
Я.И. ПЕРЕЛЬМАН
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ АЛГЕБРА
ЗАНИМАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Задачи с необычными сюжетами, увлекательные исторические экскурсы, любопытные примеры из повседневной жизни
АСТ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

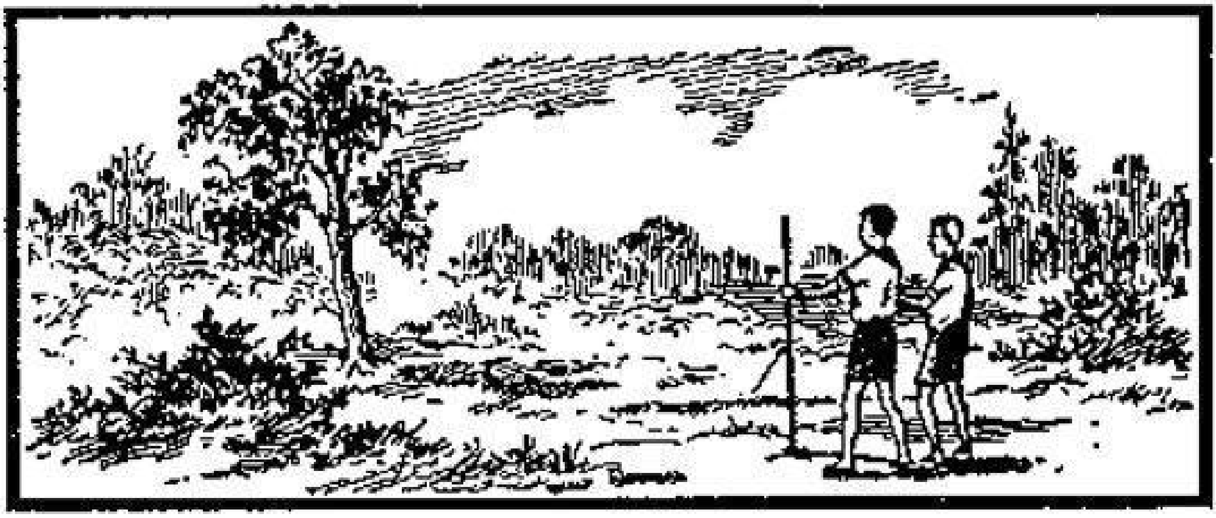
Presentación

Estimados lectores:

Gracias al ahínco de Antonio Bravo que ha conseguido la versión rusa, nunca antes traducida al castellano, a la paciencia de Natalia Abramenko que lo ha traducido, tratando de expresar en castellano, la sensibilidad que el autor le ha dado originalmente en ruso, a Patricio Barros que ha "traducido" lo ya traducido por Natalia, para darle sentido en el lenguaje de la geometría y a Guillermo Mejía que ha corregido, con infinita paciencia, el texto completo, hemos logrado poner a disposición de los internautas, un libro que constituye una exclusividad en la lengua castellana; nos referimos a la Geometría Recreativa escrita por Yakov Perelman. Ante Uds. uno de los mejores clásicos de la geometría práctica. Su lenguaje sencillo y directo facilita la lectura del libro: problemas poco comunes, captura de situaciones históricas y curiosos ejemplos de la vida diaria, harán las delicias de los jóvenes lectores y talvez de otros no tanto. Esta publicación tiene como objetivo principal inculcar en los jóvenes el gusto por el estudio de la geometría, promoviendo en ellos el interés por su aprendizaje independiente y entregándoles conocimientos suplementarios a los programas escolares. Este libro, una primicia en la lengua castellana, es el resultado de la unión de voluntades que, trabajando en conjunto, han aportado un grano de arena más al conocimiento y difusión de las obras gran autor ruso, Yakov Perelman.

Los "editores"

Mayo de 2003



GEOMETRÍA RECREATIVA

PRIMERA PARTE

GEOMETRÍA AL AIRE LIBRE

El idioma de la naturaleza es matemático,
letra de esta lengua, son los círculos,
triángulos y otras figuras geométricas.
Galileo.

Capítulo 1
Geometría en el Bosque

Contenido:

8. *Con ayuda del espejo*
9. *Dos pinos*
10. *La forma del tronco*
11. *Un gigante de seis patas.*

1. Medición de la altura mediante la longitud de la sombra.

Todavía recuerdo cuando miré atentamente por vez primera a un canoso guardabosque, el que estando junto a un gran pino, midió su altura con un instrumento de bolsillo. Cuando apuntó con una tablilla cuadrada a la copa del árbol, yo esperaba que el viejo subiera con una cadena para medirlo; en lugar de ello, volvió a meter en el bolsillo el instrumento y dijo que había efectuado la medida. En ese momento yo pensaba que el viejo aún no había comenzado su trabajo...

En aquel tiempo yo era muy joven y me parecía milagrosa esa forma de medir la altura del árbol sin cortarlo ni subirse a él. Solo mas tarde, cuando tuve las primeras nociones de geometría, comprendí que tan fácil resulta hacer ese tipo de milagros.

Existen diversas formas de realizar dichas mediciones con ayuda sencillos instrumentos, sin mecanismos especiales.

Una de ellas es un método tan fácil como antiguo. Sin duda con este método el sabio griego Thales, quien vivió seis siglos antes de Cristo, midió la altura de una pirámide en Egipto. Aprovechó la sombra suya. Los sacerdotes y el faraón, se reunieron al pie de la pirámide, mirando con asombro al extranjero, quien dedujo por la sombra la altura de la gran construcción. Thales, dice la leyenda, eligió un día en el que la longitud de su sombra era igual a su altura, en el mismo momento, la altura de la pirámide tenía que ser igual a la longitud de su sombra[1]. Es el único caso en el que se emplea la sombra de una persona para efectuar la medición...

La tarea del sabio griego ahora nos parece simple, pero hemos de de tener presente, que estamos mirando el trabajo desde la cima del edificio de la geometría, levantado después de Thales, quien vivió en una época anterior a Euclides, el autor del famoso libro, en el que muchos matemáticos estudiaron la geometría durante dos siglos después de su fallecimiento. En concreto, las bases de la geometría establecidas en el citado libro son bien conocidas hoy por cualquier alumno, mas no eran conocidas en la época de Thales, quien echando mano de la sombra para calcular la altura de la pirámide, necesitaba conocer algunos principios geométricos del triángulo, en esencia, los dos siguientes (Thales fue el primero en enunciar estos principios):

1. Los ángulos sobre la base de un triángulo isósceles, son iguales, y recíprocamente, los lados, opuestos a los ángulos iguales del triángulo isósceles, son iguales.
2. La suma de los ángulos de cualquier triángulo (el triángulo rectángulo es un caso particular), es igual a dos ángulos rectos.

Thales, armado solamente de estos principios, pudo inferir que al estar sobre un terreno plano, siendo su sombra igual a su altura, los rayos de Sol debían caer en un ángulo igual a la mitad del ángulo recto, por lo tanto, la altura de la pirámide desde el centro de su base y el extremo de su sombra definían un triángulo isósceles.

Con ayuda de este método que parece tan simple, durante un día soleado podemos hacer mediciones de cualquier árbol aislado, siempre que su sombra no se una a la sombra de otro. Pero en nuestras latitudes (San Petersburgo está en la latitud 60°N y El Cairo, 30°N) no es tan fácil elegir un buen momento como si se puede en Egipto; acá el Sol se presenta a muy baja altura sobre el horizonte, y las sombras pueden ser iguales a la altura de sus objetos solo durante el verano, alrededor del mediodía. Por eso el método del Thales no siempre resulta fácil de llevar a la práctica.

De una manera un poco distinta resulta fácil calcular la altura mediante la sombra en un día soleado, no importando la longitud de ésta. Puede medir su propia sombra o la de un jalón enterrado verticalmente en un suelo plano y calcular la altura buscada mediante la siguiente proporción (figura 1):

$$AB : ab = BC : bc$$

Es decir, que la altura del árbol equivale tantas veces a su altura (o la del jalón), como tantas veces equivale la sombra del árbol a su sombra (o la del jalón).

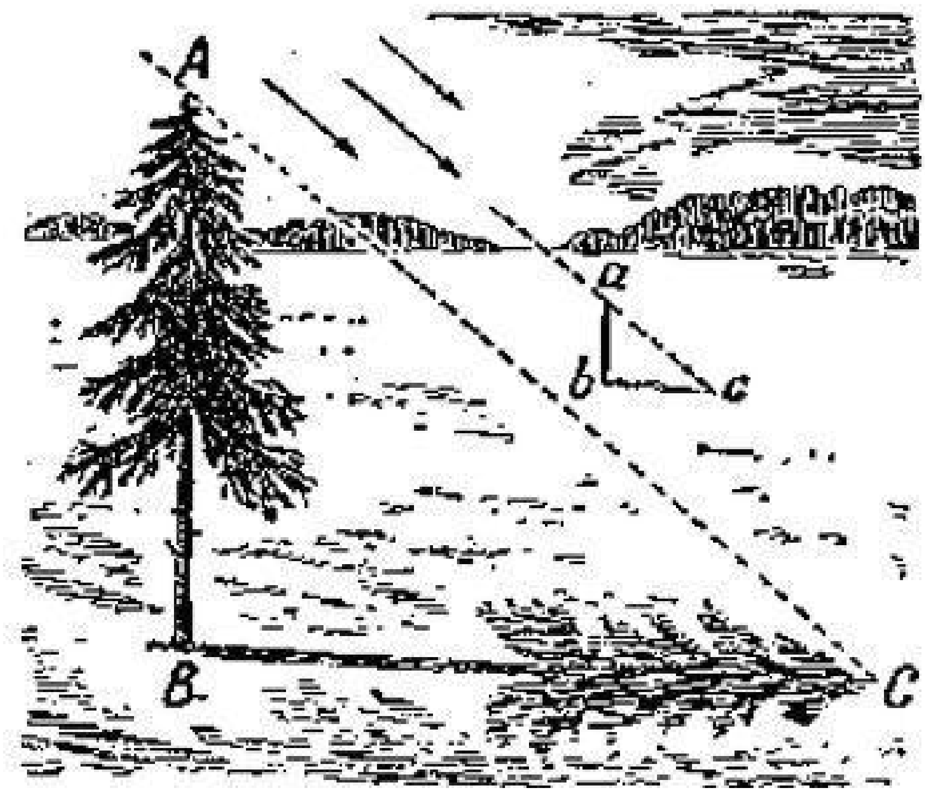


Figura 1. Medición de la altura de un árbol por su sombra

Esto se deduce de la semejanza geométrica de los triángulos ABC y abc (por tener dos ángulos congruentes).

Algunos lectores replican, pues, que este método es tan elemental que no necesita argumentación geométrica. ¿Sin echar mano de la geometría, es posible saber qué tan alto es el árbol conociendo la longitud de su sombra? Ciertamente no es tan fácil como parece. Intente llevar a la práctica este método, proyectando una sombra con la luz de una lámpara; verá que no se cumple.

En la figura 2 se observa que la altura del poste AB equivale aproximadamente al triple de la altura de la columna pequeña ab, mientras que la altura de la sombra del poste es unas ocho veces más larga que la sombra de la columna (BC : bc). No es posible explicar, sin echar mano de la geometría, por qué podemos emplear el método en unos casos y en otros no.

Problema

Veamos dónde está la diferencia. Lo que pasa es que los rayos del Sol son paralelos entre sí, mas los rayos del farol no lo son. Esta última parte queda clara, pero ¿cómo pueden ser paralelos los rayos del Sol, si ellos se cruzan entre sí en el punto de donde parten?

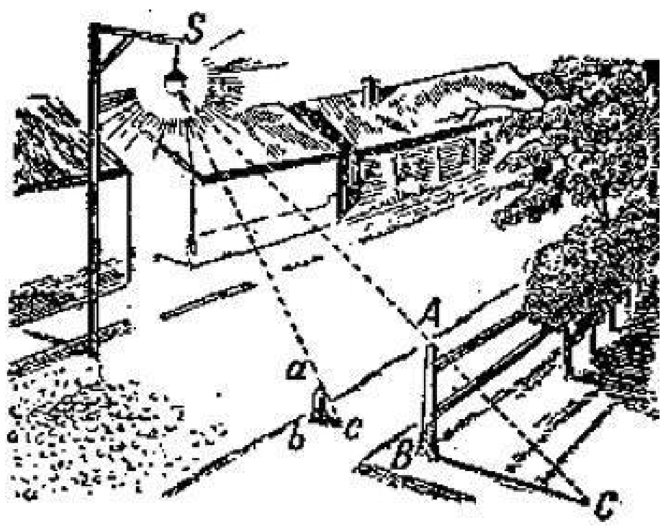


Figura 2. Cuando el mismo método de medición es imposible

Solución

Los rayos de Sol que caen sobre la Tierra se pueden considerar paralelos, porque el ángulo entre ellos es tan pequeño, que prácticamente resulta imperceptible. Un simple cálculo geométrico puede aclarar esta confusión. Imagínese que salen dos rayos desde cualquier punto del Sol y caen sobre la Tierra a una distancia aproximada de un kilómetro entre ellos. Ahora bien, si colocamos una punta del compás sobre el Sol y trazamos una circunferencia de radio igual a la distancia entre el Sol y la Tierra (150.000.000 km), nuestros dos rayos –radios de la circunferencia– tienden un arco de un kilómetro de longitud.

La longitud total de esta gigantesca circunferencia es igual a:

$$L = 2 \times \pi \times 150.000.000 = 940.000.000 \text{ km}$$

Un grado de esta circunferencia, evidentemente, es 360 veces menor, es decir, que mide unos 2.600.000 km; un minuto de arco es 60 veces menor que el grado, o sea que mide unos 43.000 km, y un segundo de arco es 60 veces menor, o sea que mide unos 720 km. Pero nuestro arco tiene la longitud de 1 km; es decir, corresponde a un ángulo de 1/720 segundos. Ese ángulo resulta imperceptible, incluso para los instrumentos astronómicos; por lo tanto, podemos considerar que los rayos de Sol caen a la Tierra en forma paralela[2].

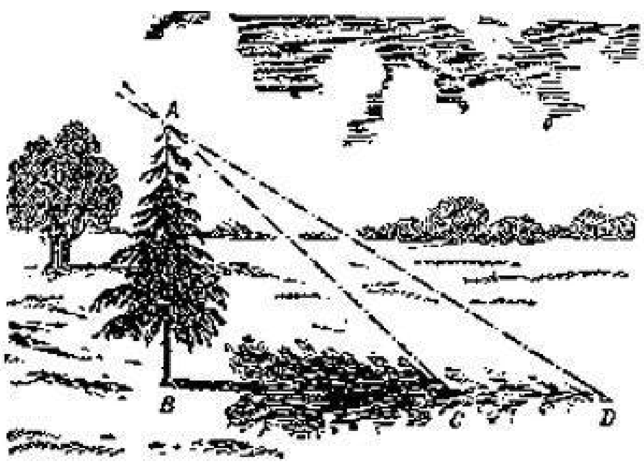


Figura 3. Cómo aparece la sombra

No podemos argumentar el método examinado sin efectuar las correspondientes consideraciones geométricas, estableciendo la proporción entre la altura y su sombra.

Si llevamos a la práctica el método de las sombras, constataremos su inexactitud. Las sombras tienen un contorno difuso por lo cual no se pueden delimitar con precisión; por lo que su demarcación carece de exactitud.

Esto ocurre, porque el Sol no es un punto sino un gran cuerpo luminiscente, que emite rayos desde varios puntos.

La Figura 3 muestra qué a la sombra BC del árbol se le suma la sombra CD debida a la penumbra, la misma que se va desvaneciendo progresivamente. El ángulo CAD entre los límites de la penumbra corresponde al ángulo en el que siempre podemos ver el disco del Sol, y mide aproximadamente medio grado. Debido a que tenemos dos sombras, se presenta un error. Si la posición del sol es baja, este error hace que la medida se desvíe de su valor un 5% ó más.

A este error se le unen otros, por ejemplo, los accidentes del terreno, y el resultado es poco preciso. En sitios montañosos no se puede aplicar este método.

2. Dos métodos más

Se pueden medir las alturas sin ayuda de las sombras. Existen diversas formas; empezaremos examinando dos de ellas, bastante simples.

Para iniciar podemos emplear las propiedades del triángulo rectángulo isósceles, utilizando un sencillo instrumento, el cual se construye con suma facilidad, con una tablilla y tres alfileres. Sobre una tablilla lisa marcamos tres puntos, los vértices del triángulo rectángulo isósceles, en estos puntos clavamos los alfileres (Figura 4).

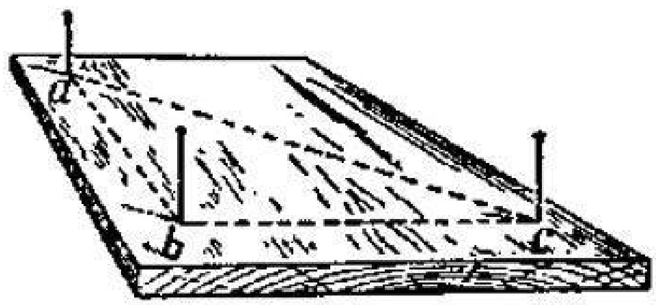


Figura 4. El instrumento hecho con alfileres para medir alturas

Si no dispone de escuadra y compás para dibujar el triángulo, puede coger un papel, lo dobla una vez, lo dobla luego en sentido transversal respecto al primer doblez, de modo que se unan los extremos del mismo, de este modo se obtiene el ángulo recto. Se puede emplear el mismo papel para medir los trazos ab y bc, de modo que tengan igual longitud.

Como vemos, podemos construir el instrumento de diversas formas.

Este instrumento es tan fácil de usar como de construir. Alejándose del árbol, coloque el instrumento de modo que uno de los catetos del triángulo se oriente verticalmente. Para facilitar la medición, puede utilizar una plomada (un hilo con un objeto pesado atado a un extremo) atada al alfiler superior de este cateto.

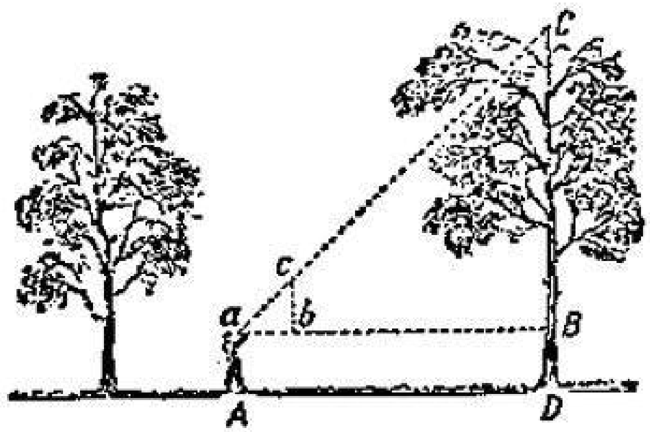


Figura 5. Esquema del uso de la tablilla con alfileres.

Acercándose al árbol o alejándose de él, encontrará un sitio A (Figura 5), desde el cual, verá que los alfileres a y c, tapan la copa C del árbol: eso significa que la prolongación de la hipotenusa ac pasa por el punto C. Como ya lo hemos visto en el ejemplo anterior, la separación entre ab es igual a CB, ya que el ángulo α = 45°.

Finalmente, después de medir el trazo aB y agregarle la longitud de BD, equivalente a la altura aA de los ojos al piso, se obtiene la altura del árbol.

Existe otro método, que no usa la tablilla con los alfileres. Usted necesita un jalón; se clava verticalmente éste en la tierra de modo que la parte que sobresalga del piso sea igual a su estatura. Debe elegir el sitio para el jalón de modo que le permita, al tumbarse como se muestra en la Figura 6, ver la copa del árbol y el punto superior del jalón en línea recta.

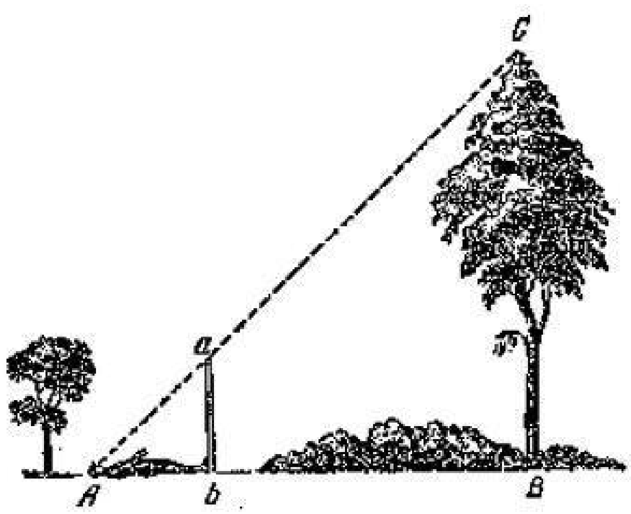


Figura 6. Otro método más para medir la altura.

Como el triángulo Aba, es isósceles y rectangular, entonces el ángulo A = 45°, y por lo tanto AB = BC, es la altura buscada del árbol

3. El método de Julio Verne

El siguiente método también es sencillo. Julio Verne describió en su novela "La isla misteriosa" la forma de medir los objetos de gran altura:

– Hoy vamos a medir la altura del acantilado de Vista Lejana, –dijo el ingeniero.

– ¿Necesitamos algunos instrumentos? –preguntó Gebert.

– No hace falta. Lo haremos de otra manera, más fácil y más segura.

El joven, caminó desde el acantilado hasta la orilla. Cogió un jalón de 12 pies de longitud, el ingeniero comprobó la medida con su estatura, la cual conocía bien. Gebert entregó una plomada al ingeniero; ésta no era más que una piedra atada al extremo de una cuerda. Situándose a 500 pies del acantilado vertical, el ingeniero clavó el jalón verticalmente en la arena, con la ayuda de la plomada, enterrándola a dos pies de profundidad. Luego se alejó del jalón, hasta que tumbándose en el suelo pudo ver el extremo saliente del jalón y la cresta del acantilado en línea recta (Figura 7). Marcó este punto con una estaca.

– ¿Tienes algunas nociones de geometría?– preguntó a Gebert.

– Sí.

– ¿Recuerdas las propiedades de los triángulos semejantes?

– Sus lados correspondientes son proporcionales.

– Exacto. Ahora voy a construir dos triángulos rectángulos semejantes. Un cateto del triángulo pequeño será el jalón, el otro cateto, será la distancia desde la estaca hasta el pie del jalón; la hipotenusa, es mi línea de vista. En el triángulo mayor los catetos son el acantilado, cuya altura queremos medir, y la distancia desde la estaca hasta el pie del acantilado; la hipotenusa es mi línea de vista, que se une con la hipotenusa del triángulo menor.

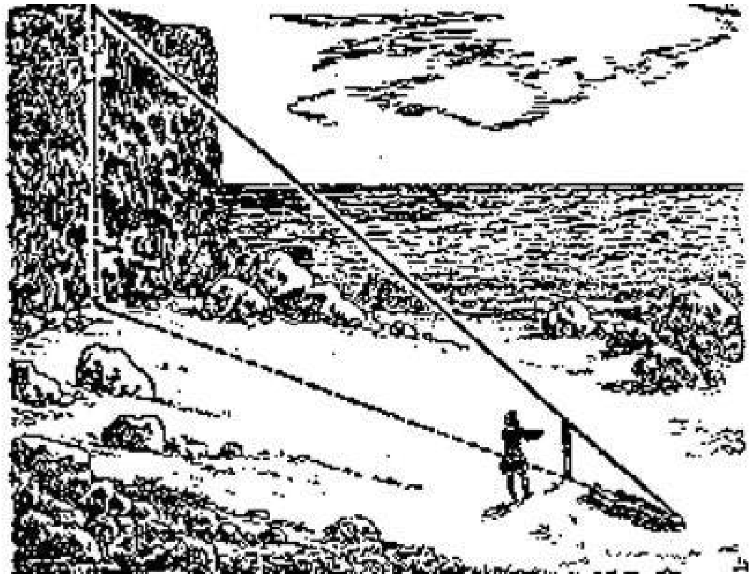


Figura 7. Como encontraron la altura de un acantilado los personajes de Julio Verne

– ¡He entendido! – exclamó el joven. La distancia de la estaca hasta el jalón es a la distancia desde la estaca hasta el pie del acantilado, como la altura del jalón es a la altura del acantilado.

– Exactamente. Sigamos, si medimos las dos primeras distancias, y sabemos la altura del jalón, podemos calcular el cuarto miembro de la proporción que es la altura del acantilado.

Se midieron ambas distancias horizontales: la pequeña midió 15 pies, la grande midió 500 pies.

Finalmente el ingeniero anotó:

$$15 : 500 = 10 : x$$

$$15\,x = 500 \times 10$$

$$x = 333{,}3 \text{ pies}$$

Entonces, la altura del acantilado es de 333 pies.

4. Como actuó el coronel

Algunos de los métodos antes descritos resultan incómodos debido a que hay que tumbarse sobre el piso. Pero podemos evitar este tipo de incomodidades.

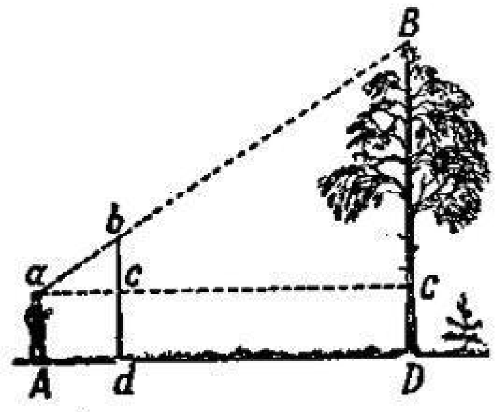


Figura 8. Medición de altura con la ayuda de un jalón.

Así ocurrió un día en un frente, durante la Segunda Guerra Mundial. A la subdivisión del teniente Ivanov le mandaron a construir un puente por encima de un río en una montaña, frente al lugar donde desembarcó el enemigo.

Para reconocimiento de un terreno boscoso, mandaron un grupo de búsqueda con el mayor coronel Papov... "En el monte cercano midieron diámetros y alturas de los árboles que más abundaban en aquella zona, y contaron los que podían ser de alguna utilidad".

Establecieron las alturas de los árboles con ayuda de un jalón, como indica la Figura 8.

Explicación del método.

Necesitamos un jalón mucho más alto que nuestra propia estatura, lo clavamos en la tierra a cierta distancia del árbol (Figura 8).

Colocándonos detrás del jalón, nos movemos en línea recta con Dd hasta el sitio A, desde cual, mirando a la copa del árbol, veremos el punto superior b del jalón, en línea recta con dicha copa. Luego, sin cambiar de posición giramos la cabeza, mirando horizontalmente en la dirección aC, observando los puntos c y C, en los puntos en que la línea de vista cruza el jalón y el tronco del árbol. Se pide al ayudante hacer marcas en dichos puntos, y se da por terminada la observación. Solo resta calcular BC, en virtud de la semejanza de los triángulos abc y aBC, con base en la proporción:

$$BC : bc = aC : ac$$

Donde:

$$BC = bc\frac{aC}{ac}$$

Las distancias bc, aC y ac son fácilmente medibles. Al resultado BC debe agregarse la distancia CD, para hallar la altura buscada.

Para determinar la cantidad de árboles, el coronel ordenó a los soldados medir la superficie del bosque. Luego calculó la cantidad de árboles dentro de un terreno cuadrado de 50 metros de lado e hizo los cálculos correspondientes.

Con los datos obtenidos, el coronel puso en orden las cosas, eligió dónde y cómo construir el puente; éste fue construido rápidamente y se cumplió la misión de combate.[3]

5. Con ayuda de una agenda

Otra forma de calcular la altura de un árbol de forma aproximada, consiste en utilizar nuestra agenda y un lápiz. Con ayuda de estos podemos construir en el espacio dos triángulos semejantes, mediante los cuales obtenemos la altura buscada.

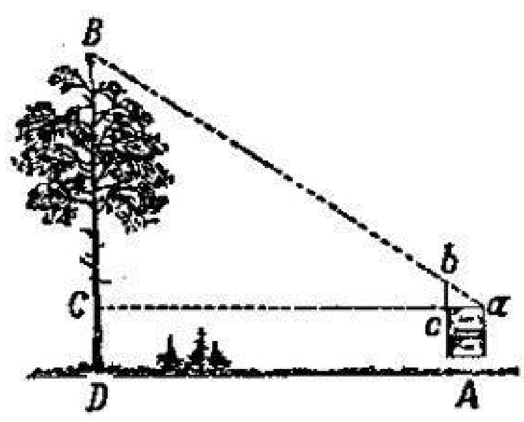


Figura 9. Medición de altura con la ayuda de una agenda.

Sujetamos la libreta a la altura de los ojos, como indica la Figura 9. La colocamos en el plano vertical y sujetamos el lápiz de modo que éste sobresalga por encima del canto de la libreta, y lo desplazamos hasta que mirando la copa B del árbol desde el punto a, esta quede tapada por la punta b del lápiz. Debido a la semejanza de los triángulos abc y ABC, la altura BC se determina con base en la proporción:

$$BC : bc = aC : ac$$

Se miden las distancias bc, ac y aC. Se añade al resultado BC, la longitud CD, correspondiente a la altura de los ojos sobre el piso, siempre que estemos sobre un terreno plano.

Como el ancho de la agenda es fijo, y nosotros siempre vamos a estar a la misma distancia del árbol (por ejemplo, a 10 m), la altura solo depende solo de la parte que sobresale del lápiz, bc. Por eso se puede calcular previamente, a qué altura corresponde cada parte saliente del lápiz, bc, y marcar estas cifras sobre el lápiz. De esta forma se convierte la agenda en un altímetro, pudiéndose calcular las alturas con su ayuda, sin necesidad de efectuar cálculos.

6. Sin acercarse al árbol

Algunas veces, por alguna razón, no podemos acercarnos al pie del árbol. ¿Podemos determinar su altura en este caso?

Es posible. Para eso inventaron un instrumento muy ingenioso, el que, al igual que los instrumentos anteriores, se construye con facilidad.

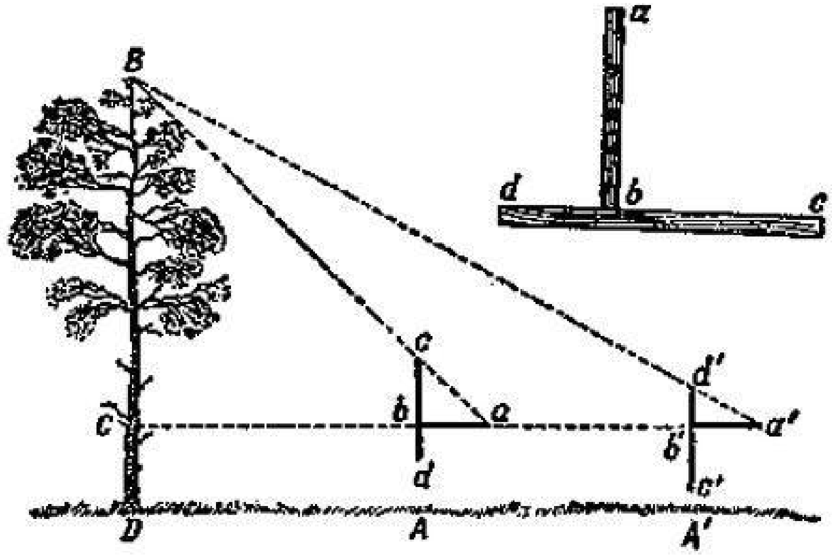


Figura 10. Uso de un altímetro, construido con dos tablillas.

Se fijan dos tablillas ab y cd (Figura 10) en ángulo recto de modo que ab sea igual bc, y bd sea la mitad de ab. Es todo el truco.

Para efectuar la medición, mantenemos el instrumento en los manos, colocando verticalmente la tablilla cd (para eso existe la plomada, el hilo con el plomo), y nos ubicamos sucesivamente en dos sitios: primero (figura 10) en un punto A, sosteniendo el instrumento con la punta c hacia arriba, y después nos alejamos un poco más hasta alcanzar el punto A', sosteniendo el instrumento con la punta d hacia arriba.

Elegimos el punto A mirando desde el punto a la copa del árbol hasta que el extremo c, quede sobre la línea de vista. Elegimos el punto A' mirando desde el punto a la copa del árbol hasta que el extremo d, quede sobre la línea de vista. La altura BC del árbol es igual a la distancia entre los puntos A y A'.

La igualdad se deduce de:

$$aC = BC,$$

y

$$a'C = 2BC$$

entonces

$$a'C - aC = BC$$

Como se ve, utilizando este instrumento tan simple, medimos el árbol, acercándonos a su base (sin llegar hasta ella) a una distancia igual a su altura. Es de suponer que, de ser posible acercarse al tronco, entonces basta encontrar un solo punto A ó A' para saber su altura.

En lugar de dos tablillas podemos utilizar dos alfileres, situándolos apropiadamente sobre una tabla. De este modo tendremos un "instrumento" mucho más simple.

7. El altímetro de los silvicultores.

Llegó el momento de explicar cómo se construyen los "verdaderos" altímetros utilizados por los silvicultores. Describo uno de estos altímetros, ligeramente modificado, para que lo podamos construir por nuestra propia cuenta. La estructura básica se ve en la figura 11.

Hacemos un rectángulo abcd, de cartón o madera para poder sostenerlo con las manos, miramos a lo largo del borde ab, hasta alinearlo con la copa B del árbol. Colgamos en el punto b una plomada q. Se marca el punto n, en el cual cruza el hilo sobre el borde dc.

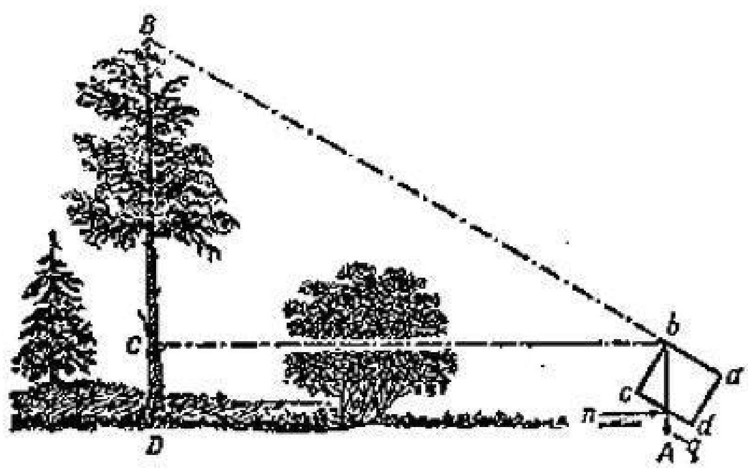


Figura 11. Esquema del uso al altímetro de los silvicultores.

Los triángulos bBC y bnc son semejantes, y como ambos son rectángulos y tienen los ángulos agudos bBC y bnc iguales (puesto que tienen sus lados paralelos), entonces podemos escribir la proporción:

$$BC : nc = bC : bc;$$

De aquí se desprende que:

$$BC = bC \frac{nc}{bc}$$

Como bC, nc y bc son conocidos, entonces es fácil de encontrar la altura del árbol, añadiendo la distancia de la parte baja del tronco CD (la altura a la que se encuentra el instrumento sobre el piso).

Falta agregar algunos detalles. Si se marcan divisiones en centímetros sobre el borde bc de la tabla, por ejemplo, 10 cm, la proporción nc/bc siempre se expresará como un decimal que representa la fracción de la distancia bC, correspondiente a la altura del árbol, BC.

Si, a modo de ejemplo, el hilo pasó por la séptima división (nc = 7 cm); quiere decir que la altura del árbol, sobre nivel del ojo, equivale a 0,7 veces la distancia del observador hasta el tronco.

Otra mejora se refiere al método de observación: para que resulte cómodo mirar a lo largo de la línea ab, podemos doblar sobre los ángulos superiores del rectángulo (de cartón) dos cuadrados agujereados: Un agujero pequeño, para acercar el ojo, el otro más grande, para apuntar la copa del árbol.

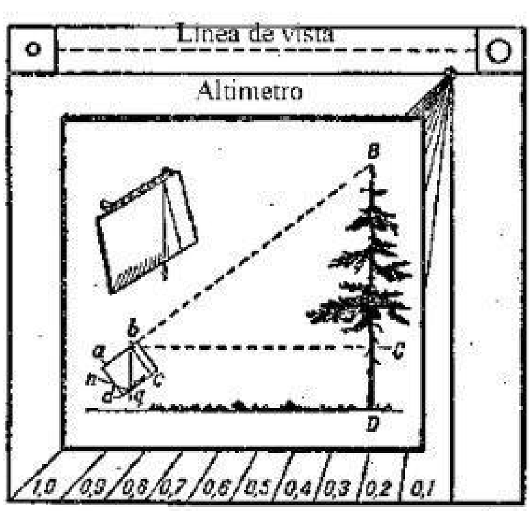


Figura 12. El altímetro de los silvicultores

En la figura 12 se muestra, en tamaño real, el instrumento con la mejora descrita. Construirlo es fácil y consume poco tiempo. No ocupa mucho espacio en el bolsillo y durante la excursión permite calcular rápidamente la altura de objetos tales como árboles, edificaciones, etc.

Problema

¿Con ayuda del altímetro, anteriormente descrito, podemos medir la altura de los árboles a los que nos resulta imposible acercarnos? ¿De ser factible, cómo tenemos que proceder?

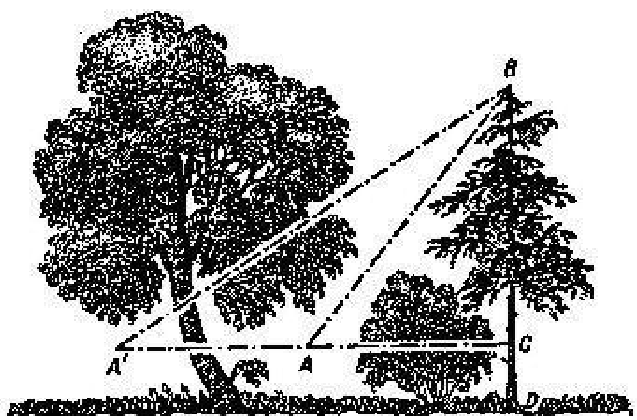


Figura 13 Como medir la altura de un árbol, sin acercarse a él

Solución

Necesitamos apuntar con el instrumento a la copa B del árbol (figura 13) desde los dos puntos A y A'.

Una vez determinemos A, de modo tal que:

$$BC = 0,9\ AC,$$

y el punto A', tal que:

$$BC = 0,4\ A'C.$$

Entonces, ya sabemos, que:

$$AC = BC / 0,9$$

y

$$A'C = BC / 0,4$$

donde

$$AA' = A'C - AC = BC/0,4 - BC/0,9 = 25/18\ BC$$

Entonces,

$$AA' = 25/18\ BC,$$

ó

$$BC = 18/25\ A'A = 0,72\ A'A.$$

Se observa que midiendo la distancia AA' entre ambos puntos de observación y eligiendo las divisiones adecuadas para estas mediciones, se puede encontrar la altura buscada.

8. Con ayuda del espejo

Problema

Otro método más para determinar la altura de un árbol emplea un espejo. A cualquier distancia (figura 14) del árbol, colocamos horizontalmente, en el punto C, un espejo sobre un suelo plano y nos alejamos hacia atrás hasta un punto D, en el cual el observador ve la copa A del árbol en el espejo. Por lo tanto la relación entre la altura del árbol AB y la estatura del observador ED, es igual a la relación entre la distancia BC desde el espejo hasta el árbol y la distancia CD desde el espejo hasta el observador. ¿Por qué?

$$AB : ED = BC : CD$$

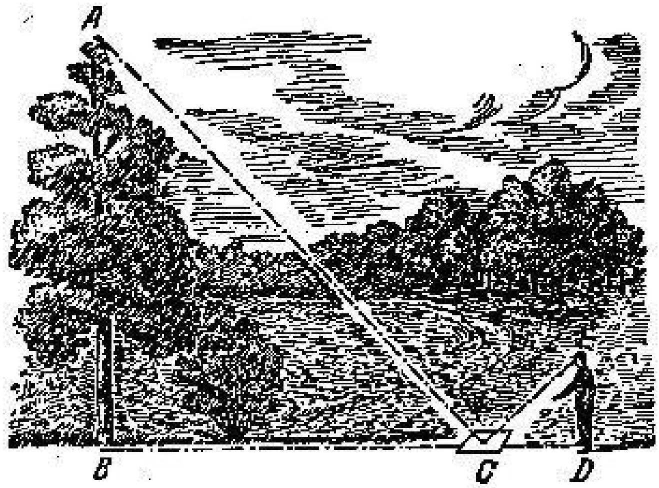


Figura 14 Medición de altura con la ayuda de un espejo.

Solución

El método se basa en la ley de la reflexión de la luz. El punto superior A (figura 15) se refleja en el punto A' así, que AB = A'B.

Dada la semejanza de los triángulos BCA' y CED se deduce, que:

$$A'B : ED = BC : CD$$

En esta proporción solo queda cambiar A'B por su equivalente AB, para argumentar la proporción establecida en el problema.

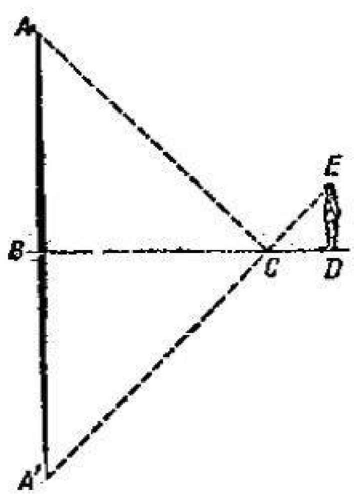


Figura 15. Construcción geométrica para explicar el método de medición de alturas con ayuda del espejo

Este método resulta cómodo en todo momento, pero no es aplicable a un bosque frondoso.

Problema

¿Cómo tenemos que proceder cuando no podemos acercarnos al árbol que queremos medir?

Solución

Este antiguo problema, tiene unos 500 años. Lo examinó un matemático de la Edad Media, Antonio de Cremona, en su obra "Geodesia Práctica" (año 1400).

El problema se resuelve con la doble aplicación del método anteriormente descrito, poniendo el espejo en dos sitios. Haciendo la construcción correspondiente, no resulta difícil por semejanza de triángulos, deducir que la altura buscada del árbol es igual a la altura del ojo del observador respecto al suelo, multiplicada por la proporción entre la distancia que separa las dos posiciones del espejo y la diferencia entre las dos distancias entre el observador y el espejo correspondientes a los puntos en los que se hizo la medición.

Antes de terminar nuestro diálogo sobre la medición de los árboles, propongo a los lectores un problema más "en el bosque".

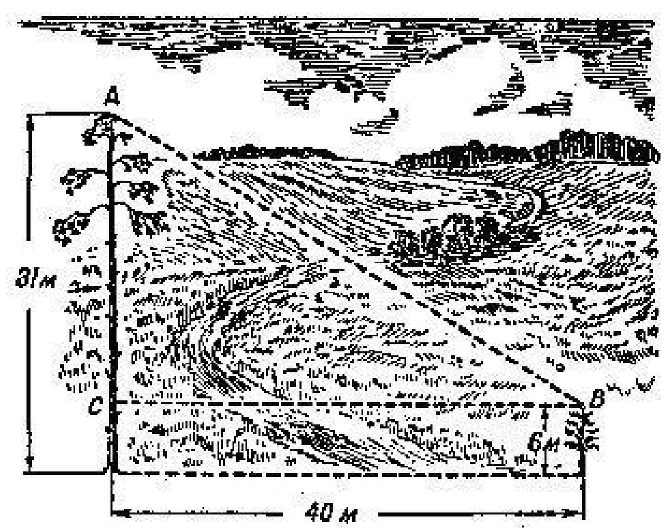


Figura 16. La distancia entre los vértices de los pinos

9. Dos pinos

Tarea

La distancia entre dos pinos es de 40 m (figura 16). Sus alturas respectivas son: 31 m y 6 m. ¿Se puede calcular la distancia entre sus copas?

Solución

La distancia buscada entre las copas de los pinos (figura 16) por el teorema de Pitágoras es:

$$\sqrt{40^2 + 25^2} = 47,2$$

10. La forma del tronco

Ahora, cuando paseen por el bosque podrán determinar la altura de cualquier árbol, por media decena de métodos. Sería interesante también determinar su volumen, calcular cuántos metros cúbicos de madera tiene, y calcular también su peso, para saber si es posible llevar el tronco solo con la ayuda de un carro de cuatro ruedas. Estas tareas no son tan fáciles como las anteriores; los especialistas no han encontrado la solución precisa y se limitan a efectuar un estimado. Resolver este problema no es tarea fácil, aunque se tale el tronco y se le corten las ramas.

Esto se debe a que el tronco de un árbol, incluso liso, sin salientes, no representa ni un cilindro, ni un cono, ni un cono truncado, ni otro cuerpo geométrico, cuyo volumen podamos calcular mediante fórmulas. El tronco, bien sabemos, que no es un cilindro pues se estrecha hacia la copa, pero tampoco es un cono, porque su generatriz no es una línea recta sino una línea curva, además no es un arco de circunferencia, como tampoco es otra línea curva, que converja hacia el eje del árbol.

Por eso, solo se puede calcular su volumen exacto con ayuda del cálculo integral. Para algunos lectores parece extraño, que para medir una simple viga tenemos que acudir a la matemática superior. La mayoría piensa, que la matemática superior no guarda relación alguna con la vida corriente y que sólo se asocia con algunos temas especiales.

Esta afirmación no es del todo cierta: mediante la geometría elemental se puede calcular con exactitud el volumen de una estrella o de un planeta, pero no es posible calcular el volumen exacto de una viga o de un tonel sin emplear la geometría analítica o el cálculo integral[4].

Pero nuestro libro no propone a los lectores conocimientos de matemática superior; por eso nos limitamos al cálculo aproximado del volumen de un tronco. Vamos a suponer que el volumen de un tronco es aproximadamente igual al volumen del tronco de cono, el volumen del árbol completo, incluyendo su copa, se aproxima al volumen del cono, y finalmente, para vigas cortas, al volumen del cilindro. Es fácil calcular el volumen de cada uno de los tres cuerpos. ¿Será posible generalizar el cálculo, encontrando una fórmula para el volumen, válida para los tres cuerpos indicados?

Más adelante calcularemos el volumen aproximado del tronco, sin interesarnos si se parece más a un cilindro, a un cono perfecto o a un cono truncado.

La fórmula universal

Evidentemente existe la fórmula; además de eso, no solo se aplica al cilindro, al cono perfecto, y al cono truncado, sino que también se aplica a los prismas, a las pirámides perfectas, a las pirámides truncadas y también a la esfera. Esta fórmula universal se conoce como la fórmula de Simpson:

$$v = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4b_2 + b_3\right)$$

En que

- h = la altura del cuerpo,
- b_1 = la superficie de la cara inferior,
- b_2 = la superficie la sección media[5],
- b_3 = la superficie de la cara superior.

Problema

Demostrar, que con ayuda de la fórmula de Simpson se puede calcular el volumen de los siete cuerpos siguientes:

- el prisma,
- la pirámide perfecta,

- la pirámide truncada,
- el cono perfecto,
- el cono truncado y
- de la esfera.

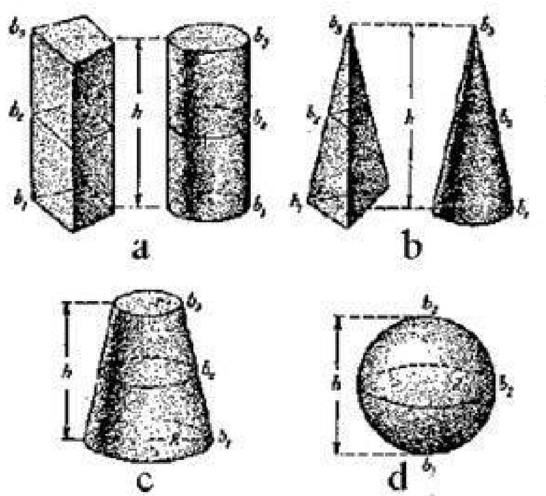


Figura 17. Los cuerpos geométricos, cuyos volúmenes se pueden calcular con la fórmula universal

Solución

Si estamos seguros de la exactitud de esta fórmula es fácil su aplicación a los cuerpos enumerados. Entonces para el prisma y el cilindro (Figura 17, a):

$$v = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4b_2 + b_3\right) = b_1 h$$

para la pirámide y el cono (Figura 17, b):

$$v = \frac{h}{6}\left(b_1 + \frac{4b_2}{4} + b_3\right) = \frac{b_1 h}{3}$$

para el cono truncado (Figura 17, c):

$$v = \frac{h}{6}\left[\pi R^2 + 4\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 + \pi r^2\right]$$

$$v = \frac{h}{6}\left[\pi R^2 + \pi R^2 + 2\pi Rr + \pi r^2 + \pi r^2\right]$$

$$v = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + Rr + r^2\right)$$

Para la pirámide truncada el cálculo es semejante.

Finalmente, para la esfera (Figura 17, d):

$$v = \frac{2R}{6}\left(0 + 4\pi R^2 + 0\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Problema

Anotamos otra característica muy interesante de nuestra fórmula universal: es válida para calcular la superficie de las figuras planas:

- el paralelogramo,
- el trapecio y
- triángulo,

siendo:

- h = la altura de la figura,
- b_1 = la longitud del lado inferior,
- b_2 = la longitud de la media,
- b_3 = la longitud del lado superior.

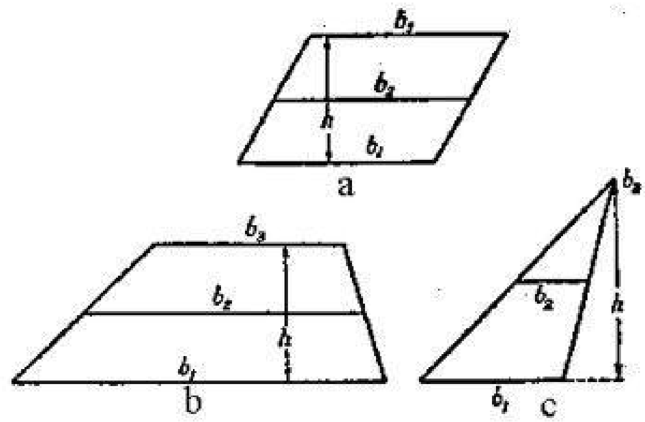


Figura 18. La fórmula universal para calcular las superficies de estas figuras

¿Cómo lo demostramos?

Solución

Utilizando la fórmula, tenemos:

Para el paralelogramo (cuadrado, rectángulo) (Figura 18, a):

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4b_2 + b_3\right) = b_1 h$$

para el trapecio (Figura 18, b):

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1 + b_3}{2} + b_3\right) = \frac{h}{2}\left(b_1 + b_3\right)$$

para triángulo (Figura 18, c):

$$S = \frac{h}{6}\left(b_1 + 4\frac{b_1}{2} + 0\right) = b_1 \frac{h}{2}$$

Como se puede ver, la fórmula tiene razón suficiente para llamarse universal.

