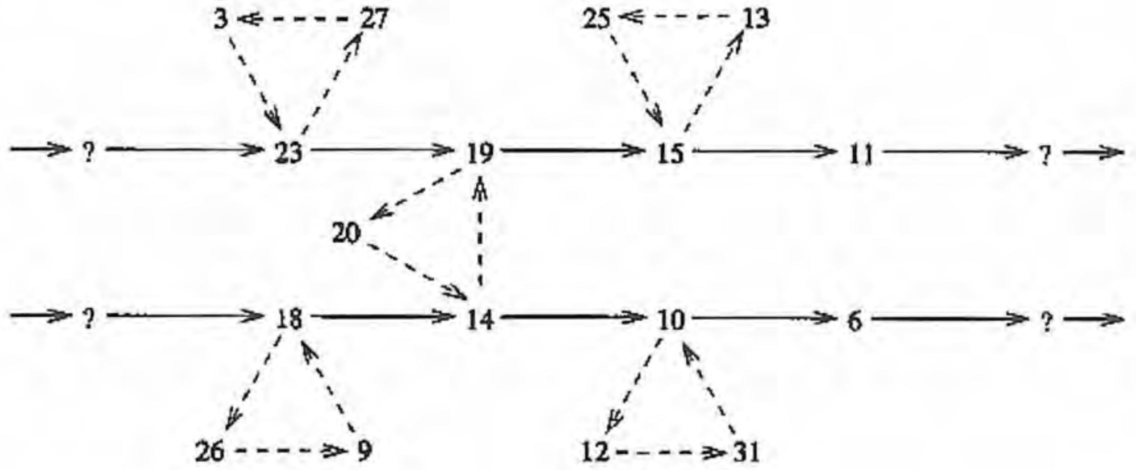
$$\to ? \to 18 \to 14 \to 10 \to 6 \to ? \to$$

porque os dois 14 serão unidos e a figura resultante não será demasiado grande.

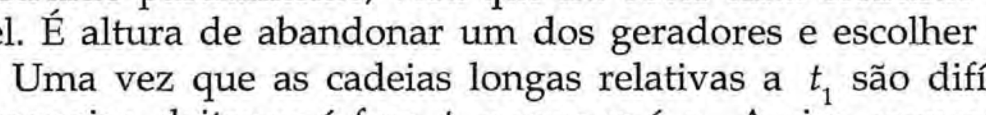
Eis o resultado:



Existem agora duas peças relativas a r_1 que podem ser unidas:



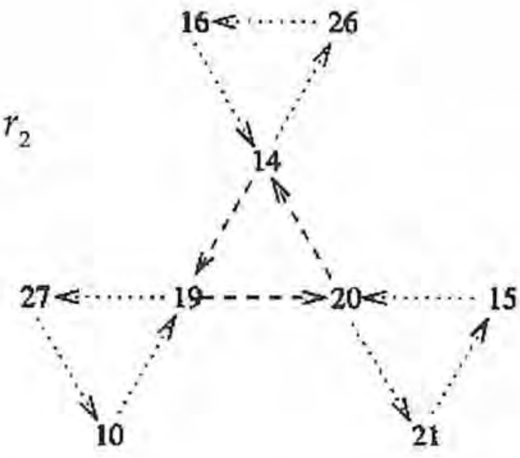
O esquema não está a parecer muito bonito, mas ainda existe esperança de que tudo acabe bem. Nota-se que as duas peças seguintes relativas a t_1 podem ser unidas ao diagrama anterior em dois lugares:



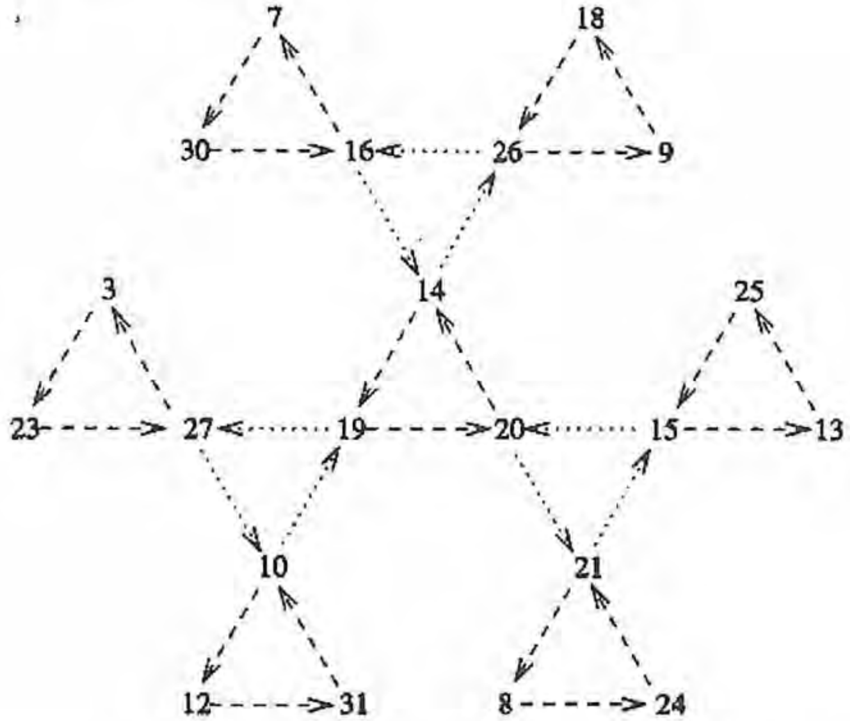
Se analisar onde essas duas peças se juntam no diagrama construído parcialmente, verá que irá obter uma confusão terrível. É altura de abandonar um dos geradores e escolher outro. Uma vez que as cadeias longas relativas a t_1 são difíceis de manejar, deitar-se-á fora t_1 e usar-se-á r_2. Assim, começa-se de novo e tenta-se construir o diagrama de Cayley usando r_1 e r_2.