El volumen y el peso del árbol (antes de ser talado)

Pues tienen a su disposición la fórmula, con la ayuda de cual pueden calcular el volumen aproximado del tronco cortado, sin importar a qué cuerpo geométrico se parezca, si al cilindro, o al cono perfecto o al cono truncado.

Figura 19. Midiendo el diámetro del árbol con escalímetro

Para esto necesitamos las cuatro dimensiones, la longitud del tronco y los tres diámetros: el del corte inferior, el del corte superior y el del medio. La medición de los diámetros de los extremos es muy fácil; la determinación del diámetro intermedio, sin emplear instrumentos especiales (la escala de los leñadores, Figura 19 y 20[6]), es bastante dificultosa. Pero podemos evitar la complejidad, si medimos la circunferencia del tronco con un cordel y dividimos su longitud por 3,14, (el valor aproximado de п) para obtener el diámetro.

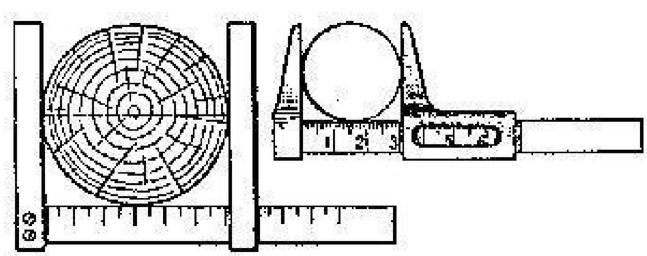


Figura 20. Calliper y pie de metro

El volumen del árbol cortado, es bastante exacto para fines prácticos.

Brevemente, con menos exactitud se soluciona esta tarea, si calculamos el volumen del tronco, como el volumen de un cilindro, el diámetro del extremo es igual al diámetro medido en el centro del tronco: se obtiene un resultado que llega a tener hasta un 12% menos del valor real. Pero si dividimos el tronco mentalmente en secciones de dos metros de longitud cada uno, y determinamos el volumen de cada una, como si fueran cilindros, entonces el resultado será más aproximado, alcanzando un error máximo de 2 a 3%.

Todo esto, sin embargo, no es aplicable al árbol alto: si no deciden subirse a él, entonces sólo podrán medir la parte inferior. En ese caso, nos conformaremos con un valor aproximado, sabiendo que los silvicultores profesionales actúan habitualmente de la misma manera.

Para esos casos ellos usan una tabla, llamada "tabla de los números específicos", en ella los números muestran que parte del volumen del árbol medido equivale al volumen de un cilindro de la misma altura, cuyo diámetro se mide a la altura del pecho de una persona, 1,30 m. (Resulta conveniente efectuar la medición a esta altura).

La Figura 21 explica lo anteriormente dicho. Por supuesto, "los números específicos" difieren entre árboles de altura y familia diferentes, y también de acuerdo con las variaciones en la forma del tronco. Pero las variaciones no son muy grandes: para un tronco de pino o para un abeto (que crecen en un bosque frondoso) "los números específicos" están entre 0,45 y 0,51, es decir, aproximadamente iguales a su mitad.

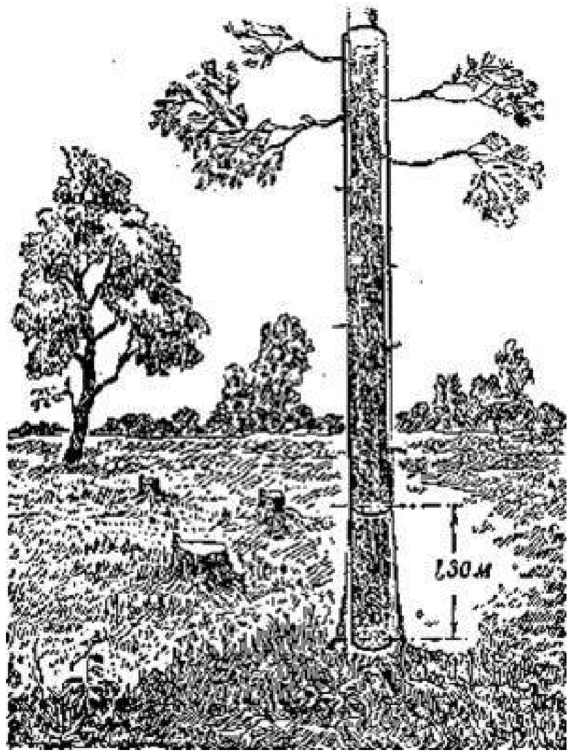


Figura 21. Los números muestran que parte del volumen del árbol medido equivale al volumen de un cilindro de la misma altura, cuyo diámetro se mide a la altura del pecho de una persona, 1,30 m. (Resulta conveniente efectuar la medición a esta altura).

Entonces, sin temor a equivocarnos, podemos obtener el volumen de un árbol conífero como la mitad del volumen de un cilindro de igual altura cuyo diámetro corresponde al del tronco medido a la altura del pecho.

Aunque es evidente que el resultado obtenido representa un valor aproximado del volumen, no dista mucho del valor real: se ubica en un rango entre el 2% por encima y el 10% por debajo del verdadero valor[7].

Entonces solamente queda un paso por evaluar: el peso del árbol. Para eso es suficiente saber, que 1 metro cúbico de una madera fresca de pino o de abeto pesa entre 600 y 700 kg. Suponga por ejemplo, que usted está junto a un abeto de 28 m de altura y la circunferencia del tronco a la altura del pecho es de 120 cm, la superficie del círculo correspondiente a dicha circunferencia es de 1.100 cm^2 ó 0,11 m^2, y el volumen de tronco será:

$$\frac{1}{2} \times 0{,}11 \times 28 = 1{,}5 \text{ m}^3.$$

Sabiendo que el 1 m^3 de madera fresca del abeto pesa unos 650 kg, encontraremos que los 1,5 m^3 deben pesar cerca de una tonelada (1.000 kg)

Geometría de las hojas.

Problema

Debajo de la sombra de un álamo plateado plantado en un bosque han crecido ramas desde la raíz. Se coge una de sus hojas y se comprueba que esta es más grande que las de otro álamo que crece expuesto al sol. Las hojas que crecen en la sombra compensan la falta de luz con el tamaño de su superficie. Compete a la botánica estudiar este fenómeno, pero la geometría también nos puede informar algo: saber cuántas veces la superficie de la hoja de un árbol que crece a la sombra del bosque es mayor que la superficie de la hoja de otro árbol de idéntica especie que crece expuesto a la luz.

¿Cómo se resuelve este problema?

Solución

Podemos ir por dos caminos. El primero consiste en determinar la superficie de cada una hoja y encontrar sus proporciones. Es posible medir la superficie de la hoja, cubriéndola con un papel cuadriculado y transparente, donde cada casilla corresponde, por ejemplo, a 4 mm^2 (a la hoja cuadriculada y transparente empleada en la práctica se le llama “cuadrícula”). Aunque el procedimiento es correcto, es demasiado minucioso.[8]

El segundo método es más sencillo; se basa en que dos hojas de diferente tamaño tienen forma similar, es decir que son figuras semejantes. Las superficies de estas figuras, corresponden al cuadrado de la razón entre las medidas de una de sus dimensiones.

Entonces, determinando cuántas veces es más larga o ancha una hoja que la otra, elevamos el número al cuadrado y obtendremos la proporción entre sus superficies.

Asumamos, por ejemplo, que una hoja de un árbol que crece en medio de un bosque, tiene 15 cm de longitud y una hoja de otro árbol que crece expuesto al sol, tiene solamente 4 cm; la proporción entre las longitudes de estas dos hojas corresponde á 15/4, elevando este valor al cuadrado, tendremos 225/16, ó sea 14, que corresponde a las veces que la superficie de una hoja es mayor que la otra. Redondeando (porque no se obtiene exactitud absoluta), podemos decir que la hoja del árbol que crece dentro del bosque, es más grande que la hoja del árbol de idéntica familia que crece al sol, cerca de 15 veces.

Un ejemplo más.

Problema

Una hoja de una planta que crece bajo la sombra tiene una longitud de 31 cm. La longitud de una hoja de otro ejemplar, que crece a pleno sol, solo mide 3,3 cm. ¿Cuántas veces es mayor la superficie de la primera hoja que la superficie de la segunda?

Solución

Procedemos de acuerdo con lo visto anteriormente. La proporción entre las superficies es:

$$\frac{31}{3,3} \Rightarrow \frac{31^2}{3,3^2} = \frac{961}{10,89} = 88$$

Entonces, la hoja grande tiene una superficie mayor a la otra en unas 90 veces.

No es difícil recoger en el bosque bastantes pares de hojas de forma parecida, pero de diferente tamaño y de esta forma reunir un material curioso para tareas de geometría referentes a la proporción entre las superficies de figuras semejantes.

Para un ojo poco entrenado resulta extraño, que una diferencia relativamente pequeña en longitud y anchura de las hojas genere una diferencia apreciable entre sus superficies. Así, por ejemplo, entre dos hojas de forma semejante, una de ellas 20% más larga más larga que la otra, la razón entre sus superficies será:

$$\frac{1,2}{1} \Rightarrow \frac{1,2^2}{1^2} = \frac{1,44}{1} = 1,44$$

es decir, una diferencia entre ellas, del 40%.

Con la diferencia entre el ancho de las hojas, del 40%, la superficie de una hoja supera a la superficie de la otra en:

$$\frac{1,4}{1} \Rightarrow \frac{1,4^2}{1^2} = \frac{1,96}{1} = 1,96 \approx 2$$

es decir, que la superficie de una hoja es casi el doble de la otra.

Problema

Proponemos a los lectores encontrar la proporción de las superficies de las hojas, representadas en las figuras 22 y 23.

Figuras 22 y 23. Encontrar la proporción entre las superficies de estas hojas.

11. Un gigante de seis patas.

¡Las hormigas son unas criaturas sorprendentes! Suben vivamente por un tallo con una carga demasiado pesada para su pequeño tamaño (Figura 24), ellas plantean un problema a un observador: ¿De dónde obtiene tanta fuerza ese insecto, para subir sin demasiado esfuerzo, con un peso 10 veces superior al de ella?

Es que una persona no es capaz de subir por la escalera, con una carga tan pesada, por ejemplo, con un piano (Figura 24), pero la proporción de la carga sobre el peso de cuerpo es igual a la de una hormiga. Resulta, que una hormiga es más fuerte que un hombre.

¿Es cierto esto?

Sin geometría aquí no comprendemos.

Escuchemos primero a un especialista (profesor A. F. Brandt) sobre la fuerza de los músculos y después contestamos a la pregunta sobre la proporción de las fuerzas de un insecto y de una persona:

«Un músculo vivo parece a un hilo elástico, pero se contrae al excitar los nervios. En los experimentos sobre fisiología, se aplica una corriente eléctrica al nervio correspondiente o al mismo músculo. «Los experimentos se realizan sobre los músculos separados de una rana recién muerta. Los músculos de los animales de sangre fría conservan sus funciones vitales durante largo tiempo fuera del organismo, a temperatura ambiente. La forma de realizar la prueba es muy simple, se corta el músculo de la pata trasera del animal, este contiene la pantorrilla y el fémur, desde el cual comienza el tendón. Este músculo resulta más conveniente para efectuar las pruebas debido a su tamaño, forma y facilidad de disección.

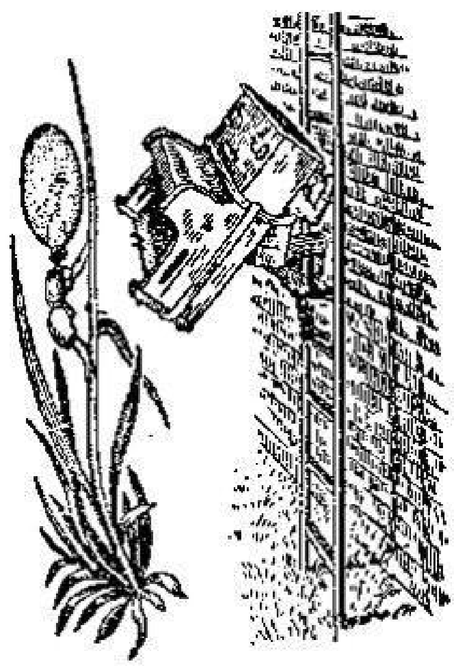


Figura 24. Un gigante de seis patas.

«A través del tendón se pasa un gancho, bajo el cual se cuelga una pesa. Si tocamos el músculo con un hilo metálico, conectado a una pila galvánica, instantáneamente se contrae, se encoge y levanta el peso. Colocando gradualmente más pesas pequeñas suplementarias, se puede determinar la máxima capacidad de levantamiento del músculo.

«Atamos ahora dos, tres, cuatro músculos iguales en serie y empezamos a excitarlos. Vemos, que no conseguimos de esta forma no logramos levantar un peso mayor, pero el peso se va a levantar más arriba. Si anudamos dos, tres, cuatro músculos, al excitarlos van a levantar un peso mayor.

«Cuando se entrelazan los músculos se obtiene un resultado similar. Concluimos entonces, que la fuerza de levantamiento de los músculos depende únicamente del grosor, es decir, del corte transversal; pero de ninguna manera depende de la longitud o del peso general de éstos.

Luego de apartarnos del tema, regresamos a las semejanzas geométricas, pero esta vez en animales de diferente tamaño.

«Si imaginamos dos animales; cuyas medidas del primero son el doble de las del otro; el volumen y el peso del cuerpo, y también todos los órganos serán mayores 8 veces.

Todas las medidas de superficie, además de los cortes transversales de los músculos, solo serán mayores 4 veces. Al duplicar su tamaño durante la etapa de crecimiento el volumen de su cuerpo aumentará 8 veces al tiempo que sus músculos apenas tendrán un área 4 veces mayor, lo que quiere decir que el animal se hace 2 veces más débil.

Aplicando el mismo razonamiento se concluye que al triplicar su tamaño, el volumen de su cuerpo aumentará 27 veces al tiempo que sus músculos apenas tendrán un área 9 veces mayor, lo que quiere decir que el animal se hace 3 veces más débil.

Y de igual manera, al cuadruplicar su tamaño, el volumen de su cuerpo aumentará 64 veces al tiempo que sus músculos apenas tendrán un área 16 veces mayor, lo que quiere decir que el animal se hace 4 veces más débil. Y así se puede seguir razonando.

Con esta ley que muestra la proporción inversa entre el aumento del volumen y el peso de un animal, y la reducción de su fuerza muscular, se explica porque un insecto, tal como una hormiga, una abeja, etc. puede subir cargas 30 ó 40 veces mayores que su propio peso, mientras que una persona normal solo es capaz de subir solamente 9/10, y el caballo, apenas 7/10 de su peso[9].»

Después de estas explicaciones pasamos a contemplar las hazañas de las hormigas "gigantes" desde otro punto de vista: tal como las describe jocosamente el fabulista Y. A. Krylov:

Una hormiga tiene una fuerza excelente,
De la cual no se conoce la antigüedad;
Y además (dice una antigua fuente)
Podría levantar dos grandes granos de cebada

Capítulo 2
Geometría Junto al Río

Contenido:

18.Construir dos puentes.

1. Medir la anchura de un río.

Sin atravesar el río a nado, medir su anchura resulta tan fácil para quien conoce la geometría, como determinar la altura de un árbol sin subirse a él. Una distancia de difícil acceso se mide mediante los métodos antes descritos, empleados para medir alturas escarpadas. En ambos casos substituimos el trayecto buscado con otra medida, de fácil cálculo.

Entre los muchos métodos para resolver este problema, estudiaremos los más sencillos.

1°. Para el primero necesitamos un “instrumento” ya conocido por nosotros, con tres alfileres colocados en los vértices de un triángulo rectángulo isósceles (Figura 25).

Necesitamos encontrar la anchura *AB* del río (Figura 26), estando en aquella orilla, donde se encuentra el punto *B*, y sin cruzar al otro lado.

Figura 25. Medición de la anchura de un río con el instrumento de alfileres

De pié sobre el punto *C,* mantenga el instrumento cerca de los ojos así, cuando mire con un solo ojo a través de los dos alfileres, verá como ambos tapan los puntos *B* y *A*.

Está claro que cuando conseguimos esto, nos encontraremos en la prolongación de la línea *AB.* Ahora, sin mover la tablilla, mire en la dirección de los otros dos alfileres (perpendicular a la dirección anterior) y fijemos un punto *D*, tapado con estos dos alfileres, es decir que se encuentra sobre la recta, perpendicular a *AC.*

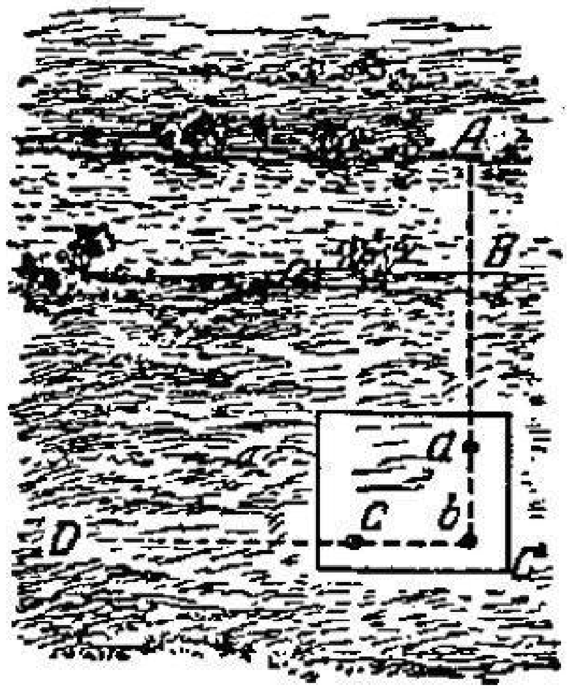


Figura 26. La primera posición del instrumento de los alfileres.

Después clavamos un jalón en el punto *C,* dejamos este sitio y nos movemos con el instrumento a lo largo de la recta *CD,* hasta que encontraremos un punto *E* sobre ella (Figura 27), desde donde es posible alinear el alfiler *b con* el jalón del punto *C*, y el alfiler *a,* con el punto *A.*

Esto significa que hemos encontrado el tercer vértice del triángulo *ACE*, sobre la orilla, donde el ángulo *C* es recto, el ángulo *E* es igual al ángulo agudo del instrumento de alfileres, es decir ½ del ángulo recto. Resulta evidente que *C* es un ángulo recto, entonces:

$$AC = CE.$$

Si medimos la distancia *CE* a través de los pasos, encontraremos la distancia *AC,* y quitando *BC,* que también es fácil de medir, encontraremos la anchura buscada del río.

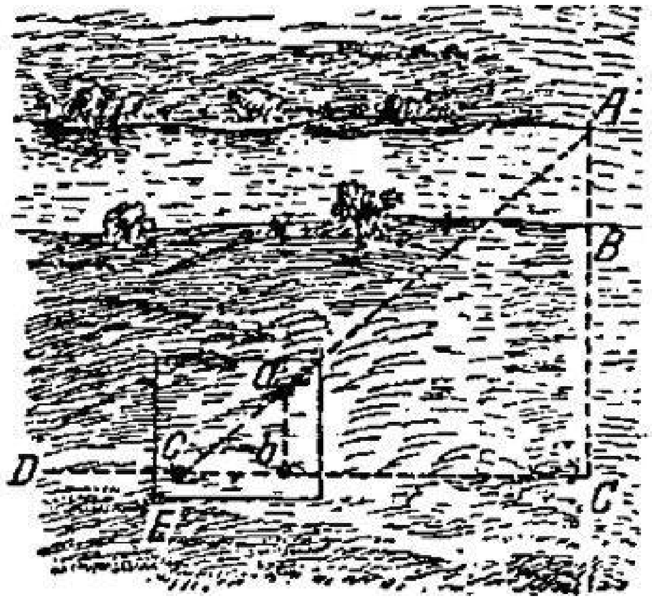


Figura 27. La segunda posición del instrumento de los alfileres.

Dado que es bastante agotador y difícil sostener con la mano el instrumento sin moverlo; mejor resulta fijar la tablilla sobre un palo con punta para mantenerla verticalmente sobre la tierra.

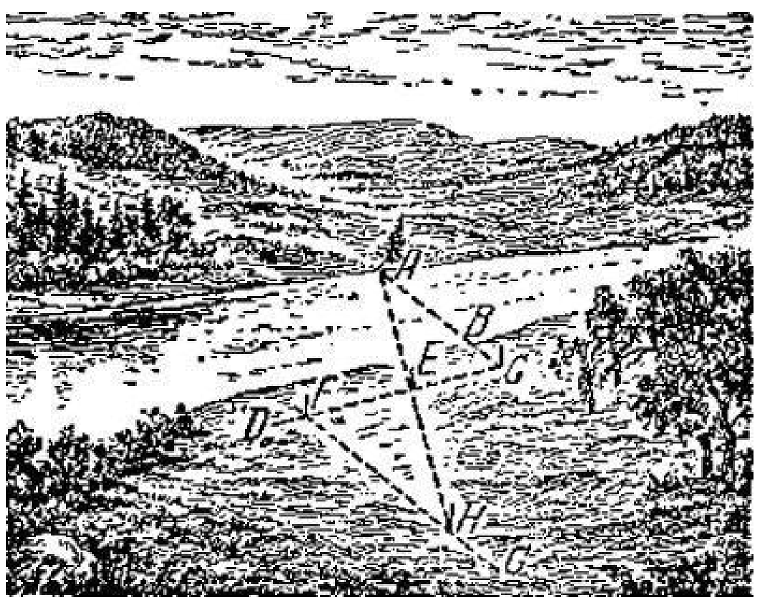


Figura 28. Utilizando las propiedades de igualdad a los triángulos.

2°. El segundo método es parecido al primero. Aquí también se encuentra un punto *C* en dirección *AB* y se marca con ayuda del instrumento de alfileres la línea recta

CD que forma un ángulo recto con *CA.* Pero después se actúa de otra manera (Figura 28). Sobre la línea recta *CD* se medirán dos distancias arbitrariamente iguales *CE* y *EF* y marcamos los puntos *E* y *F* con sendos jalones.

Después de colocar el instrumento en el punto *F,* marcamos la dirección *FG,* perpendicular a *FC*. Ahora nos desplazamos a lo largo de la línea *FG,* buscando el punto *H*, desde el cual el jalón *E* parece tapar al punto *A.* Esto significa, que los puntos *H, E* y *A* encuentran en línea recta.

El problema está resuelto: la distancia *FH* es igual a la distancia *AC,* a la cual basta quitarle *BC,* para encontrar la anchura buscada del río (deduzcan los lectores, por qué *FH* es igual a *AC*).

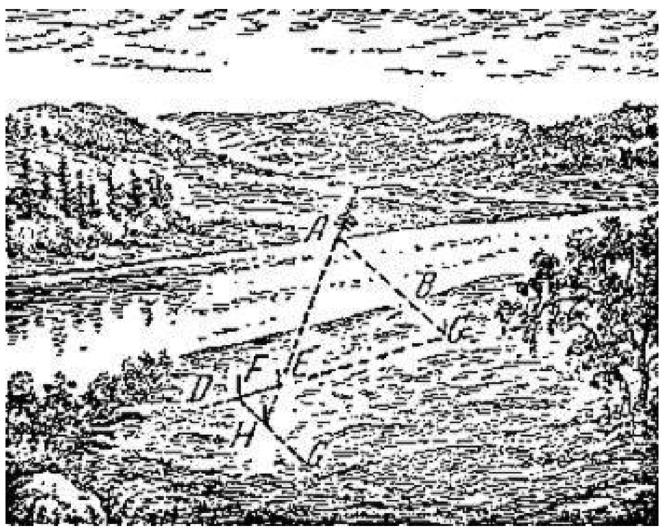


Figura 29. Utilizando las propiedades de semejanza a los triángulos.

Este método necesita más espacio que el anterior; si el sitio permite realizar la medición de ambas maneras, vale la pena comprobar un resultado con el otro.

3°. El método ahora descrito, es una modificación del anterior: medimos sobre la línea *CF* distancias diferentes, donde una es determinado número de veces menor que la otra.

Por ejemplo (Figura 29), hacemos *FE* cuatro veces menor que *EC,* luego procedemos igual que antes: moviéndonos en dirección *FG,* perpendicular a *FC,* buscamos el punto *A.* Pero ahora *FH* no es igual a *AC,* es la cuarta parte de esta distancia: el triángulo *ACE* y *EFH* no son iguales, son semejantes (tienen ángulos iguales y lados diferentes). De la semejanza de los triángulos tenemos la proporción

$$AC : FH = CE : EF = 4 : 1.$$

Finalmente, midiendo *FH* y multiplicando el resultado por *4,* obtenemos la distancia *AC,* y quitando *BC,* encontraremos la anchura buscada del río.

Este método, como podemos comparar, no necesita mucho espacio y por eso resulta fácil de llevar a la práctica.

4°. El cuarto método básicamente utiliza las propiedades del triángulo rectángulo, cuando uno de los ángulos agudos es *30°,* entonces el cateto opuesto a dicho ángulo equivale a la mitad de la hipotenusa.

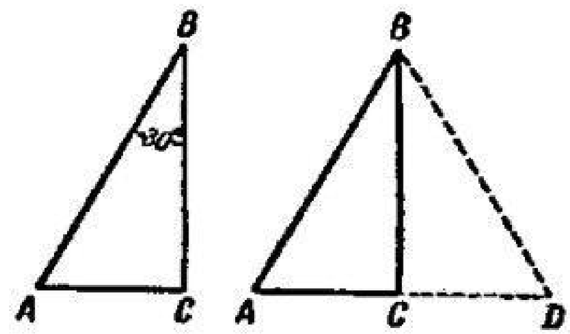


Figura 30. Cuando el cateto es igual a la mitad de la hipotenusa

Fácil resulta verificar la validez de lo antedicho: si el ángulo *B* del triángulo rectángulo *ABC* (lado izquierdo de la Figura 30) es *30°;* demostraremos que en este caso que:

$$AC = ½ AB.$$

Hacemos girar el triángulo *ABC* sobre *BC,* quedando simétricamente ubicado con respecto a su posición anterior (lado derecho de la Figura 30), formando la figura *ABD;* la línea *ACD* es recta, porque ambos ángulos en el punto *C,* son rectos.

En el triángulo *ABD* el ángulo *A = 60°,* el ángulo *ABD,* al estar formado por dos ángulos de *30°*, también es de *60°.*

Entonces, *AD = BD* pues los dos lados están situados frente a ángulos iguales. Pero *AC = ½ AD;* es decir, *AC = ½ AB.*

Para aprovechar esta característica del triángulo, necesitamos colocar los alfileres de la tablilla formando un triángulo rectángulo, donde un cateto sea la mitad de la hipotenusa.

Nos ubicamos con este instrumento en un punto *C* (Figura 31) de modo tal que la recta *AC* coincida con la hipotenusa del triángulo de alfileres.

Mirando a lo largo del cateto menor de este triángulo, marcamos la dirección *CD* sobre la cual encontraremos un punto *E,* en el cual *EA* sea perpendicular a *CD* (lo ubicamos con ayuda del mismo instrumento de alfileres). Es fácil de comprender, que la distancia *CE,* del cateto opuesto al ángulo de *30°,* es igual a la mitad de *AC.* Entonces midiendo *CE,* duplicando esta distancia y restándole *BC,* tenemos la anchura buscada *AB* del río.

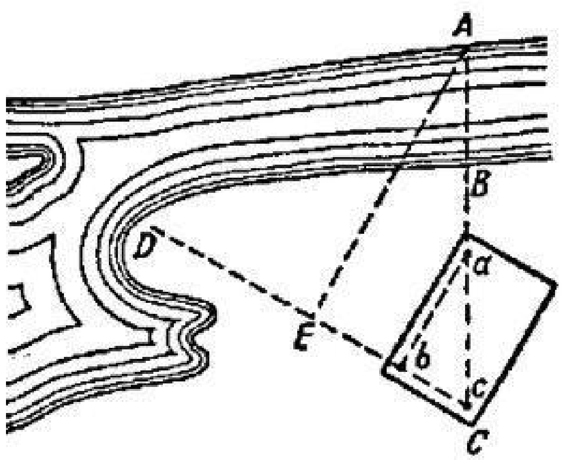


Figura 31. Esquema del uso el triángulo rectángulo con un ángulo de 30°

Estos son los cuatro métodos de fáciles empleo, con ayuda de los cuales siempre es posible, sin atravesar el río, medir la anchura del mismo con precisión plenamente aceptable. No vamos a examinar los métodos difíciles, que necesitan instrumentos especiales para hacer las mediciones.

2. Con ayuda de una visera.

Un método, que fue muy útil para el coronel mayor Kuprianov, estando en una situación de guerra. Le mandaron medir la anchura de un río, a través de cual necesitaba construir un puente...

«Acercándose furtivamente la subdivisión de Kuprianov hasta el arbusto al lado de río, se escondieron, pero él junto y su ayudante Karpov salieron a poca distancia del río, de donde se veía muy bien la orilla opuesta, donde se escondió el enemigo. En estas condiciones necesitaba medir el ancho, confiando a su vista.

– ¿A ver, Karpov, cuál es la anchura del río? – preguntó Kuprianov.

– Pienso que no más de 100 á 110 metros, - respondió el Karpov.

«El coronel estuvo de acuerdo con su ayudante, pero para estar seguro decidió medir la anchura del río con ayuda de su “visera”.

«El método es el siguiente. Necesita pararse frente al río y calar la gorra sobre los ojos, para poder ver justo bajo de la visera la línea de la orilla opuesta (Figura 32).

Figura 32. Por debajo de una visera deberemos notar un punto en la orilla apuesta.

«Podemos sustituir la visera por la palma de la mano o con una agenda, situando el canto en la frente. Luego, sin cambiar de posición, giramos la cabeza a la izquierda o a la derecha, o atrás (en aquella parte, donde el terreno es más llano, y se puede medir su distancia) y observamos el punto más lejano visible bajo la visera (de la palma o de la agenda).

«La distancia hasta este punto es la anchura aproximada del río.

«Este fue el método que utilizó el coronel. Rápidamente se levantó, llevó la agenda al frente, rápidamente dio la vuelta y ubicó el punto lejano. Después él con su ayudante, Karpov, arrastrándose llegaron hasta el punto, midiendo la distancia con una cuerda. El resultado fue *105 metros.*

Kuprianov comunicó el resultado a sus ayudantes.»

Problema

Dar la explicación geométrica al modo de la “visera”.

Solución

La línea de vista, que pasa por el borde de la visera (de la palma o de la agenda), primero apunta a la línea de la orilla opuesta (Figura 32). Cuando la persona se da vuelta, la línea de vista, igual que la punta del compás, describe una circunferencia, entonces *AC* = *AB*, por ser dos radios de la misma circunferencia (Figura 33).

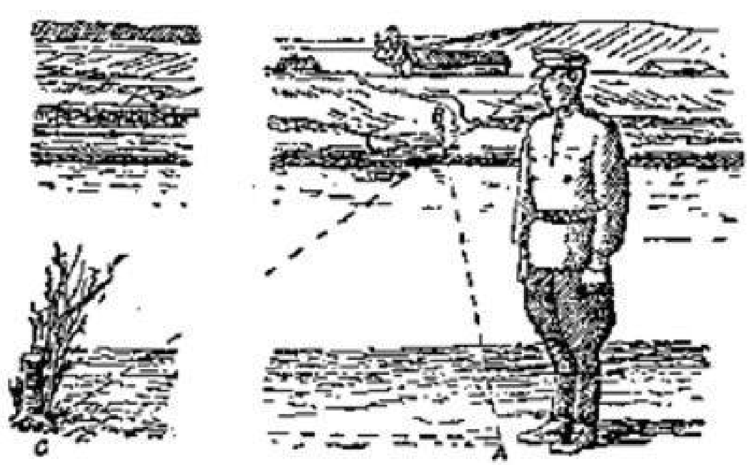


Figura 33. Del mismo modo, se marca el punto en la orilla donde estamos parados

3. Longitud de la isla.

Problema

Ahora tenemos un problema más difícil. Estando en la orilla de un río o de un lago, vemos una isla (Figura 34), cuya longitud deseamos conocer sin dejar la orilla, por supuesto. ¿Es posible realizar la medición?

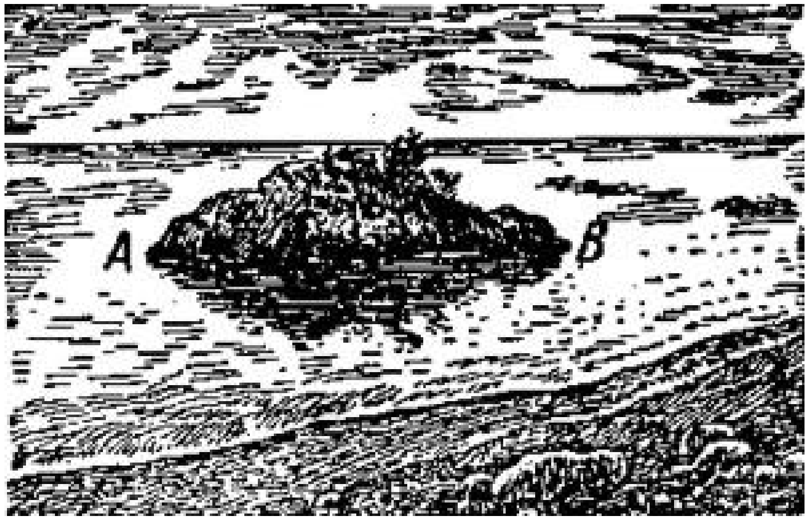


Figura 34. Como encontrar la longitud de una isla.

Aunque en este caso no tenemos acceso a ninguno de los extremos de la distancia a medir, resolveremos el problema, además de esto, sin emplear instrumentos especiales.

Solución

Necesitamos saber la longitud *AB* (Figura 35) de la isla, permaneciendo en la orilla del frente, durante la medición.

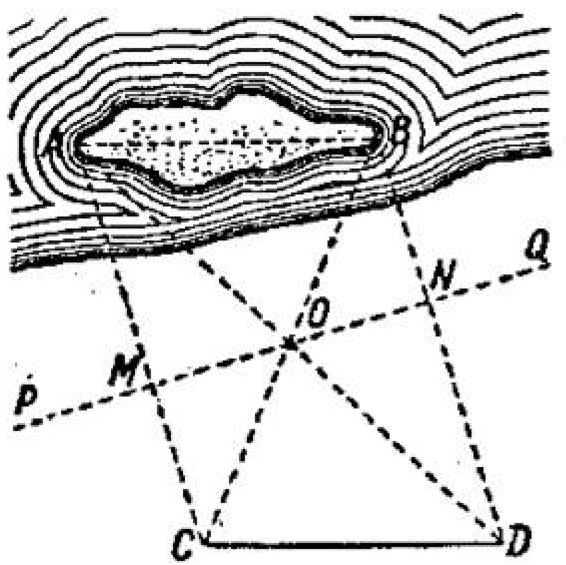


Figura 35. Utilizando las propiedades de igualdad de los triángulos rectángulos

Eligiendo dos puntos *P* y Q arbitrarios, se marcan con jalones y se buscan sobre la recta *PQ* los puntos *M* y *N* de modo tal que *AM* y *BN* formen con la dirección *PQ,* ángulos rectos (para esto utilizaremos el instrumento de alfileres).

Se marca con otro jalón el punto *O* en el centro de *MN* se marca con otro jalón y se busca en dirección *AM* el punto *C,* en el cual el jalón *O* parece tapar el punto *B.* De igual manera, se busca el punto *D* en dirección de *BN*, punto en el cual el jalón *O* parece tapar el extremo *A* de la isla. La distancia *CD* corresponde a la longitud buscada.

Demostrar esto no es difícil.

Cogemos dos triángulos rectángulos *AMO* y *OND*; sus catetos *MO* y *NO* son iguales, además los ángulos *AOM* y *NOD* son iguales, entonces, los triángulos son iguales entre sí, y

$$AO = OD.$$

De igual manera podemos deducir que:

$$BO = OC.$$

Comprobando después los triángulos *ABO* y *COD,* deducimos que:

$$AB = CD.$$

4. Un peatón al otro lado.

Problema

Una persona pasea por la orilla de un río. En la orilla opuesta usted puede ver sus pasos. ¿Podemos, sin movernos, encontrar la distancia aproximada entre el usted y el peatón, sin tener ningún instrumento a mano?

Solución

No tenemos ningún instrumento, pero tenemos ojos y manos, y eso es suficiente. Estiraremos la mano hacia el peatón y miramos al fin del dedo con un solo ojo, el derecho si el peatón esta andando hacia la derecha, el izquierdo, si el peatón esta andando hacia la izquierda.

Figura 36. Como encontrar la distancia hasta el peatón que camina por la orilla apuesta.

Tan pronto como el dedo tape al peatón (Figura 36), cierre el ojo con el cual lo observa, y abra el otro: se observa al peatón ligeramente desplazado hacia atrás. Contaremos, cuantos pasos da hacia adelante, antes de que se cruce otra vez con el dedo. Ahora tenemos todos los datos necesarios para tener un resultado aproximado.

Explicaremos cómo utilizar estos datos. En la Figura 36, sean *a y b* nuestros ojos; el punto *M,* la punta del dedo de la mano del brazo estirado; el punto *A,* primera medición de la distancia al peatón y *B,* la segunda.

Los triángulos *abM* y *ABM,* son semejantes (deberemos dar la vuelta hacia el peatón cuando *ab* sea paralela a la dirección de su movimiento). Entonces,

$$BM \times bM = AB \times ab$$

es la proporción, donde se desconoce el miembro *BM,* todo el resto lo podemos medir inmediatamente. Efectivamente, *bM* es la longitud del brazo; *ab* es la distancia entre las pupilas de ojos, *AB* la distancia medida con los pasos de peatón (tomaremos el paso como ¾ *metros*).

Por lo tanto, tenemos la distancia desconocido entre el observador y el peatón de la orilla opuesta:

$$MB = AB\frac{bM}{ab}$$

Así por ejemplo, si la distancia entre las pupilas *(ab) es de 6 centímetros,* la longitud *bM* desde los ojos hasta la punta del dedo de la mano del brazo estirado, *60 centímetros,* y digamos que el peatón dio desde *A* hasta *B*, *14* pasos, entonces la distancia desde él hasta el observador es:

BM = 14 x 60 / 6 = 140 pasos, ó *105 metros.*

Basta conocer la distancia entre las pupilas, *ab*, y la distancia desde los ojos hasta la punta del dedo de la mano del brazo estirado, *bM*, y recordar su proporción *bM/ab,* para encontrar rápidamente la distancia a objetos inaccesibles. Solo falta multiplicar *AB* por la proporción. La mayoría de las personas tienen la relación *bM/ab aproximadamente igual* a *10.* La dificultad consiste en encontrar, de cualquier manera, la distancia *AB.* En nuestro caso estamos empleando los pasos del peatón. Pero podemos utilizar otros datos también.

Si por ejemplo, necesitamos encontrar la distancia hasta el tren, entonces podemos obtener la longitud *AB* comprobando la longitud de un vagón, (*7,6 metros* entre los extremos). Si necesitamos buscar la distancia hasta la casa, entonces *AB* podría ser el ancho de una ventana o el tamaño de ladrillo, etc. Siempre empleamos un dato conocido.

Podemos utilizar este sistema para determinar el *tamaño* de los objetos lejanos, si conocemos la distancia hasta el observador.

Probaremos con diferentes “telémetros”, los cuales describimos a continuación.

5. Los telémetros más sencillos.

Anteriormente, en el capitulo primero, describimos un instrumento bastante sencillo para medir alturas, el altímetro. Ahora describiremos un instrumento, para medir distancias inaccesibles y se llama telémetro. Podemos construir un sencillo telémetro con una cerilla. Basta con marcar las divisiones milimétricas, blancas y negras, una tras otra (Figura 37).

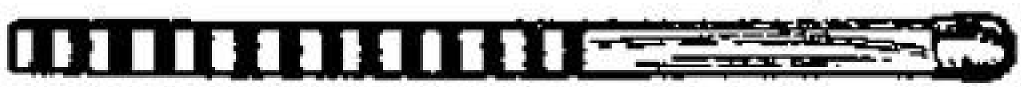


Figura 37. Cerilla – telémetro

Imaginemos, que vemos a lo lejos una persona y formulemos un problema: encontrar la distancia hasta él.

En este caso la cerilla – telémetro resulta muy útil. Manteniendo el brazo estirado y mirando con un solo ojo, haremos coincidir su extremo con la parte superior de la persona.

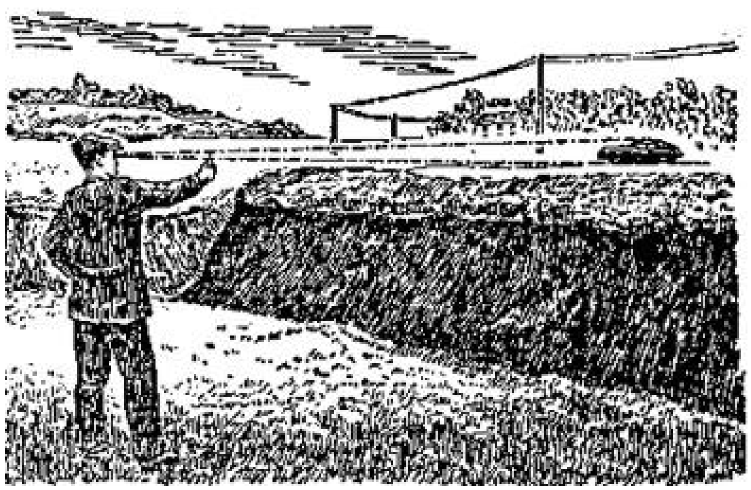


Figura 38.

Luego movemos lentamente la uña del dedo pulgar sobre la cerilla, fijando el punto donde se proyectan los pies de la persona. Nos queda por averiguar, acercando la cerilla, sobre qué división se fijó la uña, y ya tenemos los datos para resolver el problema.

Es fácil comprobar que la proporción es correcta:

$$\frac{\text{la distancia buscada}}{\text{la distancia entre el ojo y la cerilla}} = \frac{\text{la estatura media de la persona}}{\text{la medida sobre la cerilla}}$$

Desde este momento ya no es difícil calcular la distancia buscada. Si, por ejemplo, la distancia del ojo hasta la cerilla es de *60 centímetros,* la estatura de una persona es de *1,7 metros,* y la medida sobre la cerilla es de *12 milímetros,* entonces la distancia es:

$$\text{la distancia buscada} = \frac{60 \times 1.700}{12} = 8.500 \text{ cm} = 85 \text{ m}$$

Para adquirir destreza podemos practicar con este telémetro, midiendo la estatura de un amigo, o proponiéndole que se vaya caminando y calcular cuantos pasos se alejó del observador.

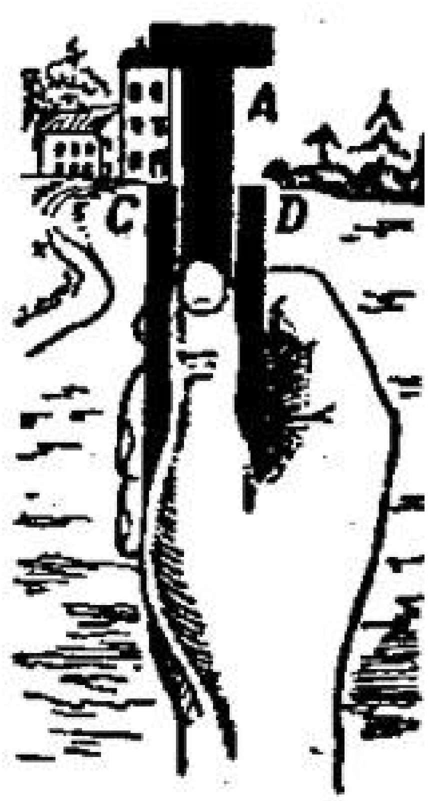


Figura 39

Del mismo modo podemos encontrar la distancia hasta el jinete (la altura media es de *2,2 metros*), hasta la bicicleta (el diámetro de la rueda es de *75 centímetros*), hasta uno de los postes telegráficos que van a lo largo de ferrocarril (la altura es de *8 metros*), la distancia entre los aisladores es de *90 centímetros*), hasta el tren, la casa y etc. medidas fáciles de encontrar. Durante una excursión también podemos utilizar este método.

Podemos construir manualmente un instrumento muy práctico del mismo tipo, que sirve para encontrar la distancia empleando la altura de una persona que está lejos.

En las figuras 39 y 40 podemos ver el instrumento.

El objeto observado se ubica en el espacio *A,* y se alinea con la parte superior del instrumento.

Las divisiones en las partes *C* y *D* de la regleta determinan el tamaño. Para librarnos de los cálculos, podemos señalar en la parte *C*, frente a las divisiones, las distancias correspondientes a ellas, si el objeto observado es la figura de una persona (mantenga el instrumento frente a los ojos, con el brazo estirado).

En la parte derecha *D* se puede marcar las distancias, previamente calculadas para varios casos particulares, por ejemplo, cuando se observa la figura del jinete (*2,2 centímetros*), para el poste telegráfico (altura – *8 metros*), el aeroplano con alas es *15 metros* y para otros objetos podemos utilizar la parte libre de los lados *C* y *D*. Al final, nuestro instrumento tendrá el aspecto mostrado en la Figura 40.

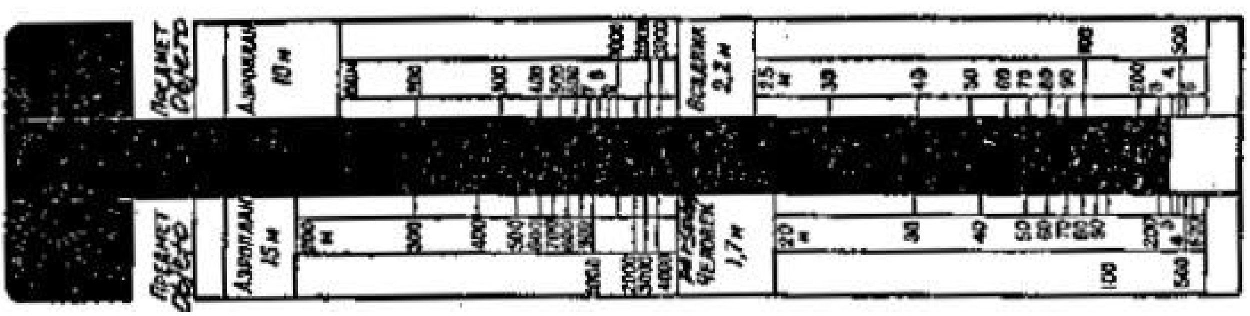


Figura 40. La estructura final del telémetro

Evidentemente, la distancia así determinada siempre es exacta. En el ejemplo que examinamos anteriormente, donde se estimó en *85 metros* la distancia hasta la persona, solo se presenta un error de *1 milímetro* mientras que al efectuar la medición con la cerilla se presenta un error de *7 metros (1/12 de 85*) en el resultado*.*

Pero si la persona está cuatro veces más lejos, y medimos con la cerilla no *12,* si no *3 milímetros,* entonces solo se tendrá un error *½ milímetro*, alterando el resultado en *57 metros.* Por eso, nuestro ejemplo solo es válido para distancias cercanas, entre *100 y 200 metros.* Para distancias mayores tenemos que buscar objetos más grandes.

6. La energía de los ríos.

Decimos que un río cuya longitud no es mayor á *100 kilómetros*, es pequeño. ¿Sabe cuántos ríos así hay en nuestro país? ¡Muchos, *43.000*!

Si colocamos todos los ríos en una línea, tendremos una cinta de *1.300.000 kilómetros* de longitud*.* Con esta cinta podemos rodear el globo terrestre treinta veces sobre el ecuador (la longitud ecuatorial es de *40.000 kilómetros*).

La corriente de agua de un río se mueve lentamente, pero este mantiene en secreto una reserva de energía inagotable. Los especialistas creen que si se pueden sumar las reservas ocultas de energía de todos los ríos pequeños que corren por nuestras tierras, ¡obtendremos la cifra considerable de *43 millones de kilovatios*! Esta energía gratuita se deberá utilizar para electrificar a bajo costo las poblaciones situadas cerca de los ríos.

Sabemos que se puede llevar esta idea a la práctica con ayuda de las centrales hidroeléctricas y todos podemos mostrar nuestra iniciativa y hacer un aporte real al diseño y construcción de una central. Lo cierto es que a los constructores les interesa todo: cómo es el río, cuál es su anchura, cual es la velocidad de la corriente (“consumo de agua”), cual es la superficie del corte transversal del lecho (“corte vivo”) y cuál es la presión del agua bajo las orillas. Todo esto se puede medir con los medios que se tienen a mano. Aquí se nos presenta un problema de geometría, mas no es muy complicado.

Ahora empezaremos a solucionar este problema.

Pero antes hay que conocer algunos consejos prácticos de los ingenieros especialistas V. Yaros y I. Fiodorov, sobre cómo elegir el sitio para la futura construcción.

«"Si se trata de una pequeña central, ellos recomiendan construirla a más de 10 ó 15 kilómetros y menos de 20 ó 40 kilómetros de la fuente del río, porque al aumentar la distancia aumenta el costo de la presa y se maneja un mayor flujo de agua. Si se construye la presa a menos de 10 ó 15 kilómetros de la fuente, la central hidroeléctrica no puede suministrar la potencia necesaria, debido a que hay poco flujo de agua y no se tiene la presión suficiente. El tramo elegido del río debe tener poca profundidad, ya que eleva el costo de la obra, puesto que requiere bases más grandes".»

7. La velocidad de la corriente.

¿Cuánta agua corre por este sitio en veinticuatro horas?

El cálculo no es difícil: Dos personas pueden efectuar la medición. Una con un reloj en la mano y la otra con una boya o un objeto similar, por ejemplo, una botella bien tapada a la que se le coloca un banderín. Eligen un tramo de río rectilíneo y colocan a lo largo de río dos jalones *A* y *B* a una distancia *10 metros* entre ellos. (Figura 41).

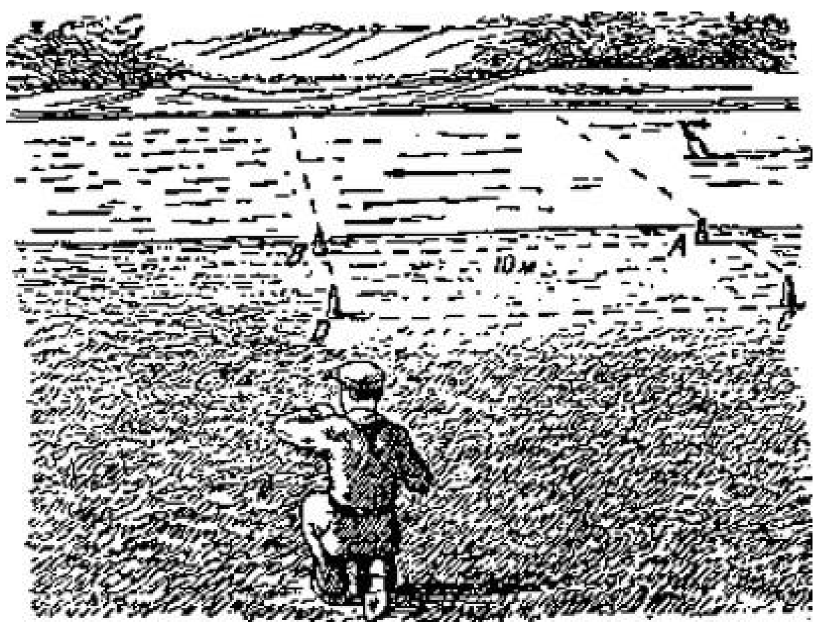


Figura 41. La medición de la velocidad al corriente de un río

Sobre las líneas, perpendiculares al *AB,* colocan otros más jalones *C* y *D.* Uno de los observadores se ubica con el reloj detrás del jalón *D.* El otro lleva la boya arriba del jalón *A*, la tira al agua, y se ubica detrás del jalón *C.* Ambos miren en la dirección de las líneas *CA* y *DB* sobre la superficie de agua. En el momento en que la boya cruza la prolongación de la línea *CA,* el primer observador levanta la mano. Con esta señal el otro observador empieza a medir el tiempo y detiene la medición cuando la boya cruza la prolongación de la línea *DB.*

Supongamos, por ejemplo, que la diferencia de tiempo fue de *20 segundos.*

Entonces, la velocidad de la corriente del río es:

10 / 20 = 0,5 metros / segundo.

Usualmente, se repiten las mediciones un par de veces, tirando la boya en puntos diferentes de la superficie del río. Luego se suman las velocidades obtenidas y se dividen entre el número de mediciones efectuadas. Esto determina la velocidad media de la superficie del río.

Las capas más profundas corren más despacio, y la velocidad media de todo el flujo *equivale a 4/5* de la velocidad superficial, en nuestro caso, es de *0,4 metros / segundo.*

Podemos encontrar la velocidad superficial de otra manera, pero es menos exacta.

Nos montamos en una lancha y navegamos un kilómetro contra la corriente (marcado en la orilla), después nos regresamos a favor de la corriente, remando con la misma fuerza.

Supongamos que recorremos los *1000 metros* contra la corriente en *18 minutos,* y a favor de la corriente, en *6 minutos.* Designando la velocidad que buscamos del río con *x*, y la velocidad de nuestro movimiento en el agua en reposo mediante *y*, formemos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1.000}{y-x} &= 18\\ \frac{1.000}{y+x} &= 6\end{aligned}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} y - x &= \frac{1.000}{18} \\ y + x &= \frac{1.000}{6} \end{aligned}\right|$$

$$2x = 110$$

$$x = 55$$

La velocidad del agua que corre sobre la superficie es *55 metros/segundo,* y la velocidad media de todo el flujo *equivale* 5/6 de la velocidad superficial, es decir, 46 *metros /segundo*.

8. Cuál es el caudal del río.

Siempre es posible, de una forma u otra, encontrar la velocidad de la corriente de un río. Un poco más complejos son los preparativos necesarios para encontrar la superficie del corte transversal del río y calcular la cantidad de agua que corre por éste. Para averiguar la superficie, del "corte vivo" del río es necesario elaborar el plano de dicho corte.

El levantamiento del corte vivo es el siguiente:

Primer método

En el mismo sitio, donde medimos el ancho del río, clavamos dos jalones en ambas orillas, sobre las márgenes del río. Después con un amigo nos montamos en una lancha y navegamos desde un jalón hasta el otro, siguiendo todo el tiempo una línea recta entre los dos jalones. El amigo debe de ser un buen remero; además, debe ser ayudado por un tercer miembro del equipo de trabajo, quien debe permanecer en la orilla, vigilando que la lancha siga en dirección correcta, y en caso de ser necesario, dar señales al remero, indicándole hacia dónde debe virar.

En el primer viaje por el río solo deberemos contar la cantidad de los golpes dados con los remos, y a partir de éstos, saber cuántos golpes de los remos se requieren para mover la lancha unos *5* ó *10 metros.*

Cuando realizamos el segundo recorrido por el río, llevamos un listón adecuado para medir distancias, y cada *5 ó 10 metros* (medidos teniendo en cuenta la cantidad de golpes de remo) se hunde el listón en el agua verticalmente hasta el fondo del río, anotando la profundidad del río en este sitio.

En esta forma podemos medir el "corte vivo" del río, siempre que este no sea muy grande; para un río muy ancho, con mucha agua, se necesitan unos métodos más complejos. Dejaremos este trabajo a los especialistas. Los aficionados eligen si realizan o no el trabajo, de acuerdo con sus sencillos recursos.

Segundo método.

Para un río estrecho y poco profundo no necesitamos una lancha. Entre los jalones se extiende perpendicularmente a la corriente, una cuerda a la que se le hace un nudo cada *metro*, y bajando con una vara la cuerda hasta el fondo, medimos la profundidad del cauce.

Cuando tomamos todas las medidas, anotamos en un papel cuadriculado el plano del corte transversal.

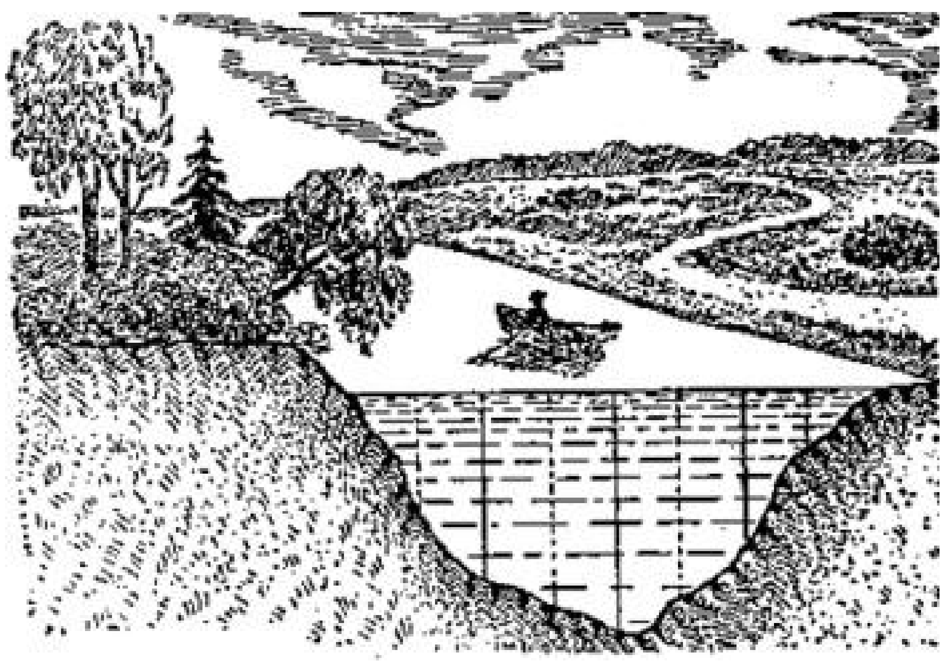


Figura 42. El "corte vivo" del río

Obtenemos una figura aproximada, como vemos en la Figura 42. Ahora podemos encontrar su superficie, dividiéndola en varios trapecios (de los cuales conocemos sus bases y sus alturas) y dos triángulos en los extremos, también de bases y alturas conocidas. Si, la escala del plano es *1:100,* obtenemos el resultado en metros cuadrados.

Ahora tenemos los todos datos para calcular el caudal de agua. Es evidente, que a través del corte vivo corre un volumen de agua cada un segundo, igual al volumen de un prisma, donde la base es el corte transversal, y la altura, la velocidad media de la corriente.

Si, por ejemplo, la velocidad media de la corriente del río es de *0,4 metros /segundo,* y digamos que la superficie del corte vivo tiene *3,5 metros cuadrados,* entonces constantemente cruzan a través del corte:

$$3{,}5 \times 0{,}4 = 1{,}4 \text{ metros cúbicos de agua por segundo},$$

ó 1,4 toneladas (*1* m^3 de agua potable pesa *1 tonelada = 1.000 kilogramos).*

En una hora:

$$1{,}4 \times 3.600 = 5.040\ m^3$$

en el periodo de veinticuatro horas:

$$5.040 \times 24 = 120.960\ m^3$$

¡Más de cien mil metros cúbicos diariamente!

Figura 43. Central hidroeléctrica de un artel agrícola de Burmakin; genera 80 kilovatios de potencia y suministra energía a siete koljoces.

En tal caso el río con el corte vivo de 3,5 metros^2 es un río pequeño: él puede tener, digamos, 3,5 metros de anchura y de 1 metro de profundidad, se puede vadear, pero tiene guardada mucha energía capaz de convertirse en electricidad.

¿Cuánta energía puede generar el agua de un río que corre como el Neva, en un período de veinticuatro horas, si a través de su corte vivo pasan 3.300 metros^3 de agua?

Este valor corresponde al “flujo medio” de agua del río Neva de San Petersburgo. “El flujo medio” de agua del río Dnepro de Kiev es de 700 metros^3.

Los jóvenes prospectores y los futuros constructores de centrales hidroeléctricas necesitan conocer la presión del agua sobre las orillas del río, para saber qué caída de agua deberá tener la presa (Figura 43).

Por eso colocan dos estacas con una separación de *5 á 10 metros* entre sí, en una de las márgenes del río, habitualmente sobre una línea perpendicular a la corriente del río. Luego se colocan sobre esta línea, pequeños piquetes en los sitios de fractura del litoral (Figura 44).

Con ayuda de una regla se mide la parte saliente de un piquete sobre otro y la distancia entre ellos.

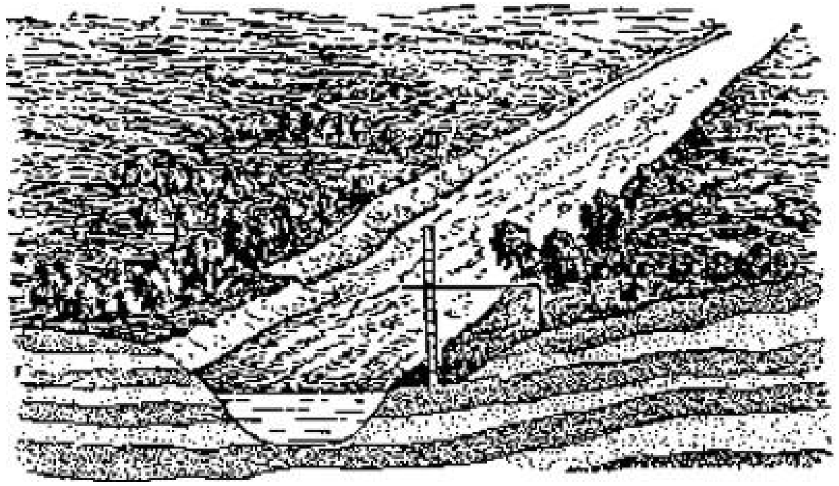


Figura 44. La medición del corte vertical de las orillas

Con los datos obtenidos se elabora el plano del perfil del litoral análogo al dibujo del perfil de cauce.

Por el perfil del litoral podemos calcular la presión.

Supongamos que la presa sube el nivel de agua hasta *2,5 metros.* En este caso podemos calcular la potencia que puede generar la central hidroeléctrica.

Para esto los ingenieros electricistas nos recomiendan multiplicar *1,4* (“caudal” del río, en metros cúbicos por segundo) por *2,5* (altura del nivel del agua) y por *6* (coeficiente de pérdida de energía en las máquinas). Tenemos el resultado en kilovatios. Entonces,

$$1{,}4 \times 2{,}5 \times 6 = 21 \text{ kilovatios.}$$

Como los niveles del río cambian a lo largo del año, el caudal también varía, por esta razón, para realizar el cálculo tenemos que conocer el valor típico del caudal de agua anual.

9. La rueda de agua.

Problema

En el fondo de un río se instala una rueda provista de paletas (Figura 45). ¿En qué sentido gira la rueda, si la corriente va hacia la izquierda?

Solución

La rueda gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj. La velocidad de la corriente de las capas más profundas es menor que la velocidad de las capas superiores de la corriente, entonces, la presión sobre las paletas de arriba será mayor, que la de abajo.

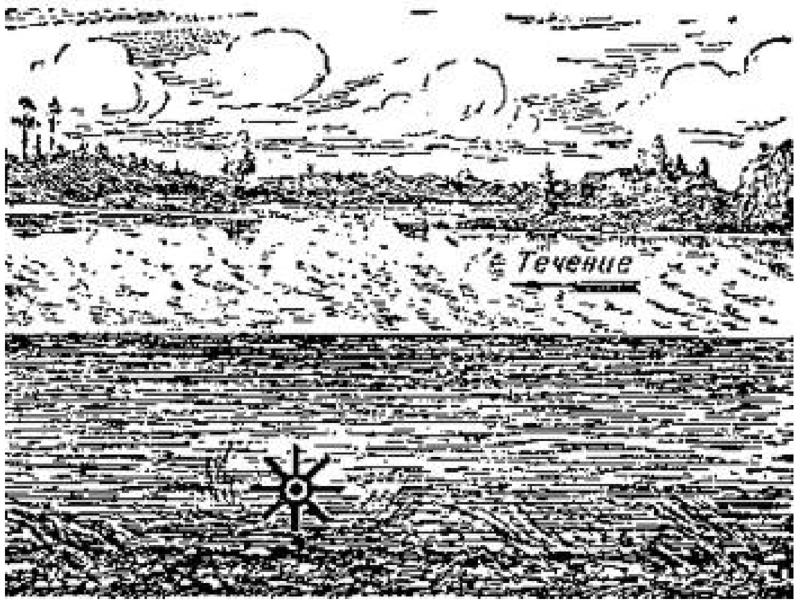


Figura 45. ¿En qué sentido gira la rueda?

10. La mancha irisada.

En un río, donde cae el agua de una fábrica, observamos unas manchas rojas.

El aceite que cae al río junto al agua de la fábrica, deja en la superficie del río estas manchas ligeras. ¿Podemos saber, de manera aproximada, el ancho de una de estas manchas?

El problema parece complicado, pero su solución no es tan difícil. Observen que nosotros no vamos a medir el ancho de la mancha. La calcularemos de manera indirecta.

Cogemos una cantidad de aceite de máquina, por ejemplo, unos *20 gr* y lo vertemos al agua, lejos de la orilla, por supuesto. Cuando la mancha tome la forma de un círculo, medimos su diámetro aproximado. Sabiendo el diámetro, encontraremos la superficie. Y como sabemos el volumen (se calcula por el peso), entonces no será difícil encontrar el ancho de dicha mancha. Prestemos atención al ejemplo.

Problema

Un solo gramo de petróleo, forman una mancha de *30 centímetros* de diámetro. ¿Cuál es el ancho de la mancha de petróleo sobre el agua? Un centímetro cúbico del petróleo pesa *0,8 gr.*

Solución

Encontraremos el volumen de la mancha, el cual, evidentemente, es igual al volumen de la muestra de petróleo. Si $1\ cm^3$ de petróleo pesa *0,8 gr,* entonces, para un gramo es $1/0,8 = 1,25\ cm^3$ ó $1.250\ mm^3$. La superficie de un círculo cuyo diámetro es de *30 centímetros,* ó *300 milímetros,* es de $70.000\ mm^2$. El ancho buscado es igual al volumen, dividido por la superficie:

$$\frac{1.250}{70.000} = 0{,}018\ \mathrm{mm}$$

Evidentemente, no es posible efectuar la medición directa con los medios habituales.

Las manchas que forman el aceite y el jabón son muy delgadas, forman capas de *0,0001 mm* y menos.

> *«"Una vez, cuenta el físico inglés Boyz en su libro "Pompas de jabón", hice esta prueba en un estanque. En la superficie del agua eché una cucharada del aceite de oliva. Inmediatamente se convirtió en una gran mancha, cuyo diámetro era de 20 a 30 metros.*
>
> *«Debido a su longitud y anchura la mancha sobre el agua tiene un tamaño mil veces mayor que su tamaño en la cuchara, pues la capa del aceite sobre el agua tiene aproximadamente una millonésima parte del ancho que tiene dentro de la cuchara, o sea unos 0,000002 milímetros."»*

11. Los círculos en el agua.

Problema

Más de una vez, por curiosidad, miramos atentamente los círculos que se forman al tirar a una piedra sobre el agua en reposo, (Figura 46). No es difícil de explicar este fenómeno de la naturaleza: la perturbación se extiende desde un punto central en todas las direcciones con la misma velocidad; por eso en cada momento la perturbación se extiende con igual intensidad por todos los puntos ubicados a igual distancia del sitio donde se presenta la perturbación, es decir, sobre una circunferencia.

¿Pero qué pasa en agua corriente? ¿Las olas que se originan al tirar una piedra tienden a formar un círculo o un óvalo?

En primer lugar, pareciera que en el agua corriente las olas deberían alargarse y tomar el sentido del río: la perturbación del agua es más veloz en el sentido en que corre esta, que en los sentidos laterales.

Por eso, las perturbaciones de la superficie del agua, formarán una línea curva larga y cerrada, pero nunca una circunferencia.

Figura 46. Los círculos sobre el agua

Realmente no es así. Al arrojar piedras a un río que corre rápidamente, podemos asegurar que se formarán olas circulares, igual que las que se forman en aguas en reposo. ¿Por qué?

Solución

La razón de esto es la siguiente. Si el agua no se mueve, las olas son circulares. ¿La corriente produce el cambio? La corriente arrastra cada punto de la ola en la dirección que indican las flechas (Imagen izquierda de la Figura 47), además, todos los puntos se mueven en forma paralela con la misma velocidad, es decir que recorren la misma distancia.

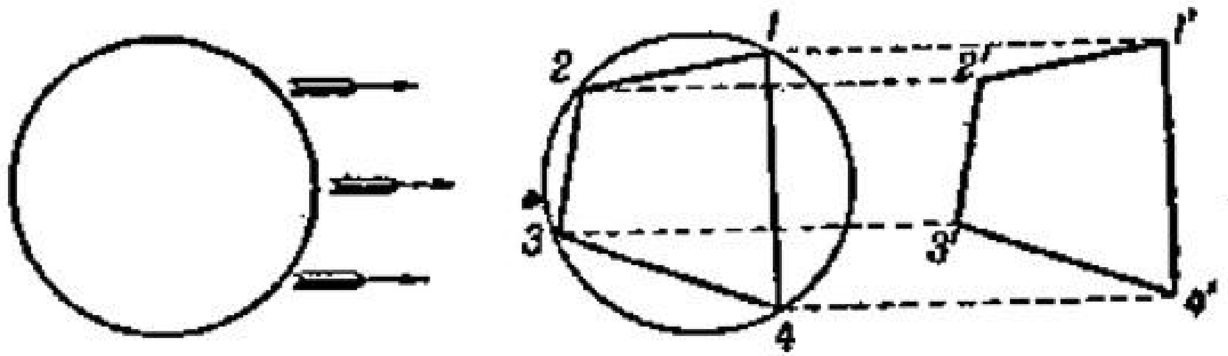


Figura 47. La corriente de agua no varía la forma de las olas

“El desplazamiento paralelo” no cambia la forma de la figura. Exactamente, al final del desplazamiento el punto *1* (Imagen derecha de la Figura 47) se mueve hasta el punto *1'*, el punto *2* se mueve hasta el punto *2',* y etc.; el tetrágono *1 2 3 4* se mueve hasta el tetrágono *1' 2' 3' 4',* ambas figuras son idénticas, como podemos ver, toman las formas de los dos paralelogramos, *1 2* y *2' 1', 2 3* y *3' 2', 3 4* y *4' 3'*, y etc. Tomando en la circunferencia más de cuatro puntos, obtenemos polígonos iguales; por fin, cogiendo una cantidad de infinita de puntos, obtenemos una circunferencia.

Por eso el movimiento del agua no cambia la forma de la ola, en el agua corriente ellas forman círculos. La única diferencia es, que en la superficie del agua en reposo los círculos no se mueven (teniendo en cuenta que ellas divergen entre sí desde su centro); en la superficie de un río los círculos se mueven junto a su centro y con la misma velocidad de la corriente.

12. Un obús imaginario.

Problema

Empezaremos con un problema que parece no tener ninguna relación con todo que estamos investigando, pero como veremos después, va en la misma dirección.

Imaginemos una bomba lanzada por un obús, primero asciende; luego comienza a descender y de repente explota; la metralla vuela por todos partes.

Las esquirlas se esparcen con la misma fuerza, sin encontrar ninguna resistencia en el aire. Pregunta: ¿Qué figura formará la metralla antes de caer al suelo, un segundo después de la explosión?

Solución

El problema es semejante al de los círculos en el agua, estudiado anteriormente. Pareciera que la metralla tiende a formar una figura alargada verticalmente, en el sentido de la caída; porque la metralla, lanzada hacia arriba, vuela más despacio que la lanzada hacia abajo.

No es difícil de demostrar que las esquirlas de nuestra supuesta metralla formarán una esfera. Imaginemos que la gravitación no existe durante un segundo; entonces, por supuesto, durante un segundo todas las esquirlas se alejarán a igual distancia del centro de la explosión, es decir, que formarán una superficie esférica. Y si tenemos en cuenta la fuerza de atracción de la gravedad, ésta hará descender las esquirlas; y como sabemos, que todos los cuerpos bajan con la misma velocidad[10], entonces, las esquirlas deberán bajar la misma distancia durante un segundo, y además de ello, se moverán siguiendo líneas paralelas. Por eso es que conservan la forma de una esfera.

Así es que la metralla del obús imaginario deberá formar una esfera, que parecerá hincharse, a medida que desciendan las esquirlas en caída libre.

13. Las olas de la quilla.

Volvemos otra vez al río. Parados sobre un puente, observamos con atención el rastro dejado por un barco. Vamos a ver como se separan las dos crestas de las olas, de la proa (Figura 48).

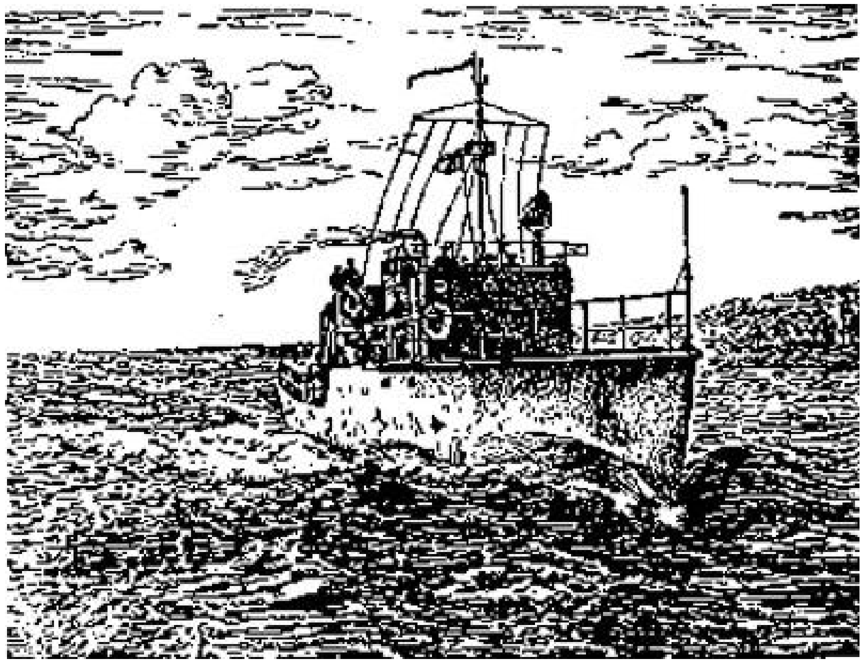


Figura 48. La ola de la quilla

¿Por qué aparecen? ¿Y por qué cuando el ángulo entre ellas es más agudo, más rápido va el barco?

Para dejar en claro la causa de la aparición de las dos crestas, volvemos otra vez a los círculos divergentes en la superficie del agua, que aparecen al lanzar pedruscos al agua.

Cuando tiramos al agua los pedruscos con cierto intervalo entre ellos, podemos observar en la superficie unos círculos de tamaños diferentes; además de esto, cada pedrusco lanzado forma un círculo más pequeño que el anterior. Y si tiramos los pedruscos en línea recta, el conjunto de círculos así formados se asemejan a las olas delante de la proa. Mientras más pequeños sean los pedruscos que tiramos y mayor la frecuencia con la que los lanzamos, mayor será la semejanza. Si hundimos un palito en el agua y lo llevamos luego a la superficie, sustituimos la caída periódica de pedruscos por algo continuo y podemos reproducir la ola que vemos delante de la proa del barco.

Hay que agregar, para aclarar lo antedicho, que al hundirse la proa del barco en el agua, se forma en todo momento la misma ola circular que se forma al lanzar una piedra.

A medida que el círculo aumenta, el barco avanza y forma otra ola circular, detrás de la cual viene una tercera, y así sucesivamente. En lugar de formarse círculos periódicamente debido a los pedruscos que caen al agua, se forman continuamente, tal como podemos ver en la Figura 49.

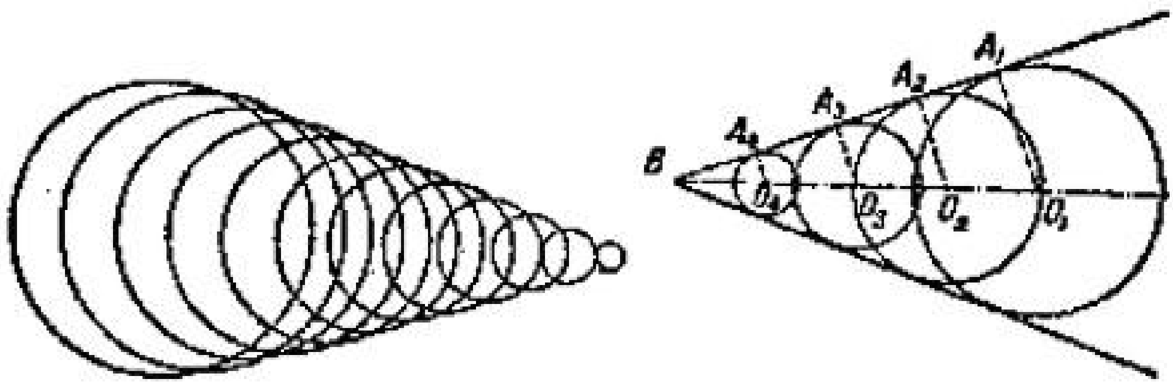


Figura 49. Apariencia de la ola de la quilla.

Al encontrarse las crestas de dos olas vecinas, se rompen una contra otra, exceptuando dos puntos externos de cada circunferencia. Al unir estos puntos exteriores se obtienen las dos crestas continuas, en dirección de las tangentes exteriores a todas las olas circulares (Imagen derecha de la Figura 49).

Así es como aparecen las crestas, las que los vemos detrás del barco, y detrás del cualquier cuerpo, moviéndose sobre la superficie de agua.

De aquí se deduce que solo es posible este fenómeno cuando el cuerpo se mueve *con mayor rapidez* que las olas en el agua. Si movemos lentamente el palito sobre el agua, no podemos observar las crestas: Las olas circulares se formarán una dentro de otra y no será posible trazar las tangentes a ellas.

También podemos observar las crestas divergentes en otro caso, cuando el agua corre frente a un cuerpo en reposo. Si la corriente del río es muy rápida, aparecen crestas en el agua, asemejándose a los pilares de un puente. Además se observa con mayor claridad este tipo de olas que la que deja el barco, puesto que no las perturba el movimiento de la hélice.

Aclarado este fenómeno geométrico, probamos a resolver otro problema.

Problema

¿De qué depende la amplitud angular entre ambas ramas de la ola de la quilla de un barco?

Solución

Trazamos radios desde el centro de las olas circulares (Imagen derecha de la Figura 49) hasta los puntos correspondientes a la cresta rectilínea, es decir, hasta los puntos tangentes a todos los círculos. Es fácil comprender, que *OB* es el camino que deja el barco durante un tiempo, y *OA,* la distancia hasta la cual se extiende la perturbación en el mismo lapso de tiempo.

La razón *OA/OB,* es el seno del ángulo *OBA,* y al mismo tiempo es la razón entre las velocidades de la perturbación y la del barco. Entonces, el ángulo *B* entre las crestas, es el doble del ángulo cuyo seno es igual a la razón entre la velocidad de desplazamiento de las dos olas circulares y la velocidad del barco.

La magnitud de la velocidad de las olas circulares en el agua, es aproximadamente igual para todos los barcos; por eso el ángulo de la divergencia entre las crestas de las olas de la quilla, depende principalmente de la velocidad del barco: el seno del ángulo medio casi siempre es proporcional a dicha velocidad. Y, recíprocamente, por el tamaño del ángulo podemos determinar cuántas veces excede la velocidad del barco a la velocidad de las olas. Si por ejemplo, el ángulo entre las ramas de una ola de la quilla es de *30°,* como ocurre en la mayoría de los buques, entonces, el seno de su ángulo medio (*seno 15°)* será *0,26;* es decir, que la velocidad del barco excede a la velocidad de las olas circulares en *1/0,26*, o sea unas cuatro veces.

14. La velocidad de los proyectiles.

Problema

En el aire se presentan olas similares a las que acabamos de discutir, cuando se dispara una bala o un proyectil de artillería.

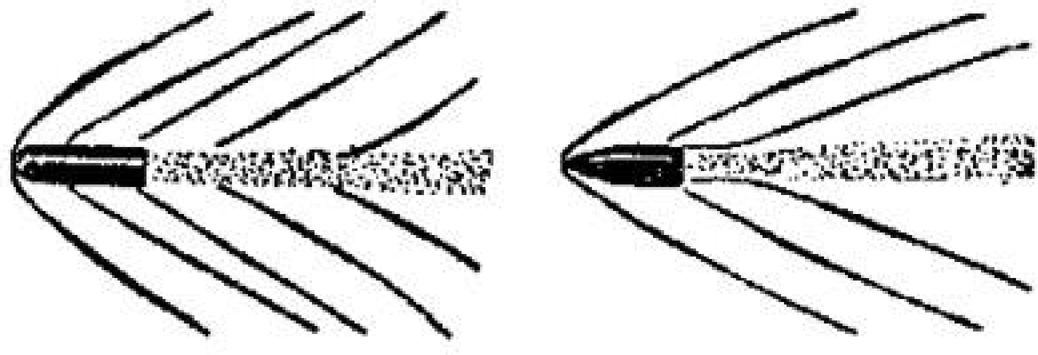


Figura 50. La ola de la cabeza en el aire, creada por un proyectil volado.

Existen muchas formas de fotografiar un proyectil volando; en la Figura 50 se muestran dos proyectiles que se mueven con diferente rapidez. En ambos dibujos claramente podemos ver lo que nos interesa a nosotros “las olas de la cabeza” (como se les llama en estos casos).

Se asemejan a las olas de la quilla de un barco.

Y aquí se utilizan las mismas proporciones geométricas: el seno del ángulo medio de la separación de las olas de la cabeza, es igual a la razón entre la velocidad de la perturbación y la velocidad del proyectil en vuelo. Pero la perturbación se transmite en el aire con una velocidad cercana a la del sonido, *330 metros/segundo.* Con base en la fotografía de un proyectil en vuelo, se puede hallar fácilmente su velocidad aproximada. ¿Cómo podemos encontrar la velocidad de las olas de la cabeza de los dos proyectiles de la imagen antes mostrada?

Medimos el ángulo de separación entre las dos ramas de la ola de la cabeza en la Figura 50.

El ángulo del primer proyectil mide unos *80°*, el ángulo del otro mide unos *55°*. Sus ángulos medios miden *40°* y *27½°* respectivamente.

El *seno 40° = 0,64, seno 27½° = 0,46.* Por lo tanto, la velocidad de la perturbación de la ola en el aire, *330 m,* es en el primer caso *0,64* de la velocidad del vuelo, y en el otro *0,46*.

De aquí se desprende que la velocidad del primer proyectil es:

$$\frac{330}{0,64} = 520 \text{ m/s}$$

y del segundo es:

$$\frac{330}{0,46} = 720 \text{ m/s}$$

Como vemos, mediante razones geométricas bastante simples, además de la ayuda de la física, podemos resolver el problema, aparentemente muy complicado: a partir de la foto de un proyectil en vuelo podemos encontrar su velocidad en ese instante. (Este cálculo es aproximado, por supuesto, porque no se han tenido en cuenta algunas condiciones).

Problema

Quienes deseen calcular la velocidad de unas balas, aquí tienen las imágenes de tres proyectiles, volando a diferente velocidad (Figura 51).

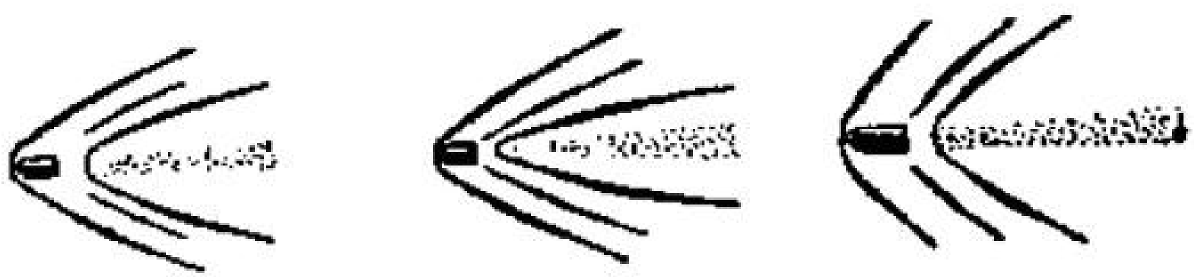


Figura 51. ¿Cómo encontrar la velocidad de los proyectiles?

15. La profundidad de un estanque.

Los círculos sobre la superficie de agua desviaron nuestra atención hacia un asunto de artillería. Regresamos otra vez junto al río y examinaremos un problema hindú sobre una flor.

Data de viejos tiempos una tradición india, proponer problemas en verso.

Problema

Sobre un lago tranquilo,
De tamaño de medio pie,
se levantó una maravillosa flor.
Creció solita, sin familia.
Y de repente vino aquel viento fuerte
Que la arrancó, y se la llevó.
No, no existe más flor,
Pero no, la encontró un pescador
durante los primeros días de primavera
A dos pies del sitio natal
Así que tengo un problema:
¿Cuál es del lago la profundidad?

Solución

Indicaremos (Figura 52) la profundidad buscada *CD*, del estanque, con x, aplicando luego el teorema de Pitágoras, tenemos:

$$BD^2 - x^2 = BC^2,$$

De donde:

$$x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - 2$$

$$x^2 = x^2 + x + \frac{1}{4} - 4$$

$$x = 3\frac{1}{4}$$

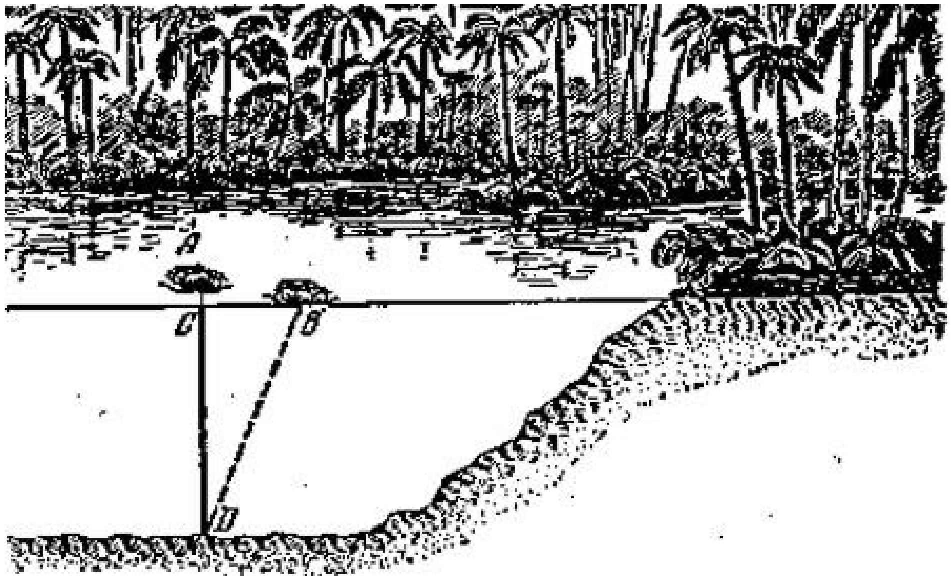


Figura 52. El problema hindú sobre la flor de loto

Si encontramos una planta sobre el agua cerca de la orilla de un río o de un lago no muy profundo, ésta nos proporciona información para resolver un problema similar: sin ningún instrumento, sin mojarnos los pies ni las manos, podemos encontrar en ese punto la profundidad del lago.

16. El cielo estrellado en el río.

Al caer la noche, el río tiene para nosotros un problema. Recuerdo como describe Gogol al Dnepro:

> *«"Las estrellas brillan encima del mundo y todas juntas se reflejan en el Dnepro. A todas ellas tiene el Dnepro dentro de su seno: Ninguna puede escaparse, quizás, cuando se apague en el cielo."»*

Ciertamente, cuando estás en la orilla de un río ancho parece que toda la cúpula de estrellas se reflejara en el espejo del agua. ¿En realidad, es así? ¿Se "reflejan" todas las estrellas en el río?

Haremos un plano (Figura 53):

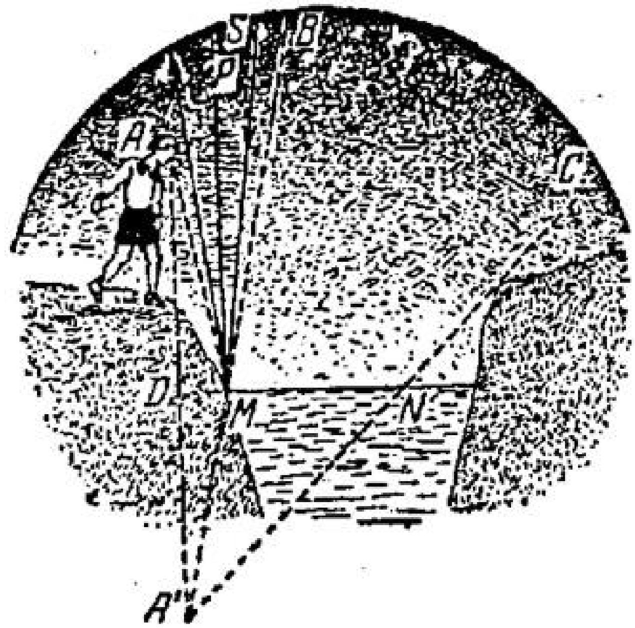


Figura 53. Porción del cielo estrellado cuyas estrellas podemos ver en el agua. A es el ojo del observador, ubicado en la orilla del río, cerca de un lugar cortado abruptamente, MN – es la superficie del agua.

¿Cuáles estrellas verá en el agua el observador, desde el punto *A*?

Para contestar a esta pregunta, trazamos desde el punto *A* una perpendicular *AD* a la recta *MN* y la prolongamos hasta el punto *A'.* Si el ojo del observador está en el punto *A'*, podrá ver solamente la porción de firmamento que se encuentra dentro del ángulo *BA'C.*

El observador tiene en *A'* el mismo campo visual que en el punto *A*. No puede ver las estrellas que están fuera de este ángulo; los rayos reflejados pasan fuera del campo visual de sus ojos.

¿Cómo podemos estar seguros de lo dicho? ¿Cómo demostrar, por ejemplo, que nuestro observador no puede ver en el espejo del río, la estrella *S*, que está fuera del ángulo *BA'C*? Sigamos su rayo, cae cerca de la orilla en el punto *M;* se refleja, de acuerdo a las leyes de la Física, en un ángulo igual al ángulo de incidencia *SMP* y, por lo tanto, menor que el ángulo *PMA* (se puede demostrar con facilidad, aprovechando la igualdad de los triángulos *ADM* y *A'DM*); entonces, el rayo reflejado no pasará por el punto *A*, y por ende, los rayos de la estrella *S*, reflejados por encima del punto *M*, no pasarán por los ojos del observador.

Entonces, pierde vigencia la descripción de Gogol: En el Dnepro no se reflejan todas las estrellas, incluso, tal vez, menos de la mitad del cielo estrellado.

Figura 54. En un río estrecho con orillas bajas, se puede ver el firmamento en el espejo del agua del río

Además, lo curioso es un río ancho no se puede ver una gran extensión del cielo estrellado. En un río más estrecho y con orillas bajas podemos observar casi la mitad del cielo (es decir, mucho más que en un río ancho), sin inclinarnos cerca del agua.

Es fácil comprobar este asunto, basta con trazar el campo visual. (Figura 54)

17. Un camino a través del río.

Problema

Entre los puntos *A* y *B* pasa un río (o un canal) cuyas orillas están más o menos paralelas (Figura 55), necesitamos construir un puente a través del río, que forme un ángulo recto con sus orillas. ¿Dónde tenemos que elegir el sitio para construir el puente, de modo tal que el camino desde *A* hasta el *B* sea lo más corto posible?

Figura 55. ¿Dónde debemos construir el puente para que el camino sea lo más corto posible?

Solución

Trazamos una línea recta por el punto *A* (Figura 56), perpendicular a la dirección del río, y marcamos desde *A* el segmento *AC*, igual al ancho del río, unimos *C* con *B.* Necesitamos construir el puente en el punto *D*, para tener el camino *más* corto desde *A* hasta *B*.

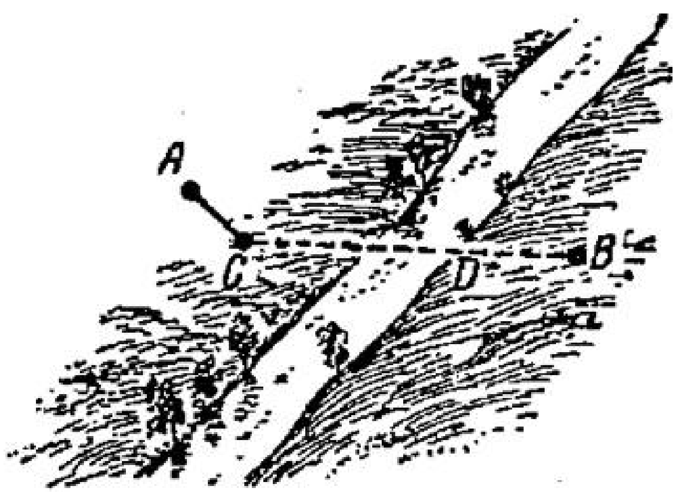


Figura 56. El sitio elegido para la construcción forma un ángulo recto con las orillas del río.

Realmente, al construir el puente *DE* (Figura 57) y unir el punto *E* con el punto *A,* obtenemos el camino *AEDB,* donde el segmento *AE* es paralelo al segmento *CD* (*AEDC,* es un paralelogramo, por lo tanto, los lados opuestos *AC* y *ED* son iguales y paralelos.) Por eso, el camino *AEDB* tiene la misma longitud del camino *ACB.*

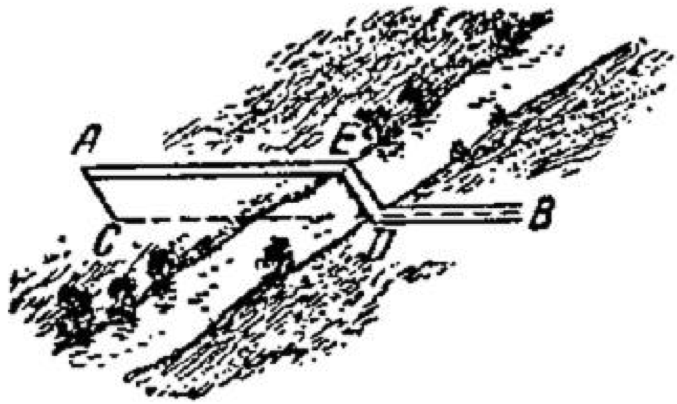


Figura 57. El puente había construido

Es fácil demostrar que el cualquier otro camino será más largo. Supongamos que existiera otro camino *AMNB* (Figura 58) más corto que *AEDB,* es decir, más corto que *ACB.* Uniendo *C* con *N* vemos que *CN* es igual *AM.* Entonces, se tiene que el camino:

AMNB = ACNB.

Pero *CNB,* evidentemente, es mayor que *CB;* entonces, *ACNB* es mayor que *ACB,* y por lo tanto, mayor que *AEDB.* Así vemos que el camino *AMNB* en lugar de ser más corto, es más largo que el camino *AEDB.*

Este razonamiento se aplica a cualquier ubicación del puente, siempre que coincida con *CD;* o sea que, el camino *AEDB* realmente es el más corto.

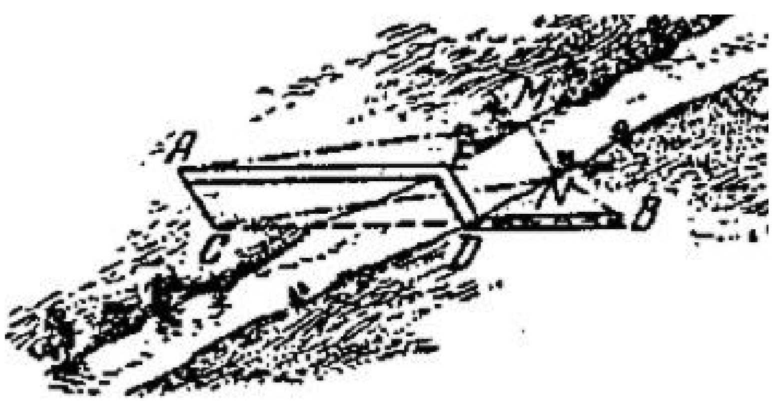


Figura 58. El camino AEDB – realmente es el más corto

18. Construir dos puentes.

Problema

Probemos imaginar un caso más complicado, cuando necesitamos encontrar el camino más corto desde *A* hasta *B* a través del río, pero ahora cruzando doblemente el río bajo ángulo recto sobre las orillas (Figura 59) ¿En qué sitios tenemos que construir los puentes?

Solución

Desde el punto *A* (Figura 59, a la derecha) trazamos el segmento *AC,* igual al ancho del río en el primera cruce, perpendicular a sus orillas. Desde el punto *B* trazamos el segmento *BO* , igual al ancho del río en el segundo cruce, también perpendicular a sus orillas. Unimos los puntos *C* y *D*. En el punto *E* se construye el puente *EF,* en el punto *G,* el puente *GH.* El camino *AFEGHB* es el camino buscado más corto desde el *A* hasta el *B.*

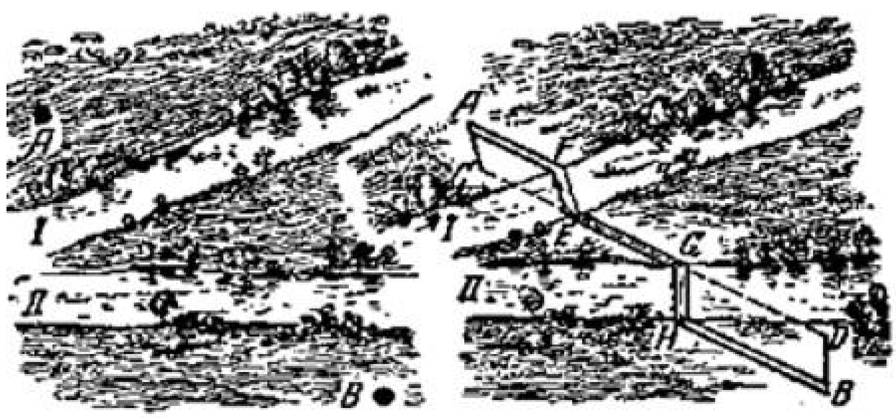


Figura 59. Los dos puentes construidos

Como puede ver el lector, se razona en forma semejante al ejemplo anterior.

Capítulo 3
Geometría a Campo Raso

Contenido:

1. *Las medidas visuales de la Luna.*
2. *El ángulo visual.*
3. *Un plato y la Luna.*
4. *La Luna y las monedas.*
5. *Las fotos sensacionales.*
6. *El transportador corporal.*
7. *Báculo de Yakov.*
8. *Goniómetro de rastrillo.*
9. *El ángulo del artillero.*
10. *La agudeza de nuestra vista.*
11. *La Luna y las estrellas sobre el horizonte.*
12. *¿Cuál es la longitud de la sombra lunar y de la sombra de estratóstato?*
13. *¿A qué altura están las nubes?*
14. *La altura de una torre en una foto.*
15. *Ejercicios adicionales.*

1. Las medidas visuales de la Luna.

¿De qué tamaño te parece la Luna llena? De cada persona podemos recibir un par de respuestas diferentes sobre esta pregunta.

La Luna es del tamaño de "un plato", de "una manzana", de "la cara de una persona", etc. Las opiniones son bastante incipientes y poco definidas, lo que quiere decir que la gente no entiende el contexto de la pregunta.

La respuesta correcta a esta pregunta tan habitual la puede dar aquella persona que conoce el tamaño "aparente" o "visible" del objeto. Pero nadie sospecha, que aquí se trata del valor del ángulo que se forma entre dos líneas rectas, trazadas desde el ojo hasta los puntos extremos del objeto observado. Se le llama "ángulo visual", o "tamaño angular del objeto" (Figura 60).

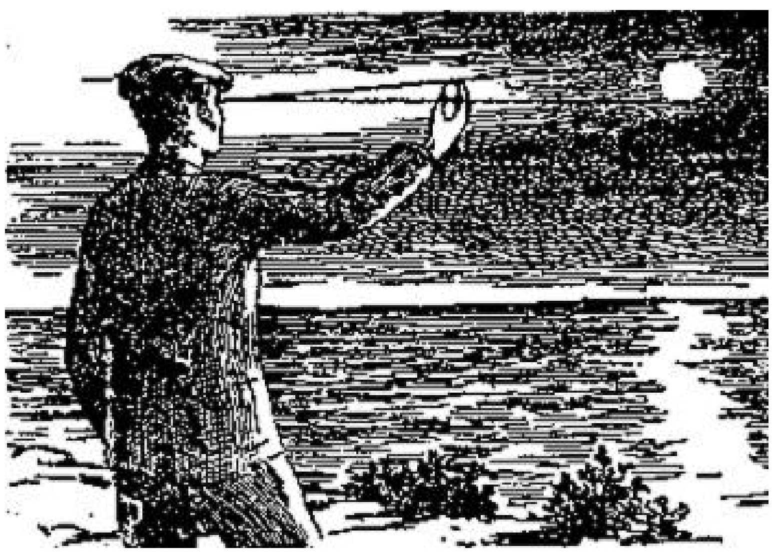


Figura 60. Qué es el ángulo visual

Cuando se evalúa el tamaño aparente de Luna en el cielo, comparándolo con el tamaño de un plato, o el de una manzana, etc., las respuestas carecen de sentido y significan que la Luna se ve bajo el mismo ángulo visual que un plato o una manzana. Pero esta indicación por sí misma no es suficiente: observamos un plato o una manzana bajo ángulos distintos según su alejamiento: cerca, con un ángulo grande, lejos, con uno más pequeño. Para ser claros, debemos indicar desde qué distancia observamos un plato o una manzana.