Eis uma peça relativa a r_1:

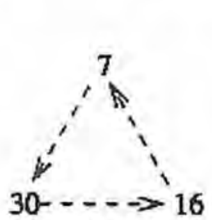
Colando as peças relativas a r_2 obtém-se:

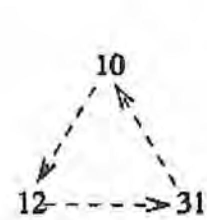


A maneira exacta como as novas peças são rearranjadas pode ser mudada mais tarde se for necessário. Colando mais peças relativas a r_1 obtém-se:



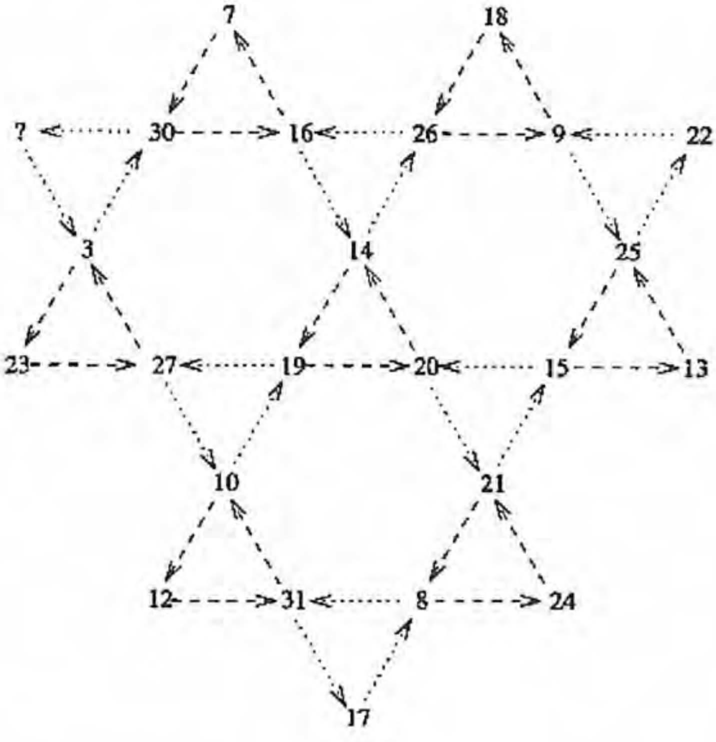
Note que as duas peças,



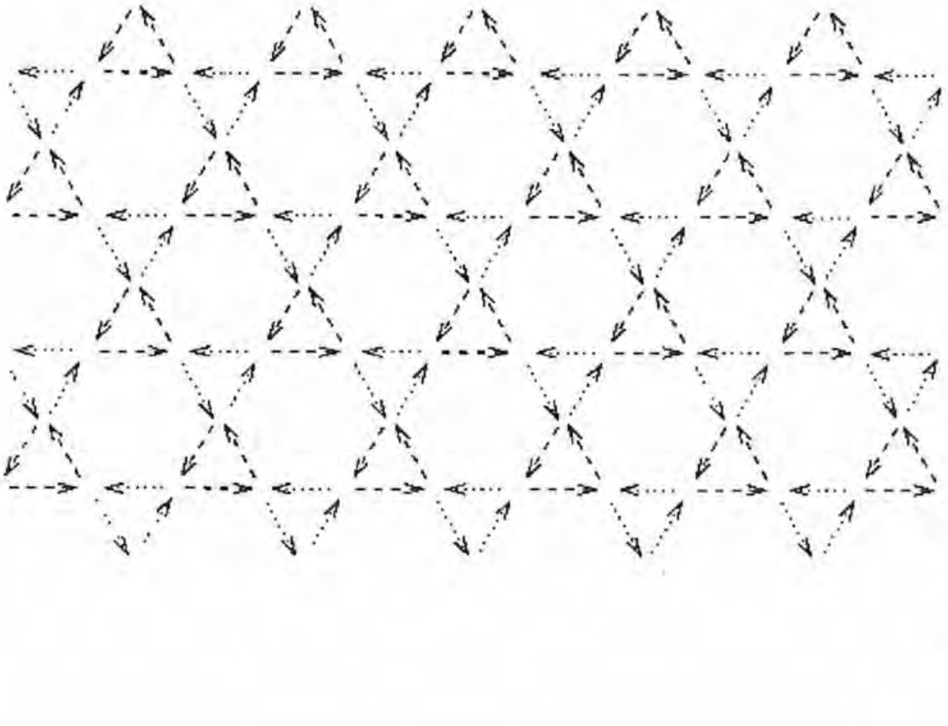


não estavam na lista dos diagramas pequenos relativos a r_1, mas estariam se essa lista estivesse completa. Um ponto importante: pode sempre construir mais diagramas pequenos. Por vezes essa construção exige mais unidades básicas.

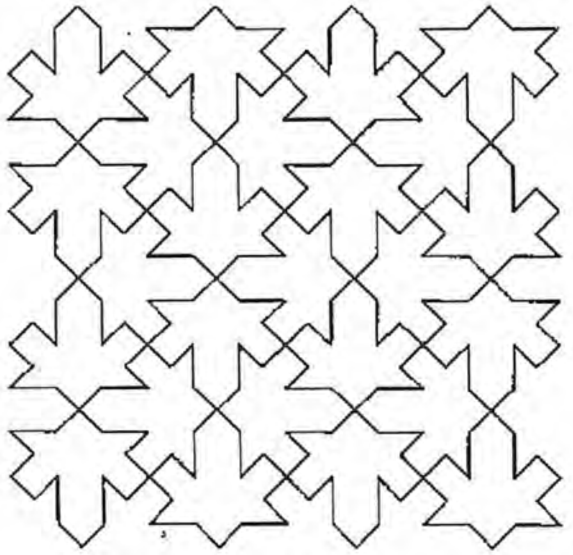
Agora una as peças relativas a r_2:

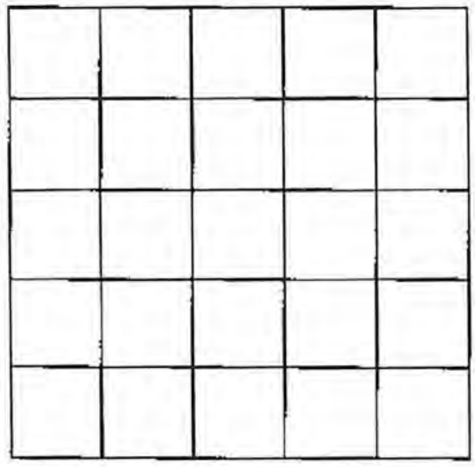


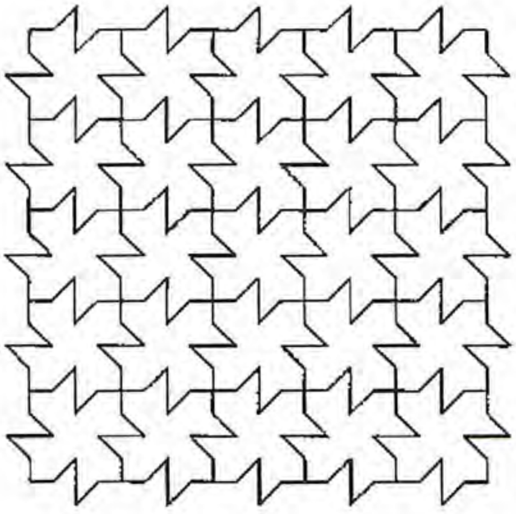
Essas peças ajustam-se perfeitamente e o padrão obtido é ilustrado na figura seguinte. O diagrama de Cayley é um conjunto de estrelas de seis bicos encaixadas. Desenhando tudo numa escala semelhante, obtém-se o seguinte diagrama de Cayley para o grupo de simetria do papel de parede:

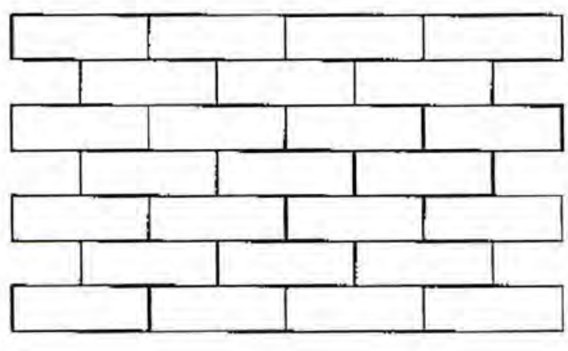


Tarefa 7.4.1: Descubra os diagramas de Cayley para o grupo de simetria dos seguintes papéis de parede:









8
Simetria no mundo real

8.1 Análise de padrões

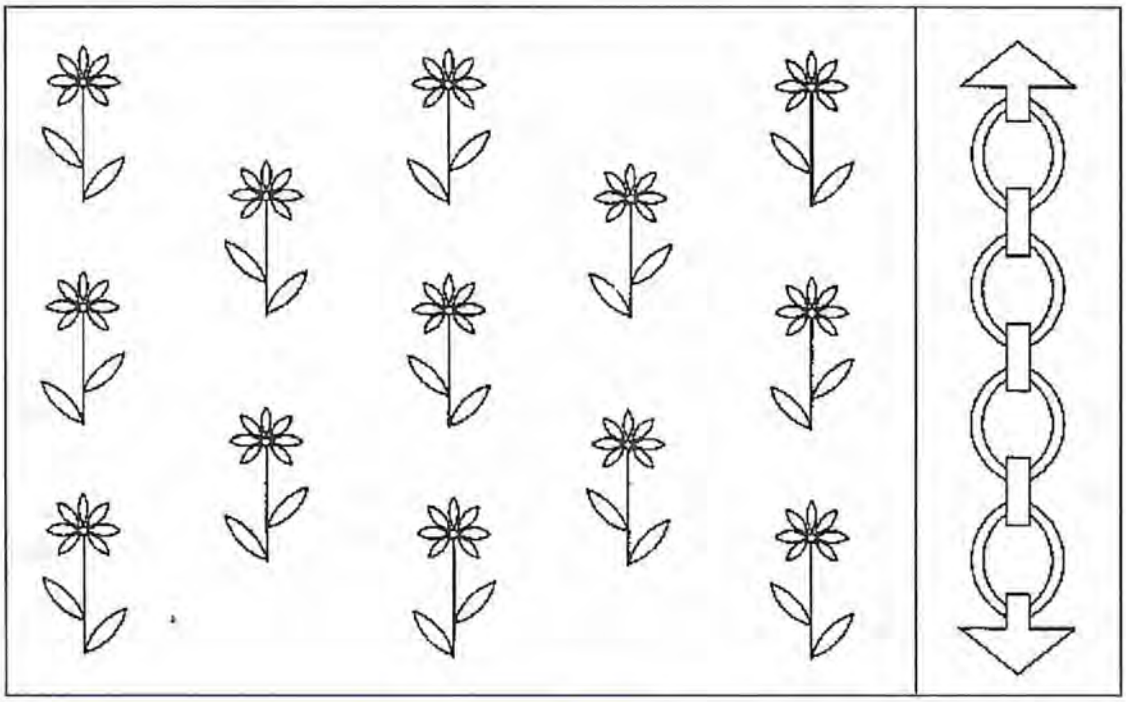
Neste capítulo será discutido o lado prático dos grupos e simetrias e dar-se-á uma lista de assuntos interessantes para efectuar estudos posteriores. Um livro excelente para a análise de padrões é *Symmetries of Culture* [SC], de Washburn e Crowe. O livro *Symmetry* [S], de Weyl, tem muitas figuras e ideias boas, embora use por vezes palavras complicadas para explicar conceitos simples. A melhor fonte de informação para compreender a simetria de dimensão 2 é o *Handbook of Regular Patterns* [HRP], de Stevens.

A primeira coisa a fazer quando se analisa um padrão é decidir a que categoria das enumeradas abaixo ele pertence:

Figuras finitas: sem simetrias de translação.
Padrões de faixa: simetrias de translação numa direcção.
Papéis de parede: simetrias de translação em duas direcções.

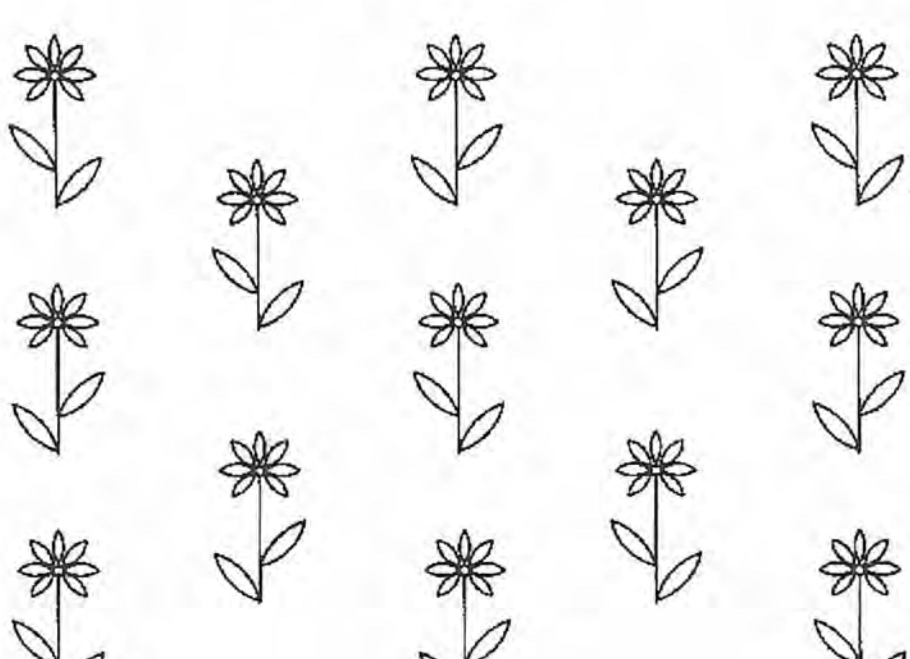
Esta classificação não é tão simples como parece, porque muitos padrões são constituídos por vários padrões mais pequenos.