Comparar los tamaños de los objetos lejanos con el tamaño de otros, sin especificar la distancia, es el estilo literario usado por los escritores clásicos. Esta descripción impresiona gracias al acercamiento a la psicología de la mayoría de las personas, pero no produce ninguna imagen clara. Un buen ejemplo es del "Rey Lear" de William Shakespeare; Edgar describe lo que ve desde un escarpado muy alto sobre del mar:

¡Qué miedo!
¡Me mareo! Está muy abajo para dirigir sus miradas...
Chovas y cuervos, rizando por el medio,
Parecen poco probable que sean tan grandes
Abajo son como moscas,
Una persona colgada, cogiendo las hierbas del mar...
¡Qué terrible oficio!
A mí no me parece más grande que su cabeza.
Los pescadores, andan por la marina,
Como ratones; y aquel barco grande
Ha disminuido al tamaño de una lancha;
La lancha, un punto flotante,
Demasiada pequeña para apreciarla a simple vista...

Estas comparaciones darían una idea más clara sobre la distancia, si estuvieran acompañados con las indicaciones sobre el grado de alejamiento de los objetos a comparar (las moscas, la cabeza de una persona, los ratones, la lancha...). Lo mismo ocurre al comparar el tamaño de Luna con un plato o una manzana, necesitamos indicaciones sobre que tan alejados están los objetos del ojo del observador.

La distancia es tan grande como pensamos. Sosteniendo la manzana con el brazo estirado, tapamos no solo la Luna si no también parte del cielo. Si colgamos la manzana de un hilo y alejándonos poco a poco hacia atrás, hasta que no tape completamente el disco de la Luna: la manzana y la Luna van a tener para nosotros, en esta posición, el mismo tamaño visual. Midiendo la distancia desde el ojo hasta manzana, nos daremos cuenta que es de unos *10 metros.* ¡Así que tenemos que alejar la manzana, para que se aprecie de verdad, del mismo tamaño de la Luna en el cielo! Si en lugar de la manzana, empleamos un plato, debemos alejarnos de él unos *30 pasos.*

Parecerá increíble lo dicho acá para quien lo escucha por vez primera, además se deduce que nosotros observamos la Luna con un ángulo visual de solo medio grado.

Casi no se requiere valorar ángulos en la vida diaria, y por eso, la mayoría de gente no tiene una imagen definida del valor de los ángulos, por ejemplo, ángulos de *1°*, de *2°* ó de *5°* (sin incluir a los agrimensores y otros especialistas que necesitan medir ángulos en la práctica). Solo calculamos acertadamente los ángulos grandes.

Si comparamos con los punteros del reloj, todos conocerán los ángulos de *90°,* de *60°,* de *30°,* de *120°* y de *150°*, los cuales acostumbramos verlos cada día en la esfera del reloj (a las 3.00, a la 1.00, a las 2.00, a las 4.00, a las 5.00), hasta sin numeración podemos calcular la hora, con solo mirar el ángulo entre las agujas. Pero habitualmente miramos los objetos pequeños, bajo un ángulo demasiado pequeño y por eso no los sabemos apreciar a simple vista.

2. El ángulo visual

Deseando encontrar un ejemplo práctico para un ángulo de un grado, calcularemos cuanto debe de alejarse una persona de estatura mediana (1,7 metros), para aparecer bajo este ángulo. Traduciendo lo dicho a la lengua geométrica, diremos que necesitamos encontrar el radio de una circunferencia, cuyo arco de *1° equivalga a 1,7 metros* (mejor dicho la cuerda, pero para los ángulos pequeños la diferencia entre el arco y la cuerda es insignificante).

Razonamos así: Si el arco *1°* es de *1,7 metros,* entonces, la circunferencia total, que tiene *360°,* tendrá una longitud de *1,7 × 360 = 610 metros,* el radio es *2π* veces menor que la longitud de la circunferencia; si el número *π = 3,1416,* entonces el radio, en metros, será:

$$radio = \frac{1,7 \times 360}{2\pi} = \frac{610}{2 \times 3,1416} \approx 97 \text{ metros}$$

Figura 61. A cien metros de distancia se observa la figura de una persona bajo un ángulo de 1 grado

Así pues, se observa la persona bajo un ángulo de *1°*, si entre ella y nosotros hay una distancia de unos *100 metros* (Figura 61). Si se aleja al doble de esta distancia, *200 metros*, la veremos bajo un ángulo de medio grado; si se acerca a *50 metros,* el ángulo visual aumentará hasta *2°*, etc.

No es difícil de calcular también, que veremos un palo de *1 metro* de longitud, bajo un ángulo de *1°*, a una distancia de *57 metros.*

Bajo el mismo ángulo observamos *un centímetro* a una distancia de *57 centímetros, un kilómetro* a una distancia *57 kilómetros*, etc. y por lo tanto, cualquier objeto a una distancia *57 veces* mayor que su diámetro. Si recordamos este número, *57,* entonces, podemos hacer calcular con rapidez el tamaño angular del objeto.

Por ejemplo, si deseamos saber, a qué distancia tenemos que alejar una manzana que tiene un diámetro de *9 centímetros,* para poder verla bajo un ángulo de *1°,* basta multiplicar *9 x 57 = 510 centímetros*, es decir, unos *5 metros;* al doble de esta distancia, la observaremos bajo la mitad del mismo ángulo, es decir, de medio grado, concordando con el tamaño de la Luna.

Podemos hacer lo mismo con cualquier otro objeto y calcular a qué distancia se verá del mismo tamaño que la Luna.

3. Un plato y la Luna.

Problema

¿A qué distancia tenemos que alejar un plato cuyo diámetro es de *25 centímetros,* para que el plato parezca tener el mismo tamaño que la Luna en el cielo?

Solución

25 centímetros x 57 x 2 = 28 metros.

4. La Luna y las monedas.

Problema

Queremos que hacer el mismo cálculo para una moneda (cuyo diámetro es de *25 milímetros*) o para una moneda cuyo diámetro es de *22 milímetros.*

Solución

0,025 metros x 57 x 2 = 2,9 metros

0,022 metros x 57 x 2 = 2,5 metros

Por increíble que parezca, la Luna se observa no más grande que una moneda colocada a una distancia de cuatro pasos o un lápiz ubicado a *80 centímetros*, si sostenemos el lápiz con el brazo estirado frente el disco de la Luna llena: este la ocultará completamente. ¡Y no resulta extraño, que el objeto más adecuado para comparar el tamaño aparente de la Luna, no sea un plato, ni una manzana, ni una cereza, sino un guisante o mejor aún, la cabeza de una cerilla!

Compararla con un plato o con una manzana requiere alejarlos bastante; observamos una manzana en la mano o un plato sobre la mesa diez ó veinte veces más grandes que el disco de la Luna. Y en cambio si observamos la cabeza de una cerilla, a *25 centímetros* del ojo (“la distancia visual”), la vemos bajo un ángulo de medio grado, o sea, con el mismo tamaño de la Luna.

Uno de los más curiosos engaños de la vista, para la mayoría de las personas, consiste en que en algunos días del año, el disco de la Luna crece entre 10 y 20 veces. Hay que tener presente que el tamaño aparente depende del *brillo* de la

Luna: La Luna llena se ve en el fondo del cielo más grande que los platos, las manzanas, las monedas y otros objetos que nos rodean[11].

Esta ilusión nos persigue constantemente. Incluso los pintores, distinguidos por su muy buena vista, ceden a esta ilusión colectiva y pintan en sus cuadros la Luna llena más grande de lo que debe ser. Para comprobarlo basta comparar el paisaje elaborado por un pintor, con una fotografía del mismo paisaje, confirmando así lo antedicho.

Lo que hemos expresado referente a la Luna se aplica también al Sol, un astro que observamos desde la Tierra bajo medio grado; si bien es cierto que el verdadero radio de la esfera solar es *400* veces mayor que el de la luna, está alejado de nosotros también más de *400* veces en relación a ella.

5. Las fotos sensacionales.

Para explicar la gran importancia que tiene el ángulo visual, dejaremos por un momento el tema central, la geometría a campo raso, y presentaremos un par de ejemplos acerca de la fotografía.

En el cine, evidentemente, vimos muchas catástrofes, como por ejemplo, el choque dos trenes o las escenas muy curiosas, como el auto que pasa por el fondo del mar.

Recordaremos la película "Los Niños del Capitán Grant" (obra de Julio Verne). ¡Qué impresión! ¿Verdad?

Viendo las escenas del hundimiento del barco durante la tormenta o la escena de los cocodrilos alrededor del joven que se encuentra en el pantano. Posiblemente nadie haya pensado, que las todas escenas de este tipo son rodajes verdaderos. ¿Pero cómo se obtienen?

El efecto se logra con ayuda de las siguientes imágenes. En la Figura 62, podemos ver una “catástrofe”, un tren de juguete dentro en un ambiente “ficticio”; En la Figura 63, un carro de juguete, enganchado a un hilo se mueve detrás del acuario. Este fue el “escenario”, sobre el que se rodó la película. ¿Por qué viendo estos rodajes en la pantalla, nos persigue la ilusión, nos parece que tenemos delante de nosotros un tren y un auto de verdad?

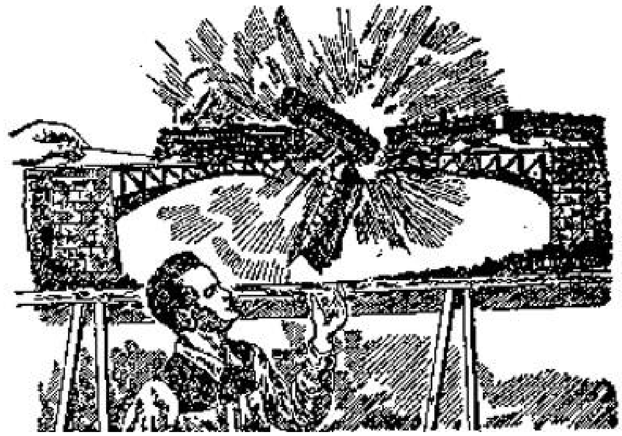


Figura 62. Preparación de la catástrofe del ferrocarril para un rodaje.

Pese a que en estas figuras notamos inmediatamente sus tamaños en miniatura, no es necesario comparar su tamaño con el de otros objetos. Por una simple razón: El tren y el carro se filmaron a una distancia muy cercana; por eso se presentan para nosotros bajo del mismo ángulo visual con el que observamos los autos y los trenes en tamaño real. Este es todo el secreto de la ilusión.

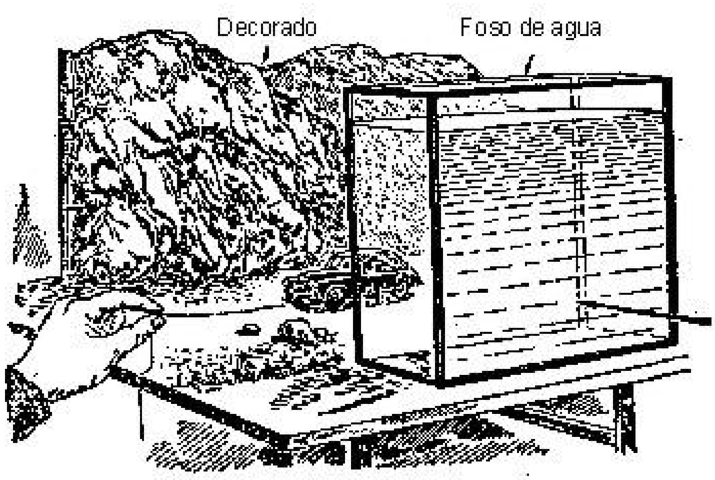


Figura 63. Un paseo por el fondo del mar.

Una imagen más, correspondiente a una escena de la película “Ruslan y Ludmila” (Figura 64). Una cabeza enorme y el Ruslan pequeño montando el caballo. La cabeza está situada en una maqueta, cerca de la cámara de filmación. Y el jinete está ubicado a una gran distancia. Ese es todo el secreto de la ilusión.

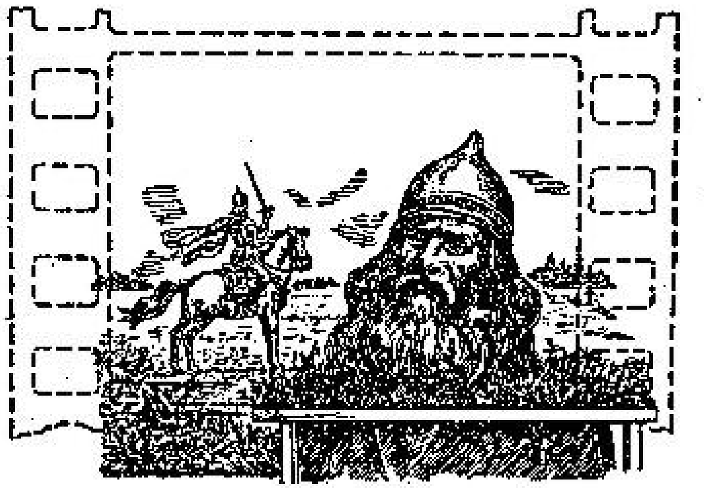


Figura 64. Una imagen de película "Ruslan y Ludmila"

La Figura 65 presenta otra imagen de la ilusión, se basa en el mismo principio. Vimos unos paisajes muy extraños, recuerden la naturaleza de los tiempos paleolíticos:

Figura 65. Un terreno misterioso, reproducido en la naturaleza

Los árboles muy raros, parecidos a los musgos gigantes, encima de ellos unas gotas de agua gigantescas, y en primer plano, un monstruo grande; parecido a un inofensivo milpiés. Dejando de lado su aspecto insólito, la imagen corresponde realmente a un terreno boscoso no muy grande bajo un ángulo visual enorme.

Nosotros jamás podemos ver los tallos de los musgos, las gotas de agua, los milpiés, etc. bajo un ángulo visual tan grande, por eso la foto nos resulta bastante extraña y desconocida. Frente a nosotros hay un paisaje, el que podemos distinguir, si lo disminuimos hasta alcanzar el tamaño de una hormiga.

Figura 66. Una montaña de nieve en la foto (a la izquierda) y en el mundo real (a la derecha).

A un lado la imagen de una de esas "montañas nevadas", que causan bastante impresión (Figura 66, a la izquierda).

Finalmente, queda claro el truco: se empleó en la foto un montículo de nieve, hecho por un creativo fotógrafo, quien realizó la toma desde una distancia bastante cercana, es decir, bajo un ángulo extremadamente grande (Figura 66, a la derecha).

6. El transportador corporal.

Construir un goniómetro es bastante fácil, más aún, cuando podemos utilizar el transportador. Pero no siempre tenemos a mano un goniómetro de fabricación casera. En esos momentos podemos aprovechar el "goniómetro corporal", que siempre está con nosotros. Son nuestros propios dedos. Para tener una idea aproximada de los ángulos visuales, tenemos que efectuar previamente algunas mediciones y cálculos.

Primero, hay que saber bajo qué ángulo visual vemos la uña del dedo índice de la mano abierta, con el brazo estirado.

Habitualmente, vemos el ancho de la uña, *1 centímetro,* a una distancia de unos *60 centímetros* desde el ojo, bajo un ángulo cercano a *1°* (realmente es ligeramente menor, porque el ángulo de *1°* corresponde a una distancia de *57 centímetros)*. Un adolescente tiene la uña más pequeña, pero también tiene el brazo y la mano más pequeños, por esta razón su ángulo visual es el mismo, o sea de *1°.*

Algunos lectores saben que debemos efectuar previamente nuestras propias mediciones y cálculos, para asegurarnos de que no haya gran diferencia entre estos resultados y los de *1°.* Si la diferencia es grande, debemos probar con otro dedo.

Sabiendo esto, tenemos a nuestra disposición una forma de medir pequeños ángulos visuales, empleando solamente las manos. Cualquier objeto lejano, que se tape la uña del dedo índice de la mano abierta, lo vemos bajo un ángulo de *1°,* y por lo tanto, apartado en *57* veces diámetro. Si la uña solo tapa la mitad del objeto, su valor angular es *2°, y* la distancia es igual a *28* veces su diámetro.

La Luna llena tapa solamente la mitad de la uña, es decir, que la vemos bajo medio grado, entonces, la distancia entre ella y nosotros es *114* veces su diámetro; ¡Es una de las mediciones astronómicas más importantes, realizada solamente con las manos!

Para ángulos más grandes utilizaremos la articulación del pulgar, teniéndole *levantado* con la mano abierta y el brazo estirado. La longitud aproximada de esta articulación en una persona mayor es de *3½ centímetros,* la distancia aproximada entre el ojo y la mano abierta, con el brazo estirado, es de *55 centímetros*. Fácilmente se calcula, que su valor angular en esta posición tiene que ser *4°.* Este medio nos permite evaluar ángulos visuales de *4°* (y también de *8°*).

Añadimos dos ángulos más, que se pueden medir con los dedos, empleando los espacios entre los dedos:

1. entre el medio y el índice, con la mayor separación posible entre ellos;
2. entre el pulgar y el índice, también separados al máximo.

Fácilmente se calcula que el primer ángulo mide entre *7°* y *8°, y* el segundo, entre *15°* y *16°.*

Durante un paseo podemos utilizar nuestro goniómetro corporal. Por ejemplo, a lo lejos vemos un vagón de mercancías, que está tapado por la mitad de articulación del pulgar con la mano abierta y el brazo estirado, quiere decir, que lo vemos bajo ángulo de unos *2°.* Como ya sabemos la longitud del vagón (*unos 6 metros)*, entonces, es fácil encontrar la distancia a la que se encuentra de nosotros:

6 x 28 ≈ *170 metros.*

Si bien es cierto que la medida es aproximada, es mejor tener un valor cercano que un valor ilógico.

Seguidamente, enseñaremos también en este libro, un método para construir ángulos rectos sobre el terreno, empleando nuestro cuerpo.

Si necesitamos trazar una perpendicular a una línea recta, por un punto dado, nos paramos en este punto mirando en la dirección de dicha línea, *sin mover la cabeza*, levantamos el brazo sobre el costado, en la dirección en la que deseamos pasar la perpendicular y abrimos ligeramente la mano. Después de levantar el pulgar de dicha mano, manteniendo estirado el brazo, giramos la cabeza hacia él y fijamos la vista en un objeto, un pedrusco, un arbusto, etc., y lo tapamos con el pulgar, mirando con el ojo apropiado (es decir, con el ojo derecho, cuando tenemos estirada la mano derecha, y el ojo izquierdo, cuando estiramos la mano izquierda).

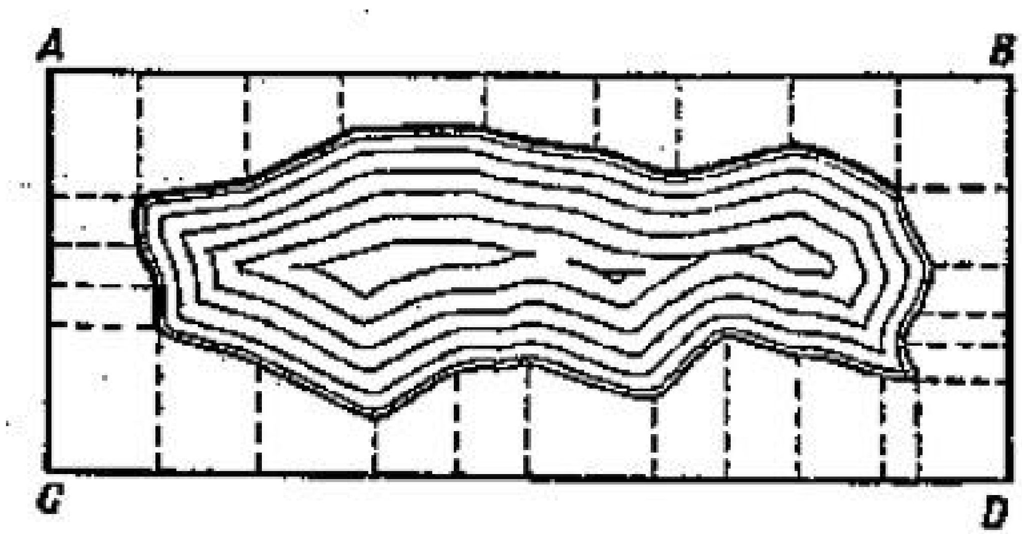


Figura 67. Trazado de un plano del lago.

Ahora solo tenemos que marcar sobre la tierra una línea recta entre el punto en que estamos, y el objeto al que apuntamos, esa es la perpendicular que buscamos. El método, no parece dar buenos resultados en comienzo, pero después ejercitarnos un poco, aprenderemos aprovechar la “escuadra corporal”.

Después de aprender a usar la “escuadra corporal”, podemos medir sin emplear otros medios, la altura angular de las estrellas sobre el horizonte, medir en grados la separación entre las estrellas, los caminos de fuego dejados por los meteoritos, etc.

Y finalmente, luego de aprender a construir los ángulos rectos, sin emplear aparato alguno, podemos trazar el plano de un terreno, tal como se ilustra en la Figura 67. Por ejemplo, para trazar el plano de un lago, se mide el rectángulo *ABCD,* también se miden las longitudes de las perpendiculares que se trazan desde los puntos escogidos en la orilla, y los trayectos de las bases a los vértices de los triángulos. Mejor dicho, cuando estamos en la situación de Robinson Crusoe, es de gran utilidad, saber usar nuestras propias manos para medir los ángulos (y con los pasos, medir las distancias).

7. Báculo de Yakov.

Si queremos tener un instrumento para medir ángulos, mejor que la “escuadra corporal” descrita anteriormente, podemos construir un instrumento bastante sencillo y muy útil, usado frecuentemente en otros tiempos por nuestros abuelos. Se conoce como "báculo de Yakov" aludiendo al nombre de su inventor, este instrumento fue empleado por los navegantes hasta el siglo XVIII (Figura 68).

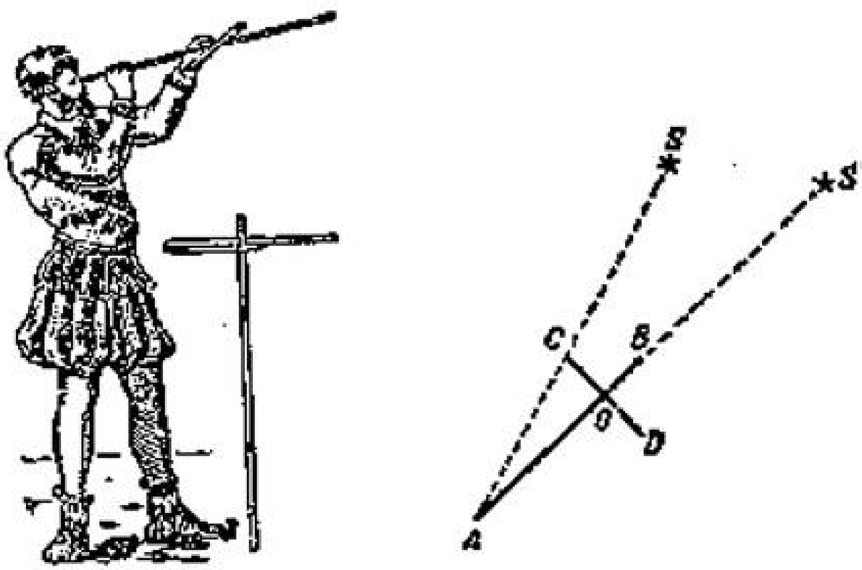


Figura 68. Báculo de Yakov y esquema de uso.

Se construye el instrumento con una regla larga *AB*, que mide entre *70* y *100 centímetros,* sobre la cual se puede deslizar una tablilla perpendicular *CD*; que tiene dos tramos iguales, *CO* y *OD*.

Si deseamos medir el trayecto angular entre las estrellas *S* y *S'* (Figura 68) con ayuda de este instrumento, entonces nos acercamos al extremo *A* de la regla (para hacer más cómoda la observación, le hacemos un agujero) y apuntamos con el extremo *B* de la regla, a la estrella *S'*; luego deslizamos la tablilla *CD* a lo largo de la regla hasta que veamos la estrella *S* sobre el extremo *C* (Figura 68). Conociendo la longitud de *CO*, solo resta medir el tramo *AO*, y luego se calcula el valor del ángulo *SAS'.* Quienes conocen de trigonometría saben que la *tangente* del ángulo buscado es igual a la razón:

$$\frac{CO}{AO}$$

Para efectuar el cálculo basta emplear la "trigonometría de campaña" que explicaremos en el capítulo quinto; calculamos la longitud de *AC* con el teorema de Pitágoras.
Después encontramos el ángulo, mediante el *seno*:

$$\frac{CO}{AC}$$

Finalmente podemos saber el ángulo buscado mediante el método gráfico: construyendo el triángulo *ACO* en el papel a una escala arbitraria, medimos el ángulo *A* con el transportador, y si no tenemos transportador, usamos el método descrito en nuestra "trigonometría de campaña" (ver el capitulo quinto).

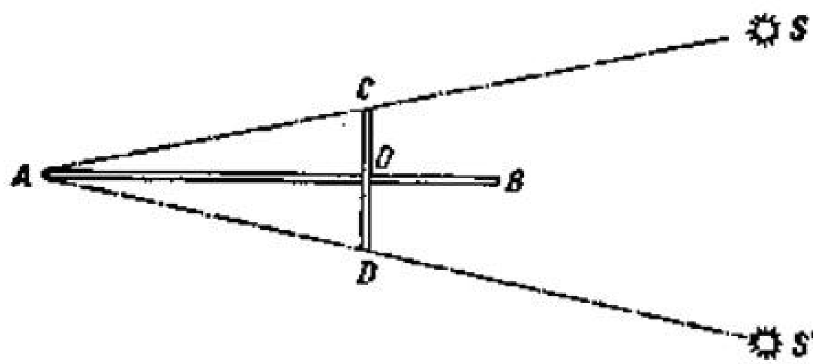


Figura 69. La medición del ángulo entre las estrellas con ayuda del báculo de Yakov.

¿Para qué necesitamos la otra mitad del travesaño? Cuando el ángulo es muy grande, y no podemos medirlo mediante el procedimiento que acabamos de explicar, entonces apuntamos a la estrella *S'* no con la regla *AB,* sino con la regla *AD*, y movemos la tablilla hasta que su extremo *C* apunte a la estrella *S* (Figura 69). Entonces resulta fácil encontrar el valor del ángulo *SAS' ya sea* calculando o trazando en un papel.
Para no realizar cálculos y dibujos después de cada medición, se recomienda efectuar estos previamente, mientras se construye el instrumento y marcar los resultados sobre la regla *AB;* luego se dirige el instrumento a las estrellas, leyendo únicamente el dato anotado, sobre el punto *O, que* es el valor del ángulo buscado.

8. Goniómetro de rastrillo.

Existe otro instrumento de fácil construcción para medir el tamaño de los ángulos, se conoce como "Goniómetro de rastrillo", porque parece realmente un rastrillo (Figura 70). Su parte principal, la tablilla, puede tener cualquier forma. En uno de sus bordes se fija un disco con un agujero; por el que mira el observador. En el borde opuesto se clavan alfileres delgados, separados entre sí 1/57 de su distancia al agujero del disco.

Nosotros ya sabemos que se observa el espacio entre cada par de alfileres bajo un ángulo de *1°.* Podemos también colocar los alfileres de otra forma, con lo cual podemos tener un resultado más exacto; sobre una pared se trazan dos rectas paralelas con un metro de separación entre ellas, nos alejamos perpendicularmente a *57 metros*, observando estas líneas a través del agujero del disco; giramos la tablilla de modo tal que cada par de alfileres adyacentes vaya cubriendo las líneas trazadas en la pared.

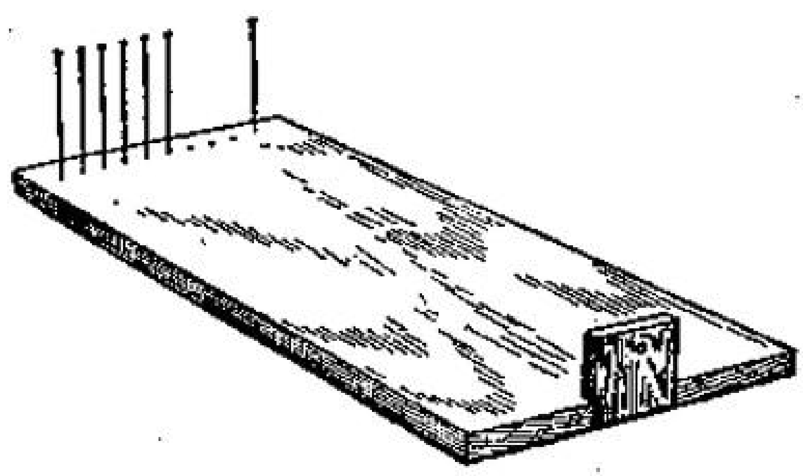


Figura 70. Goniómetro de rastrillo

Una vez clavados todos los alfileres, podemos quitar algunos de ellos, para tener ángulos de *1°,* de *3°,* de *5°.* Cualquier lector comprende como emplear este Goniómetro, sin requerir explicación alguna. Con un poco de práctica, podemos medir los ángulos visuales, mayores que ¼°, con bastante exactitud.

9. El ángulo del artillero.

Un artillero no dispara “a ciegas”.

Sabiendo la altura del punto hacia donde se dirige el tiro, mide el ángulo y calcula la trayectoria hasta dicho punto. En otras palabras, busca el ángulo que debe mover el arma, para hacer los disparos acertando al blanco.

EL artillero resuelve mentalmente estas tareas con rapidez. ¿Cómo lo hace?

Observemos la Figura 71.

AB, es un arco de circunferencia con radio *OA = D; ab*, es el arco de circunferencia con el radio *Oa = r.*

Por la semejanza entre los sectores AOB y aOb se deduce que:

$$\frac{AB}{D} = \frac{ab}{r}$$

$$AB = \frac{ab}{r} D$$

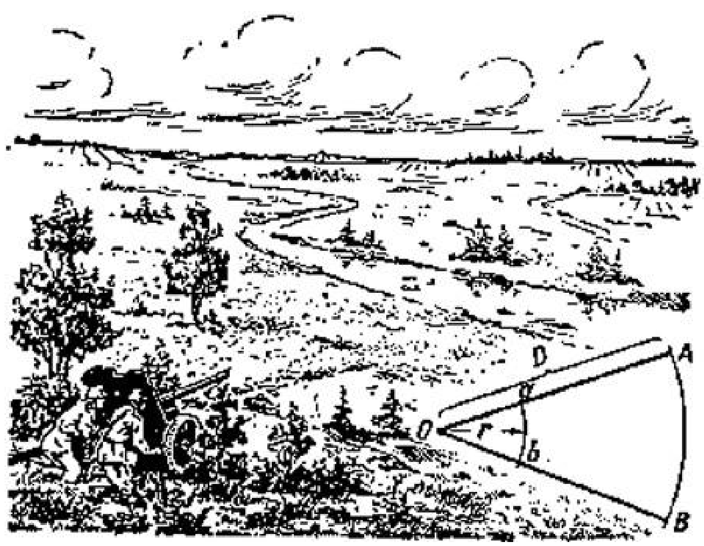


Figura 71. Esquema del transportador al artillero.

La razón:

$$\frac{ab}{r}$$

define el valor del ángulo visual *AOB;* conociendo este valor, resulta fácil encontrar *AB* si se conoce *D,* ó *D* si se conoce *AB.*

Los artilleros simplifican sus cálculos, dividiendo la circunferencia no en *360°* partes, como normalmente se hace, sino en *6.000* arcos iguales. Buscan que cada uno mida aproximadamente 1/1000 del radio de la circunferencia.

En la práctica se asume que el arco *AB* del círculo goniométrico *O* (Figura 71) equivale a una división; entonces la longitud de toda la circunferencia es:

$$2\pi r \approx 6$$

$$ab = \frac{6r}{6.000} = \frac{1}{1.000}r$$

En la artillería su nombre es “milésima”. Entonces:

$$AB = \frac{0,001r}{r}D = 0,001D$$

Para saber qué distancia *AB* sobre el terreno corresponde a una división del goniómetro (un ángulo de una “milésima”), basta con separar con una coma, los tres dígitos de la derecha.

Por teléfono o por radio entregan los datos al comandante, indicando el número de “milésimas”: pronuncian las cifras como si se tratase de un número de telefónico, por ejemplo: para indicar que el ángulo es de *105 “milésimas”* dicen:

“Uno cero cinco”, y anotan:

1 – 05;

Para indicar que el ángulo es de *8 “milésimas”* dicen: “cero cero ocho”, y anotan:

0 – 08.

Ahora sin dificultad alguna, resolveremos la tarea siguiente.

Problema

Un carro de combate ve en la mira de su arma un tanque bajo ángulo de *0 – 05.* Encontrar la distancia hasta el tanque; si tiene unos *2 metros* de altura.

Solución

- *5 divisiones del goniómetro = 2 metros,*
- *1 división de goniómetro = 2/5 = 0,4 metros.*

Como una división del goniómetro es una milésima parte de la distancia, entonces la distancia hasta el tanque será mil veces mayor a este valor, es decir:

D = 0,4 x 1000 = 400 metros.

Si en ese momento, el comandante o el soldado no tienen instrumentos goniométricos, usan la palma, los dedos u otros medios descritos anteriormente (ver "el transportador corporal"). El artillero solo debe saber su "valor", no en grados sino en "milésimas". Los "valores" aproximados de los ángulos, en "milésimas", son:

La palma de la mano	1 – 20
El dedo medio, el índice o el anular	0 – 30
Un lápiz (ancho)	0 – 12
Una cerilla (largo)	0 – 75
Una cerilla (ancho)	0 – 03

10. La agudeza de nuestra vista.

Una vez que nos acostumbremos al concepto del valor angular de un objeto, podemos comprender cómo medir la agudeza visual, y efectuar las mediciones por cuenta propia.

Dibujamos en un papel veinte líneas negras iguales, de *5 centímetros* de longitud y de *1 milímetro* de ancho, de modo que formen un cuadrado (Figura 72).

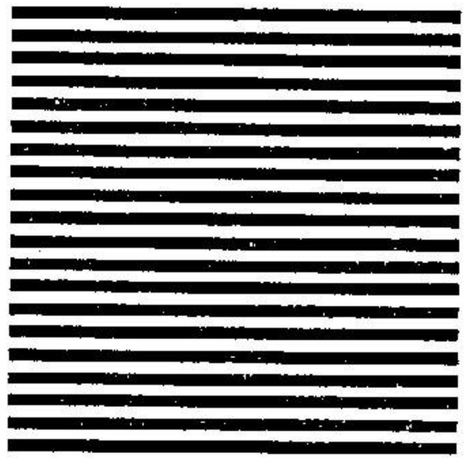


Figura 72. Para medir la agudeza visual.

Fijando el dibujo en una pared iluminada, nos alejamos hasta que las líneas se unan formando un fondo gris. Medimos la distancia y calculamos, ya sabemos cómo, el ángulo visual bajo el cual no podemos distinguir las líneas de *1 milímetro* de ancho. Si este ángulo es de *1'* (*un minuto*)*,* entonces, nuestra agudeza visual es normal; si es de *3'* (*tres minutos*)*,* la agudeza es *1/3* de lo normal, etc.

Problema

Las líneas de la Figura 72, se unen ante nuestros ojos, a *2 metros* de distancia. ¿Es normal nuestra agudeza visual?

Solución

Sabemos, que a una distancia de *57 milímetros* una línea de *1 milímetro* de ancho, se ve bajo un ángulo de *1°,* es decir, de *60'.* Por lo tanto, desde una distancia de *2000 milímetros*, se verá bajo ángulo *x,* que se calcula mediante la proporción:

$$x : 60 = 57 : 2000,$$

$$x = 1{,}7'$$

Nuestra agudeza visual es más baja de lo normal: $1:1{,}7 \approx 0{,}6$.

Generalizando

Hemos dicho que si se tiene una vista normal no se pueden distinguir entre sí las líneas de la figura anterior, si se observan con un ángulo visual inferior a *1'*. Esta aseveración también es válida para cualquier otro objeto. En general, un ojo normal no puede distinguir la forma de un objeto, si este se observa con un ángulo inferior a *1'*.

Cada objeto se convierte en un punto "bastante pequeño para la vista" (Shakespeare), es como una partícula de polvo sin tamaño ni forma. Es una de las propiedades del ojo humano: un minuto angular es el límite de su agudeza. ¿Por qué motivo? Es otra pregunta que deben tratar la física y la fisiología de la visión. Aquí solo estudiamos este fenómeno desde el punto de vista de la geometría.

Todo lo antedicho, se aplica a objetos cercanos, no muy pequeños. Nosotros no podemos distinguir la forma de las partículas de polvo que se encuentran en el aire, iluminadas por los rayos del sol. Las partículas de polvo se presentan para nosotros como unos pequeños puntillos, aunque en realidad tienen diversas formas.

Nosotros tampoco podemos distinguir los pequeños detalles de un insecto, porque lo vemos bajo un ángulo inferior a *1'.* Por la misma razón no podemos ver sin el telescopio, los detalles de la superficie de la Luna, de los planetas y de los otros astros.

Si se aumentara el límite de la vista normal, veríamos el mundo totalmente distinto.

Si, a modo de ejemplo, una persona tiene el límite de agudeza visual en *½'*, podrá observar el horizonte más profundo y más lejano. En la novela "Estepa", de A. P. Chejov, se puede leer una descripción muy bella de esta propiedad de la vista.

> *«"La vista de aquel chico, Basilio, era sorprendentemente aguda. Lo veía todo con tanto lujo de detalles, que la estepa parda y desierta, para él siempre estaba llena de vida y movimiento. Le bastaba mirar atentamente a la lejanía, para encontrar una zorra, un conejo, un ave cuellilarga o cualquier otro animal, que permanecía fuera de la vista de la gente. No resulta extraño ver un conejo alejándose rápidamente o una ave volando, eso lo pudo ver cualquier persona, que cruzara la estepa, pero no todo el mundo puede ver los animales salvajes en su vida cotidiana, cuando no están corriendo, no se esconden y no miran a su alrededor con nerviosismo. Pero Basilio veía los*

zorros jugando, los conejos limpiándose con sus patas, el ave cuellilarga desplegando sus alas, el ave esteparia caminando "sobre la punta de sus dedos".

Gracias a su agudeza visual, además del mundo que todos observaban, el muchacho tuvo su propio mundo, inalcanzable para los demás y, probablemente muy bello, por eso cuando él observaba y admiraba, resultaba muy difícil no tenerle envidia."»

Resulta extraño saber que para ocurra este cambio sorprendente basta con reducir el ángulo de *1'* aproximadamente a *½'*.

El funcionamiento mágico de los microscopios y de los telescopios se basa en el mismo fenómeno.

El objetivo de estos aparatos es variar el paso de los rayos a través del objeto observado, como si entraran al ojo con un haz divergente, el objeto aparece bajo un ángulo visual más grande. Cuando se dice que el microscopio o el telescopio amplifican la imagen *100* veces, quiere decir, que con su ayuda nosotros vemos los objetos bajo un ángulo *100* veces mayor que a simple vista. De este modo, los detalles que antes escapaban al ojo, quedan accesibles a nuestra vista. Observaremos la Luna llena bajo un ángulo de *30',* y como su diámetro es de *3.500 km,* cada punto de la Luna tendrá un diámetro de 3500/30 ≈ 120 km.

En un telescopio que amplifique la imagen *100* veces, no se podrán apreciar los objetos cuyo diámetro sea inferior a 120/100 = 1,2 km y en un telescopio que amplifique la imagen *1.000* veces, el área amplificada medirá *120 metros* de ancho. De aquí se deduce, que en la Luna se pueden ver, con el telescopio, construcciones tan grandes como nuestras zonas industriales o como nuestros barcos transatlánticos[12].

La generalización de esta regla es de gran importancia para nuestras observaciones cotidianas. De acuerdo a esta propiedad, cuando un objeto se encuentra a más de *3.400 (*es *57 x 60)* veces su diámetro, no podemos distinguir sus contornos, y estos se confunden en un punto. Por eso, no tiene ningún sentido, cuando alguien afirma que ha reconocido una persona a cuatro kilómetros de distancia, a menos que cuente con una vista fenomenal, por supuesto. Por otra parte, los ojos de una persona están separados entre sí, solo *6 centímetros (3 centímetros cada ojo),* entonces ambos se unen en un punto a una distancia de:

3 x 3.400 centímetros, es decir, a *100 metros.*

Los artilleros utilizan estos datos para calcular la distancia con los ojos. Una de sus reglas es que si los ojos de una persona que está a lo lejos, aparecen como dos puntos, entonces la distancia entre ella y el artillero no supera los *100 pasos* (*60 – 70 metros*). Nosotros hemos calculado una distancia mayor, *100 metros:* Esto quiere decir, que los militares tienen la agudeza visual un *30%* por debajo de lo normal.

Problema

¿Podrá distinguir una persona con vista normal, a un jinete situado a *10 kilómetros* de distancia, empleando unos binóculos que amplifican tres veces su imagen?

Solución

Si la altura del jinete es de *2,2 metros*, su figura convierte en un punto a una distancia de:

2,2 x 3.400 = 7 kilómetros;

Los prismáticos amplían la imagen al triple, o sea que el jinete se verá como un punto a una distancia de *21 kilómetros.* Por lo tanto, es posible distinguir al jinete, con los binóculos, a *10 kilómetros* de distancia (si el aire está bastante diáfano).

11. La Luna y las estrellas sobre el horizonte.

Hasta un distraído observador sabe que cuando aparece la Luna llena sobre el horizonte, parece tener mayor tamaño que cuando está arriba, en el firmamento. La diferencia es tan grande, que es difícil no notarla. Lo mismo ocurre con el Sol; sabemos lo grande que es el disco a la puesta y a la salida del Sol, al compararlo con su tamaño cuando está en lo alto del cielo, brillando entre las nubes.

Esta propiedad se hace más notoria en las estrellas, porque la distancia entre ellas aumenta, cuando se acercan al horizonte. Quien ha visto en invierno la constelación Orión en lo alto del cielo y cerca del horizonte, se sorprende por la gran diferencia de tamaño de la constelación en ambas posiciones.

Todo esto resulta aún más misterioso, cuando observamos la puesta y la salida de los astros; en ese momento, en lugar de estar más cerca, se encuentran más lejos (en los extremos del eje de la Tierra), tal como se aprecia en la Figura 73: Cuando un astro está en el cenit lo observamos en el punto *A,* y cuando está en el horizonte, lo observamos en los puntos *B* ó *C.* ¿Por qué la Luna, el sol y las constelaciones se ven más grandes en el horizonte?

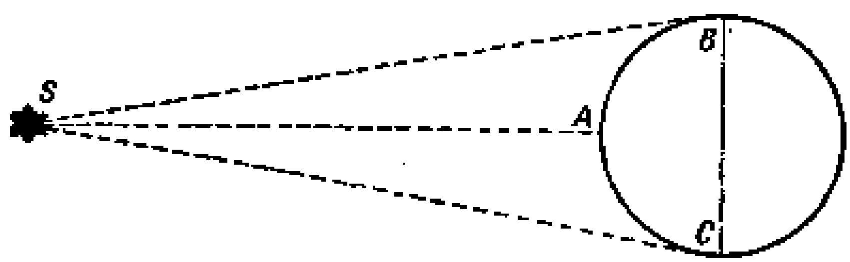


Figura 73. ¿Por qué cuando el Sol está sobre el horizonte, parece estar más distante del observador, que cuando está en el cenit?

Podemos responder: "Porque no es cierto". Es una ilusión óptica. Con la ayuda del transportador de rastrillo o con otro tipo de instrumentos podemos verificar que en ambos casos, vemos el disco de la Luna, bajo del mismo ángulo visual,[13] equivalente a la mitad de un grado. Utilizando el mismo instrumento o la "báscula de Yakov", podemos ver que las distancias angulares entre las estrellas no varían, sin importar el lugar en el que se encuentren las constelaciones: en el cenit o en el horizonte. Entonces el aumento de tamaño es una ilusión óptica.

¿Cómo podemos explicar tal ilusión óptica? Aún no tenemos la respuesta correcta.

La ciencia no ha encontrado la respuesta, aunque la está buscando hace 2.000 años. La ilusión se relaciona con que el cielo no se representa como una semiesfera (desde el punto de vista de la geometría), sino como un casquete esférico, cuya altura es *2* a *3* veces menor que el radio de su base. Es por eso que, con la postura habitual de la cabeza y los ojos, estimamos que las distancias horizontales cercanas son mayores que las distancias verticales: En sentido horizontal observamos el objeto dirigiendo la mirada en “línea recta”, y en cualquier otro sentido, bajamos o subimos los ojos. Si observamos la Luna, tumbados de espaldas, sucede el fenómeno contrario, la Luna parece tener mayor tamaño cuando está en cenit, que cuando está en el horizonte[14]. Aún queda a los psicólogos y los fisiólogos, una pregunta por explicar: *¿por qué* el tamaño visual del objeto depende de la orientación de nuestros ojos?

La aparente compresión del cielo sobre el tamaño de los astros en distintos puntos, se ilustra claramente en la Figura 74.

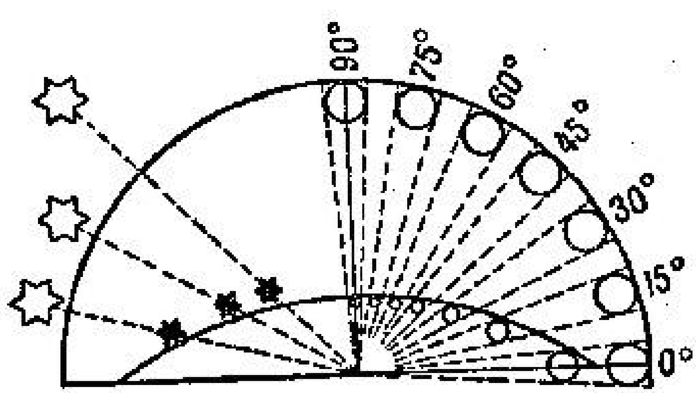


Figura 74. Influencia del cielo aplanado sobre el tamaño aparente de los astros.

En el cielo el disco de la Luna siempre se ve bajo un ángulo de medio grado, en el horizonte (a una altura de *0°*) y en el cenit (a una altura de *90°*).

Pero nuestro ojo no siempre sitúa el disco a una misma distancia: Cuando la Luna se encuentra en el cenit, se halla a menor distancia de nosotros que cuando se encuentra en el horizonte, y por eso se observa de tamaño diferente. En la parte izquierda de la figura se ve que las distancias entre las estrellas parecen alargarse al acercarse al horizonte: Los mismos trayectos angulares entre ellas parecen diferentes.

Visto desde otro ángulo. ¿Al mirar atentamente al disco de la Luna en el horizonte, han notado algún nuevo rasgo que no hayan podido ver en el disco, cuando se encuentra en el cenit? No, verdad.

¿Pero por qué no se ven nuevos detalles cuando el disco se hace más grande? Porque no se *aumenta el ángulo visual* bajo el cual se presenta el objeto. Solamente el aumento de este ángulo nos permite distinguir nuevos detalles; cualquier otro "aumento" es una simple ilusión óptica, y carece de toda utilidad[15].

12. ¿Cuál es la longitud de la sombra lunar y de la sombra del estratóstato?

He encontrado otra aplicación insospechada del ángulo visual: el cálculo de la longitud de la sombra, dejada por los cuerpos que se encuentran en el espacio.

La Luna, por ejemplo, deja en el espacio un cono de sombra que la acompaña a todas partes.

¿Qué tamaño tiene esta sombra?

Para efectuar este cálculo empleamos la semejanza de triángulos, no necesitamos establecer la proporción, entre los diámetros del Sol y de la Luna, y entre las distancias del Sol y de la Luna.

Podemos hacer el cálculo de una forma más simple. Imaginaremos, que nuestros ojos se encuentran en el punto donde termina el cono de la Luna, es decir, en el vértice del cono, y observamos la Luna desde allí. ¿Qué vemos? Un círculo negro tapando al Sol. Sabemos que es demasiado grande el ángulo visual bajo el que vemos el disco de la Luna (o del Sol). Pero sabemos que un objeto visible bajo un ángulo de medio grado, se puede alejar del observador hasta *2 x 57 = 114* veces su diámetro. Entonces, el vértice del cono de la sombra lunar está a *114* diámetros lunares de la Luna. Por lo tanto, la longitud de la sombra lunar es;

3.500 x 114 ≈ 400.000 kilómetros.

Esta es la máxima distancia entre la Tierra y la Luna; por eso se presentan los eclipses solares totales (en los sitios de la tierra que entran en esta sombra).

No resulta difícil calcular la longitud de la sombra de la Tierra en el espacio: Ella es tantas veces mayor que la sombra lunar, en tantas veces como el diámetro de la Tierra supera el diámetro de la Luna, es decir, unas cuatro veces.

El mismo método se utiliza para calcular las longitudes de las sombras proyectadas en el espacio por objetos más pequeños. Encontremos, por ejemplo, el cono de sombra dejado por el estratóstato «COAX – 1» en el instante en que toma la forma de una esfera. Como el diámetro del globo es de *36 metros,* entonces, la longitud de su sombra (el ángulo sobre el vértice del cono es de medio grado):

36 × 114 = 4.100 metros, cerca de *4 kilómetros.*

En todos casos examinados nos referimos, por supuesto, a la *longitud* de la sombra total, más no a la de la sombra media.

13. ¿A qué altura están las nubes?

Recuerdan cómo se sorprendieron cuando vieron por primera vez una larga estela blanca en lo alto del cielo azul. Ahora, por supuesto, sabemos que se trata de una cinta nubosa que es como una "huella" dejada por un avión en el espacio.
La niebla se forma fácilmente en el aire frío, húmedo y lleno de partículas de polvo.
Cuando vuela un avión, va dejando en el aire pequeñas partículas, producidas por el motor en marcha, y entre estas partículas se condensa el vapor, formando una nube.
Si encontraremos la altura de la nube, antes que desaparezca, podemos saber a qué altura vuela el avión.

Problema

¿Cómo encontrar la altura de la nube sobre la Tierra, si además, ella está sobre nuestra cabeza?

Solución

Para medir distancias muy altas resulta de gran utilidad un aparato fotográfico, un instrumento bastante complicado que gusta mucho a los jóvenes.
En este caso necesitamos dos equipos con la misma distancia focal. (La distancia focal se encuentra marcada en el objetivo.)
Los dos equipos se colocan a la misma altura. En el campo se usan trípodes, en la ciudad, miradores. La distancia entre ambos puntos debe ser tal que un observador pueda ver al otro directamente o con binóculos.

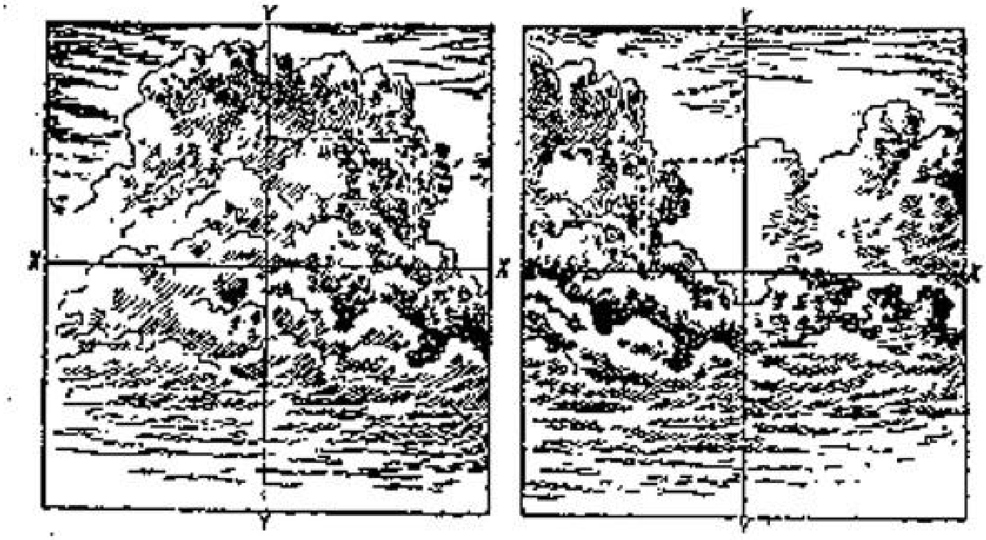


Figura 75. Las dos imágenes de la misma nube

Se mide la distancia entre ellos, o se busca en un mapa. Los instrumentos se montan de modo tal que sus ejes ópticos queden paralelos (por ejemplo, ambos apuntando al cenit).

Cuando aparece el objeto en el campo visual del objetivo, uno de los observadores le hace una señal al otro, empleando, por ejemplo, un pañuelo, y ambos observadores captan simultáneamente sendas imágenes fotográficas.

En las fotos, las cuales deben ser de igual tamaño, se dibujan las rectas *YY* y *XX,* uniendo los centros de los bordes opuestos de las fotografías (Figura 75).

Después se marca el mismo punto de la nube en ambas imágenes, y se calcula su distancia (en *milímetros*) desde las rectas *YY* y *XX.* Estas distancias señalan con las letras correspondientes x_1, y_1 en una imagen y x_2, y_2 en la otra.

Si los puntos marcados en las fotografías aparecen a lados opuestos de la recta *YY* (como en la Figura 75), entonces se calcula la altura de la nube, *H*, con la fórmula:

$$H = b\frac{F}{x_1 + x_2}$$

donde *b* es la longitud de la base (en *metros*) y *F* es la distancia focal (en *milímetros*).

Si los puntos marcados en las fotografías aparecen al mismo lado de la recta *YY,* se calcula la altura de la nube, *H*, con la fórmula:

$$H = b\frac{F}{x_1 - x_2}$$

Se observa que las fórmulas no dependen de las distancias y_1 e y_2, pues no son necesarias para calcular *H*, pero sirven para comprobar la exactitud del cálculo.
Si se colocaron de forma simétrica las placas fotográficas de las cámaras, entonces $y_1 = y_2$.
Si, a modo de ejemplo, se tienen las siguientes distancias desde las rectas *YY* y *XX* hasta el punto de la nube marcado *sobre* las fotografías:

$$x = 32\ mm,\ y = 29\ mm,$$
$$x = 23\ mm,\ y = 25\ mm.$$

Las distancias focales de los objetivos $F = 135\ mm$ y la distancia entre las cámaras[16] (base) $b = 937\ m.$ Las fotos indican, que para encontrar la altura de la nube necesitamos usar la fórmula:

$$H = b\frac{F}{x_1 + x_2}$$

$$H = 937\ \text{m} \times \frac{135}{32+23} = 2.300\ \text{metros} \ = \ 2{,}3\ \text{kilómetros}$$

Si desean deducir la fórmula para buscar la altura de las nubes, pueden utilizar el esquema, de la Figura 76.
Debemos imaginar la Figura 76 en el espacio tridimensional (se logra desarrollar la imaginación tridimensional al aprender una parte de la geometría, que se llama estereometría).

Las figuras I y II, la imagen de las placas fotográficas; F_1 y F_2, los centros ópticos de los objetivos; N es el punto observado de la nube; n_1 y n_2 es la representación del punto N sobre las placas fotográficas; a_1 A_1 y a_2 A_2, las perpendiculares, trazadas desde el centro de cada placa fotográfica hasta la nube; $A_1 A_2 = a_1 a_2 = b$, el tamaño de la base.

Se traza una recta vertical desde el centro óptico F_1 hasta el punto A_1, luego otra recta sobre la base en la que se encuentra la nube, desde el punto A_1 hasta el apunto C, que corresponde al vértice del ángulo recto A_1 C N y, finalmente, otra recta desde el punto C hasta el punto N, entonces, los segmentos del equipo: F_1 A_1, A_1 C_1 y CN, corresponden a los segmentos $F_1a_1 = F$ (la distancia focal), a_1 $c_1 = x_1$ y c_1 $n_1 = y_1$.

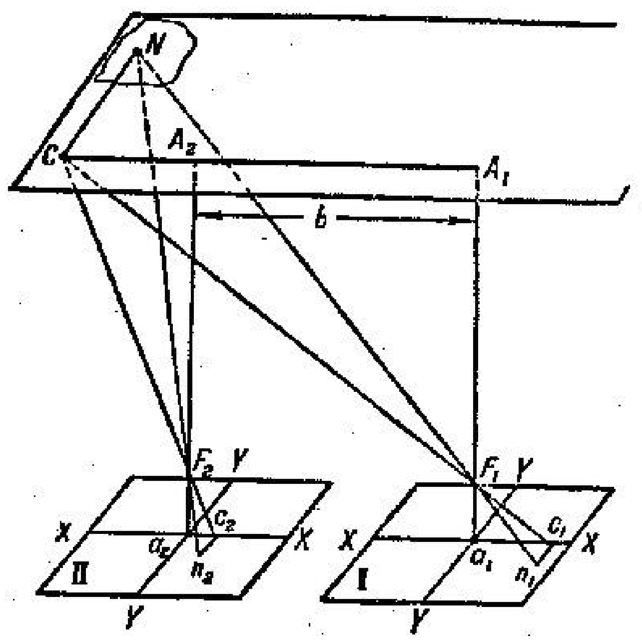


Figura 76. Esquema de la imagen del punto de la nube sobre placas de ambos aparatos, apuntados al cenit

Para el otro equipo se sigue un razonamiento idéntico.

Por semejanza de triángulos se deducen las proporciones:

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_1F_1}{F} = \frac{C_1F_1}{F_1C} = \frac{CN}{y_1}$$

$$\frac{A_2C}{x_2} = \frac{A_2F_2}{F} = \frac{C_2F_2}{F_2C} = \frac{CN}{y_2}$$

Comprobando estas proporciones y teniendo en cuenta la igualdad $A_2\ F_2 = A_1\ F_1$, encontraremos que $y_1 = y_2$ (lo que indica que la imagen es correcta), también que:

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_2C}{x_2}$$

De la figura se tiene que: $A_2\ C = A_1\ C - b_1$ aquí se deduce que:

$$\frac{A_1C}{x_1} = \frac{A_1C - b}{x_2}$$

Donde:

$$A_1C = b\frac{F}{x_1 + x_2}$$

y, finalmente:

$$A_1F_1 \approx H = b\frac{F}{x_1 - x_2}$$

Si, n_1 y n_2, son las imágenes del punto N, sobre las placas fotográficas, aparecen en las fotografías a alados opuestos de la recta YY, eso significa que el punto C está entre los puntos A_1 y A_2 y por lo tanto, $A_2\ C = b - A1\ C_1$ y la altura buscada será:

$$H = b\frac{F}{x_1 + x_2}$$

Estas fórmulas corresponden al caso en el que los ejes ópticos de los equipos apuntan al cenit. Si la nube está lejos del cenit y no entra en el campo visual, entonces, podemos colocar los equipos en otra posición (conservando el paralelismo de los ejes ópticos), por ejemplo, apuntando horizontalmente y perpendicularmente hacia la base o a lo largo de ella.

En cualquier caso se requiere elaborar previamente el dibujo y deducir las fórmulas que determinan la altura de la nube.

Al mediodía aparecen en el cielo estratos de color blanco. En este caso es necesario calcular su altura dos a tres veces durante un lapso de tiempo. Si los cálculos indican que las nubes han bajado, es señal de que va llover.

Pueden tomar unas fotos a un aerostato o un estratóstato en vuelo y calcular luego sus alturas.

14. La altura de una torre en una foto.

Problema

Con la ayuda del aparato fotográfico podemos encontrar no solo la altura de las nubes o de un avión, sino también la altura de una construcción en tierra: una torre, una antena, un mástil, etc.

En la figura 77 se muestra una foto del motor eólico, construido en Crimea cerca de Balaklava.

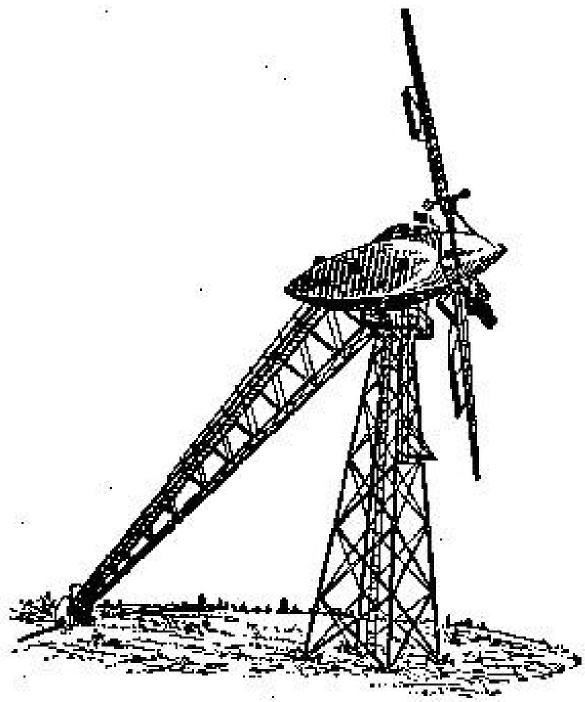


Figura 77. Motor eólico en la Crimea

La base de la torre es cuadrada, donde suponemos que conocemos la longitud de un lado, después de medirlo, *6 metros*.

Se necesita tomar unas medidas sobre la imagen para encontrar la altura *h* de la instalación.

Solución

La foto de la torre y el dibujo son geométricamente semejantes. Por lo tanto, en la imagen, la altura es a la diagonal de la base, tantas veces como la altura de torre original es a la diagonal de su base.

Las medidas obtenidas a partir de la imagen son: la longitud diagonal menos alterada de la base es de *23 mm,* la altura de toda instalación es de *71 mm.*

La que longitud de un lado de la base del cuadrado es *6 m,* entonces diagonal de la base es:

$$diagonal = \sqrt{6^2 + 6^2} = 8,48 \text{ m}$$

De aquí se deduce que:

$$71 / 23 = h / 8{,}48$$

$$h = 26{,}17 \text{ metros}$$

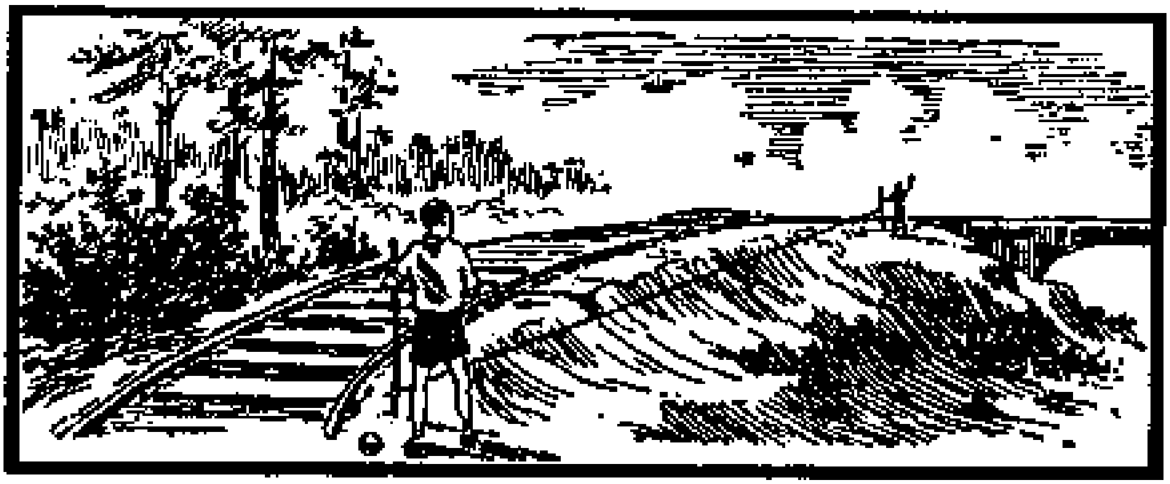
Evidentemente, no sirve cualquier imagen, solo aquellas en las que no se encuentren alteradas las proporciones, como suele ocurrir con los fotógrafos sin experiencia.

15. Ejercicios adicionales.

Ahora los lectores puedan utilizar todos sus conocimientos de este libro para resolver un par de las siguientes tareas:

- Una persona de estatura mediana (*1,7 metros*) se ve desde lejos bajo un ángulo de *12'.* Encontrar la distancia hasta ella.
- Un jinete (*2,2 metros*) se ve desde lejos bajo un ángulo de *9'.* Encontrar la distancia hasta él.
- El poste telegráfico (*8 metros*) se ve bajo un ángulo de *22'.* Encontrar la distancia hasta él.
- Un faro de *42 metros* de altura se ve desde un barco bajo un ángulo de *1° 10'* ¿Cuál es la distancia entre el barco y el faro?
- El planeta Tierra se ve desde la Luna bajo de *1° 54'.* Encontrar la distancia entre la Luna y la Tierra.
- A una distancia de *2 kilómetros* se ve un edificio bajo un ángulo de *12'.* Encontrar la altura del edificio.
- La Luna se ve desde la Tierra bajo un ángulo de *30'.* Conociendo la distancia hasta la Luna (380.000 kilómetros), encontrar su diámetro.
- ¿Cuán grandes deben de ser las letras en la pizarra para que los alumnos las puedan ver tan claras, como las letras de sus libros (á *25 centímetros* de los ojos)? La distancia entre los pupitres y la pizarra es de *5 metros.*
- El microscopio aumenta *5* veces. ¿Podemos ver las células de la sangre humana, si su diámetro es de *0,007 milímetros?*
- ¿Si en la Luna hubiera gente como nosotros, entonces, qué aumento necesita un telescopio, para verla desde la Tierra?
- ¿Cuántas “milésimas” hay en un grado?

- ¿Cuántos grados hay en una “milésima” (o milésimo)?
- Un avión, que vuela sobre una trayectoria perpendicular a la línea de observación, recorre en un lapso de *10 segundos* una distancia que se observa bajo un ángulo de *300 “milésimas”.* Encontrar la velocidad del avión, si se encuentra a *2 000 metros* de distancia.



Capítulo 4
Geometría de Viaje

Contenido:

1. Habilidad de medir con pasos

Encontrándose en las afueras, cerca de un ferrocarril o en la carretera, podemos realizar un par de ejercicios geométricos muy interesantes.

Inicialmente utilizaremos la carretera, para averiguar la longitud de nuestro paso y la velocidad de marcha.

Esto nos ayuda medir las distancias con base en los pasos, técnica que se consigue con suma facilidad, luego de efectuar un par de ejercicios. Lo más importante es aprender a dar pasos de igual longitud, es decir, similar a la definida durante la marcha.

En la carretera, se coloca una piedra blanca cada *100 metros*; recorremos este espacio *100 metros* con pasos "de igual longitud"; contando el número de pasos, nos resulta muy fácil calcular la longitud media de un paso. Se recomienda repetir esta medición cada año, por ejemplo, en cada primavera, porque la longitud del paso varía.

Se ha encontrado una curiosa relación al comparar los resultados obtenidos de esta prueba: La longitud media del paso de un adulto equivale a la mitad de su estatura, hasta la altura de sus ojos. Así, por ejemplo, si la estatura de una persona es de 1,40 m, entonces la longitud de su paso, es de *70 centímetros.* Vale la pena comprobarlo.

Además de averiguar la longitud de su paso, le resulta útil saber su *velocidad* de marcha, es decir, la cantidad de kilómetros que recorre durante una hora. Con frecuencia se emplea la regla siguiente: Nosotros andamos durante la hora tantos kilómetros, ¿cuántos pasos se hacen durante tres segundos?

Así, por ejemplo, si nosotros damos cuatro pasos en tres segundos, entonces, durante una hora recorremos *4 kilómetros.* Sin embargo, la regla resulta útil solamente cuando conocemos la longitud del paso. Este valor se halla fácilmente, llamando x la longitud del paso, y n, la cantidad de pasos que damos en tres segundos, mediante la ecuación:

$$\frac{3.600}{3} * n * x = n * 1000$$

de donde *1.200 x = 1.000* y *x = 5/6 metros,* es decir, entre *80 y 85 centímetros.*

Este es un paso relativamente grande; corresponde a una persona muy alta. Si su paso no mide entre *80 y 85 cm,* tendrá que calcular la velocidad de su marcha midiendo el tiempo que tarda en ir de un mojón a otro.

2. Buen ojo.

Además de útil es cautivante saber medir distancias sin cadena y sin pasos mensurados, sino valorar directamente a ojo, sin mediciones. La práctica se logra solamente con los ejercicios. Durante mis años escolares, salí varias veces de excursión fuera de la ciudad con un grupo de amigos, nos habituamos a estos ejercicios.

Los realizábamos en una forma deportiva y especial, que nosotros mismos inventamos, a modo de competencia. Saliendo a la carretera, señalábamos con la mirada cualquier árbol u otro elemento sólido junto la carretera, e iniciábamos la competencia.

- ¿Cuántos pasos hasta el árbol? – preguntaba alguien.

Cada uno de los demás decía un número tratando de acertar y después íbamos juntos contando los pasos, para saber quién se había acercado más al verdadero valor. Era su turno elegir otro objeto para estimar nuestra capacidad de cálculo a ojo.

Quien medía la distancia con mayor acierto, obtenía un punto. Después de diez intentos sumábamos los puntos de cada uno: el ganador era el que obtenía mayor número de puntos.

Recuerdo que en los primeros intentos estuvimos bastante equivocados. Pero rápidamente, más pronto de lo que se esperaba, adquirimos gran habilidad en el arte de medir las distancias, a simple golpe de vista, cometiendo cada vez menos errores.

Bastaba un cambio rápido, por ejemplo, el paso de un campo a un bosque, o a un calvero de arbustos, el regreso a la ciudad, pasando por calles estrechas, a veces de noche, bajo de la luz engañosa de la Luna, para darnos cuenta que los errores aumentaban. Luego, sin embargo, aprendimos que para poder efectuar mediciones más exactas, debíamos tener presente este cambio de situaciones. Por fin, nuestro grupo consiguió tanta perfección en relación a la evaluación de las distancias con la vista, que debimos eliminar este deporte de nuestras competencias; todos adivinábamos igualmente bien, y las competiciones perdieron el interés. Pero, de otro lado, conseguimos tener un buen ojo, que siempre nos sirvió durante los paseos fuera de la ciudad.

Es curioso, pero parece que el buen ojo no depende de la agudeza visual. En nuestro grupo había un chico cegato, y no solo tuvo buenos resultados, sino que a veces ganaba. Por el contrario, un chico con una vista normal no logró medir las distancias acertadamente. Más tarde tuve necesidad de medir visualmente la altura de los árboles: entrenando a los estudiantes, esta vez no para un juego, sino para su profesión futura, noté que los cegatos lo hacían igual que los otros. Esto puede servir de consuelo para los cegatos: sin estar dotados de una vista aguda, son capaces de desarrollar un cálculo visual bastante satisfactorio.

Podemos entrenarnos para adquirir precisión al medir distancias a ojo, en cualquier época del año y bajo cualquier circunstancia. Paseando por las calles de ciudad ustedes se podrán imponer algunas tareas, tratando de adivinar, cuantos pasos hay hasta la lámpara más cercana, hasta uno u otro objeto. Durante el mal tiempo, sin darnos cuenta, tendremos mejores condiciones, al pasearnos por las calles solitarias.

Los militares dan mucha importancia a las mediciones visuales: buena vista necesita el batidor, el tirador, el artillero. Vale la pena conocer estos principios, para llevarlos a la práctica.

- “Al medir distancias a ojo o estimar la distancia de objetos brillantes situados a distintas distancias del observador, o calcular una distancia de *100* a *200* pasos, el observador las verá más pequeñas cuando se encuentra lejos”.
- “Los objetos brillantes parecen estar más cerca. Debemos tener en cuenta los que están más iluminados o los que son más claros, y dependiendo el sitio en el que se encuentran, sobre la tierra o sobre la superficie del agua; o si están a mayor altura, los grupos de objetos que se comparan, y en general, los objetos de mayor tamaño”.
- “Podemos tener presentes estos valores: a *50* pasos se pueden distinguir la boca y los ojos de la persona; a *100* pasos, los ojos parecen dos puntos; a *200* pasos se pueden distinguir los botones y otros detalles de la ropa; a *300* pasos se ve la cara; a *400* pasos se distingue el movimiento de las piernas; a *500* pasos se ve el color de la ropa”.

Es de anotar, que el ojo más entrenado comete un error del *10%* en la distancia medida. Entre los casos más representativos de los errores que se cometen en el cálculo visual, se encuentran aquellos en los que se estima la distancia sobre una superficie plana y monocromática, por ejemplo, sobre el agua de un río o de un lago, la superficie de una llanura arenosa, o de un campo verde. En estos casos las distancias parecen más pequeñas de lo que son; al realizar la medida a ojo, nos equivocamos más del doble de ésta. Por otra parte se presentan posibles errores, cuando medimos la distancia hasta un objeto que se encuentra detrás de una colina, de un edificio o de alguna elevación. En estos casos, sin querer, pensamos que el objeto no está *detrás* de la elevación, sino *sobre* ella, por lo tanto, cometemos un gran error además de reducir la distancia hasta él (figuras 78 y 79).

Figura 78. Un árbol detrás de una colina parece estar más cerca.

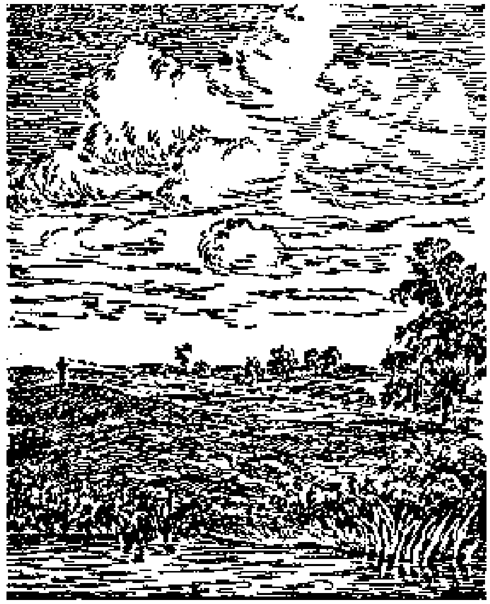


Figura 79. Subes la colina, hasta el árbol y la distancia es mayor.

En tales casos, confiar al buen ojo es peligroso, y deberemos usar otros métodos, de los cuales ya hemos hablando y vamos a hablar.

3. Inclinaciones

A lo largo de ferrocarril, además de postes separados entre sí una versta (un kilómetro), vemos otros no muy altos, con tablillas fijadas sobre ellos, que contienen inscripciones incomprensibles para mucha gente, como en la figura 80.

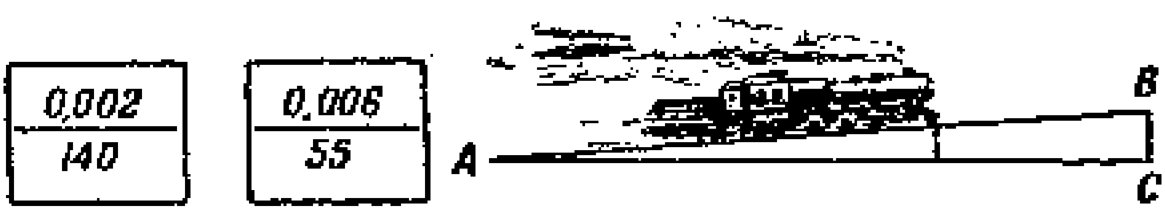


Figura 80. "Señales de inclinación"

Estas son "señales de inclinación". En la primera inscripción el número superior, *0.002*, significa que en este punto la inclinación del camino es *0,002* (la tablilla indica la inclinación); es decir que el camino sube o baja *2 mm*, por cada metro. Él número inferior, *140,* indica que se conserva esta inclinación durante los *140* *metros* siguientes, luego de los cuales se encuentra otra señal indicando la nueva inclinación.

La tablilla con la inscripción:

$$\frac{0,006}{55}$$

Indica que durante los próximos *55 m,* la vía sube o baja *6 mm* por cada metro.

Conociendo el significado de las señales de inclinación, podemos calcular la diferencia de alturas entre los dos puntos extremos, correspondientes a una señal. En el primer caso, por ejemplo, la diferencia de alturas es *0,002 x 140 = 0,28 m;* En el segundo caso, la diferencia de alturas es *0,006 x 55 = 0,33 m.*

En la práctica del ferrocarril, como vemos, la inclinación no se mide en grados. Pero es posible transformar en grados los valores de inclinación de vía férrea. Si *AB* (figura 80), es la línea de la vía, y *BC*, la diferencia de alturas entre los puntos *A* y *B,* entonces se define la pendiente de la vía *AB* sobre línea horizontal *AC* como la razón:

$$\frac{BC}{AB}$$

Como el ángulo *A* es demasiado pequeño, podemos asumir *AB* y *AC* como radios de circunferencia, donde el arco es *BC*[17]. Conocida la razón *BC/AB,* fácilmente se calcula el ángulo *A*.

Si la longitud del arco es 1/57 del radio, y el ángulo es de *1°*; ¿Qué ángulo corresponde al arco con *0,002* del radio?

Obtenemos el valor *x* de la proporción:

$$\frac{x}{1^\circ} = \frac{0,02}{1/57}$$

$$x = 0,002 * 57 = 0,11^\circ$$

Entonces el ángulo mide unos *7'.*

En las vías férreas solo se permiten rampas pequeñas. Tenemos la norma de inclinación máxima de *0,008,* es decir, en grados, *0,008 x 57*, o sea, menos de ½°: Esta inclinación es pequeña. Solamente en la vía férrea Trans-Caucásica se permiten una inclinación máxima de *0,025,* que en grados equivale a *1 ½°.*

Nosotros no notamos inclinaciones tan pequeñas. El peatón empieza a sentir la inclinación del piso, cuando esta supera *1/24*, que en grados equivale a *57/24,* es decir, *2 ½°.*

Recorriendo en tren unos cuantos kilómetros y anotando las señales de inclinación que se observen, se puede calcular, cuánto subió o bajó el tren, es decir, cual es la diferencia de alturas entre el punto inicial y el punto final.

Problema

Ustedes inician el viaje a lo largo de la vía del ferrocarril cerca de poste con una señal de subida:

$$\frac{0,004}{153}$$

y anotan luego otras señales:

plazoleta[18]	subida	subida	plazoleta	bajada
$\frac{0,000}{60}$	$\frac{0,0017}{84}$	$\frac{0,0032}{121}$	$\frac{0,000}{45}$	$\frac{0,004}{210}$

El paseo termina cerca de la última señal de inclinación. ¿Cuánto mide el camino recorrido y cuál es la diferencia de alturas entre la primera y la última señal?

Solución

Todo el camino recorrido es:

153 + 60 + 84 + 121 + 45 + 210 = 673 m.

Subiendo:

0,004 x 153 + 0,0017 X 84 + 0,0032 x 121 = 1,15 m.

Bajando:

0,004 x 210 = 0,84 m,

finalmente, llegó a un punto más alto que el punto de partida. La diferencia de alturas es:

1,15 – 0,84 = 0,31 m = 31 cm.

4. Montón del casquijo.

Los montones del casquijo sobre los bordes de una vía levantan nuestro interés.

Pregunta: ¿Qué volumen tiene esta gran cantidad de casquijo? Inmediatamente emprendemos una tarea, bastante complicada para una persona acostumbrada superar dificultades matemáticas en el papel o en la pizarra. Necesita calcular el volumen del cono, del que no se puede medir la altura y ni el radio. Pero podemos encontrar indirectamente estos valores. Para hallar el radio medimos la circunferencia de la base y dividimos[19] su longitud por *6,28.*

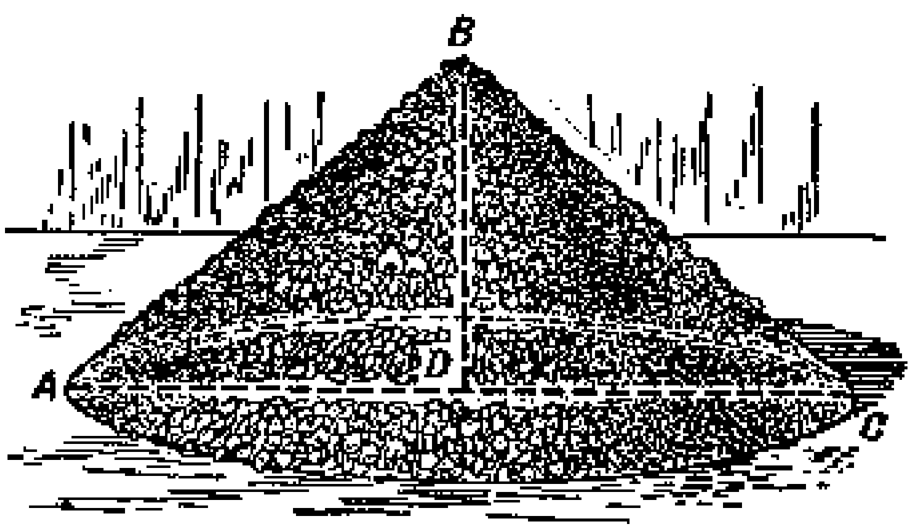


Figura 81. Montón de casquijo

Más difícil nos resulta el cálculo de la altura: necesitamos medir la longitud de *AB* (figura 81), o como harían los capataces de carretera, midiendo ambas generatrices del cono *ABC* (pasando la cinta métrica por encima del montón de casquijo), luego, sabiendo que conocemos el radio de la base, calculamos altura *BD* por el teorema Pitágoras.

Problema

Tenemos el montón de casquijo. La circunferencia de la base del cono es *12,1 m;* la longitud de dos generatrices es *4,6 m.* ¿Cuál es el volumen del montón?

Solución

El radio de la base es equivalente a:

*12,1 x 0,159 (*en vez de *12,1 : 6,28) = 1,9 m.*

La altura equivale a:

$$\sqrt{2,3^2 - 1,9^2} = 1,2m$$

De donde el volumen del cono es:

$$\frac{1}{3} \times 3,14 \times 1,9^2 \times 1,2 = 4,5m^3$$

Los valores de los volúmenes de los montones de casquijo de nuestras carreteras, habitualmente, de acuerdo con Reglamento de Circulación y Seguridad Vial, son de ½, ¼ y ⅛ s*azhen*[20] *,* es decir, *4,8 2,4* y *1,2* m^3

5. Una colina imponente.

Viendo los montones cónicos de casquijo o de arena me acordé de una vieja leyenda rusa, contada por el poeta A. Pushkin en “Un caballero ambicioso”;

Leí en alguna parte,

Que el zar a sus guerreros
Mandó llevar tierra en la mano para formar una pila,
Y colina imponente se ha levantado,
Y el zar pudo observar desde arriba
El valle, cubierto de toldos,
Y el mar, por donde corren los barcos...

Es una de las muchas leyendas, donde la aparente realidad no tiene ni una pizca de verdad. Podemos examinar mediante el cálculo geométrico, que pasaría si en verdad se le ocurriera esta idea a un tirano antiguo, el resultado final sería mezquino: delante de nosotros se levantaría un pobre montoncillo de tierra, que ninguna fantasía sería capaz de convertir en una "colina imponente".

Haremos el cálculo. ¿Cuántos guerreros pudo tener el zar? Es sabido que los ejércitos antiguos no eran tan numerosos. Las tropas se calculaban en unas 100.000 personas y este número ya era significativo. Si aquellas 100.000 manos colmadas de tierra levantaron la colina; cojan, por favor, un puñado de tierra lo más grande posible y échenla en un vaso: como verán no podemos llenar un vaso con un solo puño.

Si admitimos, que el volumen del puño de un guerrero es 1/5 de litro (*decímetro^3)*, deducimos que el volumen de la colina sería de:

$$\frac{1}{5} \times 100.000 = 20.000 dm^3 = 20 m^3$$

Entonces, la colina es un cono cuyo volumen no sobrepasa los *20 m^3*. Un volumen tan limitado ya nos baja el ánimo. Continuemos realizando cálculos para hallar la altura de la colina.

Para esto necesitamos saber que ángulo forman las generatrices del cono con su base. En nuestro caso podemos admitir el ángulo de equilibrio natural, *45°*, y la altura de este cono es igual al radio de su base; por lo tanto:

$$20 = \frac{\pi x^2}{3}$$

de donde:

$$x = \sqrt[3]{\frac{60}{\pi}} = 2,4m$$

Deberíamos tener una gran imaginación, para llamar a un montón de tierra de 2,4 m de alto (1½ veces la estatura de una persona), la “colina imponente”.

Atila tenía unas las de las tropas más numerosas del mundo antiguo. Historiadores hablan de 700.000 personas. Si todos los guerreros participaran en esta labor, habrían levantado un montón de tierra ligeramente mayor al calculado por nosotros: como su volumen es siete veces más grande, que el nuestro, entonces superaba la altura en solo $\sqrt[3]{7}$*,* es decir, en *1,9* veces; lo que equivale a *2,4 x 1,9 = 4,6 m.* Es de dudar, que una pila de tierra de este tamaño pudiera satisfacer la ambición de Atila.

Desde esta altura fue fácil observar el “valle, cubierto de toldos”, pero ver el mar fue imposible, a menos que se tratara de un sitio cercano al mar.

En el capítulo sexto hablaremos acerca de cuán lejos podemos llegar a ver, desde una altura u otra.

6. Circunvalación vial.

Ni las carreteras ni ferrocarril giran bruscamente, sino que cambian de sentido suavemente, siguiendo la trayectoria de un arco. El citado arco es, normalmente el segmento de una circunferencia, tal que las partes rectas de la carretera son tangentes a ella.

Así, por ejemplo, en la figura 82, las partes rectas *AB* y *CD* de la carretera están unidas por el arco *BC* así, que *AB* y *CD* convergen (geométricamente) sobre este arco en los puntos *B* y *C,* es decir, que *AB* forma un ángulo recto con el radio *OB,* y *CD* forma idéntico ángulo con el radio *OC.* Esto se hace, normalmente, para que la vía pase suavemente desde una dirección recta a una curva y regrese a la recta.

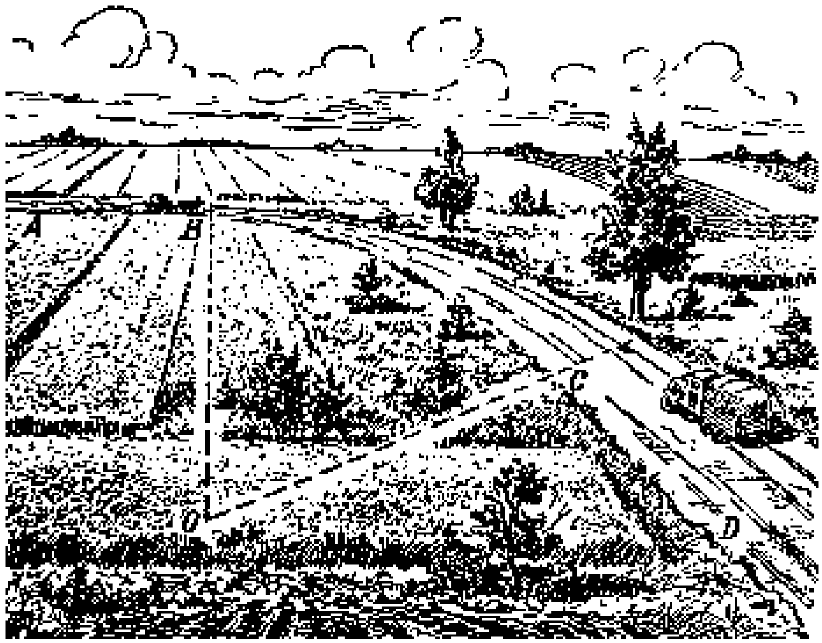


Figura 82. Circunvalación vial

El radio de circunvalación vial habitualmente se toma bastante grande, en los ferrocarriles no menor de *600 m*. Los radios más usuales en una autopista son de *1000* y *2000 m.*

7. El radio de circunvalación.

Estando cerca de una de aquellas curvas, ¿podrían hallar ustedes el tamaño de su radio? No resulta tan fácil, como buscar el radio de un arco, trazado en un papel. Dibujarlo es muy fácil:

Marcamos dos segmentos de recta cualesquiera y desde sus centros trazamos dos perpendiculares. En su punto de intersección, como bien sabemos, se encuentra el centro del arco. Su distancia desde cualquier punto de la curva es la longitud del radio buscado.

Hacer la misma construcción sobre el terreno resulta, evidentemente, difícil: además el centro de curvatura estará a 1 ó 2 kilómetros de la vía. Podemos elaborar un plano pero tampoco es tan fácil.

Se eliminan todas estas dificultades, calculando el radio. Haremos esto del siguiente modo.

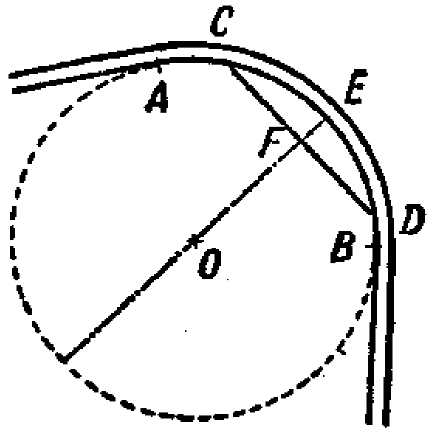


Figura 83. Cálculo del radio de circunvalación.

Trazamos mentalmente (figura 83) el arco *AB* desde la vía hasta la circunferencia. Uniendo dos puntos cualesquiera *C* y *D* del arco, medimos la cuerda *CD* y también la "flecha" *EF* (es decir, la altura del segmento *CED*). Con base en estos dos datos ya no resulta tan difícil calcular la longitud del radio buscado. Examinando la intersección entre el segmento de recta, *CD*, y el diámetro del círculo, llamamos *h* a la longitud de la flecha, y el *R* el radio, tenemos que:

$$\frac{a^2}{4} = h(2R - h)$$

de donde:

$$\frac{a^2}{4} = 2Rh - h^2$$

y el radio buscado es:

$$R = \frac{a^2 + 4h^2}{8h}$$

Así, por ejemplo, con una flecha de 0,5 m y una cuerda de 48 m, el radio buscado será:

$$R = \frac{48^2 + 4 \times 0{,}5^2}{8 \times 0{,}5}$$

Podemos simplificar este cálculo si tomamos *2R – h* equivalente a *2R*, lo cual es aceptable, porque *h* es demasiado pequeño comparando con *R* (*R* mide centenares de metros, h unos pocos metros). Entonces se obtiene una fórmula bastante simple para efectuar el cálculo bastante aproximado:

$$R = \frac{a^2}{8h}$$

Su uso en nuestro caso, dará el mismo resultado:

R = 580 m.

Calculando longitud del radio de la curva y sabiendo, además, que el centro de circunvalación está sobre la perpendicular hacia el centro de la cuerda, ustedes pueden marcar el sitio donde se encuentra el centro de circunvalación vial.
Si se han puesto rieles, se facilita la búsqueda del radio. Ciertamente, trazando una cuerda sobre el riel interior, obtenemos la cuerda del arco del riel exterior, donde su flecha *h* (figura 84) equivale a la separación entre los rieles (trocha) *1,52 m.*

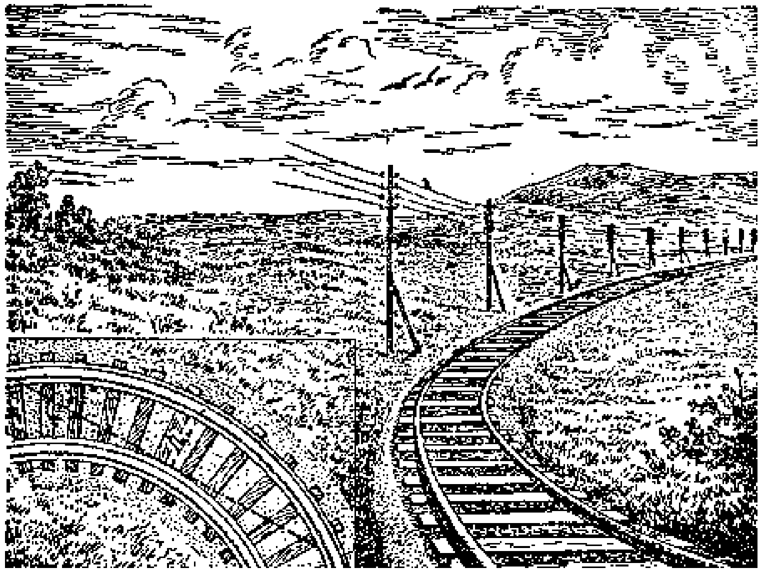


Figura 84. Cálculo del radio de circunvalación del ferrocarril

El radio de circunvalación en este caso (siendo *a* la longitud de la cuerda), es:

$$R = \frac{a^2}{8 \times 1,25} = \frac{a^2}{12,2}$$

Si *a = 120 m* el radio de circunvalación será equivalente a *1.200 m.* [21]

8. El fondo del océano.

El paso de la circunvalación vial al fondo oceánico, se da un salto inesperado para ustedes.

Pero la geometría relaciona ambos temas de manera natural.

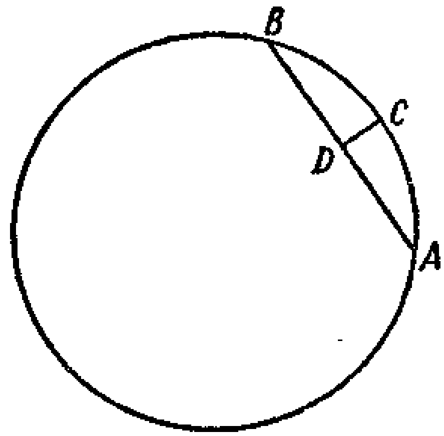


Figura 85. ¿El fondo oceánico es llano?

Se estudia la curvatura del fondo oceánico, para averiguar su forma: cóncavo, llano o convexo. A la mayoría de las personas, sin duda, les parece increíble, que los océanos, con su enorme profundidad, no formen huecos en el globo terráqueo; como veremos ahora, su fondo no es cóncavo, sino convexo.

Asumiendo un océano "profundo y extenso", obviamos el hecho de que su "extensión" excede en centenares de veces su "profundidad", es decir, que el espesor del agua es bastante profundo y sigue, evidentemente, la curvatura de nuestro planeta.

Así, por ejemplo, el ancho del océano Atlántico, cerca del ecuador, equivale a la sexta parte de la circunferencia total. Entonces el arco *ACB* refleja la superficie del océano Atlántico sobre el círculo ecuatorial (figura 85).

Si su fondo fuera llano, entonces la profundidad, equivaldría a *CD*, que es la flecha del arco *ACB.*

Sabiendo, que el arco es:

$$AB = \frac{1}{6}$$

AB = 1/6 de la circunferencia y, por lo tanto, la cuerda *AB* es el lado de un hexágono inscrito (equivalente al radio *R* del círculo), podemos calcular *CD,* aprovechando la fórmula de la circunvalación vía, vista anteriormente:

$$R = \frac{a^2}{8h}$$

De donde:

$$h = \frac{a^2}{8R}$$

Sabiendo, que *a = R,* obtenemos en este caso:

$$h = R / 8$$

Si *R = 6.400 km.* tenemos que *h = 800 km.*

Así que, si el fondo del océano Atlántico fuera llano, su parte más profunda tendría 800 km. En realidad, no alcanza ni 10 km. De aquí se deduce que: El fondo de este océano es cóncavo y tiene una ligera curvatura, similar a la superficie del agua.

Esto se cumple también para los otros océanos: su fondo presenta, igual que la superficie de la tierra, una *ligera curvatura,* que se aproxima a una forma esférica.

Nuestra fórmula para calcular el radio de circunvalación vial indica, que cuanto mayor sea la superficie del agua, más convexo será su fondo.

Examinando la fórmula:

$$h = \frac{a^2}{8R}$$

vemos, que al aumentar el ancho del océano, *a*, su profundidad, *h*, crece rápidamente, en proporción directa al cuadrado de anchura, *a*, si el fondo es llano.

Antes de todo, desde unas no muy grandes cuencas hidrológicas hasta las más grandes, la profundidad no crece tan rápido. Un océano podrá ser más ancho que el mar, digamos, por ejemplo, que unas 100 veces, pero nunca será *100 x 100,* es decir, 10.000 veces más profundo. Por eso, las cuencas hidrológicas relativamente pequeñas, tienen el fondo más profundo, que los océanos. El fondo del Mar Negro entre Crimea y Asia Menor no es convexo, como el de los océanos, ni tampoco es llano, es ligeramente cóncavo. La superficie del mar representa el arco de ≈ *2°* (exactamente una 1/700 parte de la circunferencia terrestre). La profundidad del Mar Negro es bastante regular, *2,2 km.* Asimilando en el mismo caso el arco a la cuerda, obtenemos, que la profundidad máxima para el fondo llano debe de ser:

$$h = \frac{40.000^2}{8 \times 1,70^2 R} = 1,1 km$$

Entonces, en realidad el fondo del Mar Negro esta un poco más de un kilómetro (2,2 – 1,1) por debajo del plano imaginario, que pasa por los puntos extremos de sus orillas opuestas, es decir, que tiene forma hueca.

9. ¿Existen montañas de agua?

La fórmula anterior para el cálculo del radio de circunvalación vial les ayudará encontrar la respuesta a esta pregunta.

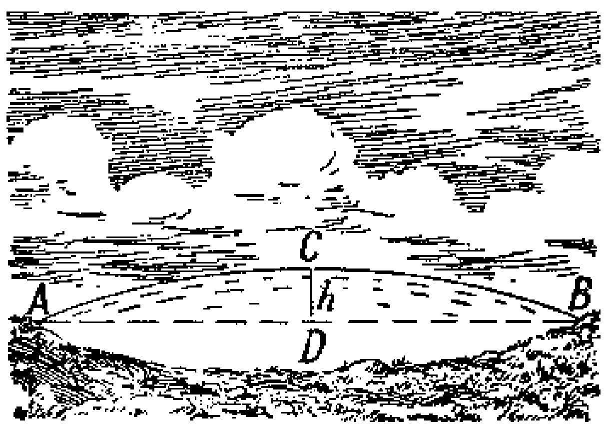


Figura 86. "Montaña de agua"

Los problemas expuestos anteriormente nos permiten responder la pregunta.

Existen montañas de agua, no físicamente, sino a nivel de la geometría. No solo el mar, también los lagos son, de algún modo, montañas de agua. Cuando estamos cerca de un lago, nos separa de la orilla opuesta un volumen cóncavo de agua, mientras más ancho sea el lago, mayor será su concavidad.

Podemos encontrar su altura con la fórmula:

$$R = \frac{a^2}{8h}$$

tenemos que la altura de la flecha es:

$$h = \frac{a^2}{8R}$$

aquí *a* es la distancia, en línea recta, entre las orillas (la cuerda del arco), y la podemos aproximar al ancho del lago. Si su ancho es, digamos que de *100 km.,* entonces la altura de la "montaña" de agua será:

$$h = \frac{10.000^2}{8 \times 6.400} \approx 200m$$

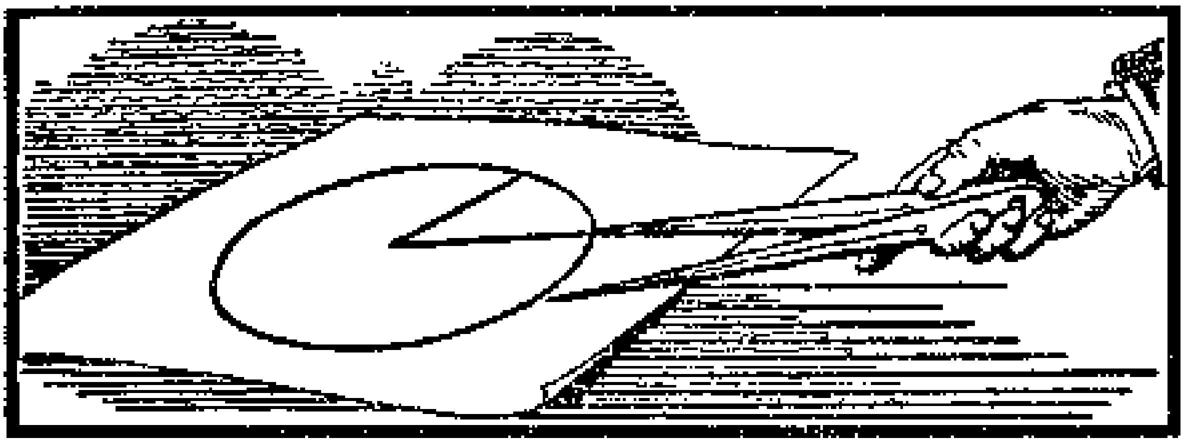
¡La "montaña" tiene un aspecto imponente!