Suponha que se pretende analisar a impressão desta fronha:



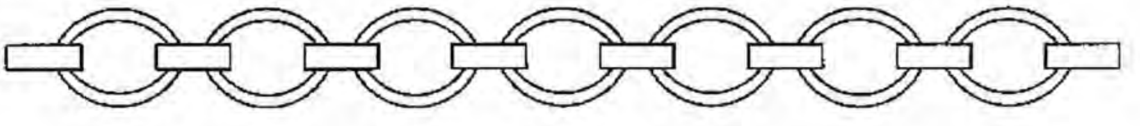
A única simetria existente na fronha inteira é a operação de não fazer nada. Para obter um padrão interessante de analisar deve ser considerada apenas uma parte da fronha.

As flores formam um papel de parede:



Este papel de parede pode ser analisado usando os métodos do capítulo 5. Cada linha ou coluna de flores pode também ser analisada como um padrão de faixa e cada flor individual como uma figura finita.

A figura ao longo do bordo direito é uma figura finita com simetria de tipo D_2. Contudo, concentrando-nos apenas na parte do meio dessa figura, podemos imaginá-la como um padrão de faixa:



Este processo de pegar numa figura pequena para a imaginar como parte de um padrão maior é algo que se faz muitas vezes. Como qualquer objecto físico tem de ser necessariamente finito, a única maneira de obter um padrão repetitivo infinito é usar a imaginação. Este é o processo usado quando se afirma que as flores da fronha formam um papel de parede.

A relação entre os vários padrões pode ser estudada tanto no seu conteúdo artístico como no matemático. Por exemplo, dois padrões de faixa podem ser unidos para formar um padrão de faixa maior. Em alguns casos, as faixas em conjunto terão mais simetria do que qualquer uma das faixas componentes e noutros menos. Se descobrir um destes exemplos, por exemplo, numa peça de olaria índia, tornar-se-á importante discutir tanto a interacção artística como a interacção matemática das várias faixas.

8.2 Padrões na arte e na arquitectura

A matemática deste livro pode ser usada para analisar uma variedade de padrões que surgem na arte e na arquitectura. De seguida apresentam-se algumas sugestões úteis para a escrita de um artigo acerca da matemática dos padrões no mundo real. Após as sugestões é dada uma lista de assuntos possíveis. A lista inclui apenas alguns dos muitos lugares onde se podem encontrar padrões interessantes.

O que se segue são algumas sugestões que pode incluir no seu artigo:

Informe acerca do que está por trás do assunto escolhido.

Explique os termos matemáticos que usará. Usar diagramas simples na explicação de vários conceitos é uma grande ajuda.

Faça um desenho ou fotocopie padrões e determine centros de rotação, linhas de espelho, unidades básicas e assim por diante. Use o esquema para classificar o padrão.

Discuta os problemas que encontrou quando analisava os padrões. Por exemplo, os objectos estudados eram constituídos pela combinação de vários padrões diferentes? Os padrões mostravam pequenas variações que tinham de ser ignoradas para se obterem mais simetrias? Se sim, essas pequenas variações são intencionais?

Os padrões estudados caem todos dentro de uma pequena classe de grupos de simetria? Se sim, consegue explicar porquê? Pensa que descobriu todos os exemplos possíveis?

O assunto é de interesse geral, portanto deve tentar que o seu artigo seja compreensível para uma grande variedade de leitores. Explique os vários termos que usou. Indique onde encontrou os vários padrões, para que o seu artigo possa ser usado como um guia.

Tijolos. Analise os padrões de tijolos usados no exterior de edifícios. Investigue os padrões no seu recinto universitário, na sua vizinhança, ou na zona de negócios da sua cidade. Compare a classificação que os assentadores de tijolos utilizam para os diferentes padrões com a classificação usada em grupos e simetria.

Pavimentos decorativos e paredes. Escolha um local particular e analise os padrões que lá encontrou. Muitos museus e igrejas têm uma grande abundância de padrões interessantes para analisar. Pode analisar e comparar os padrões que aparecem em vários restaurantes da sua cidade.

A arte de M. C. Escher. Escher construiu muitos papéis de parede fascinantes. Veja o livro *Visions of Symmetry* [VS] para obter um catálogo completo das suas «divisões regulares do plano».

A arte de William Morris. Morris foi o desenhador líder de papéis de parede da era vitoriana. O livro *The Art of William*

Morris [AWM] é uma boa fonte e qualquer livraria boa terá livros acerca do seu trabalho. Quando se analisam papéis de parede, é interessante relacionar a ideia de unidade básica para os diferentes grupos de simetria com o problema prático de impressão do papel de parede verdadeiro.

William Morris e M. C. Escher. É interessante comparar o trabalho destes artistas, particularmente em termos da simetria dos seus desenhos.

A arte islâmica. Existe alguma controvérsia acerca de quantos papéis de parede diferentes aparecem no Alhambra.

A tecelagem africana. O tecido *kente,* produzido pelos Ashanti, de África, tem uma história interessante. O tecido *yoruba adire,* produzido na Nigéria, tem muitos padrões fascinantes para analisar. Estes têxteis ocupam um lugar importante na cultura das pessoas que os produzem.

A olaria índia. Existem muitos padrões interessantes para serem descobertos na olaria dos povos nativos americanos. Os tapetes *navaho* são também um assunto fascinante.

As carpetas e os tapetes. Os chamados «tapetes orientais» são produzidos em muitos países. Cada um tem características diferentes e em muitos casos estas estão relacionadas com a simetria dos seus desenhos.

As colchas *amish*. As colchas tradicionais *amish,* feitas à mão, têm uma agradável simplicidade geométrica. Um exame mais profundo dos padrões ponteados revela uma estrutura mais elaborada. É interessante comparar a ideia matemática de «unidade básica» com o problema prático de unir pedaços de texturas para formar uma colcha.

8.3 Projectos matemáticos

Os projectos desta secção são construídos com base na matemática estudada neste livro.

O *puzzle-15*. O *puzzle-15* pode ser analisado usando a teoria de grupos. O *puzzle-15* consiste num quadrado 4 × 4 contendo peças móveis com os números de 1 a 15 e um espaço livre.