Aunque el lago tiene *10 km*. de ancho, se comba sobre la recta, (que une sus orillas), en más de *2 m*, es decir, por encima de la estatura de una persona.

Pero realmente, ¿podemos llamar "montañas" a estas concavidades? Como estas no se elevan físicamente sobre el horizonte, son llanuras.

Es un error pensar, que la recta *AB* (figura 86) es el segmento horizontal, sobre cual se tiende el arco *ACB*. Aquí la línea horizontal no es *AB,* sino *ACB,* paralela a la superficie del agua. La recta *ADB,* se inclina sobre el horizonte: *AD* se inclina hacia abajo hasta alcanzar el punto *D,* su punto más profundo, y luego sube otra vez desde la tierra (o del agua) hasta el punto *B.* Si, se instalaran tuberías a lo largo de la recta *AB*, entonces una pelota que estuviera en el punto *A,* bajaría hasta el punto *D* y subiría desde aquí hasta el punto *B;* luego bajaría sin parar hasta *D,* y subiría hasta *A,* luego bajaría otra vez y así sucesivamente. Una pelota dentro de una superficie perfectamente lisa (sin aire que frene el movimiento) iría de ida y vuelta constantemente...

Entonces, aunque parezca que *ACB* es una montaña (figura 86), físicamente es un plano. Solo existe la montaña desde el punto de vista de la geometría.



Capítulo 5
Trigonometría de Campaña sin Tablas ni Fórmulas

Contenido:

1. Cálculo del seno.

En este capítulo vamos a enseñar, como calcular los lados del triángulo con una precisión hasta 2% y los ángulos con una precisión hasta 1º, usando únicamente el concepto del *seno*, sin apelar a tablas ni fórmulas. Esta simplificación trigonométrica puede ser útil durante un paseo, cuando no se tienen tablas y se han olvidado las fórmulas. Robinson Crusoe en su isla, pudo usar exitosamente este procedimiento trigonométrico.

Imaginemos, que todavía no conocemos la trigonometría o que la hemos olvidado. ¿No es difícil de imaginar, verdad? Empezaremos a estudiar desde el principio. ¿Qué es el seno del ángulo agudo? Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa de un triángulo cortado por la perpendicular trazada desde el vértice de un ángulo hasta uno de sus lados. Por ejemplo, el seno del ángulo *α* (figura 87) es:

$$\frac{BC}{AB}, ó \frac{ED}{AD}, ó \frac{D'E}{AD'}, ó \frac{B'C''}{AC'},$$

Se observa que, por semejanza de triángulos, todas esas razones son equivalentes entre sí.

¿Cuánto valen los senos de diversos ángulos entre 1º y 90º? ¿Cómo saberlos sin usar tablas? Es fácil: se necesita crear nuestra propia tabla de senos. Eso es lo que vamos a hacer ahora.

Empezaremos por aquellos ángulos, donde ya conocemos los senos, a partir de la geometría.

Primero, el ángulo de 90º, su seno es 1. Luego el de 45º, su seno se calcula fácilmente mediante el teorema de Pitágoras; equivale a:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

es decir, que vale 0,707. Luego averiguamos el seno de 30º; como el cateto, opuesto a este ángulo, equivale a la mitad de la hipotenusa, entonces, el seno de 30º = ½.

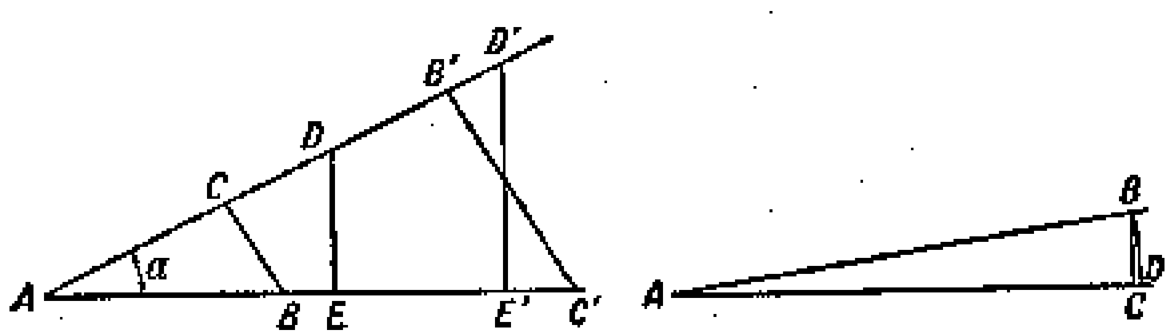


Figura 87. ¿Cuál es el seno de un ángulo agudo?

O sea, que sabemos los senos (se denotan con: *sen*) de los tres ángulos:

sen 30º = 0,500
sen 45º = 0,707
sen 90º = 1,000

Evidentemente, esto no es suficiente; debemos conocer los senos de todos los ángulos intermedios, por lo menos los de cada número entero de grados. Para buscar el seno de ángulos muy pequeños podemos utilizar, en vez de calcular la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa, la razón entre el arco y el radio: en la figura 87 (a la izquierda), vemos que la razón:

$$\frac{BC}{AB}$$

no tiene gran diferencia con:

$$\frac{BD}{AB}$$

Esta última es fácil de calcular. Así, por ejemplo, para ángulo de 1º, el arco:

$$BD = \frac{2\pi R}{360}$$

y, por lo tanto, para el sen 1º podemos tomar el equivalente a:

$$\frac{2\pi R}{360R} = \frac{\pi}{180} = 0,0175$$

De esta manera encontramos:

sen 2º = 0,0349
sen 3º = 0,0524
sen 4º = 0,0698
sen 5º = 0,0873

Pero debemos cerciorarnos hasta qué punto podemos elaborar esta tabla, sin cometer errores significativos. Sí, por ejemplo, buscamos de esta forma el sen 30º, obtendremos 0,524 en vez de 0,500: El error es de 24/500, es decir, 5%. Es un error bastante grande, aunque solo en nuestro caso. Para hallar el límite, hasta el que podemos aplicar este método para calcular los senos, intentaremos hallar el sen 15º de una forma más exacta. Para esto utilizaremos la siguiente construcción, no muy complicada (figura 88).
Sea,

$$sen\ 15° = \frac{BC}{AB}$$

Prolongamos *BC* hasta *D*; unimos *A* con *D*, así obtenemos dos triángulos iguales: *ADC* y *ABC*, y el ángulo *BAD* equivale a 30º. Bajamos hasta *AD* la perpendicular *BE*; se ha construido un triángulo rectángulo *BAE* con un ángulo de 30º (∠*BAE*), entonces:

$$BE = \frac{AB}{2}$$

Luego se calcula *AE* en el triángulo *ABE* por medio del teorema de Pitágoras:

$$AE^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right) = \frac{3}{4}AB^2$$

$$AE = \frac{AB}{2}\sqrt{3} = 0{,}866 * AB$$

Entonces,

$$ED = AD - AE = AB - 0{,}866 \text{ x } AB = 0{,}134 \text{ x } AB.$$

Ahora del triángulo *BED* calcularemos *BD*:

$$BD^2 = BE^2 + ED^2 \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(0{,}134 * AB\right)^2 = 0{,}268AB^2$$

$$BD = \sqrt{0{,}268 * AB^2} = 0{,}518AB$$

BC es la mitad de *BD*, es decir que *BC* es 0,259 x *AB*, de aquí se deduce que el seno buscado es:

$$sen\ 15° = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}} = \frac{0{,}259 * AB}{AB} = 0{,}259$$

Este es el valor de sen 15º con tres cifras significativas. Su valor se aproxima al encontrado por nosotros, 0,262.

Comparando los valores 0,259 y 0,262 y vemos que si limitamos su valor a dos cifras significativas, obtendremos:

0,26 y 0,26

es decir, que los resultados son idénticos. El error del resultado más exacto (0,259) al aproximarlo a 0,26, se calcula como 1/1000, es decir, 0,4%. Este error es aceptable para los cálculos durante el viaje, y por lo tanto, podremos calcular los senos de los ángulos de 1° hasta 15º con el procedimiento descrito.

Para ángulos entre 15° y 30º, podemos calcular los senos con ayuda de las proporciones. Vamos a discurrir así: la diferencia entre sen *30°* y sen *15°* es *0,50 – 0,26 = 0,24.* Asumiendo que con cada aumento de un grado en el ángulo, su seno aumenta, aproximadamente, en 1/15 de esta diferencia, es decir, en:

$$0{,}24/15 = 0{,}016.$$

En realidad no es así, pero se presenta el error en la tercera cifra significativa, la que nosotros hemos suprimido. Añadiendo *0,016* al sen *16°,* obtenemos los senos de *16°, 17°, 18°*, etc.:

sen 16° = 0,26 + 0,016 = 0,28

sen 17° = 0,26 + 0,032 = 0,29

sen 18° = 0,26 + 0,048 = 0,31

...

sen 25° = 0,26 + 0,16 = 0,42, etc.

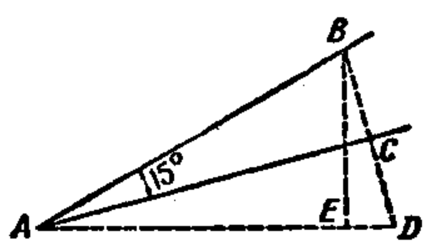


Figura 88. ¿Cómo calcular el seno de 15°?

Todos estos senos son correctos en las primeras cifras decimales, es decir, son suficiente para nuestros objetivos.

De la misma manera se calculan los senos de los ángulos entre *30º* y *45°*.

La diferencia es:

sen *45° - sen 30° = 0,707 – 0,5 = 0,207.*

Dividiendo este valor por *15,* tenemos *0,014.* Este resultado se le añade al sen *30°*; obtenemos:

sen 31° = 0,54 – 0,014 = 0,51
sen 32° = 0,54 – 0,028 = 0,53
...
sen 40° = 0,5 + 0,14 = 0,64 y etc.

Solo nos queda encontrar los senos de los ángulos agudos mayores de *45°*. Para esto nos servimos del teorema de Pitágoras. Sí queremos encontrar, por ejemplo, el sen *53°*, es decir, (figura 90) la razón:

$$\frac{BC}{AB}$$

Como el ángulo *B = 37°,* entonces podemos calcular su seno con base en el anterior: es equivalente a *0,5 + 7 x 0,014 = 0,6.* Por otra parte sabemos, que:

$$senB = \frac{AC}{AB} \times \frac{AC}{AB} = 0,6$$

Donde *AC = 0,6* x *AB.* Sabiendo *AC,* resulta fácil calcular *BC.* Este segmento es:

$$\sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{AB^2 - \left(0,6 * AC\right)^2} - AB\sqrt{1 - 0,36} = 0,8AB$$

En principio el cálculo no es tan difícil; solo es necesario calcular las raíces cuadradas.

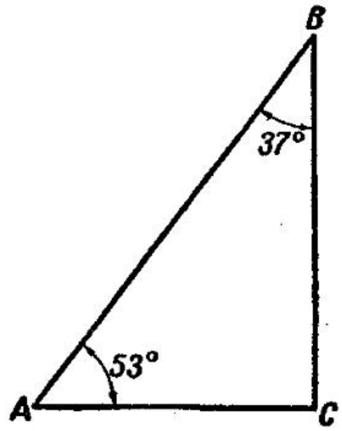


Figura 89. Cálculo del seno de ángulos mayores de 45°.

2. Extraer raíz cuadrada.

En los manuales míos de geometría hay un modo simplificado y muy antiguo para extraer la raíz cuadrada por medio de la división. Aquí voy a explicar el otro modo antiguo, que es más fácil, como aquellos modos del curso de álgebra.

Supongamos que necesitamos encontrar $\sqrt{13}$. Ella está entre *3* y *4,* por lo tanto, es equivalente a *3* con fracción, el que indicaremos por *x.* Entonces,

$$\sqrt{13} = 3 + x$$

elevando al cuadrado (aplicación del cuadrado del binomio) entonces:

$$13 = 9 + 6x + x^2$$

El cuadrado de la porción *x* es pequeño, y por lo tanto, para tener una primera aproximación, no le tomaremos en cuenta.

Luego tenemos:

$$13 = 9 + 6x$$

de donde:

$$6x = 4 \text{ y } x = 2/3 = 0,67.$$

Entonces, aproximadamente,

$$\sqrt{13} = 3,67$$

Si queremos saber el resultado de la raíz más exacto, escribiremos ecuación:

$$\sqrt{13} = 3\,{}^{2}\!/_{3} + y$$

donde habrá una fracción positiva o negativa no muy grande. De aquí:

$$13 = \frac{121}{9} + \frac{22}{3}y + y^2$$

Quitando y^2, hallaremos que y es equivalente á: *–2/33 = -0,06*

Por lo tanto en la otra aproximación:

$$\sqrt{13} = 3,67 - 0,6 = 3,61$$

La tercera aproximación se encuentra por del mismo modo y así sucesivamente.

Por el método habitual, que nos enseña el álgebra, obtendremos 13 con una precisión de *0,01,* también *3,61.*

3. Encontrar el ángulo conociendo el seno.

Ya podemos calcular el seno de cualquier ángulo de *0°* a *90°* con dos cifras decimales. No hace falta tener las tablas a mano; para efectuar cálculos aproximados siempre que se requiera, podemos elaborar las tablas.

Pero para solucionar las tareas trigonométricas se necesita saber calcular los ángulos conocido el seno. Eso tampoco es difícil. Se necesita encontrar el ángulo cuyo seno es *0,38.* Como el seno es menor de *0,5,* entonces el ángulo buscado será menor de *30°.* Pero es mayor de *15°*, como bien sabemos, sen *15°* es *0,26.* Para encontrar un ángulo entre *15°* y *30°*, seguimos las explicaciones del apartado anterior: “Cálculo del seno”.

$$0,62 - 0,5 = 0,12$$

$$\frac{0,12}{0,014} = 8,6^\circ$$

$$30^\circ + 8,6^\circ = 38,6^\circ$$

$$0.38 - 0,26 = 0,12$$

$$\frac{0,12}{0,016} = 7,5^\circ$$

$$15^\circ + 7,5^\circ = 22,5^\circ$$

Entonces el ángulo buscado es *22,5°*.

Otro ejemplo, encontrar el ángulo cuyo seno es *0,62.*

El ángulo buscado es, aproximadamente, *38,6°.*

Finalmente, el tercer ejemplo. Encontrar el ángulo, cuyo seno es *0,91.*

Como el seno dado se encuentra entre *0,71* y *1,* entonces, el ángulo buscado está entre *45°* y *90°*. En la figura 91, *BC* es el seno de ángulo *A,* si *BA = 1.* Sabiendo *BC*, es fácil de encontrar el seno de ángulo *B:*

$$AC^2 = 1 - BC^2 = 1 - 0,91^2 = 1 - 0,83 = 0,71$$

$$AC = \sqrt{0,71 = 0,42}$$

Ahora encontraremos el valor de ángulo *B, cuyo* seno es *0,42;* después de esto será fácil encontrar el ángulo *A, que* equivale a *90° - B.* Como *0,42* se encuentra entre *0,26* y *0,5,* entonces ángulo *B* está entre *15°* y *30°*. Se encuentra así:

$$0,42 - 0,26 = 0,16$$

$$\frac{0,16}{0,016} = 10^\circ$$

$$B = 15^\circ + 10^\circ = 25^\circ$$

$$A = 90^\circ . B = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

Ahora tenemos todo lo necesario para solucionar las tareas trigonométricas, pues ya sabemos buscar los senos a partir de los ángulos, y hallar los ángulos, conocidos sus senos, con exactitud suficientemente para nuestros objetivos.

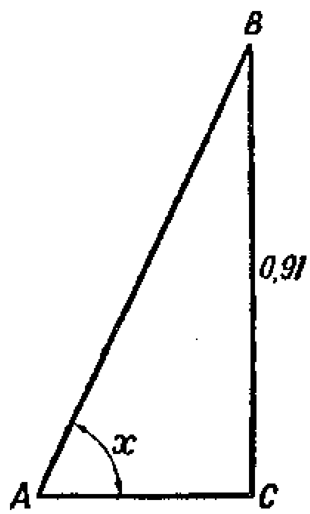


Figura 90. Cálculo del ángulo agudo con base en su seno.

Pero, ¿es solo basta conocer el seno? ¿No deberemos tener en cuenta otras funciones trigonométricas, como coseno, tangente, etc.? Ahora vamos a dar un par de ejemplos, donde solo se requiere saber el valor del seno, en nuestra trigonometría simplificada.

4. Altura del Sol.

Problema

La sombra *BC* (figura 91) de la pértiga *AB* con altura de *4,2 m* tiene *6,5 m* de longitud. ¿Cuál es la altura del Sol sobre horizonte en ese momento, o sea, cuál es el valor del ángulo *C*?

Solución

Es fácil comprender, que el seno del ángulo *C* es:

$$\frac{AB}{AC}$$

Pero:

$$AC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{4{,}2^2 + 6{,}5^2} = 7{,}74$$

Por eso el seno buscado equivale a:

$$\frac{4{,}2}{7{,}74} = 0{,}55$$

Por el método descrito anteriormente, buscamos el ángulo correspondiente y nos da *33°.*

La altura del Sol es de *33°*, con una precisión de ½º.

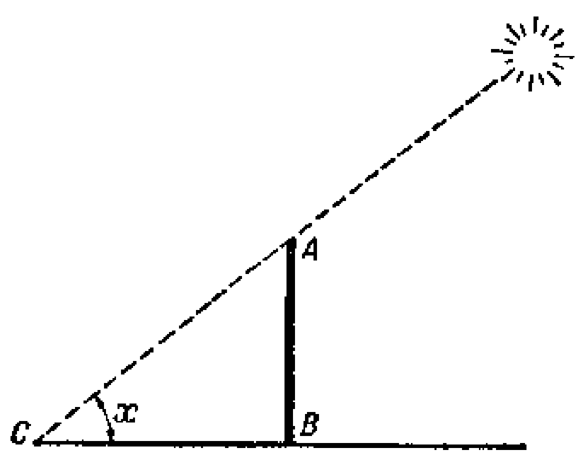


Figura 91. Encontrar la altura del Sol sobre el horizonte

5. Distancia hasta la isla.

Problema

Paseando con una brújula, cerca de río, vemos una isla *A* (figura 92) y deseamos hallar la distancia hasta ella, desde el punto *B*, situado en la orilla. Para ello buscamos el valor de ángulo *ABN,* formado por la línea *NS*, en dirección norte – sur, y por la recta *BA.* Luego medimos la recta *BC* y buscamos el valor del ángulo *NBC* entre ella y *NS*. Finalmente, hacemos lo mismo en el punto *C* para la recta *AC.*

Nuestros resultados son:

- La línea *AB*, se inclina respecto a *NS*, 52º hacia al este
- La línea *BC*, se inclina respecto a *NS*, 110º hacia al este
- La línea *AC*, se inclina respecto a *NS*, 27º hacia al este

longitud de *BC* = 187 m.

¿Cómo hallar la distancia *BA* a partir de estos datos?

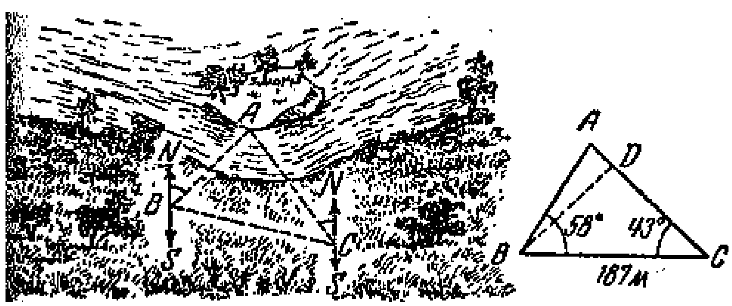


Figura 92. ¿Cómo calcular la distancia hasta la isla?

Solución

En el triángulo *ABC* conocemos:

El lado *BC*.

El ángulo *ABC* = 110º - 52º = 58º

El ángulo *ACB* = 180º - 110º - 27º = 43º.

Trazamos en este triángulo (figura 92, a la derecha) la altura *BD* y tenemos:

$$senC = sen43^{\circ} = \frac{BD}{187}$$

Calculando el sen 43º por el método visto, obtenemos 0,68. Entonces,

$$BD = 187 \times 0,68 = 127.$$

Ahora en el triángulo *ABD* conocemos el cateto *BD*, el ángulo $A=180° - (58° - 43°)= 79°$, el ángulo $ABD = 90° - 79° = 11°$; calculamos el *sen 11°* y obtenemos el valor: *0,19.* Por lo tanto *AD/AB = 0,19.* Por otra parte, por teorema de Pitágoras:

$$AB^2 = BD^2 + AD^2.$$

Colocando *0,19* x *AB*, en lugar de *AD,* y 127 en lugar de *BD*, tenemos:

$$AB^2 = 127^2 + (0,19 \times AB)^2,$$

De donde: $AB \approx 128.$

Entonces la distancia hasta la isla es ≈ *128 m.*

No creo que los lectores tengan problemas para buscar el lado *AC*, sí acaso hace falta.

6. El ancho de un lago.

Problema

Para conocer el ancho del lago (figura 93), ustedes encontraron con la brújula, que la recta *AC* se inclinaba 21º hacia el oeste, y *BC* se inclinaba 21º hacia el este. La longitud *BC =68 m*, y la de *AC = 35 m*. Efectuar el cálculo a partir de estos datos.

Solución

En el triángulo *ABC* conocemos el ángulo de *43°* y las longitudes de sus lados, *68 m* y *35 m.* Trazamos la altura (figura 93, a la derecha) desde el vértice *AD;* tenemos que: sen *43° = AD/AC*

Calculamos, independientemente de esto, el sen *43°* y obtenemos: *0,68.* Entonces *AD/AC = 0,68, AD =0,68* x *35 = 24.* Luego calculamos el valor de *CD:*

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 35^2 - 24^2 = 649;\ CD = 25{,}5;$$

$$BD = BC - CD = 68 - 25{,}5 = 42{,}5.$$

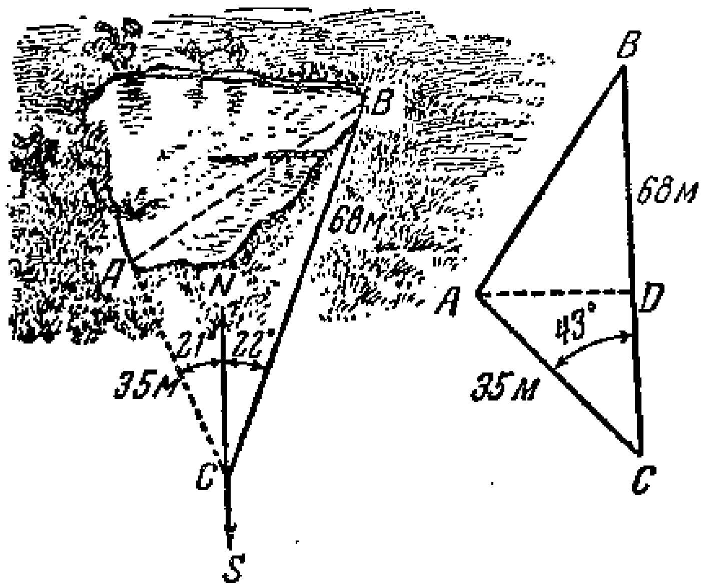


Figura 93. Cálculo del ancho del lago.

Ahora, del triángulo *ABD* tenemos:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 = 24^2 + 42{,}5^2 = 2380;$$

$$AB \approx 49.$$

Entonces, anchura buscada de lago es, aproximadamente, *49 m.*

Si necesitamos encontrar los otros dos ángulos, en el triángulo *ABC*, entonces, una vez hallado *AB = 49*, procedemos así:

$$senB = \frac{AD}{AB} = \frac{24}{49} \Rightarrow 0{,}49 \Rightarrow B = 29°$$

Se encuentra el tercer ángulo, *C*, restando de *180°* la suma de los ángulos de *29°* y *43°*; y se obtiene un valor de *108°.*

Puede ocurrir, que en el caso estudiado de la solución de triángulos (conocidos dos lados y el ángulo entre ellos se hallan los demás elementos) el ángulo no sea agudo, sino obtuso. Si, por ejemplo, en el triángulo *ABC* (dibujo 94) se conocen el ángulo obtuso y los dos lados adyacentes, *AB* y *AC,* entonces, se calculan los elementos restantes de la siguiente manera:

SE traza la altura *BD*, se calculan *BD* y *AD* en el triángulo *BDA*; luego se averigua el valor de *DA + AC*, y se hallan *BC* y sen *C,* calculando el valor de la razón *BD/BC*.

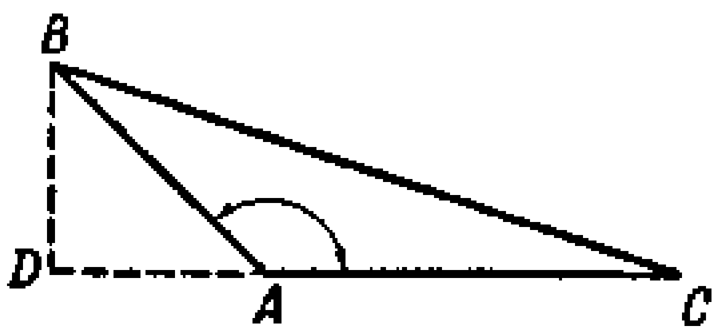


Figura 94. Para resolver el triángulo obtuso.

7. Terreno triangular.

Problema

Durante la una excursión nosotros habíamos medido a pasos los lados de un terreno triangular y encontramos que miden *34, 60* y *54.* ¿Cuáles son ángulos del triángulo?

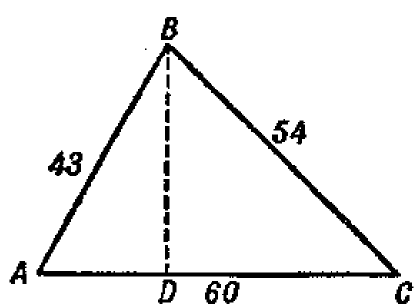


Figura 95. Encontrar los ángulos de este triángulo: 1) mediante cálculos, 2) con ayuda del transportador.

Solución

Este es el caso más difícil de resolver: Calcular los elementos del triángulo conocidos sus tres lados. Sin embargo, podemos lograrlo, sin utilizar ninguna función diferente al seno.

Trazando la altura *BD* (figura 95) sobre el lado *AC*, tenemos:

$$BD^2 = 43^2 - AD^2,\ BD^2 = 54^2 - DC^2,$$

de donde:

$$43^2 - AD^2 = 54^2 - DC^2,$$

$$DC^2 - AD^2 = 54^2 - 43^2 = 1070.$$

Pero:

$$DC^2 - AD^2 = (DC + AD)\ (DC - AD) = 60\ (DC - AD).$$

Se deduce que:

$$60\ (DC - AD) = 1070 \text{ y } DC - AD = 17,8.$$

De las dos ecuaciones:

$$DC - AD = 17,8 \quad \text{y} \quad DC + AD = 60$$

Obtenemos:

$$2DC = 77,8, \text{ es decir que } DC = 38,9.$$

Ahora es fácil de calcular la altura:

De aquí encontramos:

$$BD = \sqrt{54^2 - 38,9} = 37,4$$

$$senA = \frac{BD}{BC} = \frac{37,4}{43} = 0,87 \Rightarrow A \approx 60°$$

$$senC = \frac{BD}{BC} = \frac{37,4}{54} = 0,69 \Rightarrow C \approx 44°$$

El tercer ángulo vale:

$$B = 180 - (A + C) = 76°$$

Si en este caso se efectúa el cálculo con ayuda de las tablas, siguiendo todas las reglas de trigonometría, obtendremos los ángulos, expresados en grados y minutos. Como los lados se midieron a pasos, entonces, sería un error dar los resultados en grados y minutos, porque las distancias medidas a pasos, presentan un error entre *2* y *3%.* Entonces, para qué llamarnos a engaño, debemos redondear los "verdaderos" valores de los ángulos obtenidos, a valores enteros, en grados. Y luego obtenemos los mismos resultados, como lo hicimos antes, aplicando un método más sencillo. Se hace evidente acá la importancia de nuestra trigonometría "de campaña".

8. Cálculo del ángulo sin ningún tipo de medición.

Para medir los ángulos de un terreno necesitamos por lo menos una brújula; sin embargo, a veces basta con usar los dedos o una caja de cerillas. Pero se puede presentar el caso extremo de medir los ángulos en un mapa o en un plano.

Evidentemente, si tenemos transportador, entonces se resuelve el problema fácilmente. ¿Y si no se tiene? Un geómetra no se pierde en este caso. ¿Cómo se soluciona este problema?

Problema

En la figura 96 hay un ángulo *AOB,* menor que *180°*. Encuentren su valor sin efectuar ninguna medición.

Solución

Desde un punto cualquiera del lado *BO* se puede trazar una perpendicular al lado *AO,* en el triángulo rectángulo obtenido, se miden los catetos y la hipotenusa, se encuentra el seno del ángulo, y luego el valor de dicho ángulo (veamos el apartado “Encontrar el ángulo conociendo el seno”). Pero esta solución no corresponde a nuestras difíciles condiciones: ¡Sin efectuar ninguna medición!

Empleamos entonces la solución que propuso Z. Rupeyka, de la ciudad Kaunas, en el año 1946.

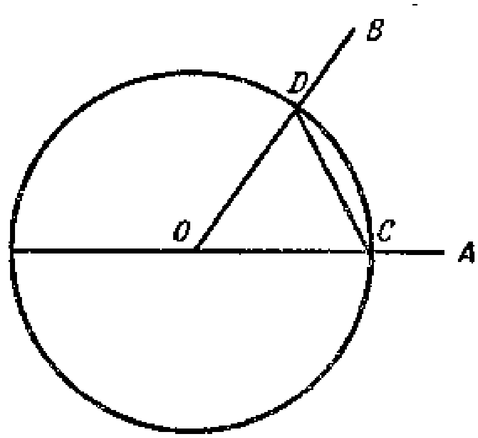


Figura 96. ¿Cómo encontrar el valor del ángulo AOB, utilizando solo el compás?

Desde el vértice *O,* como centro, con una abertura arbitraria del compás, trazamos una circunferencia. Por sus puntos de intersección, *C* y *D*, trazamos el segmento entre los lados del ángulo.

Ahora con centro en el punto *C* y con radio *CD*, trazamos con el compás otra circunferencia. Repetimos el procedimiento, en el mismo sentido, con la misma apertura del compás, tomando como centro el punto de intersección entre la circunferencia con centro en *O* y la última circunferencia trazada, hasta que al trazar una nueva circunferencia, esta pase de nuevo por el punto *C*.

Después de esto, contamos cuantas vueltas dimos alrededor de la circunferencia y cuantas cuerdas tendimos sobre la circunferencia inicial.

Supongamos, que dimos *n* vueltas alrededor de circunferencia y tendimos *S* cuerdas de longitud *CD*. Entonces, el ángulo buscado será:

$$\angle AOB = \frac{360^\circ n}{S}$$

En realidad, se aprecia mejor el ángulo de *x°*; tendiendo la cuerda *CD* sobre la circunferencia, *S* veces, como si aumentáramos *S* veces el ángulo de *x°*, pero como dimos *n* vueltas alrededor de la circunferencia, entonces el ángulo se calcula sobre una distancia de *360°* x *n,* es decir que, *x°* x *S = 360°;* de aquí se obtiene la expresión:

$$x° = \frac{360° n}{S}$$

Si se tiene un ángulo con, *n = 3, S = 20*; este medirá, *∠AOB = 54°* (¡Compruébenlo!). A falta de compás, podemos circunscribir la circunferencia con ayuda de un alfiler y una tira de papel; trazamos la cuerda, utilizando también la tira de papel.

Problema

Encuentren mediante el método descrito, los ángulos del triángulo de la figura 95.

Capítulo 6
Donde la Tierra se Junta con el Cielo

Contenido:

1. El horizonte

En la estepa o en un campo llano nosotros estamos en el centro de una circunferencia que limita la superficie terrestre que podemos apreciar con los ojos. Es el horizonte. La línea del horizonte es imperceptible: Cuando nos acercamos a ella, ésta se aleja. Aunque es inalcanzable, realmente existe; no es una ilusión ni un espejismo.

Para cada punto de observación hay un límite visual de la superficie, y no resulta difícil de hallar la distancia a la que se encuentra. Para comprender las proporciones geométricas, relacionadas con el horizonte, observemos la figura 97, que nos muestra una parte de la esfera terrestre. *CD* es la altura sobre la superficie a la que se halla un punto *C*, en el que se encuentra el ojo del observador. ¿A qué distancia alcanza a ver el observador la superficie terrestre? Evidentemente, hasta los puntos *M*, *N*, donde la línea visual roza la superficie: la tierra más lejana queda por debajo de la visual. Los puntos *M*, *N* (y otros en la circunferencia *MEN*) representan el límite visible de la superficie terrestre, es decir, que forman la línea del horizonte. El observador ve que allí el cielo se une con la tierra, porque observa al mismo tiempo el cielo y algunos objetos terrestres.

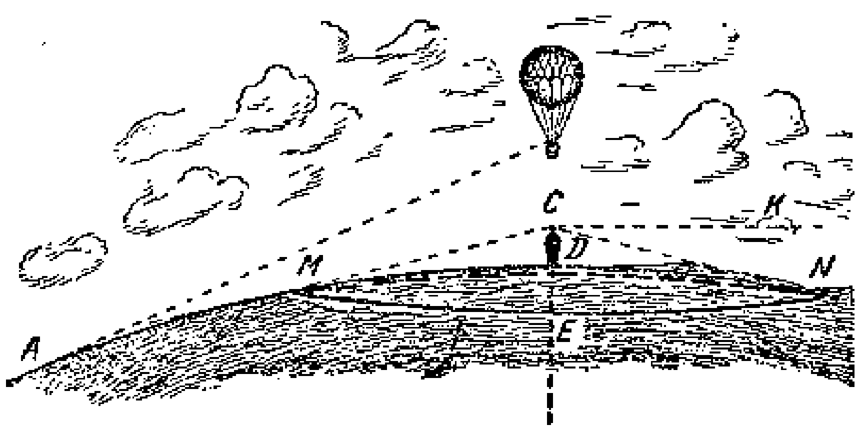


Figura 97. El horizonte

Puede parecernos, que la figura 97 no muestra una verdadera imagen de la realidad: en el mundo real, siempre está el horizonte al nivel de los ojos, mientras que en el dibujo el círculo está por debajo del observador.

Realmente, siempre nos parece que la línea del horizonte está al mismo nivel de los ojos, y que asciende, cuando nosotros subimos. Pero se trata de una ilusión: en realidad, la línea del horizonte siempre está por debajo de nuestros ojos, como se ve en la figura 97. Pero el ángulo formado por las líneas rectas *CN* y *CM* con la recta

CK, perpendicular al radio en el punto *C* (este ángulo se llama “descenso del horizonte"), es demasiado pequeño, y no se puede medir sin instrumentos.

Durante la investigación notamos otro hecho curioso. Hemos dicho que cuando se eleva el observador sobre la superficie terrestre, por ejemplo en un aeroplano, la línea del horizonte se ubica a nivel de los ojos, es decir, que asciende a la par con el observador. Si este sube bastante, le parecerá que la tierra por debajo del aeroplano está *situada por debajo de la línea del horizonte,* en otras palabras, la tierra parece una taza hundida, cuyo borde corresponde a la línea del horizonte. En las “Aventuras de Granza Pfal”, Edgar Alan Poe hace una buena descripción y presenta una clara explicación de este fenómeno.

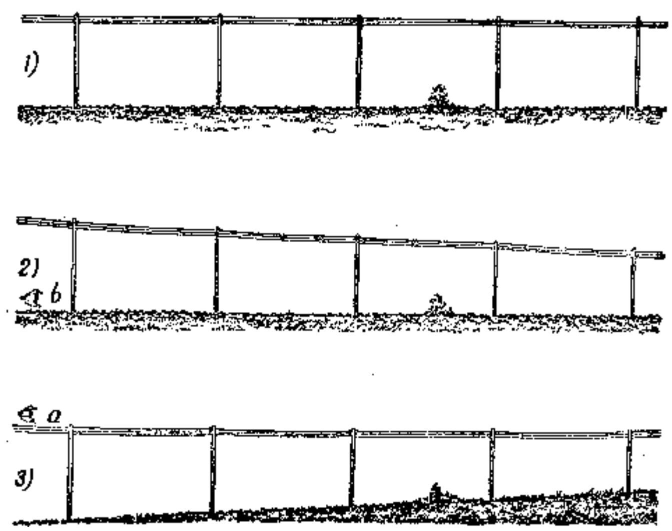


Figura 98. ¿Qué ve el ojo, al observar una serie de postes telegráficos?

“Sobre todo, dice su protagonista aeronauta, me había sorprendido aquella situación, la superficie terrestre parecía cóncava. Esperaba ver un hundimiento durante el ascenso; considero que solo he hallado una respuesta a este fenómeno. La línea vertical, trazada desde mi globo hasta la tierra, corresponde al cateto del triángulo rectángulo, cuya base es la línea que va desde el fondo de la inclinación hasta el horizonte, y la hipotenusa, la línea desde el horizonte hasta el globo. Pero mi altura es poca comparada con el campo visual; en otras palabras, la base y la hipotenusa del triángulo rectángulo imaginario, son tan grandes a comparación del cateto vertical, que parecen paralelas. Por eso, cualquier punto que está por debajo del aeronauta, siempre parece estar por debajo del nivel horizontal. De aquí que dé la impresión de estar hundido. Y esto se presenta hasta que el ascenso resulta bastante significativo, cuando la base del triángulo y su hipotenusa parecen estar paralelas."

Agreguemos otro ejemplo más. Imaginen una serie de postes telegráficos (figura 98). Si se sitúa el ojo en el punto *b*, sobre el piso, la fila de postes presenta el aspecto mostrado con el número 2. Pero se sitúa el ojo en el punto *a,* por encima de los postes, la fila tomara el aspecto marcado con el número 3, es decir, que la tierra parece elevarse sobre el horizonte.

2. Un barco en el horizonte.

Cuando vemos desde la costa, aparecer un barco en el horizonte, nos parece ver el barco, no en el mismo punto en que realmente está situado (figura 99), sino más cerca, en el punto *B,* donde nuestra visual es tangente a la concavidad del mar. Observando a simple vista, no dejamos de pensar que el barco está en el punto *B;* y no detrás del horizonte.

Figura 99. Barco detrás de horizonte.

Sin embargo, con el catalejo, se observa con mayor claridad cuán lejos se encuentra el barco.

No es lo mismo mirar con el catalejo, objetos cercanos y lejanos: el catalejo tiene el foco a gran distancia, si se apunta con el catalejo al horizonte, los objetos se ven poco definidos; si por el contrario, se dirige el catalejo hacia los objetos, se ve el horizonte como si estuviera cubierto de niebla.

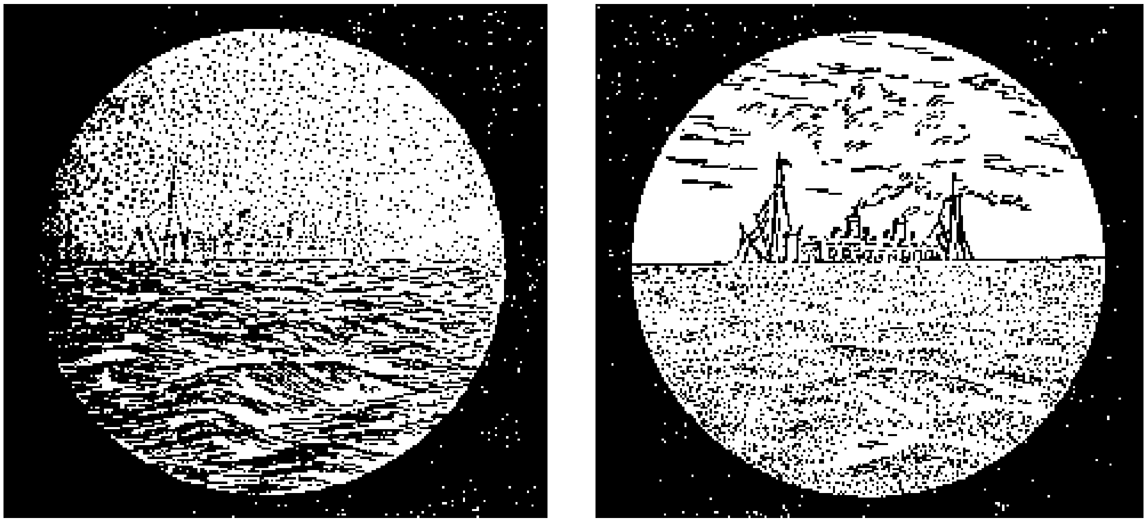


Figura 100 y 101. Barco detrás del horizonte, observado con un catalejo.

Si apuntamos fijamente el catalejo (con suficiente aumento) sobre el horizonte, se ve claramente la superficie del agua, pero el barco se ve poco definido, alejándose al máximo del punto de observación (figura 100). Si en cambio dirigimos el catalejo hacia el barco, podemos ver su contorno, escondido detrás del horizonte, y notamos que la superficie del agua pierde definición y parece estar cubierta de niebla (figura 101).

3. La distancia del horizonte.

¿Qué tan lejos se encuentra línea del horizonte del observador? O sea, ¿Cuál es el tamaño del radio de la circunferencia, dentro de cual nos encontramos en este momento? ¿Cómo calcular la distancia del horizonte, conociendo la altura del observador sobre la superficie?

La tarea consiste en medir el valor del segmento de tangente, *CN* (figura 102), que va desde el ojo del observador hasta la superficie.

La tangente, como bien sabemos de la geometría, es la media proporcional entre el segmento exterior *h* de la secante que pasa por el centro de la Tierra, y la longitud total de dicha secante, *h+2R,* donde *R* es el radio de globo terrestre. Es decir que:

$$\frac{h}{CN} = \frac{CN}{h+"R}$$

De donde:

$$CN^2 = h(h + 2R)$$

Como la altura del observador sobre la superficie, normalmente es muy pequeña en comparación al diámetro terrestre (*2R*), (esta altura, por ejemplo, para un aeroplano que vuela a máxima altura es ≈ *0,001* de su tamaño), *2R+h* se aproxima a *2R,* y la fórmula se simplifica así:

$$CN^2 = 2hR$$

Entonces, podemos calcular la distancia del horizonte mediante una fórmula muy simple.

$$\text{Distancia} = \sqrt{2Rh}$$

Donde *R* es el radio del globo terrestre (≈ *6.400 km*), y *h* la altura de la vista por encima de la superficie.

Como $\sqrt{6.400} = 80$, entonces la fórmula queda así:

$$Distancia = 80\sqrt{2h} = 113\sqrt{h}$$

donde *h* se expresa en kilómetros.

Este sencillo cálculo se realiza aplicando la geometría. Si deseamos especificarlo teniendo en cuenta los factores físicos que influyen en la distancia del horizonte, entonces, debemos recordar un factor llamado "refracción atmosférica". La refracción es la desviación de los rayos de luz en la atmósfera, y aumenta la distancia del horizonte en *1/15* de la distancia calculada (más del *6%*). El *6%* es una aproximación. La distancia del horizonte aumenta o disminuye según las circunstancias siguientes:

se aumenta *se disminuye*

con alta presión	con baja presión
cerca de la superficie terrestre	sobre una altura
cuando hace frío	cuando hace calor
por las mañanas y las tardes	al mediodía
con tiempo húmedo	con tiempo seco
por encima del nivel del piso	a nivel del piso

Problema

¿Qué tan lejos puede ver una persona, que está parada en una llanura?

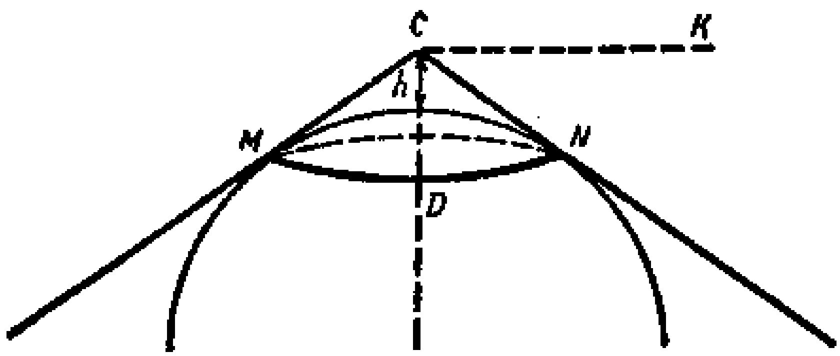


Figura 102. Problema del alcance sobre el horizonte

Solución

Sabiendo, que los ojos de un adulto se encuentran a *1,6 m*, sobre el piso o sea, á *0,0016 km,* tenemos:

$$Distancia = 113\sqrt{0,0016} = 4,52 km$$

Como sabemos que la refracción atmosférica cambia la dirección de los rayos, por lo tanto, el horizonte se aleja más del *6%,* o sea que tiene una mayor distancia a la hallada con la fórmula. Para realizar esta corrección, se multiplica *4,52 km* por *1,06*, obteniendo:

$$4,52 \times 1,06 \approx 4,8 \text{ km}$$

O sea que, una persona de estatura media que esté de pié en una llanura no ve más allá de *4,8 km.* El diámetro del círculo observado es de solo *9,6 km*, o sea, una superficie de *72* km^2. Esto es mucho menos de lo que piensa la mayoría de la gente que describe las lejanías de las estepas y las llanuras.

Problema

¿Qué tan lejos se ve el mar, desde una lancha?

Solución

La elevación de los ojos de una persona sentada en una lancha sobre el agua puede ser de *1 m,* ó sea, de *0,001 km,* entonces, la distancia del horizonte es:

$$Distancia = 113\sqrt{0,001} = 3,58 km$$

y teniendo en cuenta la refracción atmosférica, es de *3,8 km.* A los objetos muy lejanos se les ve su parte superior; su base está cubierta por el horizonte.

El horizonte se disminuye a la medida que los ojos están más bajos: a medio metro, por ejemplo, llega á *2 ½ km.* Por el contrario, al observar el horizonte desde puntos elevados su distancia aumenta: a *4 m,* por ejemplo, llega á *7 km.*

Problema

¿Qué distancia sobre la superficie de la Tierra pudieron observar los aeronautas, desde su nave "COAX–I", al momento de alcanzar su máxima altura?

Solución

Cuando el globo está a una altura de *22 km*, la distancia del horizonte es:

$$\text{Distancia} = 113\sqrt{22} = 530 km$$

Y, teniendo en cuenta la refracción, alrededor de *560 km.*

Problema

¿Cuántos kilómetros debería subir un piloto para ver unos *50 km* de la superficie terrestre?

Solución

De la fórmula sobre distancia del horizonte, en este caso tenemos ecuación:

$$50 = \sqrt{2Rh}$$

de donde:

$$h = \frac{50^2}{2R} = \frac{2.500}{12.800} = 0,2km$$

Entonces basta con subir á *200 m*. Si tenemos en cuenta la corrección por refracción, debemos quitar el *6%* de *50 km,* obteniendo *47 km*

Luego:

$$h = \frac{47^2}{2R} = \frac{2.200}{12.800} = 0,17km$$

O sea que solo necesita subir á *170 m*.

En el sitio más alto de Moscú, están construyendo un edificio de veintiséis pisos (figura 103), uno de los mayores centros docentes del mundo. Se destaca por su altura, *200 m* sobre el nivel del río Moscú.

Por lo tanto, desde los pisos más altos de la Universidad, se tiene una vista panorámica de *50 km* de radio.

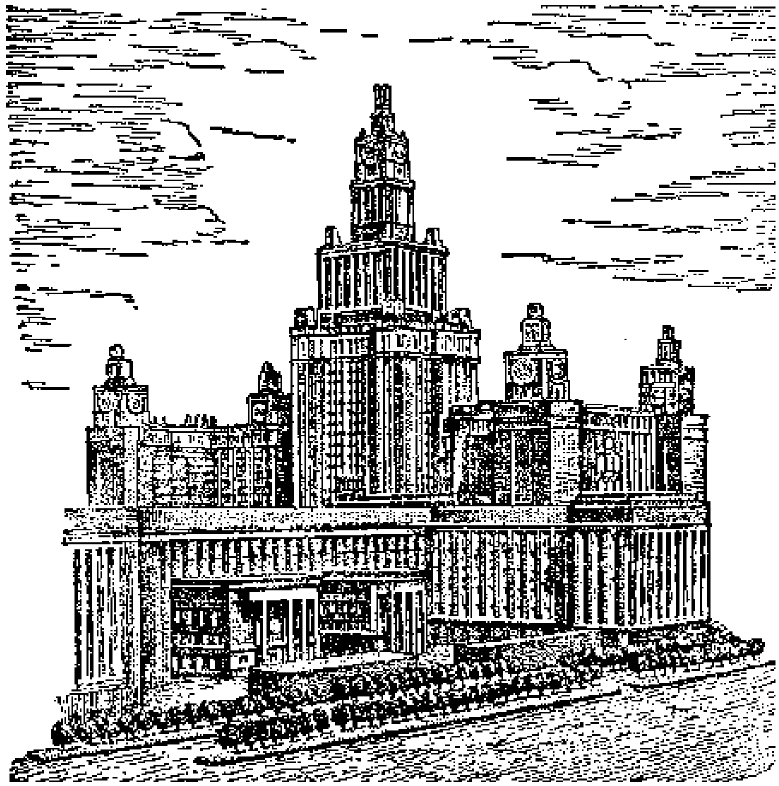


Figura 103. La universidad de Moscú (dibujo del proyecto del edificio en construcción)

4. La torre de Gogol.

Problema

Curioso resulta pensar, ¿qué se amplía más rápido, la altura de subida o la distancia del horizonte? La mayoría piensa que cuando el observador sube a mayor altura, más rápido aumenta el horizonte. Así pensó Gogol, escribiendo un artículo, sobre arquitectura contemporánea:

"Las torres de gran altura, enormes, son imprescindibles para la ciudad... Nosotros habitualmente tenemos un límite de altura, que nos deja la posibilidad de observar una sola ciudad, cuando necesitamos observar por lo menos centenar y medio de verstas[22] alrededor, y para eso es suficiente tener uno o dos pisos más arriba, y todo cambiará. El volumen del horizonte, sobre esa elevación va a crecer progresivamente". ¿Es cierto esto?