O objectivo é misturar os números fazendo deslizar as peças, tentando depois repô-las na ordem inicial. Um facto surpreendente é que, se pegar em duas peças e as trocar, se torna impossível resolver o *puzzle*. A ideia deste projecto é usar a teoria de grupos para explicar porque esta afirmação é verdadeira. Os passos são os seguintes:

1. A TRANSPOSIÇÃO é um ciclo com dois elementos, tal como (*a* *b*). Uma transposição troca dois elementos e deixa todos os outros na mesma. Mostre que qualquer permutação pode ser escrita como um produto de transposições.
2. Uma permutação pode ser expressa como um produto de transposições de muitas formas diferentes. Mostre que, dada uma permutação qualquer, todas as maneiras que esta tem de ser expressa como um produto de transposições utlizam um número par ou ímpar de transposições. Diz-se que a permutação é PAR ou ÍMPAR respectivamente.
3. Mostre que o conjunto das permutações pares de n letras é um grupo. Este grupo é chamado o grupo ALTERNADO, designado por A_n. O grupo alternado A_n é um subgrupo do grupo simétrico S_n.
4. Explique como os movimentos permitidos no *puzzle-15* correspondem a permutações. Mostre, em seguida, que estes movimentos correspondem a permutações pares. Isto é, os movimentos permitidos estão no grupo alternado.
5. Conclua que, depois de trocar ilegalmente dois números, o *puzzle* não pode ter solução.
6. Calcule quantas posições permitidas existem num *puzzle-15*.

A parte principal é o passo 2. Pode parecer «óbvio» que o produto de um número par de transposições não possa igualar o produto de um número ímpar de transposições, mas, na verdade, prová-lo dá algum trabalho.

O inventor de *puzzles* Sam Lloyd ofereceu uma grande quantia em dinheiro a quem conseguisse solucionar o *puzzle-15* partindo da posição resolvida com os números 14 e 15 trocados. Como provou neste projecto, o dinheiro de Lloyd estava completamente seguro.

Mais aritmética mod N. Este projecto é acerca de matrizes 2×2. Não necessita de qualquer experiência; tudo é explicado abaixo.

Um exemplo de uma matriz 2×2 é: $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Multiplicam-se matrizes usando a seguinte regra:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aA+bC & aB+bD \\ cA+dC & cB+dD \end{pmatrix}$$

A maneira comum de pensar nesta regra é: as linhas da matriz da esquerda são multiplicadas pelas colunas da matriz da direita. Alguns exemplos são:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 18 \\ 29 & 31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -16 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifique se estes exemplos estão correctos.

De seguida propõe-se um problema: fazer a aritmética mod 7. Os exemplos anteriores ficam:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifique mais uma vez que estes exemplos estão correctos. Em cada caso fez-se a adição e a multiplicação mod 7 e substituiu-se cada número pelo número a partir de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, que o representa mod 7.

Se se tivesse feito a aritmética mod 3, teríamos os exemplos seguintes:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifique novamente.

O plano é transformar as matrizes 2×2 num grupo. Será feita a aritmética mod N usando os números $0, 1, 2, ..., N-1$. Quando experimentar, pode ser bom começar por usar os números 0, 1, 2, e fazer a aritmética mod 3, ou usar os números 0 e 1 e fazer a aritmética mod 2. Usando a definição de multiplicação de matrizes, o produto de matrizes 2×2 é sempre uma matriz 2×2, pelo que a atenção deve ser virada para o problema da identidade e do inverso.

1. Descubra a matriz que representa a operação de não fazer nada. É comum usar a letra I para a denominar, letra que é chamada MATRIZ IDENTIDADE. Por definição, tem a propriedade de, para qualquer matriz g, termos $Ig = g$ e $gI = g$.
2. Recorde que «h é o inverso de g» significa que $hg = I$. Ou, de uma forma equivalente, $gh = I$. Determine quais as matrizes que têm inverso. Explique como este se pode encontrar.

   A segunda parte é o conteúdo principal deste projecto. Fazendo algumas experiências verá que nem todas as matrizes têm inverso. Descobrir um método para descrever que matrizes têm inverso é o passo-chave para a descrição de quais as matrizes que devem pertencer ao grupo.

3. Mostre que, quando $N = 2$, o grupo que obtém é o mesmo que D_3. Isto é, descubra uma maneira de fazer corresponder às matrizes os elementos $\{1, r, r^2, m, mr, mr^2\}$ de D_3, de modo que as tabelas de multiplicação sejam as mesmas. *Nota:* para outros valores de N não é possível fazer corresponder o grupo das matrizes a um grupo que já tenhamos encontrado.
4. Determine quantas matrizes pertencem ao grupo. *Nota:* este cálculo é complicado, pelo que deve ficar satisfeito se o fizer para poucos valores de N específicos.

Geradores, relações e diagramas de Cayley. Uma maneira comum de descrever um grupo é em termos de *geradores* e *relações*. Esta é chamado uma REPRESENTAÇÃO do grupo. Por exemplo,

$$D_4 = \langle r, m \mid r^4 = 1, m^2 = 1, rm = mr^{-1} \rangle$$

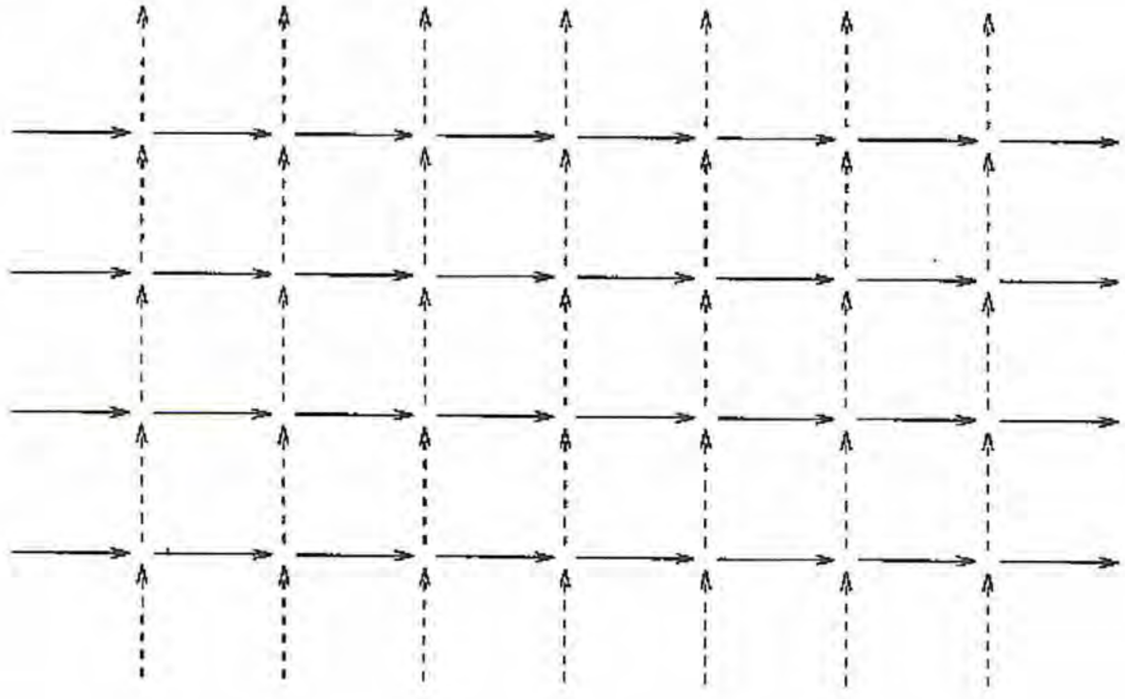
é uma representação do grupo de simetria do quadrado. Diz-se que r e m são os GERADORES: o grupo é formado a partir destes elementos. A $r^4 = 1$, $m^2 = 1$ e $rm = mr^{-1}$ chamamos as RELAÇÕES: elas descrevem completamente a forma como os geradores se combinam para produzir os elementos do grupo. Um outro exemplo é o seguinte:

$$G = \langle a, b \mid ab = ba \rangle$$

Este grupo é o mesmo que o grupo dos movimentos permitidos actuais da primeira parte do capítulo 1. Da mesma forma, este é o grupo de simetria do primeiro papel de parede apresentado no capítulo 5.

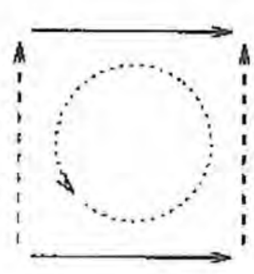
Se pensar em a e b como «um para cima» e «um para a direita», a relação $ab = ba$ diz simplesmente que «um para cima e um para a direita é o mesmo que um para a direita e um para cima».

O diagrama de Cayley do grupo G, usando $a \longrightarrow$ e $b \dashrightarrow$ para os geradores, é:



Este é o pormenor essencial : o diagrama de Cayley indica como encontrar a representação para o grupo. Assim, se dispuser do diagrama, pode escrever a representação. A explicação deste facto é dada a seguir.

Para encontrar a representação são necessários os geradores e as relações. Os geradores estão simplesmente no diagrama. Para encontrar as relações analisam-se as maneiras de andar num caminho fechado do diagrama. Cada caminho fechado diferente é uma relação. Um caminho é FECHADO se termina no lugar onde começa. A maneira como funciona é: *caminho fechado de geradores* = 1. O círculo ponteado indica um caminho fechado no diagrama de Cayley anterior:



Este caminho fechado indica que $aba^{-1}b^{-1} = 1$. Os geradores lêem-se por ordem no caminho, usando o gerador se o caminho está na mesma direcção que a seta e o seu inverso se o caminho está na direcção oposta da seta. Note que esta relação pode ser rearranjada e escrever-se como $ab = ba$, que é a relação esperada. Se fizer umas quantas experiências, irá convencer-se de que os outros caminhos fechados no diagrama de Cayley dão todos a mesma relação.

É um bom exercício verificar que no diagrama de Cayley do quadrado existem três caminhos fechados diferentes e que estes dão as três relações que se estiveram a usar. As relações podem não parecer inicialmente na forma-padrão, mas, se as rearranjar, vai fazê-las parecer familiares.

1. Use os diagramas de Cayley do capítulo 7 para encontrar as representações para os grupos de simetria de alguns padrões de faixa e papéis de parede.
2. Explique como usar o diagrama de Cayley para reduzir «palavras» longas nos geradores, tal como $ab^3a^2b^{-4}a^3b^5a^{-2}$, a uma forma mais simples. Descreva, em particular, como dizer que uma palavra é o mesmo que a operação de não fazer nada. Veja a tarefa 7.1.1 para um problema semelhante.

Uma forma de produzir um grupo novo a partir de um antigo é introduzir-lhe mais relações. Por exemplo, considere o seguinte grupo:

$$H = \langle a, b \mid ab = ba, a^2 = 1, b^2 = 1 \rangle$$

Este é o grupo G com mais duas relações adicionadas. Usar-se-á o diagrama de Cayley de G para descobrir o diagrama de Cayley de H.

O diagrama de Cayley de G, com todos os elementos identificados, é o seguinte:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\to & a^{-3}b^2 & \to & a^{-2}b^2 & \to & a^{-1}b^2 & \to & b^2 & \to & ab^2 & \to & a^2b^2 & \to & a^3b^2 & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\to & a^{-3}b & \to & a^{-2}b & \to & a^{-1}b & \to & b & \to & ab & \to & a^2b & \to & a^3b & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\to & a^{-3} & \to & a^{-2} & \to & a^{-1} & \to & 1 & \to & a & \to & a^2 & \to & a^3 & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\to & a^{-3}b^{-1} & \to & a^{-2}b^{-1} & \to & a^{-1}b^{-1} & \to & b^{-1} & \to & ab^{-1} & \to & a^2b^{-1} & \to & a^3b^{-1} & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow &
\end{array}$$

A relação $a^2 = 1$ implica que $a^3 = a$, $a^4 = 1$, $a^5 = a$, e assim por diante, e que $a^{-1} = a$, $a^{-2} = 1$, etc. As mesmas regras são válidas para b. Usando estas regras para redesenhar o diagrama de Cayley obtém-se o padrão seguinte:

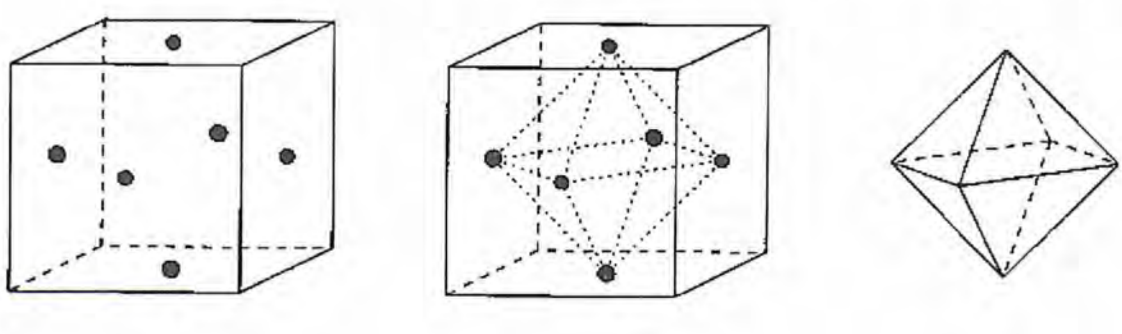
$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\to & a & \to & 1 & \to & a & \to & 1 & \to & a & \to & 1 & \to & a & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\to & ab & \to & b & \to & ab & \to & b & \to & ab & \to & b & \to & ab & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\to & a & \to & 1 & \to & a & \to & 1 & \to & a & \to & 1 & \to & a & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & \\
\to & ab & \to & b & \to & ab & \to & b & \to & ab & \to & b & \to & ab & \to \\
 & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow &
\end{array}$$

De seguida, para descobrir o diagrama de Cayley de *H* colam-se todos os números 1, todos os *aa* e assim por diante.