Solución

Basta observar la fórmula:

$$\text{Distancia} = \sqrt{2Rh}$$

para que, desde el principio, veamos el error de apreciación, según indica el enunciado del problema, el "volumen del horizonte'' aumentará con extremada rapidez, a medida que el observador va subiendo. Sin embargo sucede lo contrario, la distancia del horizonte aumenta con mayor lentitud que la altura porque es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la altura. Cuando la altura aumenta *100* veces, el horizonte se extiende solamente *10* veces. Cuando la altura se eleva a más de *1000* veces, el horizonte se extiende solamente *31* veces. Por eso, es un error pensar, que "es suficiente tener uno o dos pisos más arriba, - y todo cambiara''. Si se construyen sobre un edificio de ocho pisos, dos más, la distancia se aumenta en:

$$\sqrt{\frac{10}{8}}$$

es decir, en *1,1* veces, o sea un *10%.* Es poco perceptible la variación.

La construcción de la torre, desde la cual podamos, "observar por lo menos centenar y medio de verstas", es decir, *160 km;* es irrealizable. El escritor, evidentemente, no sospechaba, que la torre debe de tener una altura enorme.

De la ecuación:

$$\text{Distancia} = 160 = \sqrt{2Rh}$$

Obtenemos:

$$h = \frac{160^2}{2R} = \frac{25.600}{12.800} = 2km$$

Es la altura de una montaña muy alta. Uno de los mayores proyectos de la capital, es el edificio administrativo de *32 pisos,* donde que se elevará *280 m* sobre su base, siete veces más bajo que los proyectos del escritor Gogol.

5. La colina de Pushkin.

El mismo error cometió Pushkin, hablando sobre un horizonte lejano, observado desde la cima de una "colina imponente".

Y el zar pudo observar desde arriba
El valle, cubierto de toldos,
Y el mar, por donde corren los barcos...

Ya sabemos, que tan modesta es la altura de aquella colina: las tropas de Atila no han podido levantar una colina de más de *4 ½ m.* Ahora podemos calcular, cuanto aumentará el horizonte, al observarlo desde la cima.

La elevación de los ojos sobre el piso será de *4,5+ 1,5,* es decir, sobre *6 m,* y por lo tanto, distancia sería equivalente a:

$$\sqrt{2 \times 6.400 \times 0,006} = 8,8 km$$

O sea que serían *4 km* más que si se observara desde una superficie llana.

6. Dónde se juntan los rieles.

Problema

Seguramente habrán visto en repetidas ocasiones cómo se estrecha la vía férrea a lo lejos. ¿Pero han calculado el punto donde se junta un riel con el otro? Ahora Uds. tienen suficientes conocimientos para resolver este ejercicio.

Solución

Recordemos, que cualquier objeto se convierte en un punto (para un ojo normal), cuando se mira bajo un ángulo de *1',* es decir, cuando está apartado sobre *3.400* veces su diámetro. El ancho (trocha) de una vía férrea es variable, pero lo asumiremos de *1,52 m.* entonces los rieles deberían unirse en un punto a una distancia de *1,52 x 3.400 =5,2 km.*

Así que, si tenemos la posibilidad de observar la vía férrea a lo largo de *5,2 km,* veremos como ambos rieles se juntan en un punto.

En una superficie llana el horizonte está realmente a menos de *5,2 km,* exactamente á *4,4 km.*

Por lo tanto, una persona a simple vista, parada en un sitio llano, no puede ver el punto de unión de los rieles. Solo podría ver el punto únicamente bajo las siguientes condiciones:

1. si su agudeza de vista es baja, porque los objetos se juntan para ella en ángulo de vista, mayor que *1'.*

2. si el ojo de observador está por encima de la tierra, a más de:

$$\frac{5{,}2^2}{2R} = \frac{27}{12.800} = 0{,}0021 km = 210 cm$$

7. Problemas sobre un faro.

Problema

En una costa se encuentra un faro, su parte superior se encuentra á *40 m* sobre el nivel del mar. ¿A qué distancia puede verse el faro desde un barco, si la persona que lo está observando se halla a una altura de *10 m* sobre el nivel del mar?

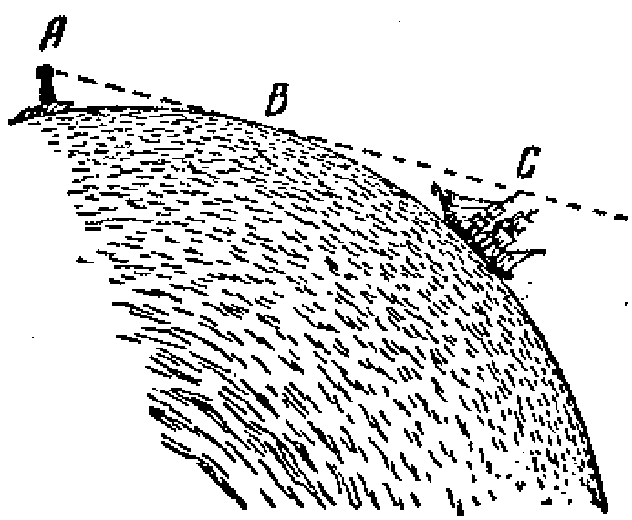


Figura 104. Problemas sobre el faro.

Solución

En la figura 104 se ve, que para resolver este problema hay que calcular la longitud de la línea recta *AC,* formada por dos segmentos, *AB* y *BC.*

AB es la distancia del horizonte desde la parte superior del faro que está a *40 m sobre la superficie*; y *BC* es la distancia del horizonte a una altura de *10 m sobre la superficie.* Por lo tanto, el trayecto buscado será:

$$113\sqrt{0,04}+113\sqrt{0,01}=113\times(0,2+01)=34km$$

Problema

¿Desde qué parte de aquel faro se ve una persona que se encuentra a *30 km* de distancia?

Solución

En la figura 104 se ve claramente el procedimiento a seguir. Pero antes de continuar se debe hallar la longitud de *BC*, y restarla luego de la longitud total *AC,* es decir, que se debe restar de *30 km,* para saber la distancia *AB.* Sabiendo *AB,* encontramos la altura, desde la que se alcanza a observar sobre el horizonte a una distancia *AB.* Realicemos los cálculos:

$$BC=113\sqrt{0,01}=11,3km$$

30 -11,3 = 18,7 km

$$altura=\frac{18,7^2}{2R}=\frac{350}{12.800}=0,027km$$

pero, desde una distancia de *30 km* no se observan los *27 m* de la parte inferior del faro, por tanto quedan *13 m.* de su parte superior. Es decir que se puede ver la persona de la que habla el problema si nos ubicamos en cualquier punto sobre los últimos *13 metros* del faro.

8. El rayo.

Problema

Cayó un rayo a una altura de *1,5 km*, por encima de nuestra cabeza. ¿A qué distancia pudimos observar el rayo?

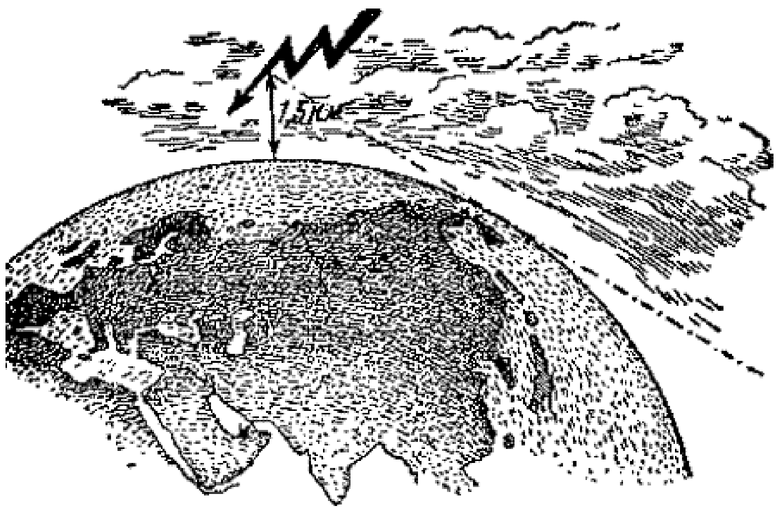


Figura 105. El problema del rayo

Solución

Debemos calcular (figura 105) la distancia del horizonte para una altura de *1,5 km*. La distancia es:

$$113\sqrt{1,5} = 138 km$$

Entonces, si el terreno es llano, el rayo fue visto por una persona parada a nivel de tierra, a una distancia de *138 km* (con el *6%* de corrección por refracción se obtiene una distancia de *146 km*).

En puntos situados a más de *146 km,* se habrá visto el rayo en el horizonte; y como el sonido no llega a esta distancia, entonces se habrá observado el rayo como un relámpago, sin trueno.

9. El velero.

Problema

Estamos en la costa, cerca del mar, y observamos un velero que se aleja. Sabemos que el mástil alcanza una altura de *6 m* sobre el nivel del mar. ¿A qué distancia empezará a ocultarse el velero detrás del horizonte y a qué distancia desaparecerá del todo?

Solución

El velero empezará a ocultarse (veamos la figura 99) en el punto *B*, a una distancia mayor que la distancia del horizonte para una persona de estatura mediana; es decir, á *4,4 km.* Desaparecerá definitivamente en el punto donde la distancia desde *B* es:

$$113\sqrt{0,006} = 8.7\,km$$

Entonces, el velero desaparecerá completamente, de la costa a:

$$4,4 + 8,7 = 13,1\ km.$$

10. Horizonte en la Luna.

Problema

Hasta ahora todos nuestros cálculos dependieron del globo terrestre. ¿Pero cómo varía la distancia del horizonte, si el observador se encuentra en otro cuerpo celeste, por ejemplo, en la Luna?

Solución

El problema se soluciona por la misma fórmula; distancia del horizonte es $\sqrt{2Rh}$, pero en este caso en vez de *2R* tenemos que poner la longitud de diámetro de la Luna. Y como el diámetro es *3.500 km,* entonces, a la elevación del ojo encima de superficie á *1,5 m* tenemos:

$$\text{Distancia del horizonte} = \sqrt{3.500 \times 0,0015} = 2,3\,km$$

En la Luna es posible ver a más de *2 ½ km.*

11. En el cráter lunar.

Observando la luna desde un cohete, podemos ver gran cantidad de montañas de forma circular, formaciones geológicas que no se encuentran en la Tierra. Una de las más grandes montañas es el “cráter de Capernik”, tiene un diámetro exterior de *124 km*, y un diámetro interior de *90 km.* Los puntos más altos de la cresta llegan a tener una altura sobre superficie de la cuenca interior de *1500 m.* ¿Si ustedes estuvieran en la parte media de la cuenca interior, podrían ver desde allí la cresta del cráter?

Solución

Para contestar a esta pregunta, tenemos que calcular la distancia del horizonte desde la cresta del cráter, es decir, a una altura de 1,5 km.

En la Luna ella esta distancia es de $\sqrt{3.500 \times 1,5} = 23 km$. Agregando la distancia del horizonte para una persona de estatura mediana, obtenemos la distancia a la cual desaparece la cresta de cráter detrás del horizonte *23 + 2,3 = aproximadamente 25 km.*

Y como desde el borde del cráter hasta el centro hay *45 km,* entonces, no es posible ver aquella cresta desde el centro del cráter. Esta solo se podrá ver se sube a las montañas centrales, que se elevan desde el fondo del cráter, a una altura de *600 m.* [23]

12. En Júpiter.

Problema

¿Cuál es la distancia del horizonte en Júpiter, donde el diámetro es de *11* veces mayor que el de la Tierra?

Solución

Si Júpiter está cubierto por costera dura y tiene superficie llana, entonces, una persona parada sobre su superficie, podrá ver hasta una distancia de:

$$\sqrt{11 \times 12.800 \times 0,0016} = 15 km$$

13. Ejercicios Adicionales

- Calcular la distancia del horizonte para el periscopio de un submarino, ubicado a 30 cm sobre la superficie del mar.
- ¿A qué altura tendría que subir el piloto por encima del lago de Ladoga, para ver las dos orillas al mismo tiempo, separadas una distancia de *210 km*?
- ¿A qué altura tendría que subir el piloto entre San Petersburgo y Moscú para ver las dos ciudades al mismo tiempo? El trayecto de San Petersburgo a Moscú es de *640 km.*

Capítulo 7
Geometría de los Robinsones.

(*Algunas páginas de Julio Verne*)

Contenido:

1. Geometría celeste.

Abrió el abismo, lleno de estrellas;
No hay fin de estrellas, de abismo al fondo
Lomonosov

Hubo un tiempo, cuando el autor de este libro se estuvo preparando para un futuro extraordinario: Hacer el papel de un náufrago. Mejor dicho, hacerme el Robinson.

De llegar a realizarse éste en el futuro, el libro actual podrá ser escrito de mejor forma o no ser escrito. No he conseguido ser el Robinson, lo que ahora me aflige demasiado. Sin embargo, durante la adolescencia creía en mi vocación de ser un

Robinson y me preparaba muy en serio. Es que un Robinson tenía que estar dotado de conocimientos y mucha práctica, no obligatoria para gente de otras profesiones.

¿Qué debe hacer un náufrago, primordialmente, cuando se encuentra en una isla? Evidentemente encontrar su ubicación geográfica, latitud y longitud. De esto, desafortunadamente, se dice muy poco en la mayoría de las novelas. En la edición del "Robinson Crusoe" original, sobre este tema encontramos solo una línea:

> *"En aquellas latitudes, donde está situada mi isla (es decir, según indican mis cálculos, en 9° 22' al norte de ecuador)…".*

Una sensible reducción del tiempo me ha consternado, cuando ya me estaba preparando para mi futuro. Estuve dispuesto a dejar mi carrera de único habitante de la isla salvaje, cuando encontré el secreto de la "Isla Misteriosa" de Julio Verne.

No preparo a mis lectores para ser Robinsones, pero sí enseñar las formas más simples de buscar la latitud geográfica, pues pienso, hacen falta. Estos conocimientos han de ser útiles, no solo encontrándose en una isla desconocida. Cuando aún tenemos tantos sitios habitados que no están señalados en el mapa, cualquier lector puede enfrentarse con la tarea de encontrar la latitud geográfica. No hace falta ponerse en camino de aventuras marítimas para ser un Robinson, buscando por vez primera su ubicación geográfica.

Primordialmente, cabe decir, que este trabajo no es tan difícil. Observando por la noche el cielo, vemos, que las estrellas lentamente circunscriben círculos inclinados, parece que toda la cúpula armoniosamente gira sobre su eje invisible. En realidad, nosotros mismos giramos a la par con la Tierra, circunscribiendo círculos junto a su eje, en sentido inverso. En el hemisferio norte, el punto único de la cúpula, el que tiene ubicación fija es aquel donde se apoya la continuación del eje terrestre. Es el polo norte; está situado cerca de una brillante estrella en la cola de la Osa Mayor, la estrella Polar. Encontrándola en nuestro cielo nórdico, hallaremos donde está situado el polo norte del mundo. Buscarlo no es difícil, si primero encontramos la constelación de la Osa Mayor. Trazamos una línea recta a través de sus estrellas extremas, como vemos en la figura 106 y a continuación, a una distancia de longitud aproximada a la de toda la constelación, hallamos la estrella Polar.

Es un punto en el cielo, que vamos a necesitar para encontrar la latitud geográfica. Otro punto, se llama cenit, es un punto del cielo, ubicado verticalmente sobre nuestra cabeza.

Explico, el cenit es un punto del cielo, donde se apoya la prolongación de aquel radio terrestre que cruza por el sitio en que nos encontramos.

El ángulo del arco del cielo entre nuestro cenit y la estrella Polar, es el ángulo de nuestra ubicación con el Polo Norte geográfico. Si nuestro cenit está a una distancia de *30°* de la estrella Polar, entonces, nosotros estamos a *30°* del Polo Norte geográfico, es decir, a 60° del círculo ecuatorial; dicho de otra manera, estamos en el paralelo *60°.*

Figura 106. Búsqueda de la estrella polar.

Por lo tanto, para encontrar la latitud de cualquier sitio, se necesita traducir en grados la “distancia del cenit’’ desde la estrella Polar; luego restamos de *90°* esta cantidad y hemos encontrado la latitud.

Podemos hacerlo también de otra manera. Como el arco entre cenit y el horizonte es de *90°,* entonces, de *90°* restamos la distancia al cenit de la estrella Polar, y obtenemos la latitud del arco celeste desde la estrella hasta el horizonte; digamos que encontramos la altura de la estrella Polar sobre el horizonte. Por eso la latitud geográfica de cualquier sitio es equivalente a la altura de la estrella Polar sobre el horizonte de ese sitio.

Ahora, entienden ustedes que debemos hacer para encontrar la latitud. Durante una noche clara, encontramos en el cielo la estrella Polar y medimos su altura angular sobre horizonte; el resultado deja ver de inmediato la latitud buscada de este sitio.

Si deseamos tener un resultado más exacto, debemos tener en cuenta, que la estrella Polar no coincide con el polo del mundo, está a *1¼º* del polo.

Como la estrella Polar se mueve, describe alrededor del polo un círculo, manteniéndose por encima o por debajo de él, a la derecha o a la izquierda, a *1¼º*.

Encontrando la altura de la estrella Polar en su punto más alto y su punto más bajo, calculamos el promedio de ambas medidas. Esta será la verdadera altura del polo, y por lo tanto, la latitud buscada del sitio.

Como consecuencia de lo antedicho, no es necesario buscar la estrella polar: podemos elegir cualquier estrella brillante y midiendo su altura en ambos extremos sobre el horizonte, y obtenemos el promedio de estas medidas.

Finalmente encontraremos la altura del polo sobre el horizonte, que corresponde a la latitud del sitio. Pero es necesario saber cuando alcanza la estrella elegida su punto más alto y su punto más bajo, lo que complica el trabajo; y no siempre se tiene éxito al observarla durante una sola noche. Por eso resulta mejor trabajar con la estrella Polar para obtener resultados bastante aproximados, sin tener en cuenta su ligero desplazamiento respecto al polo.

Hasta el momento estábamos ubicados en el hemisferio norte. ¿Cómo procederían ustedes si estuviesen en hemisferio austral? Es lo mismo, únicamente hay una diferencia, allí se necesita hallar la altura del polo sur geográfico.

Por desgracia, cerca de este polo, no existe una estrella similar a la Polar. Conocida es la Cruz del Sur que brilla demasiado lejos del polo sur, y si deseamos sacar ventaja de las estrellas de esta constelación para buscar la latitud, debemos usar el promedio de dos medidas: la más alta y la más baja.

Los protagonistas de Julio Verne en la búsqueda de la latitud de su “isla misteriosa”, echaron mano, precisamente, de esta constelación del cielo austral.

Valioso resulta volver a leer aquel pasaje de la novela, en el que está descrito el trabajo.

Valioso resulta también, conocer como los nuevos Robinsones lograron su objetivo sin emplear instrumento geométrico alguno.

2. Latitud de la "isla misteriosa"

"Eran las 8 de la noche. La Luna todavía no había salido, pero con tonos pálidos y tiernos brillaba el horizonte, lo que podemos llamar un amanecer de Luna. En el cenit brillaban constelaciones del hemisferio austral y entre ellas la constelación de la Cruz del Sur. El ingeniero Smit observó por un momento la constelación.

- Gerbert – dijo después de unos momentos de reflexión, - ¿hoy es 15 de abril?

- Si, - respondió el joven.

- Si no me equivoco, mañana es uno de los cuatro días del año, en los que el tiempo real es equivalente al tiempo promedio: Mañana tomaré la posición del Sol en el meridiano, justo al mediodía de nuestro reloj[24]. Si hace buen tiempo, puedo encontrar la latitud de la isla.

- ¿Sin instrumentos?

- Por qué no. La tarde es clara, y por eso voy a probar encontrar la latitud de nuestra isla, midiendo la altura de la Cruz del Sur, es decir, la altura del polo sur sobre el horizonte. Y mañana al mediodía hallaré la latitud de la isla.

Si el ingeniero hubiese tenido un sextante, un instrumento usado en navegación para medir las alturas de los astros con la ayuda de los rayos de la luz reflejada, la tarea no hubiera sido difícil. Encontrando la altura del polo esta noche, mañana al mediodía, cuando el Sol pase por el meridiano de aquel lugar, podrá obtener las coordenadas geográficas de la isla - latitud y longitud. Mas no había sextante y debía suplirlo de alguna manera.

El ingeniero entró en la cueva. Con la luz de la hoguera cortó dos tablillas rectangulares, las que unió emulando las puntas móviles de un compás. Hizo la charnela con una espina de acacia, que encontró cerca de la hoguera.

Cuando el instrumento estuvo listo, el ingeniero volvió a la orilla. Necesitaba medir la altura del polo sobre el horizonte, es decir, por encima de nivel del mar. Para realizar sus observaciones fue a la planicie de Vista Lejana. Además, hay que tener en cuenta la altura de la planicie, sobre el nivel del mar. Mediante procedimientos de geometría elemental, podía efectuar esta medición al día siguiente.

El horizonte se iluminó de repente con los primeros rayos de la Luna, facilitando la observación. La constelación de la Cruz del Sur brillaba en el cielo de manera invertida: el extremo de la estrella *alfa*, indicaba el polo sur.

Esta constelación se sitúa respecto al polo sur, a una distancia un tanto mayor que la estrella Polar, respecto al polo norte. La Estrella *alfa* está a *27°* del polo; el ingeniero sabía eso y tuvo presente esta distancia en sus cálculos. Esperó el momento, en el que pasara la estrella por el meridiano, pues esto le simplificaba la operación.

Smit apuntó con una punta de su compás en dirección horizontal, y con la otra, hacia la estrella *alfa* de la Cruz del Sur, la abertura del compás le dio la altura angular de la estrella sobre el horizonte. Para fijar este ángulo, clavó con espinas, una tercera tablilla, en sentido transversal, sobre las dos que formaban el compás, inmovilizando así las puntas de éste.

Solo le faltaba encontrar el valor del ángulo, con respecto al nivel del mar, es decir, tener en cuenta cuanto se reduce el horizonte al bajar el nivel de la línea de vista del observador, por eso era imprescindible medir la altura de la roca[25]. El valor del ángulo da la altura de la estrella *alfa*, y por lo tanto, la altura del polo sobre el horizonte, es decir, que tanto la latitud geográfica en la isla, como en cualquier sitio del mundo, es equivalente a la altura del polo sobre horizonte de este sitio. Este cálculo se puede efectuar luego."

Ya mis lectores saben como medir una roca, según lo visto en el capítulo primero.

Dejando este pasaje de la novela, sigamos observando como desarrolló el ingeniero su trabajo:

"El ingeniero cogió el compás, que había construido antes, con ayuda del cual encontró la trayectoria angular entre la estrella *alfa* de la Cruz del Sur y el horizonte. Cuidadosamente midió el valor de este ángulo con ayuda del círculo, dividiéndolo en *360* partes, y encontró que era equivalente a *10°*. Entonces calculó la altura del polo sobre el horizonte, después de sumar los *10°* con los de *27°,* que separan la estrella del polo, y sobre el nivel del mar, midió la altura de la planicie desde donde había hecho la medición, y obtuvo *37°.* En concreto, la isla de Lincoln estaba situada a *37°* de latitud sur, o teniendo en cuenta el error de la medida, entre los paralelos *35* y *40.*

Ahora solo le faltaba encontrar su longitud. El ingeniero planeaba hacer este trabajo el mismo día, cuando sol pasara por el meridiano de la isla.”

3. Búsqueda de longitud geográfica.

“¿Pero cómo puede elegir el ingeniero el momento preciso, cuando el Sol atraviese el meridiano de la isla, sin tener instrumentos? Esta pregunta dejó preocupado a Gerbert.

El ingeniero hizo los preparativos necesarios para realizar la observación astronómica. Eligió en la orilla un sitio libre de obstáculos, aplanado por la marea. Colocó en este sitio una pértiga de seis pies, completamente vertical.

Gerbert comprendió que el ingeniero estaba presto a hacer el trabajo, buscando el momento en que el sol pasara a través del meridiano de la isla, o mejor dicho, al llegar el mediodía en aquel lugar.

Observaría la sombra dejada por la pértiga. Aunque resulta evidente que este método no es muy exacto, por carecer de instrumentos adecuados, le daría sin embargo, un resultado bastante aceptable.

El momento en que la sombra se hace más corta, es mediodía. Basta observar atentamente el movimiento del extremo de la sombra, para fijar este momento, cuando la sombra alcanza el tamaño mínimo, y otra vez empieza a aumentar. En este caso, la sombra actuaba como horario.

Mientras el ingeniero realizaba los cálculos, se inclinaba e iba clavando en la orilla pequeñas estacas, marcando, un punto tras otro, la disminución de la sombra de la pértiga.

Un periodista (uno de los compañeros del ingeniero) tenía a mano su cronómetro, preparándose para indicar aquel momento, cuando la sombra se hiciera más corta. Como el ingeniero estaba realizando la observación el día 16 de abril, es decir, en uno de aquellos días, en que el mediodía real coincide con el promedio, el periodista indicó la hora, empleando el cronómetro, y se anotó ésta sobre el meridiano de Washington (punto de partida de los aventureros).

El Sol avanzaba lentamente. La sombra se fue acortando poco a poco. Finalmente, cuando empezó a crecer de nuevo, el ingeniero preguntó:

- ¿Qué hora es?

- Las cinco y un minuto, - respondió el periodista.

La observación había terminado. Solamente faltaban algunos cálculos.

Los cálculos arrojaron que entre el meridiano de Washington y el meridiano de Lincoln había casi cinco horas de diferencia. Esto significa, que cuando en la isla es mediodía, en Washington son las cinco de la tarde. En veinticuatro horas, el sol avanza *1°* cada *4 minutos,* y *15º* cada hora. Si multiplicamos *15°* por *5* (diferencia horaria), obtenemos *75°*.

Washington está situado en el meridiano de *77° 3' 11"* al oeste del meridiano de Greenwich, empleado éste último por norteamericanos e ingleses, como meridiano de referencia. Por lo tanto, la isla se encuentra, aproximadamente, a *152°* de longitud oeste.

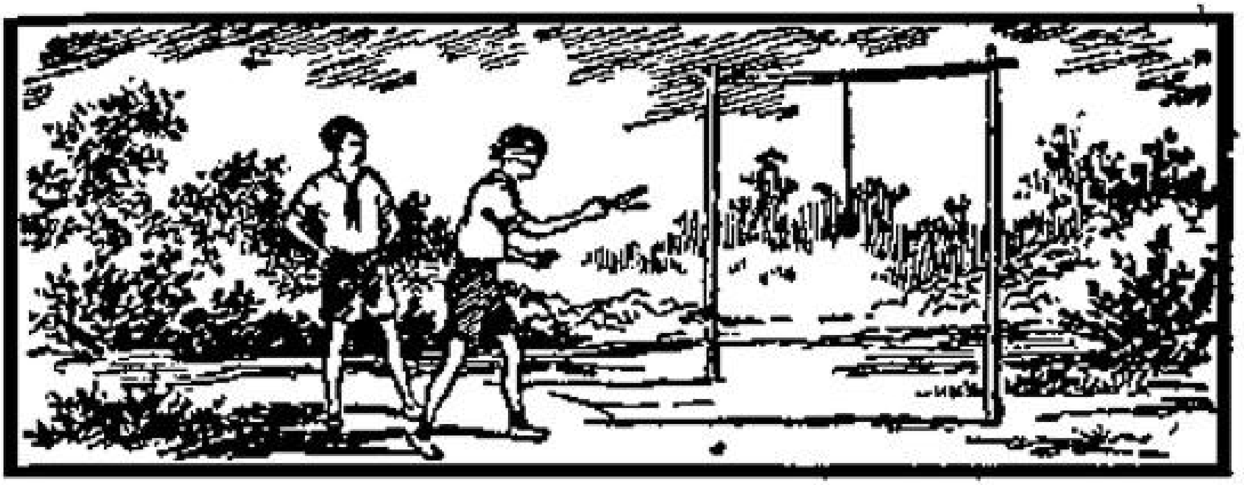
Teniendo en cuenta la baja exactitud de la observación, podemos decir, que la isla se encuentra entre los paralelos *35 y 40* de latitud austral y entre los meridianos *150 y 155*, al oeste de Greenwich."

Finalmente nos damos cuenta que existe muchas y muy variadas formas de hallar la latitud geográfica; uno de ellos es el método empleado por los protagonistas de Julio Verne (se conoce como el "método del transportador y el cronómetro"). Actualmente existen otros métodos más exactos para hallar la latitud, (este método no resulta adecuado para la navegación).

GEOMETRÍA RECREATIVA

SEGUNDA PARTE

ENTRE PASO Y BROMA EN GEOMETRÍA.



El sentido de la matemática es tan serio,
que es aconsejable no perder la
oportunidad de divertirse.
Pascal

Capítulo 8
Geometría a Ciegas

Contenido:

9. *Ángulo recto en la oscuridad*

1. En el fondo de una bodega

Saliendo de una atmósfera de aire libre y de mar, imaginemos de repente que estamos en una bodega oscura de un barco viejo, donde un joven protagonista de la novela de Mayn – Rid con éxito resolvió un problema matemático bajo circunstancias bastante difíciles. En la novela "El pequeño navegante", Mayn – Rid habla de un joven admirador de aventuras marítimas (figura 107), que sin tener los medios para pagar el viaje, entró en una bodega de un barco y permaneció encerrado allí todo el viaje. Buscando entre maletas encontró una caja con galletas y un tonel con agua. El chico se dio cuenta, que con esta provisión de agua y comida tenía que ser ahorrativo, y por eso tomó la decisión de dividirla en porciones para cada día.

Contar las galletas no fue tan difícil, ¿Pero cómo calcular las porciones de agua sin saber su cantidad total? Este era un problema para nuestro protagonista. Veamos, como le dio solución.

2. Como medir un tonel

"Yo necesitaba saber las porciones diarias de agua. Para esto necesitaba encontrar la cantidad total de agua, y luego dividirla en porciones.

Por suerte, en la escuela aprendí los primeros conocimientos de geometría: tenía idea de qué es un cubo, una pirámide, un cilindro, una esfera; sabía también, que un tonel se podía asimilar a dos troncos de cono unidos por sus bases mayores.

Para saber el volumen de mi tonel, necesitaba saber su altura (o la mitad de ésta), después, la circunferencia de uno de sus fondos y la circunferencia de la sección mediana, es decir, la parte más ancha del tonel. Conociendo estos datos, yo podía encontrar el volumen del tonel.

Encontrar esas cantidades fue complejo para mí.

¿Cómo hacer esta medición?

Encontrar la altura no sería tan difícil, tenía el tonel frente a mí; pero medir las circunferencias era más complicado pues yo no podía acercarme a ellas. Era muy pequeño para alcanzar arriba; además, estorbaban las cajas por todas partes.

Figura 107. El joven aventurero de la novela de Mayn – Rid

Existía además otra complicación: no tenía escala ni regla, que pudiera utilizar para las mediciones; ¿Cómo podría hallar las cantidades sin tener como medirlas? Mas tomé la decisión de no rechazar el plan, hasta tanto no encontrar la respuesta.”

3. La regla graduada (La tarea de Mayn – Rid)

Pensando en el tonel, con la decisión que tomó, de repente descubrió lo que le faltaba. Me ayudaría una varilla tan larga, que pudiera pasar a través del tonel en su sitio más ancho. Si meto la varilla en el tonel hasta el otro lado, voy a saber su diámetro. Me queda solo triplicar la longitud de la varilla, para saber la longitud de la circunferencia. No es muy exacto, pero es lo que suficiente para tener un estimado. Y como el agujero que hice antes en el sitio más ancho del tonel, entonces, pasando la varilla, tengo el diámetro, que necesito. ¿Pero donde encuentro una varilla? Bueno. Decidió aprovechar la tabla de una caja, y ahora mismo empezó el trabajo. La verdad, es que la tabla tenía *60 cm* de longitud, el tonel más del doble de ancho. Pero esto no fue motivo de problema, necesitaba preparar y unir tres palos cortos, para tener una varilla con suficiente largo.

Cortando la tabla a lo largo de las fibras, preparé tres palos lisos. ¿Cómo unirlos? Aproveché los cordones de mis zapatos, los que tenían longitud casi de metro. Atando los palos, formé una varilla de metro y medio.

Al comienzo de la medición, encontré otra dificultad. No era fácil pasar la varilla, había muy poco sitio y tampoco pude doblarla.

Rápidamente encontré la solución: la dividí en partes, medí la primera, luego até la siguiente, pasé la primera; empujando la segunda, le até la tercera.

Así marqué mi varilla: cuando tocó el lado opuesto, frente al agujero, le hice una marca junto al borde del tonel. Resté el ancho de las paredes, y obtuve el dato que necesitaba.

Saqué la varilla de la misma manera, teniendo sumo cuidado en sus empates, para poder armarla de nuevo, afuera, del mismo largo. Un pequeño error y podría tener un resultado equivocado.

De suerte, he podido tener el diámetro del tronco del cono inferior. Ahora tenía que encontrar el diámetro del fondo del tonel, igual al de la base superior. Puse la varilla sobre el tonel, toqué el borde opuesto y marqué el valor del diámetro. Esta operación no necesitó más que un minuto.

Solo me quedaba encontrar la altura del tonel. Bastaría, dirán ustedes, colocar verticalmente la varilla junto al tonel y marcar su altura. Pero dentro estaba muy oscuro y al poner la varilla verticalmente, no pude ver hasta que sitio llegaba. Tenía que actuar a ciegas.

Necesitaba encontrar con el tacto, el fondo del tonel, y el punto que alcanzaba la varilla. Además, la varilla se inclinaba debido al movimiento, y podría arrojar un resultado erróneo.

Pensando un poco, encontré como superar esta dificultad. Até solamente dos palos, el tercero lo puse sobre la base superior del tonel, de modo que sobresaliera entre *40 y 80 cm;* luego fijé el otro palo a un costado del tonel, formando un ángulo recto con el que sobresalía de la cara superior del tonel, quedando paralelo a la altura de éste.

Hice una marca en la vara que colgaba, en el punto donde esta tocaba el tonel, es decir, en el medio de este, encontré altura media del tonel, o sea, la altura de un cono truncado.

Ahora tenía todos los datos necesarios para resolver la tarea.”

4. Lo que debe reunir

Convertir el volumen del tonel en unidades cúbicas y después convertirlo en galones haciendo un cálculo aritmético, era fácil de efectuar. La verdad, es que realizar los cálculos no tenía como escribir, pues yo estaba en total oscuridad. A menudo tenía que hacer operaciones aritméticas de memoria, sin lápiz y papel. Mas no tendría que hacer las próximas operaciones con cantidades muy grandes.

Pero apareció otra dificultad, tenía tres datos: la altura del cono truncado y los diámetros de sus bases; pero ¿qué números correspondían a estos datos? Era necesario, antes de calcular, traducir los valores a números.

En el principio me pareció una tarea imposible de lograr, ya que no tenía ningún instrumento de medida. Pero recuerdo que en ese entonces yo había medido mi estatura; la que era equivalente a cuatro pies. ¿Cómo podría aprovechar este dato? Muy fácil: pude marcar cuatro pies en mi varilla y utilizarla para hacer los cálculos. Para marcar mi estatura, me tumbé en el suelo, y luego puse la varilla sobre mí, tocando el pie con uno de sus extremos y la frente con el otro. Sujeté la varilla con una mano, con la otra marqué sobre ella el punto en que tocaba mi cabeza.

Más adelante, hallé nuevas dificultades. La varilla de cuatro pies, no resulta de utilidad alguna para efectuar las mediciones, si no tiene marcadas las divisiones. No parece tan difícil dividir *4 pies* en 48 partes (pulgadas) y marcar la regla. En teoría es fácil; pero en la práctica, actuando a ciegas, resultó muy complicado.

¿Cómo encontrar la mitad de *4 pies*? ¿Cómo dividir cada mitad de la varilla otra vez a la mitad, y luego cada uno de los pies en *12* pulgadas?

Empecé preparando un palo de un poco más de *2 pies*. Comparándolo con la varilla, donde había marcado *4 pies,* vi que medía más del doble de esa longitud.

Corté repetidamente la varilla hasta que alcanzó *4 pies* de longitud.

Perdí mucho tiempo. Pero me alegró saber que logré algo útil.

Además, me di cuenta, que pude reducir el trabajo, cambiando la varilla por el cordón, que se podía doblar con mayor facilidad. Por eso aproveché los cordones de mis zapatos. Los até con un nudo fuerte, comencé el trabajo, poco tiempo después pude cortar un trozo de *1 pie.* Hasta ahora solo tenía que doblar a la mitad, era una tarea fácil. Luego debí doblar en tres partes, esto resultó más complicado. Pero lo logré, y poco después tuve tres trozos de cuatro pulgadas cada uno. Solo restaba doblarlos, una y otra vez, hasta tener trozos de *1 pulgada.*

Cuando ya tenía todo, me faltaba marcar las divisiones sobre la varilla; colocando cuidadosamente los trozos de medidos, hice *48* marcas, en pulgadas. Al final tuve mi propia regla con divisiones, con ayuda de la cual pude medir las longitudes que antes había tomado. El hecho de concluir esta tarea significó mucho para mí.

De inmediato empecé a hacer los cálculos. Promediando ambos diámetros, hallé la mitad de sus longitudes, encontré la superficie, correspondiente a sus diámetros. Así encontré el área de la base del cilindro, equivalente a dos conos de igual altura. Multiplicando el resultado por la altura, encontré el volumen buscado, en unidades cúbicas.

Dividiendo el número de las pulgadas cúbicas entre 69 (cantidad de pulgadas cúbicas en una cuarta), sabía, cuantas cuartas tenía mi tonel.

El contenido del tonel tenía más de cien galones, - *108* exactamente."

5. Comprobación del cálculo

El lector competente en geometría, sin duda, anota, que el método de cálculo de los dos conos truncados, empleado por nuestro protagonista, no es muy exacto. Si indicamos (figura 108) el radio de las bases menores con *r*, el radio de la base mayor con *R,* la altura del tonel, es decir, el doble de la altura de cada cono truncado, con *h,* entonces, el volumen, encontrado por el joven, se traduce en la fórmula:

$$\pi\left(\frac{R+r}{2}\right)^2 \times h = \frac{\pi \times h}{4}\left(R^2 + r^2 2Rr\right)$$

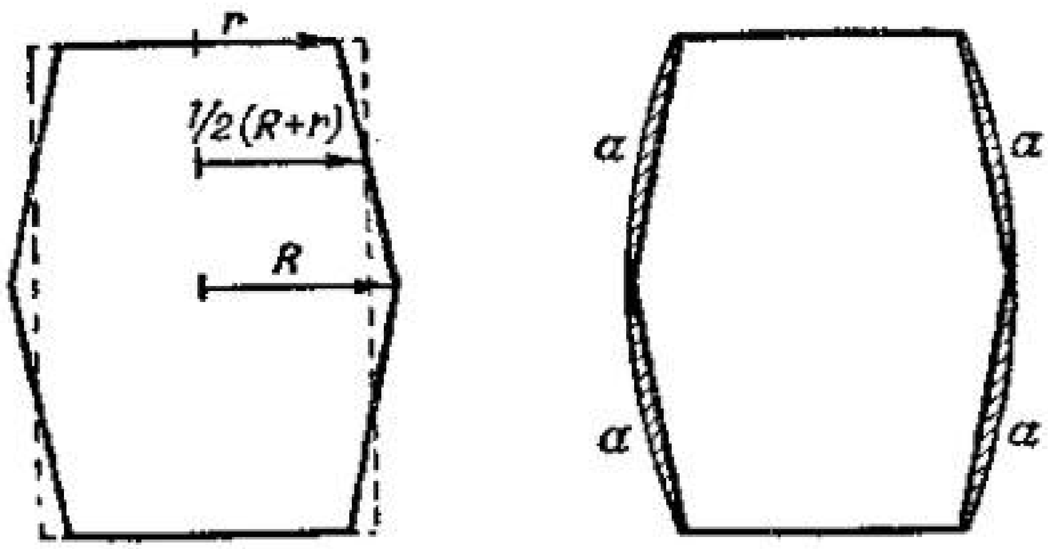


Figura 108. Comprobación del cálculo.

Además, siguiendo a las reglas geométricas, es decir, utilizando la fórmula del volumen del cono truncado, obtendremos la expresión:

$$\frac{\pi \times h}{3}\left(R^2 + r^2 + 2Rr\right)$$

Ambas expresiones no son idénticas, y es fácil verificar que la segunda es mayor de la primera en:

$$\frac{\pi \times h}{12}\left(R - r\right)^2$$

Quienes conozcan el álgebra, verán que la diferencia

$$\frac{\pi \times h}{12}\left(R - r\right)^2$$

es positiva, o sea que el muchacho halló el resultado por defecto.

Es interesante saber en cuanto se reduce el valor. Los toneles, se construyen usualmente así: el radio de la base mayor supera el radio de la base menor en *1/5* de él, es decir:

$$R = r + \frac{R}{5}$$

Sabiendo, que el tonel ha sido fabricado de esta forma, podemos hallar la diferencia entre la cantidad obtenida y el volumen real de los conos truncados:

$$\frac{\pi \times h}{12} \times (R - r)^2 = \frac{\pi \times h}{12} \times \left(\frac{R}{5}\right)^2 = \frac{\pi \times h \times R^2}{300}$$

es decir, aproximadamente:

$$\frac{\pi \times h \times R^2}{100} \text{ si } \pi = 3$$

Como vemos, el error es equivalente al volumen de un cilindro, cuyo radio es igual al radio de la circunferencia central del tonel y su altura, la tricentésima parte de su altura.

Sin embargo, en este caso es preferible un resultado no muy exagerado, porque el volumen del tonel es mayor que el volumen de los dos conos truncados inscritos en él. Es evidente, observando la figura 108 (a la derecha), que se mide el volumen del tonel como si se le quitaran las partes de su volumen, marcadas con las letras *a, a, a, a.*

El joven matemático no sabía la fórmula para encontrar el volumen del tonel; podemos buscar esta fórmula en algunos manuales de geometría superior para simplificar los cálculos, obteniendo un resultado aproximado. Hay que tener en cuenta que medir el volumen de un tonel es una tarea bastante complicada. Sobre este problema trabajó Kepler, dejando una obra matemática referente a él. Hasta el presente no se ha encontrado una solución geométrica más sencilla y exacta: solo existen los métodos prácticos aproximados. En el sur de Francia, por ejemplo, emplean la fórmula empírica;

Volumen del tonel = $3{,}2 \times h \times R \times r$

Resulta curioso el ¿por qué se fabrican los toneles de una forma tan compleja para medir, un cilindro con lados convexos? ¿No resulta más fácil fabricar toneles de forma cilíndrica? De hecho se hacen, mas no de madera, sino de metal (para el petróleo, por ejemplo).

Ahora tenemos el siguiente problema ¿Por qué construyen los toneles con lados convexos? ¿Cuál es la ventaja de esta forma?

Solución

La ventaja es la siguiente: se pueden colocar los anillos (zunchos) a los toneles, pudiéndolos apretar fuertemente de un modo muy simple: se colocan cerca a la parte más ancha del tonel y luego se aprietan con tornillos, dando al tonel la solidez que requiere.

Por la misma razón a los cubos (baldes) de madera no se les da forma de cilindro, sino de cono truncado: También se rodean fuertemente con anillos junto a la parte más ancha (figura 109).

Aquí resulta útil conocer la opinión de Kepler sobre este tema. Cuando descubrió la segunda y tercera Leyes del Movimiento de los planetas, el gran matemático trabajaba sobre el tema de los toneles y, además, dejó un artículo matemático referente a ellos.

Figura 109. Acercando los zunchos a la parte más ancha del tonel se consigue rodearlo fuertemente

Así comienza su obra "Estereometría de los toneles":

"Por la exigencia del material, los toneles que se emplean para el vino se construyen de forma esférica, emparentada con el cono y el cilindro. Un líquido que permanece mucho tiempo dentro de un recipiente metálico, se estropea a causa de la herrumbre; de cristal o de arcilla son frágiles y no tienen el tamaño adecuado; de piedra, a causa de su peso no son prácticos, entonces, solo queda guardar el vino en toneles de madera. De un solo tronco no es posible construir un recipiente bastante espacioso, y puede rajarse su superficie. Por eso se tienen que construir uniendo franjas de madera. No es posible evitar que se filtre el líquido por las rendijas de ningún material, aunque esté rodeado de anillos sujetados fuertemente...

Si fuera posible fabricar con tablillas una esfera, esta forma sería preferible.

Pero como no es posible apretar las tablillas de un tonel esférico, el cilindro es la única forma útil. Pero el barril tampoco puede ser completamente cilíndrico; pues no sirven los amarres, y no se pueden atar con tanta fuerza, como si se logra en un tonel tradicional, ligeramente cónico y abultado en el centro. Con un tonel formado por dos partes iguales unidas por sus bases, se logra un mejor balance de la carga durante su transporte, y es más resistente y práctico."[26]

6. Un viaje nocturno de Mark Twain

Es impresionante el ingenio de aquel chico que se hallaba en una difícil situación. En total oscuridad, la mayoría de las personas no podría orientarse, ni hablar de ningún tipo de medidas y cálculos. Resulta útil comparar la novela de Mayn – Rid con una historia cómica sobre un confuso viaje dentro de un cuarto de hotel, aventura que le sucedió al conocido humorista Mark Twain. En este relato se describe bastante bien que difícil resulta imaginar la ubicación de los muebles en una habitación poco conocida. Seguidamente voy a presentar brevemente el divertido episodio del “Viaje al extranjero” de Mark Twain.

“Me desperté y sentí sed. Tuve una idea estupenda, ponerme la ropa, salir al jardín y refrescarme, lavándome en una fuente.

Me levanté y estuve intentando buscar la ropa. Encontré un calcetín. Sin tener ni idea donde estaba el otro. Con mucho cuidado me bajé al suelo, empecé a buscar, pero no tuve éxito. Seguí buscando más y más y en vez de encontrar el calcetín me choqué con un mueble. Cuando me acosté, alrededor vi poco mobiliario, ahora me parece que la habitación esta llena de enseres, además, hay sillas en todas partes. ¿Acaso ocuparon la misma habitación dos personas más? No un solo mueble, pero mi cabeza chocaba siempre contra ellos.

Finalmente decidí que puedo vivir con un solo calcetín. Me fui a la puerta, pero de repente vi mi reflejo pálido en un espejo.

Evidentemente me he perdido, y no tengo ni idea donde estoy. Si la habitación tenía solo un espejo, pudo ser una buena ayuda para orientación, pero había dos, es lo mismo como mil.

Quise encontrar la puerta pegándome a la pared. Al intentarlo terminé tirando un cuadro al suelo. Quizá no era muy grande, pero hizo con tanto ruido como si cayera una montaña.

Garris (mi vecino, estaba durmiendo en la otra cama) no se inmutó, pero yo sabía que si seguía en la misma dirección, seguro lo despertaría. Probé otro camino. Encontré otra vez la mesa redonda, estuve un par de veces junto a ella, y desde aquí intentaré encontrar mi cama; si encuentro mi cama y también encuentro la garrafa con agua, por lo menos podré apagar la sed. Mejor me arrastro de rodillas; no he hecho esta prueba, por eso confío en ella.

Por fin encontré la mesa, la toqué con la cabeza, hice un poco de ruido. Luego me levanté otra vez y me fui balanceándome con las manos estiradas. Encontré la silla. Después la pared.

Otra silla. Luego el sofá. Mi bastón. Otra vez el sofá. Me ha sorprendido, lo sabía perfectamente, en la habitación solo está el sofá. Encontré otra vez la mesa y me golpeé una vez más. Luego choqué con una hilera de sillas. Un poco después se me ocurrió una idea, que debió surgir mucho antes: La mesa es redonda, por lo tanto, no puede ser el punto de partida para mi viaje. Por suerte me fui al espacio entre las sillas y el sofá, pero me pareció un lugar desconocido, dejé caer el candelabro de la chimenea, luego tiré la lámpara, después sentí un ruido cuando voló la garrafa.

- ¡Ah! - pensé, - ¡Por fin te encontré, querida mía!

- ¡Ladrones! ¡Socorro! – grito el Garris.

Ruidos y gritos levantaron toda la casa. Llegaron con velas y linternas administrador, invitados y sirvientas.

Miré alrededor. Estaba junto a la cama de Garris. Solo había un sofá al lado de la pared; solo había una silla puesta de tal manera que era fácil chocarse con ella, estuve dando vueltas alrededor del cuarto como un planeta, y chocando con él como un cometa, durante toda la noche.

Creo que caminé 47 millas durante la noche.

Esto último es una exageración que sobrepasa la imaginación: no es posible recorrer *47 millas* durante un par de horas, pero los otros detalles de la historia resultan bastante reales y definen bien la dificultad para movernos dentro de una habitación oscura. Además, tenemos que valorar el espíritu metódico y el sorprendente ánimo del joven protagonista de Mayn – Rid, que no solo ha podido orientarse a oscuras, sino también, resolver una tarea matemática, en estas condiciones.

7. El giro enigmático

En torno a las vueltas de M. Twain dentro de la habitación oscura, tomemos nota de un curioso fenómeno que le sucede a la gente que camina con los ojos tapados: no puede ir en línea recta, sin falta se aparta del camino, describiendo un arco, creyendo, sin embargo, que avanza en línea recta (figura 110).

Sucede lo mismo a los aventureros que viajan sin brújula por el desierto, o por la estepa nublada, en todos los casos en que no es posible orientarse, se apartan de la ruta y caminan en círculos, volviendo a menudo al mismo sitio. El radio de la circunferencia que describe el peatón, mide entre *60 y 100 m;* mientras más rápido camine, más se acorta el radio, es decir, que describe círculos más estrechos.

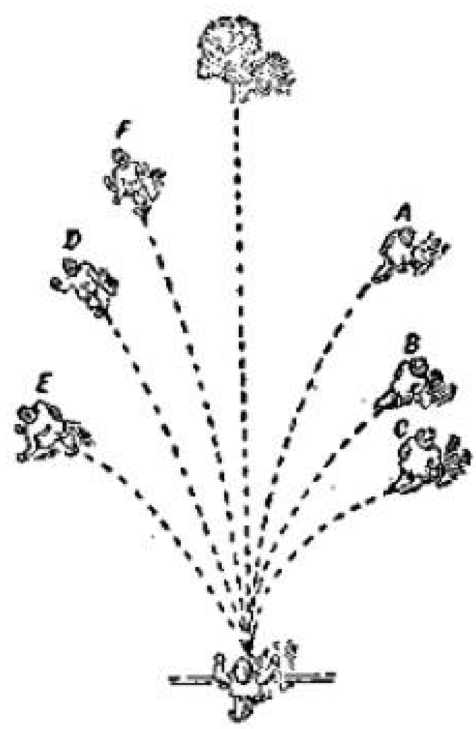


Figura 110. El camino con los ojos vendados.

En la práctica se han realizado algunas pruebas para estudiar la tendencia de la gente, a apartarse del camino recto. Habla al respecto, el científico Y. Spirin:

“En un aeródromo liso y verde se filaron unos pilotos. A todos les vendaron los ojos y se les propuso caminar hacia delante. Al principio andaban en línea recta...; poco después unos se desviaron a la derecha, otros a la izquierda, poco a poco comenzaron hacer círculos, volviendo al punto de partida.”