3. Faça as colagens descritas anteriormente para descobrir o diagrama de Cayley de *H*.
4. Adicione relações diferentes a *G* e veja qual o aspecto do diagrama de Cayley. Algumas relações boas para tentar são: $a^2 = 1$ e $b^3 = 1$, ou $a^3 = 1$ e $b^3 = 1$. Tente mais algumas até descobrir um padrão.

Simetria de dimensão 3. Existem cinco sólidos regulares: o tetraedro, o cubo, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro. Cada uma destas formas tem muitas simetrias. Uma boa referência é *Shapes, Space and Symmetry* [SSS].

1. Descubra todas as simetrias de cada sólido regular.
   Construir modelos de cartão é uma boa forma de compreender e descrever as simetrias.
2. Como se relacionam uns com os outros os grupos de simetria destes sólidos? Por exemplo, é possível ajustar um tetraedro dentro de um cubo, de modo que os cantos coincidam. O que se pode concluir desta afirmação acerca da relação entre o grupo de simetria do quadrado e o grupo de simetria do tetraedro? Descubra outras formas interessantes de colocar um sólido regular dentro de outro.
3. Que grupos C_N e D_N estão contidos no grupo de simetria de um sólido regular?
4. Se colocar um ponto no centro de cada face de um sólido regular e unir os pontos das faces adjacentes, obtém outro sólido regular. Este sólido novo é chamado o DUAL do sólido original. Este exemplo mostra que o octaedro é o dual do cubo:



   Descubra o dual de cada sólido regular. Que relações existem entre um sólido e o seu dual? Em particular, qual é a relação entre as simetrias de um sólido regular e as simetrias do seu dual?

5. No plano descobriram-se quatro tipos de movimentos rígidos. Quais são os movimentos rígidos possíveis num espaço de 3 dimensões?

Papéis de parede de quadrados mágicos. Eis dois exemplos de quadrados mágicos:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

O da esquerda é um quadrado mágico 3 × 3 e o da direita é um quadrado mágico 4 × 4. Num quadrado mágico, a soma dos números de qualquer linha, coluna ou diagonal é igual.

— Descubra maneiras de usar os rearranjos num quadrado mágico para obter outros quadrados mágicos.

Pegue num quadrado mágico e use-o para pavimentar o plano. O papel de parede resultante terá apenas simetria de translação.

Este papel de parede foi formado a partir do quadrado 3 × 3 mostrado acima.

```
2 9 4 2 9 4 2 9 4 2 9 4
7 5 3 7 5 3 7 5 3 7 5 3
6 1 8 6 1 8 6 1 8 6 1 8
2 9 4 2 9 4 2 9 4 2 9 4
7 5 3 7 5 3 7 5 3 7 5 3
6 1 8 6 1 8 6 1 8 6 1 8
2 9 4 2 9 4 2 9 4 2 9 4
7 5 3 7 5 3 7 5 3 7 5 3
6 1 8 6 1 8 6 1 8 6 1 8
```

Deve imaginar que cada número está dentro de um pequeno quadrado. De seguida pinte os quadrados com números ímpares a branco e os quadrados com números pares a preto. O papel de parede resultante tem mais do que simetria de translação? Investigue para ver quantas simetrias podem ter os papéis de parede de quadrados mágicos. Tem importância o facto de o quadrado mágico original ser 3 × 3, 4 × 4, ou mais? O que acontece se pintar cada quadrado numerado com vermelho, branco ou azul, dependendo de o número dar resto 0, 1 ou 2 quando se faz a divisão por 3? Eis algumas referências:

O capítulo 4 de *Mathematics on Vacation,* de Joseph S. Madachy, Scribners, 1966.

Allan Adler, «Magic Cubes and the 3-adic Zeta Function», in *The Mathematical Intelligencer,* 14, n.º 3, 1992, p. 14.

W. S. Andrews, *Magic Squares and Cubes,* Dover Books.

8.4 Projectos diversos

Estes projectos não se ajustam aos títulos das duas secções anteriores.

Estruturas de parentesco. Muitas tribos primitivas têm regras complicadas de parentesco, ascendência e sucessão. Em muitos casos, essas regras estão relacionadas com os grupos estudados neste livro. Uma explicação excelente acerca desses grupos pode ser encontrada no capítulo 3 de *Ethnomathematics* [E], de Ascher. O exemplo principal nesse capítulo é o de uma tribo nativa australiana que baseia as suas relações de parentesco em D_4, o grupo de simetria do quadrado.

1. Em *Ethnomathematics,* as simetrias do quadrado são escritas de modo diferente das representações usadas: a reflexão é escrita à direita em vez de à esquerda. Reanalise as regras de parentesco dos Warlpiri para que o resultado seja semelhante à representação do grupo de simetria do quadrado.
2. Descubra outras fontes que descrevam estruturas de parentesco semelhantes e analise-as para descobrir que grupo está a ser usado.

Irá provavelmente achar necessário introduzir a terminologia que os antropólogos usam para descrever relações de parentesco.

Química. Diz-se que se pode usar a simetria para prever o ponto de ebulição de alcanos. Esta afirmação é verdadeira? Se for, como determina que molécula é «mais simétrica»? O que pode concluir acerca do que está a ocorrer ao nível molecular? Os cristais fornecem outro assunto interessante para estudar; no entanto, este não é facilmente acessível a leigos.

Azulejar uma parede. Uma dona de casa pretende colocar azulejos novos na parede da cozinha. Existem dois tipos de azulejos quadrados disponíveis: lisos e de fantasia. Os lisos são baratos e de uma só cor. Os de fantasia são caros e têm um desenho decorativo. A dona de casa tenciona comprar várias caixas de azulejos lisos idênticos e uma ou duas caixas de azulejos de fantasia também idênticos. Os azulejos serão colocados na parede de maneira a formarem uma grelha quadrada. O seu trabalho é informar a dona de casa acerca das várias maneiras de as duas espécies de azulejos se combinarem para formar padrões de parede interessantes. Algumas perguntas:

1. Quais dos 17 padrões de parede podem ser construídos com os azulejos dados?
2. Que efeito tem a simetria do azulejo de fantasia nas possibilidades dos padrões de parede?
3. Que proporção de azulejos lisos e de fantasia dá a melhor escolha de padrões de parede?

Tente tornar o seu papel útil a uma típica dona de casa interessada em azulejar a parede da cozinha. Inclua quaisquer padrões de parede que encontrar e que ache interessantes.

Agora suponha que uma excêntrica dona de casa pretende usar azulejos não quadrados. Além disso, ela quer azulejar diferentes paredes com padrões de parede com tipos de simetria diferentes, mas todos os padrões serão feitos com o mesmo azulejo. O custo não é problema: a dona de casa está disposta a pagar para ter azulejos especiais. O seu trabalho é desenhar um azulejo que possa ser usado para fazer vários padrões de parede diferentes.

Faça os seus próprios padrões. Elabore padrões repetidos semelhantes aos criados por Escher. O seu projecto deve incluir os seus desenhos e também uma descrição detalhada do processo que usou para criar cada desenho. Se mantiver todos os seus rabiscos, estes podem ser todos juntos para assim se poder ver a evolução. Pode depois adicionar comentários para descrever os processos utilizados em cada passo. O livro *Handbook of Regular Patterns* [HRP] tem algumas sugestões de como criar padrões repetidos, mas essas sugestões parecem ser de uso limitado. Analisar cuidadosamente o trabalho de Escher é mais útil. Irá descobrir que criar um bom padrão repetido do tipo Escher leva um pouco mais de tempo e engenho. Um registo das fases por que passou irá ajudar outras pessoas a compreenderem o processo.

Existem programas de computador que tornam automático o processo de produzir padrões de parede com um determinado tipo de simetria. Um desses programas é o *Kali*. Este está disponível a partir do Centro de Geometria da Universidade de Minesota. Pode obtê-lo através de um ftp anónimo a partir de geom.umn.edu. Pode obter uma versão para Macintosh na directoria /pub/software/Kali.

Bibliografia

[AC] *Africa Counts*, de Claudia Zaslavsky, Lawrence Hill Books, 1990.

Narrativa interessante acerca da matemática dos povos nativos africanos. A secção 5, «Pattern and Shape», é relevante para este livro.

[AWM] *The Art of William Morris*, de Aymer Vallance, Dover, 1988.

Descrição da sua vida e trabalho. Exemplos de 40 dos seus padrões de parede.

[C] *Connections*, de Jay Kappraff, McGraw Hill, 1990.

Um livro interessante que toca em muitos dos assuntos discutidos nesta obra.

[E] *Ethnomathematics: A Multicultural View of Mathematical Ideas*, de Marcia Ascher, Brooks/Cole, 1991.

Apresenta uma descrição interessante da sofisticação matemática dos povos «primitivos». O capítulo «The Logic of Kin Relations» é fascinante. «Symmetric Strip Decorations» é uma boa introdução.

[EAS] *M. C. Escher: Art and Science*, H. S. M. Coxeter (ed.), ed. North-Holland, 1986.

Uma colecção de 35 artigos sobre simetria matemática. A maioria relaciona-se com o trabalho de Escher e tem bonitas figuras. É um bom livro para ver como outros analisaram a simetria no mundo real. Alguns dos artigos são muito matemáticos.

[FS] *Fivefold Symmetry*, István Hargittai (ed.), ed. World Scientific, 1992.

Vários artigos acerca da simetria pentagonal. O artigo «800-Year-Old Pentagonal Tiling ...» sugere que as pavimentações de Penrose foram inventadas no século XII, no Irão.

[FSE] *Fantasy and Symmetry: The Periodic Drawings of M. C. Escher*, de Caroline MacGillavery, Harry N. Abrams, 1976.

[GCIA] *Geometric Concepts in Islamic Art*, de I. El-Said e A. Parman, World of Islam Festival, 1976.

Matemática e arte islâmica.

[HRP] *Handbook of Regular Patterns*, de Peter Stevens, MIT Press, 1981.

Um livro compreensível acerca de padrões regulares. Milhões de exemplos e alguns guias razoáveis de como construir padrões interessantes.

[KS] *Knots and Surfaces: a guide to discovering mathematics*, de David Farmer e Theodore B. Stanford, American Mathematical Society, 1996.

Um livro no mesmo estilo que o de *Groups and Symmetry*.

[MS] *Mathematical Snapshots*, de Hugo Steinhaus, várias editoras.

Bons capítulos sobre diversos tópicos de matemática, escritos para o grande público. Tudo nele é interessante e dois ou três dos seus capítulos são relevantes para este livro.

[S] *Symmetry*, de Hermann Weyl, Princeton University Press, 1989.

Trabalho interessante acerca da simetria no mundo real.

[SC] *Symmetries of Culture*, de Dorothy Washburn e Donald Crowe, University of Washington Press, 1988.

Um livro excelente. Projectado para antropólogos que pretendam analisar padrões. Muitos detalhes. Muitas figuras. Esquemas úteis para classificar padrões. Muitas referências.

[SSS] *Shapes, Space, and Symmetry*, de Alan Holden, Dover, 1991.

Centenas de desenhos de figuras simétricas de 3 dimensões. Muitos sólidos regulares e semi-regulares. Discussão acerca das suas simetrias.

[SS2] *Symmetry* e *Symmetry 2*, István Hargittai (ed.), Pergamon Press, 1986.

Dois livros enormes de artigos acerca de todos os aspectos da simetria.

[TP] *Tilings and Patterns*, de Branko Grünbaum e G. C. Shephard, Freeman, 1987.

Muito matemático e não muito fácil para começar. É abrangente. Exercícios interessantes no capítulo 5. Muitas boas referências.

[VM] *The Visual Mind*, Michele Emmer (ed.), MIT Press, 1993.

Uma colecção de 36 artigos que lidam com os aspectos matemáticos da arte. Muitos dos artigos são relevantes para este livro. O artigo «Interlace patterns in Islamic and Moorish art» inclui diagramas de Cayley dos grupos de papel de parede.

[VS] *Visions of Symmetry*, de Doris Schattschneider, W. H. Freeman and Co., 1990.

A fonte para compreender a pavimentação do plano de Escher. Páginas e páginas de figuras fascinantes. Descrição da classificação de padrões feita por Escher.

O PRAZER DA MATEMÁTICA

Este livro pretende apresentar ao leitor a parte mais excitante da matemática: o processo de invenção e descoberta. Através de uma grande diversidade de tarefas, o leitor será levado a descobrir exemplos interessantes, a inventar regras para explicar padrões e a descobrir a matemática por si próprio. O assunto estudado é o da matemática subjacente à ideia da simetria, mas os métodos e ideias apresentados são aplicáveis a toda a matemática. E, como pré-requisitos, não necessita senão de entusiasmo e de um conhecimento elementar da matemática.

Este livro é apenas um guia; a sua função é encaminhá-lo na direcção certa e trazê-lo de volta se se perder no caminho. Não há fórmulas para memorizar. Não há procedimentos a seguir. O prazer e a excitação da descoberta cabem inteiramente ao leitor.

série A MATEMÁTICA EM CONSTRUÇÃO

ISBN 972-662-661-7
9 789726 626619