Sucedió un caso similar en Venecia, en la plaza de Marco Polo. Se vendaron los ojos a un grupo de personas, situadas en algún sitio de la plaza, frente a la catedral, y se les propuso llegar hasta ella. Aunque había que andar solamente *175 m*, ninguna de las personas que participaron en esta prueba pudo llegar a la fachada del edificio (de 82 m de ancho), todas se desviaban, daban vueltas alrededor de los arcos y chocaban con las columnas laterales (figura 111).

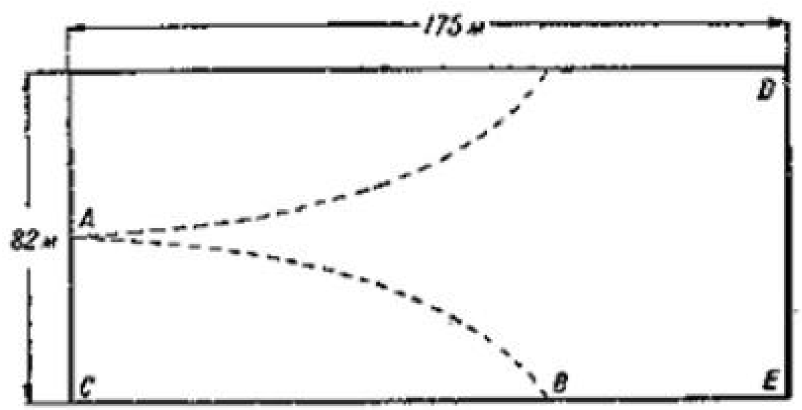


Figura 111. Esquema de la prueba en la plaza de Marco Polo, en Venecia.

Quien ha leído la novela de Julio Verne “Las aventuras del capitán Gateras”, se acordará de un episodio, como los viajeros se encontraron en medio de un desierto de nieve los pasos de una persona:

“- ¡Son nuestras huellas, amigos míos! – exclamo el doctor. – Nos hemos perdido por culpa de la niebla y ahora descubrimos nuestras propias huellas.”

Una descripción clásica de vueltas semejantes dejó L. N. Tolstoi en su obra “El dueño y el trabajador”:

“Basilio Andreevich hizo correr al caballo allá, donde pensó que podía estar la caseta del guardabosque. La nieve impedía ver, y el viento parecía que quería parar al hombre, pero él, doblándose hacia delante intentó hacer correr al caballo.

Cinco minutos después, no pudo ver nada, excepto la cabeza del caballo y el desierto blanco.

De repente vio a los lejos una casa negra. Su corazón latía de alegría, y se dirigió hacia aquel sitio negro, viendo las paredes de una aldea. Pero lo negro era solo una variedad de ajenjo... El aspecto del ajenjo golpeado por el viento, hizo que temblase el corazón del desafortunado hombre más y más. Marchó con rapidez hacia él, sin darse cuenta, que al acercarse al ajenjo, cambió totalmente de dirección.

Otra vez ve al frente algo oscuro, otra vez la línea de ajenjo, la hierba seca golpeada por el viento. A su lado veía desaparecer las huellas de un caballo, a causa del viento. Basilio Andreevich detuvo el caballo y miró con atención: no ha sido otra cosa que las huellas de su caballo. Por lo visto, él daba vueltas alrededor del mismo espacio."

El fisiólogo noruego Gulberg, dedicó al fenómeno de los giros una investigación especial (1896), reunió varios testimonios comprobados de casos reales del mismo. Tomamos dos ejemplos.

Dos peregrinos tomaron la decisión de dejar la caseta en una noche nevada y salir de aquel valle de *4 km* de ancho, para llegar a su casa, situada en el sentido indicado por la línea discontinua (figura 112).

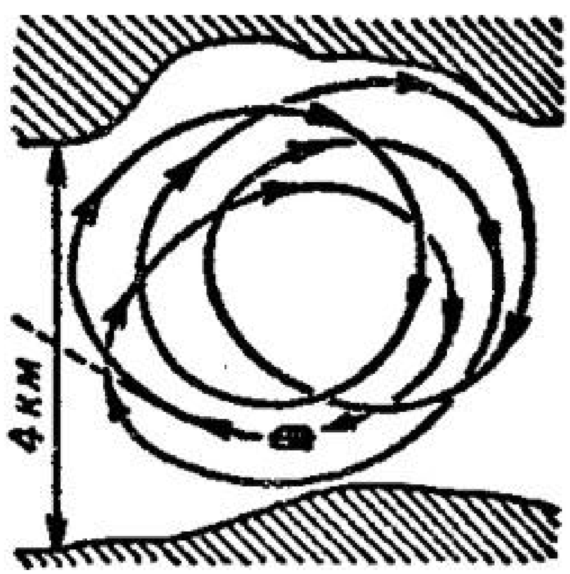


Figura 112. Esquema del viaje de los tres peregrinos.

Sin darse cuenta, durante el viaje se desviaron a la derecha, sobre la línea curva, señalada con las flechas, pasando una cierta distancia, creyeron que habían alcanzado el objetivo, pero en realidad se encontraban junto a la misma caseta, que habían dejado hacía poco tiempo.

Saliendo de nuevo, se apartaron todavía más y regresaron al punto de partida. Lo mismo se repitió por tercera y cuarta vez. Desesperados, probaron por quinta vez, obteniendo el mismo resultado. Decidieron no complicar más la noche y esperaron hasta mañana.

Más difícil es remar sobre en línea recta en una noche oscura o cubierta de niebla. Se conoce el caso de dos remeros, que decidieron atravesar un estrecho de *4 km* de ancho, una noche. Dos veces estuvieron en la orilla opuesta, pero en lugar de bajarse en ella, al no distinguirla, describieron dos círculos y finalmente desembarcaron en el sitio de partida (figura 113).

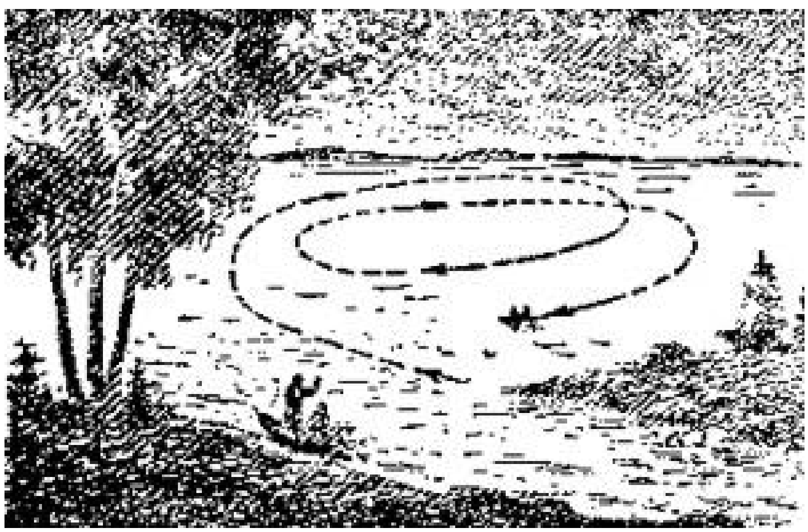


Figura 113. Como intentaron los remeros, atravesar el estrecho bajo la niebla

Lo mismo pasa con los animales. Unos viajeros polares hablan acerca de los círculos, dejados en la nieve por los animales, enganchados al trineo. Haciendo nadar perros con los ojos vendados, también describen círculos en el agua. Las aves ciegas vuelan en círculo. Un animal acosado por el miedo, sin poder orientarse, corre en espiral.

Un grupo de zoólogos que examinaba renacuajos, cangrejos, medusas, y amebas en una gota de agua; observó que todos ellos se movían en círculo.

¿Cómo explicar esta tendencia enigmática del ser humano y los animales a moverse en círculo, sin ser capaces seguir una trayectoria recta, a ciegas?

Este interrogante deja de ser un misterio, cuando la formulamos de manera correcta.

No preguntemos por qué los seres vivos se mueven en círculos, sino, ¿qué necesitan para moverse en línea recta?

Recuerden como se mueve un carro o un juguete mecánico. Puede ser que una carreta cambie de dirección, en vez de seguir en línea recta.

En este movimiento nadie ve milagro alguno, cualquiera deduce, ¡Por qué ocurre esto! Evidentemente, las ruedas del lado derecho no son iguales a las del lado izquierdo.

Esta claro, que el ser vivo podrá moverse en línea recta, sin ayuda de sus ojos, siempre que los músculos de ambos lados (derecho e izquierdo) sean exactamente iguales. Pero en esto radica el asunto, la simetría del cuerpo humano y de los animales no es igual. En la mayoría de las personas y los animales, los músculos del lado derecho del cuerpo se desarrollan de diferente forma a los músculos del lado izquierdo. Por esta razón, si el peatón da siempre el paso más largo con la pierna derecha que con la izquierda, no podrá mantenerse en línea recta; si los ojos no le ayudan a seguir en línea recta, inevitablemente se desplazará a la izquierda. Lo mismo le sucede a un remero, que debido al mal tiempo, se desplaza a la izquierda, si su mano derecha trabaja con más fuerza que la izquierda. Todo esto es pura geometría.

Imaginemos, por ejemplo, que la persona del paso con la pierna izquierda un milímetro más largo que con la derecha. Después de dar mil pasos con cada pierna, la persona habrá recorrido con la pierna izquierda *1000 mm* (un metro) más que con la derecha. Por esta razón le resulta imposible caminar en línea recta, pero si puede caminar en círculos.

Además, nosotros podemos calcular, con base en el plano anteriormente descrito del camino en círculos sobre el valle nevado (figura 112), que diferencia hay entre el trayecto recorrido con la pierna izquierda y el recorrido con la pierna derecha (como los viajeros se desviaban hacia la derecha, entonces con su pierna izquierda dieron pasos más largos). La separación entre las piernas de cada caminante durante su viaje (figura 114) es de unos *10 cm*, ó sea, *0,1 m.* Cuando la persona describe un círculo completo, su pierna derecha recorre $2\pi R$, mientras que su pierna izquierda recorre *2π (R + 0,1),* siendo *R* es el radio, en metros, del círculo que recorre:

$$2\pi\ (R + 0{,}01) - 2\pi R \times 0{,}1$$

O sea:

0,62 m ó *620 mm,*

Que corresponde a la diferencia entre la longitud del paso izquierdo y el derecho, la que se repite tantas veces, cuantos pasos se hayan dado. De la figura 112 podemos deducir, que los peregrinos caminaron en círculos con diámetros de *≅ 3,5 km,* es decir, *≅ 10.000 m* de longitud.

Por lo tanto, con un paso promedio de *0,7 m*, cada viajero dio un total de 14.000 pasos:

10.000/0,7 = 14.000 pasos

De estos, *7.000* corresponden a la pierna derecha y otros tantos a la pierna izquierda. Sabemos entonces que cada peregrino dio *7.000* pasos con cada pierna y entre un paso “izquierdo” y uno “derecho” hay una diferencia de *620 mm.*

De aquí que, la diferencia entre un paso izquierdo y uno derecho es de:

620 / 7.000

menos que *0,1 mm.* ¡Esta diferencia entre los pasos es suficiente para lograr un resultado tan sorprendente!

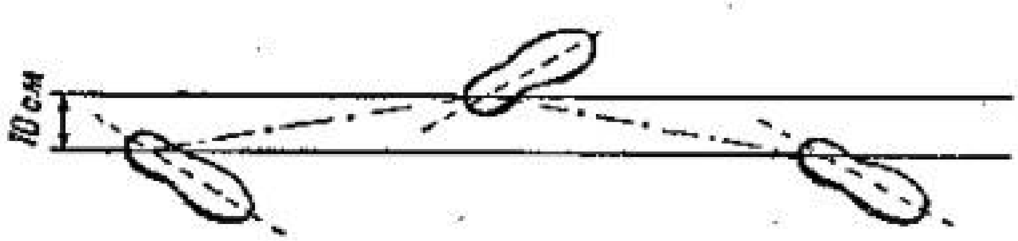


Figura 114: Las líneas de huellas de la pierna derecha y la izquierda durante el camino.

El radio de aquel círculo, el que el viajero camina en círculos, depende de la diferencia entre las longitudes de pasos "derecho" e "izquierdo". Es fácil de establecer la cantidad de pasos, hechos a lo largo de un círculo, con una longitud de un paso de *0,7 m* es

$$\frac{2 \times \pi \times R}{0,7}$$

donde *R* es el radio de la circunferencia en metros. En total hay

$$\frac{2 \times \pi \times R}{2 \times 0,7}$$

pasos "izquierdos" e igual número de pasos "derechos. Multiplicando esta cantidad por la diferencia de longitud entre los pasos dados con ambas piernas, *x*, obtenemos la diferencia de longitud entre los círculos que describimos con la pierna izquierda y los que describimos con la pierna derecha, es decir

$$\frac{2 \times \pi \times R}{2 \times 0,7 \times x} = 2 \times \pi \times 0,1$$

$$R * x = 0,14$$

R y *x* se expresan en metros.

Con esta fórmula tan simple no resulta difícil calcular el radio de la circunferencia, cuando se conoce la diferencia entre la distancia recorrida a pasos con cada pierna, y viceversa. Por ejemplo, para los participantes de la prueba en la plaza de Marco Polo de Venecia, nosotros podemos establecer el radio del círculo más grande descrito por ellos, a lo largo del camino. Realmente, como ninguno de ellos llegó hasta la fachada *DE* del edificio (figura 111), entonces, del punto de partida de la plaza, *AC = 41 m*, y el arco *BC*, que no supera los *175 m,* podemos calcular el radio máximo del arco *AB*. Se obtiene de la igualdad

$$2R = \frac{BC^2}{AC} = \frac{175^2}{41} = 750\,\mathrm{m}$$

de aquí *R*, el radio máximo, será ≅ *370 m.*

Sabiendo esto, de la fórmula anterior *R* x *x = 0,14* buscamos la menor cantidad de la diferencia longitudinal de los pasos:

370 x = 0,14, de donde: *x = 0,4 mm.*

Entonces la diferencia de longitud entre los pasos derechos e izquierdos de los participantes no es menor de *0,4 mm.*

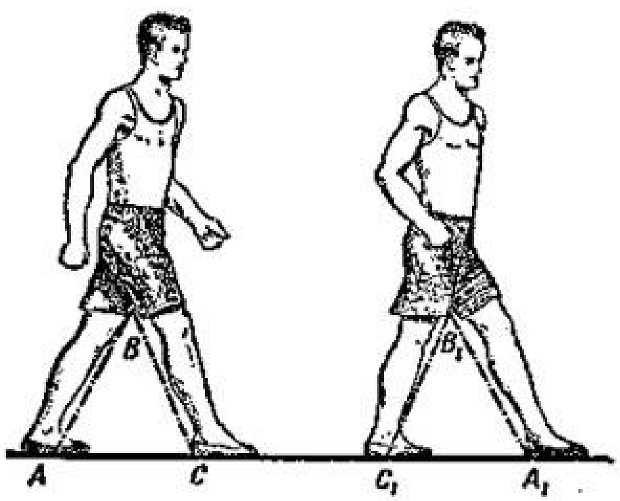


Figura 115. Si el ángulo del paso es el mismo, entonces los pasos serán iguales.

A veces escuchas o lees, que la acción del giro durante la caminata a ciegas depende de la diferencia de las piernas; como la pierna izquierda en la mayoría de las personas es más larga que la pierna derecha, entonces al caminar la gente se desviará hacia la derecha. Lo que importa es la longitud de los pasos, no la de las piernas.

De la figura 115 es evidente, que caminantes con piernas de diferente longitud pueden dar pasos iguales, si durante el trayecto separan las piernas un mismo ángulo, es decir, que al andar $\angle B_1 = \angle B$. Como: $A_1B_1 = AB$ y $B_1C_1 = BC$, entonces: $\Delta\ A_1B_1C_1 = \Delta\ ABC$ y por lo tanto, $AC = C_1A_1$. Recíprocamente, caminantes con piernas de igual longitud, pueden dar pasos de diferente largo, si las piernas de uno dan el paso más largo que las del otro.

Por la misma razón el barquero que rema con mayor fuerza con la mano derecha, desviará la lancha, haciéndola girar hacia la izquierda. Los animales cuyas extremidades dan pasos de diferente largo, o las aves que baten sus alas con diferente fuerza, deberán moverse en círculos, cuando pierden el control visual. Aquí una diferencia pequeña entre la fuerza que hacen a cada lado es suficiente para hacerles perder el rumbo.

Por esta razón estos casos dejan de ser un misterio. Sorprendente fuera, que los seres vivos pudieran caminar a ciegas, en línea recta. La condición más importante, es la simetría geométrica del cuerpo, que nunca se presenta en la naturaleza. La más mínima desviación de la simetría, genera como consecuencia inevitable, el giro del cuerpo. Milagro no es aquello que nos sorprende, sino aquello que esperábamos ver en la realidad.

En la actualidad no es imposible moverse en línea recta: brújulas, vías y mapas evitan este inconveniente.

Igual ocurre con los animales y demás habitantes de los desiertos, las estepas y el mar: la asimetría del cuerpo los obliga a caminar en círculo, en lugar de moverse en línea recta, esto constituye un factor importante de la vida. Como si un hilo invisible los atara a un sitio, quitándoles la posibilidad de alejarse. Un león, que intenta alejarse por el desierto, tarde o temprano regresa. Las gaviotas que abandonan sus rocas, no pueden volar sin volver al nido (sin embargo, resulta misteriosa la migración de las aves, cruzando continentes y océanos).

8. Medición a mano

El chico de Mayn – Rid pudo resolver exitosamente su problema de geometría porque conocía su estatura y recordaba su valor. Sería bueno que cada uno de nosotros tuviera un “metro humano”, en caso de necesitar tomar alguna medida.

Vale la pena recordar, que en la mayoría de las personas la distancia entre las manos estiradas equivale a la estatura (figura 116) Esta regla fue enunciada por el pintor y científico Leonardo da Vinci: esta regla permite aprovechar nuestras "medidas humanas" de una forma más conveniente, tal como lo hizo el chico. Resulta fácil de recordar la estatura de una persona adulta (de una raza eslava) ≅ *1,7 m* ó *170 cm*. Pero no se debe confiar en este valor *promedio*: Cada persona debe medir su estatura y la distancia entre sus manos.

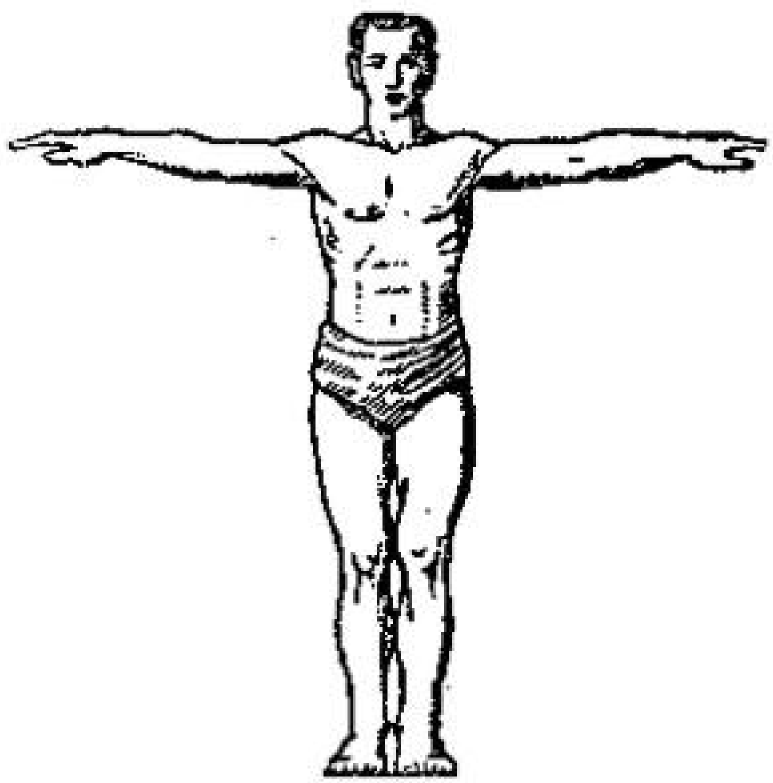


Figura 116. Regla de Leonardo da Vinci

Para medir, sin regla, las distancias pequeñas tenemos que recordar longitud de la "cuarta", es decir, la distancia entre las puntas del pulgar y el dedo meñique (figura 117). Para un hombre mayor es ≅ *18 cm,* aproximadamente ¼ de arshin (de aquí viene el nombre "cuarta"); Pero en los adolescentes el mismo segmento es menor y crece hasta los 25 años.

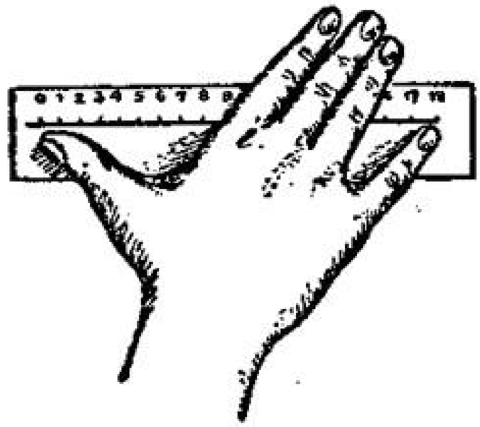


Figura 117. Medición del segmento entre dedos.

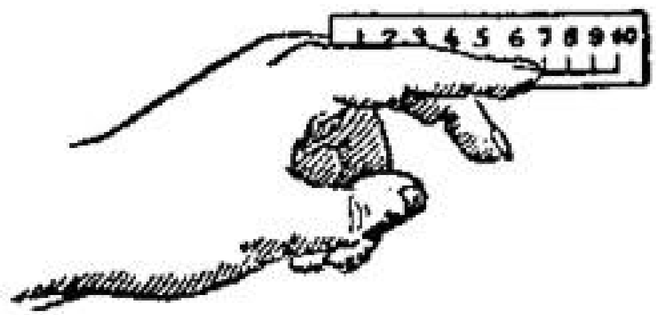


Figura 118. Medición del dedo índice

Luego, es útil recordar la longitud del índice, midiéndolo desde dos puntos: desde la base del dedo medio (figura 118) y desde la base del pulgar.

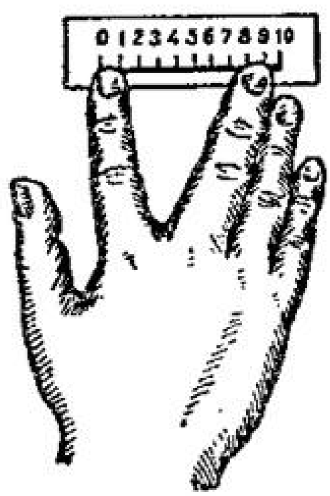


Figura 119. Medición del segmento entre dedos.

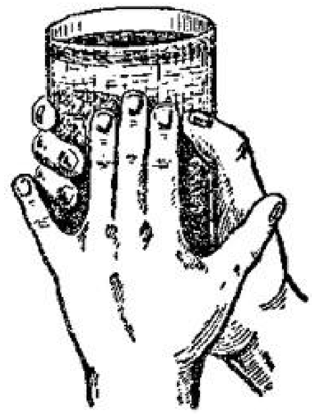


Figura 120. Medición de la circunferencia del vaso

También se debe saber la distancia máxima entre el dedo índice y el medio, para persona adulta es *≅ 10 cm* (figura 119). Finalmente tenemos que saber cual es el ancho de nuestros dedos.

El ancho de los tres dedos de la mitad, bien juntos, es de unos *5 cm.*

Conociendo todos estos valores, ustedes podrán efectuar cualquier medida aprovechando sus manos, inclusive a ciegas. En la figura 120 se presenta un ejemplo: se mide con los dedos la circunferencia del vaso. Tomando el valor medio de las medidas estudiadas, podemos decir, que la longitud de la circunferencia del vaso mostrado en la figura mide *18 + 5 =23,* ó sea *23 cm.*

9. Ángulo recto en la oscuridad

Problema

Regresamos de nuevo al chico de la novela y formulamos una pregunta: ¿Qué trabajo tenía que hacer, para encontrar el ángulo recto de un modo más justo? “fijé el otro palo a un costado del tonel, formando un ángulo recto con el que sobresalía de la cara superior del tonel'', leemos en la novela. Trabajando a ciegas, confiando en el tacto, podemos equivocarnos. Por lo visto el chico, en la situación en que se encontraba, tenía un secreto para formar el ángulo de una manera fija. ¿De que manera?

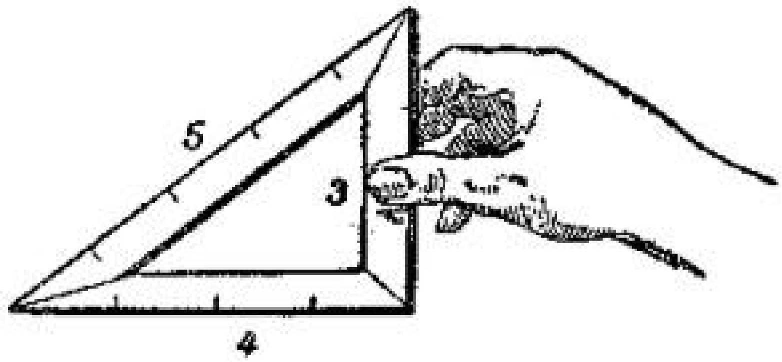


Figura 121. Un triángulo rectángulo donde los lados son números enteros

Solución

Empleando el teorema de Pitágoras, construimos un triángulo rectángulo con las varillas. Se unen tres varillas de longitudes *3, 4* y *5* respectivamente, formadas a partir de segmentos de igual longitud (figura 121).

Este antiguo método era empleado por los egipcios, para construir las pirámides, mil años atrás.

Además, hoy en día se emplea este método en las edificaciones.

Capítulo 9
Lo Antiguo y Nuevo Sobre el Círculo

Contenido:

1. Geometría práctica de los egipcios y romanos

Cualquier alumno sabe calcular la longitud de una circunferencia dividida por el diámetro, con mayor exactitud que un sacerdote de Egipto o un arquitecto de la gran Roma. Los egipcios pensaban, que la circunferencia era 3,16 veces mayor que su diámetro, los romanos, 3,12 veces, pero el valor correcto es 3,14159... Los matemáticos egipcios y romanos calcularon la razón entre la longitud de la circunferencia y su radio, no a la manera geométrica, sino de forma empírica. ¿Pero por qué tuvieron estos errores? ¿No pudieron atar un hilo a un objeto redondo y luego, ponerlo recto, y sencillamente, medirlo?

Sin lugar a dudas, actuaron de esa manera. Pero no podemos asegurar, que este método de un buen resultado. Imaginemos, por ejemplo, un jarrón con fondo redondo, de 100 mm de diámetro. La circunferencia deberá tener 314 mm de longitud. Pero en la práctica, al medir con un hilo, no obtendremos esta longitud: un simple error de un milímetro, y π sería equivalente a 3,13 ó 3,15. Ante la imposibilidad de medir el diámetro de un modo exacto, los errores son inevitables, entonces el valor de π oscila entre:

$$\frac{313}{101} = \frac{315}{99}$$

es decir, en fracciones decimales entre

3,09 y 3,18.

Vemos que buscando π mediante el método descrito, podemos obtener un resultado, que no coincide con 3,14: La primera vez: 3,1, la segunda vez: 3,12, la tercera vez: 3,17 y así sucesivamente. Causalmente entre ellos aparece el 3,14, pero para contar este número no tenía mayor importancia.

Este camino experimental no dio un resultado aceptable para π. Entonces queda claro por qué el mundo antiguo no conoció la razón correcta entre la longitud de circunferencia y su diámetro, y necesitó de un genio llamado Arquímedes, para encontrar el valor de π = 3 1/7, sin efectuar medición alguna, solo a base de cálculos.

2. "Lo sé y lo recuerdo perfectamente"

En la obra “Algebra”, del matemático árabe Magamed – ben – Musa, leemos sobre el cálculo de la longitud de la circunferencia:

“La mejor manera de calcular la longitud de la circunferencia consiste en multiplicar su diámetro por 3 1/7. Es la forma más fácil y rápida. Solo Dios sabe por qué.”

Ahora sabemos, que el número de Arquímedes, 3 1/7, expresaba con exactitud la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Teóricamente no se había demostrado, que esta proporción no se pudiera expresar mediante una fracción. Nosotros podemos escribirla de forma aproximada, con mayor precisión que la obtenida con el valor antes establecido, respondiendo a las más estrictas exigencias de la vida práctica. Un matemático del siglo XVI, Ludolf de Leuden, pacientemente calculó el citado número con 35 decimales y en su epitafio se encuentra grabado este valor de π[27] (figura 122).

Aquí está:

$$3{,}14159265358979323846264338327950288\ldots$$

¡Un tal Shenx en el año 1873 obtuvo un valor para π, donde después de la coma iban 707 decimales! Estos largos números, que expresan el valor de π de forma aproximada, no tienen valor teórico ni práctico. Solo en época reciente, en los ratos de ocio, surgió el deseo de batir récordes, superando a Shenx: En los años 1946 – 1947, en Ferguson (universidad de Manchester) y en Wrench (universidad de Washington) se calculó el valor de π con 808 decimales y se sintieron satisfechos al encontrar errores en los cálculos de Shenx, a partir del decimal número 528.

Figura 122. Grabado del valor de π sobre la lápida de Ludolf de Leuden.

Si queremos, por ejemplo, hallar la longitud del ecuador terrestre con un error de un centímetro, conociendo su diámetro, basta con usar π con 9 decimales. Tomando π con 18 decimales, podemos calcular la longitud de una circunferencia, cuyo radio vaya desde la Tierra hasta el Sol, con un error inferior a 0,0001 mm (¡la centésima parte del grosor de un cabello!).

El matemático ruso, Grave, enseñó con claridad, la verdadera utilidad del número π con cien decimales. Dijo que, si imagináramos una esfera, cuyo radio fuera equivalente a la distancia desde la Tierra hasta Sirio, es decir, una cantidad en kilómetros equivalente a 132 con diez ceros a su derecha: 132×10^{10}, y llenáramos de microbios esta esfera, que albergara mil millones de microbios por milímetro cúbico, o sea 10^{10}, y se colocaran estos en línea recta, dejando entre un microbio y otro un espacio equivalente a la distancia desde Sirio hasta la Tierra, tomando este inmenso segmento como diámetro de una circunferencia, podríamos calcular la longitud de esta circunferencia gigantesca con una exactitud de 1/1.000.000 mm, siempre que empleáramos el número π con 100 decimales después de la coma. Sobre este asunto, anota el astrónomo francés, Arago: “en la práctica no habríamos ganado nada, si entre longitud de circunferencia y su diámetro hubiera existido una razón exacta”.

En cálculos habituales con el número π, basta recordar dos decimales después de la coma (3,14), para efectuar cálculos más exactos, se emplean cuatro decimales (3,1416: acá aproximamos el 5 a 6).

Permanecen más tiempo en la memoria, pequeños poemas y frases divertidas, que los números.

Por esta razón, para recordar mejor el significado numérico de π, se inventan versos o frases especiales. En estas obras de poesía matemática se buscan palabras en las que la cantidad de letras de cada una de ellas corresponda a cada cifra del número π, en su respectivo orden.

Hay versos en inglés de 13 palabras, por lo tanto dan 12 cifras después de la coma; en alemán, 24 palabras; en francés, 30 palabras y en español, 20 palabras[28].

He aquí otro poema:

El Número PI

(por: Wislawa Szymborska.
Poetisa polaca
Premio Nobel de Literatura, en 1996)

El admirable número Pi
tres coma uno cuatro uno.
Las cifras que siguen son también preliminares
cinco nueve dos porque jamás acaba.
No puede abarcarlo seis cinco tres cinco la mirada,
ocho nueve ni el cálculo
siete nueve ni la imaginación,
ni siquiera tres dos tres ocho un chiste, es decir, una comparación
cuatro seis con cualquier cosa
dos seis cuatro tres de este mundo.
La serpiente más larga de la tierra suma equis metros y se acaba.
Y lo mismo las serpientes míticas aunque tardan más.
El séquito de dígitos del número Pi
llega al final de la página y no se detiene,
sigue, recorre la mesa, el aire,
una pared, una hoja, un nido de pájaros, las nubes, hasta llegar
directo al cielo,
Perderse en la insondable hinchazón del cielo.
¡Qué breve la cola de un cometa, cual la de un ratón!
¡Qué endeble el rayo de un astro si se curva en la insignificancia del espacio!
Mientras aquí dos tres quince tres trescientos diecinueve
mi número de teléfono la talla de tu camisa
el año mil novecientos sesenta y tres, sexto piso
el número de habitantes, sesenta y cinco céntimos
dos pulgadas de cintura, una charada y un mensaje cifrado
que dice vuela mi ruiseñor y canta
y también se ruega guardar silencio,
y se extinguirán cielo y tierra,
peor el número Pi, no, jamás,
seguirá su camino con su nada despreciable cinco

con su en absoluto vulgar ocho
con su ni por asomo postrero siete,
empujando, ¡ay!, empujando a durar
a la perezosa eternidad.

Estos versos son curiosos, pero muy grandes y pesados. Entre los alumnos de E. Y. Tereskov, profesor de matemáticas de una región moscovita, se recita en la escuela una estrofa muy popular, compuesta por él mismo:

Ýòî	ÿ	çíàþ	è	ïîìíþ	ïðåêðàñíî
3	1	4	1	5	9

a

Una de sus alumnas, Elisa Cherikover, inventó la siguiente frase burlesca y práctica:

Ïè	ìíîãèå	çíàêè	ìíå	ëèøíè,	íàïðàñíû.
2	6	5	3	5	8

b

El autor de este libro no se atreve a componer algo, pero propone una frase bastante prosaica. “¿Qué se yo sobre círculos?”, una pregunta, donde el número 3,1416 esconde la respuesta.

3. El error de Jack London

El siguiente párrafo de la novela de Jack London “Un pequeño dueño de una gran casa” nos proporciona los datos necesarios para realizar un ejercicio de geometría:

Problema:

“En medio del campo hay una pértiga de acero clavada en el piso a gran profundidad. Desde su parte superior hasta un extremo del campo se tiende un cable, unido a un tractor. Los mecánicos tiran de la palanca, y el motor empieza a andar.

El vehículo avanza hacia adelante, describiendo un círculo alrededor de la pértiga, como si esta fuera su centro.

- Para dar el toque final a esta máquina, - dijo Gregen, - debes convertir la circunferencia que describe el vehículo, en un cuadrado.

- Por cierto, de ser cuadrado el campo, se eliminará mucha tierra.

Gregen hizo un par de cálculos, luego dijo:

- Se pierden cerca de tres acres, de cada diez.

- No, menos."

Proponemos a los lectores comprobar el cálculo.

Solución

Se ha efectuado un cálculo erróneo: Se pierde 0,3 de toda la tierra. Pues bien, en realidad, un lado del cuadrado es *a*. La superficie de este cuadrado es a^2. El diámetro del círculo inscrito mide *a*, por lo tanto, su área es:

$$\frac{\pi a}{4}$$

El área encerrada entre el cuadrado y el círculo es:

$$a^2 - \frac{\pi a^2}{4} = \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)a^2 = 0{,}22a^2$$

Vemos que el campo cuadrado no abarca el 30%, como pensaban los protagonistas de la novela americana, sino el 22%.

4. El lanzamiento de la aguja

Un método original y aleatorio para calcular п es el siguiente. Se toma una aguja corta (de unos dos centímetros), preferiblemente sin punta, para que tenga el mismo espesor, se trazan sobre un papel un par de líneas paralelas, separadas entre sí una distancia igual al doble de la longitud de la aguja. Luego se arroja la aguja desde una altura arbitraria sobre el papel y se marca, si cruza o no una de las líneas (figura 123, a la izquierda). Para que la aguja no rebote, se pone debajo, un papel secante o un paño. Se repite el lanzamiento muchas veces, por ejemplo cien o mejor aún, mil veces, marcando cada vez el sitio de intersección[29]. Luego se divide la cantidad total de lanzamientos entre el número de aciertos, o sea los casos en los que la aguja cae sobre una de las rayas, el resultado será él valor aproximado del número п.

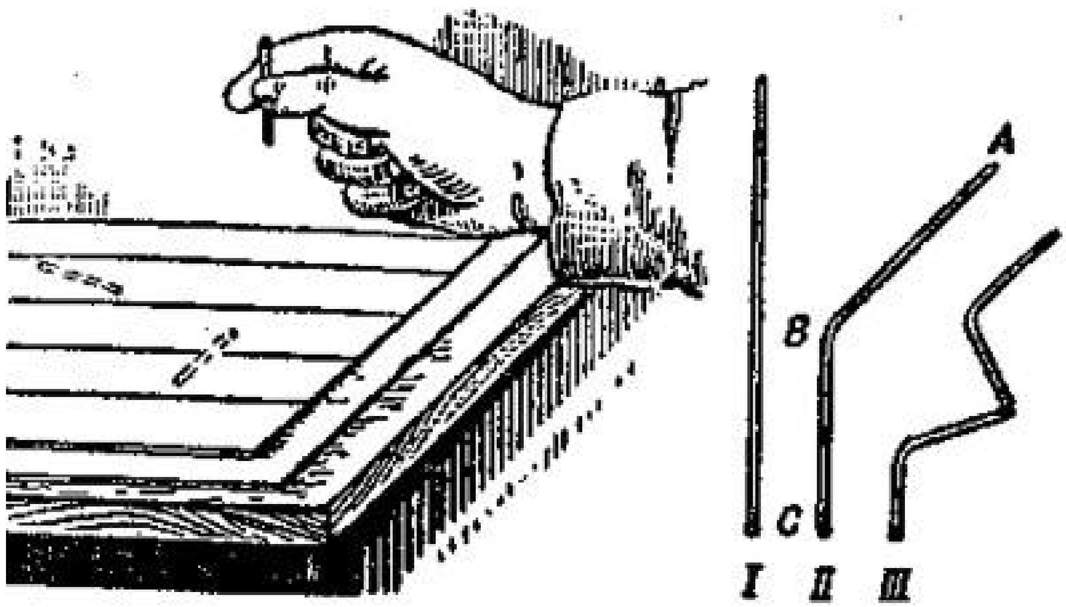


Figura 123. Lanzamiento de aguja. Experimento de Bufon

Veamos la validez del resultado obtenido. Llamemos *K* a la probabilidad de intersección y asumamos que la aguja tiene 20 mm de longitud.

Entonces el número probable de intersecciones de cada milímetro de la aguja es de $K/20$. Si la aguja mide 3 mm de largo, el número probable de intersecciones de cada milímetro será de $3K/20$. Si la aguja tiene 11 mm de largo, el número probable de intersecciones de cada milímetro será de $11K/20$, y así sucesivamente.

En conclusión, el número probable de intersecciones es directamente proporcional a la longitud de la aguja.

Esta proporcionalidad es válida aún en el caso de que la aguja sea curva. Tomemos, por ejemplo, una aguja con la forma mostrada en la figura II (figura 123, a la derecha), en la que AB = 11 mm y BC = 9 mm.

Para la parte *AB,* el número probable de intersecciones es $11K/20$, y para *BC,* es $9K/20$ y para la aguja completa será $11K/20 + 9K/20$, es decir, que al igual que antes, es equivalente a *K*. Podemos doblar la aguja de una manera todavía más ingeniosa (la figura III, figura 123), y no varía el número de intersecciones.

(Debemos tener en cuenta, que si tenemos una aguja doblada se nos pueden presentar dos o más intersecciones al mismo tiempo; por esta razón debemos calcular esas intersecciones como 2, 3, etc., puesto que se hacen los cálculos para la primera intersección, los cálculos para la segunda, y así sucesivamente.)

Imaginemos ahora, que estamos lanzando una aguja de forma circular, cuyo diámetro equivale a la distancia entre las dos líneas trazadas anteriormente (más del doble de la longitud de nuestra aguja). Este anillo debe cruzar cada vez alguna línea (o puede caer tangente a ambas líneas, en todo caso, siempre tendremos dos intersecciones). Si la cantidad total de lanzamientos es *N*, el número de intersecciones será *2N*. Nuestra aguja recta es tantas veces menor que este anillo, cuantas veces el radio es menor que la longitud de circunferencia, es decir, 2π veces. Pero ya hemos establecido, que el número probable de intersecciones es proporcional a la longitud de aguja. Por eso el número probable de las intersecciones, *K*, de nuestra aguja, tiene que ser menor que 2*N*, 2π veces, es decir, que equivale a:

$$\frac{n}{\pi}$$

$$\pi = \frac{\text{cantidad de lanzamientos}}{\text{cantidad de intersecciones}}$$

Cuanto mayor sea la cantidad de lanzamientos, más exacto será el valor de π. Un astrónomo suizo, R. Volf, en siglo XIX, efectuó 5000 lanzamientos de la aguja sobre el papel con las líneas y obtuvo el valor de π = 3,159... esta expresión presenta menor exactitud que el número de Arquímedes.

Como vemos, acá se encuentra la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro mediante un método práctico y curioso, sin tener que dibujar el círculo ni el diámetro, es decir, que no hace falta el compás. Una persona que no tenga la más mínima idea sobre la geometría o sobre el círculo, podrá encontrar el valor del número π, si realiza pacientemente gran cantidad de lanzamientos con la aguja.

5. Transformando la circunferencia en una recta

En la práctica, en la mayor parte de los casos, se puede emplear el número 3 1/7 en lugar de π; el largo de la circunferencia equivale a 3 1/7 veces su diámetro (esto se consigue fácilmente, dividiendo un segmento en siete partes). Existen otros métodos aproximados, utilizados en la práctica por carpinteros y demás, para transformar la circunferencia en una línea recta. No los vamos a examinar ahora, sino mostraremos un método bastante sencillo para efectuar la transformación, obteniendo un resultado bastante exacto.

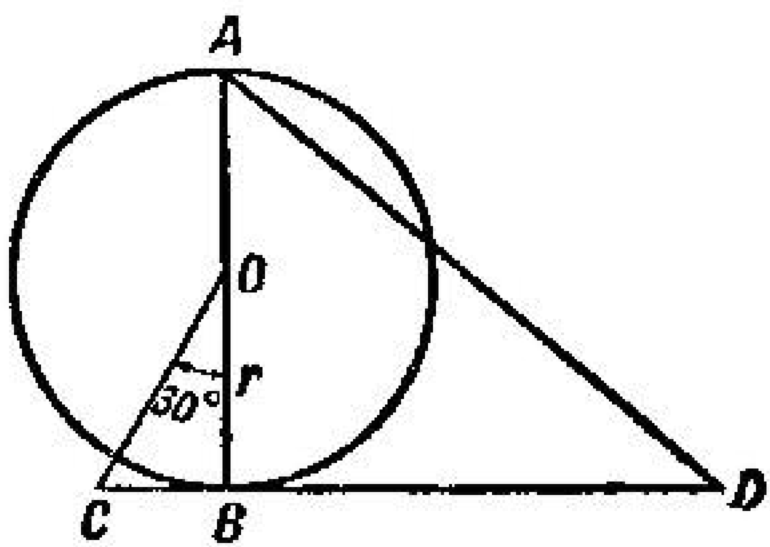


Figura 124. El modo aproximadamente geométrico de enderezamiento de la circunferencia. ¿Cuál es el principio elemental de esta teoría?

Problema

Si necesitamos transformar en una recta la circunferencia de centro en *O* y radio *r* (figura 124), trazamos el diámetro *AB*, y en el punto *B* – una línea *CD*, perpendicular a *AB*. Desde el centro *O*, trazamos la recta *OC*, formando un ángulo de 30º con *AB*. Luego, en la recta *CD,* se mide desde el punto *C* hasta *D*, una distancia equivalente a tres radios de esta circunferencia, luego se unen mediante una línea recta, los puntos *D* y *A*: El segmento *AD* es equivalente a longitud de la semicircunferencia. Si prolongamos el segmento *AD* al doble de su longitud, tendremos la circunferencia *O* transformada en una recta. El error resultante es menor que 0,0002*r*.

Solución

Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene:

$$CB^2 + OB^2 = OC^2$$

Llamando *r* al radio *OB*, y teniendo en cuenta, que *CB*=*OC*/2 (el cateto opuesto al ángulo de 30º), obtenemos:

$$CB^2 + r^2 = 4CB^2$$

De donde:

$$CB = \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

Luego, en el Δ *ABD*:

$$BD = CD - CB = 3r - \frac{r\sqrt{3}}{3}$$

$$AD = \sqrt{BD^2 + 4r^2} = \sqrt{\left(3r - \sqrt{\frac{r\sqrt{3}}{3}}\right) + 3r^2} =$$

$$= \sqrt{9r^2 - 2r\sqrt{3} + \frac{r^2}{3}4r^2} = 3{,}14153\ \mathrm{r}$$

Comparando este resultado con el que obtuvimos para π (3,141593), vemos que solo hay una diferencia de 0,00006 m. Si transformamos de esta manera, una circunferencia de 1 *m* de radio, en una recta, obtendremos una semicircunferencia con un error de 0,00006 *m*, o sea, una circunferencia con un margen de error de 0,00012 *m*, ó 0,12 *mm* (el triple del ancho de un cabello).

6. Cuadratura del círculo

No puede ser, que ninguno haya oído hablar alguna vez acerca de la “cuadratura del círculo”, aquel famoso problema de geometría, en el que trabajaron los matemáticos, veinte siglos atrás. Estoy seguro, que muchos lectores intentaron resolver este problema. Y más aún, lectores que dudan de la dificultad de este problema clásico, que aún no se ha podido resolver. La mayoría se limita a repetir una y otra vez, que el problema sobre la cuadratura del círculo no tiene solución, sin saber nada acerca de la naturaleza de este problema, ni conocer las dificultades que se presentan para resolverlo.

Las Matemáticas tienen problemas aún más curiosos que la cuadratura del círculo, tanto en la teoría como en la práctica. Pero ninguno ha alcanzado tanta popularidad como este; en busca de su solución han trabajado durante siglos profesionales, matemáticos y aficionados.

“Encontrar la cuadratura del círculo”, consiste en dibujar un cuadrado cuya superficie sea equivalente a la de un círculo dado. Este problema se presenta con bastante frecuencia, y se resuelve en la práctica. El famoso problema pide resolverlo dibujando las líneas de la figura con ayuda de dos procedimientos:

1. Trazar una circunferencia alrededor de un punto.
2. Trazar una línea recta entre dos puntos.

O sea que se debe trazar la figura, utilizando solamente dos instrumentos: compás y regla.

Entre los matemáticos hay diversidad de opiniones, debido a la dificultad que surge porque la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro (el famoso número π) no se puede expresar mediante un número finito de dígitos. Esto es cierto debido a que la solución de este problema depende de la naturaleza especial del número π. Transformar un rectángulo en un cuadrado con idéntica área constituye una tarea de fácil y rápida solución. El problema de la cuadratura del círculo consiste en construir, con regla y compás, un rectángulo de igual área que el círculo. De la fórmula de la superficie de una circunferencia $S = \pi r^2$, o (lo que es lo mismo) $S = \pi r \times \pi r$, evidentemente, la superficie del círculo es equivalente a la superficie de este rectángulo, donde uno de los lados es r, otro en πr. Entonces se trata de dibujar un segmento, que mida π veces el largo del radio del círculo dado.

Se sabe, п no es exactamente equivalente a 3 1/7, ni 3,14, ni tampoco 3, 14159. La serie numérica es infinita.

La irracionalidad[30] del número п, fue estudiada en el siglo XVIII por los matemáticos Lamber y Lejandro. Sin embargo, el hecho de que п fuera irracional, no detuvo los esfuerzos de los matemáticos "cuadraturistas". Ellos sabían, que la irracionalidad por si misma no hacía la tarea desesperada. Existen cantidades irracionales que se pueden "trazar" mediante procedimientos geométricos. Si se requiere dibujar un segmento, que sea $a\sqrt{2}$ veces más largo que un segmento dado. Tanto $a\sqrt{2}$ como п, son irracionales. Sin embargo, nada resulta tan fácil, como dibujar el segmento buscado: Recordaremos, $a\sqrt{2}$ es el lado del cuadrado inscrito en el círculo con radio *a*. Cualquier alumno dibujará el segmento $a\sqrt{3}$ (el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia). No se presentan grandes dificultades en la construcción de la expresión irracional (a primera vista muy complicada):

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\sqrt{2}$$

porque se basa en la construcción de 64 lados, es un callejón sin salida.

Como vemos, multiplicador irracional, estado en la expresión, no siempre lo hace esta expresión imposible para construir con el compás y la regla. La insolubilidad de cuadratura del círculo se esconda no totalmente en el п -irracional, sino dentro de otra propiedad de este número-. Precisamente, la cantidad п no es algebraica, es decir no la podemos obtener como solución de una ecuación con coeficientes racionales. Estos números se llaman "trascendentes"

El matemático de siglo XVI, Viet, demostró, que el número

$$\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\times\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\cdots}}}}}}}$$

Esta representación de п resolvería el problema de la cuadratura del círculo, si la serie tuviera una cantidad finita de operaciones (después esta expresión podrá ser construida geométricamente). Pero como se tiene un número infinito de términos con raíz cuadrada, la fórmula de Viet no sirve de ayuda.

La razón por la que no es posible hallar la solución del problema de la cuadratura del círculo se debe a que el número π es "trascendente", es decir que no se puede solucionar la ecuación con coeficientes racionales. En 1889, el matemático alemán Lindeman, estudió esta propiedad del número π. En el fondo, este es el único científico que ha resuelto la cuadratura del círculo, a pesar de afirmar que la solución es de construcción imposible. Por lo tanto, en año 1889 se terminan los esfuerzos realizados durante siglos por los matemáticos en torno al citado problema; pero, por desgracia, mas no terminan los ensayos inútiles de los aficionados que no conocen suficientemente el problema.

Se concluye lo antedicho con base en los avances del tratamiento teórico del problema, pero, ¿qué sucede en la práctica? Esta no requiere una solución exacta de tan famoso problema. La mayoría opina que, la solución del problema de la cuadratura del círculo, quizás tendría gran importancia si no se obtuvieran buenos resultados en la práctica. Pero en su aplicación habitual, basta con tener a disposición métodos aproximados de solución.

Las investigaciones prácticas de la cuadratura del círculo han sido infructuosas desde la época en la que se tenían los primeros 7 ú 8 números exactos de π. Para fines prácticos basta con saber que π=3,1415926. Ninguna medición de longitud arroja un resultado con más de siete cifras significativas. Por eso carece de importancia tomar π con más de ocho cifras decimales: esto no mejora la exactitud del cálculo[31].

Si se expresa el radio con siete cifras significativas, la longitud de la circunferencia no tendrá más de siete números, aún en el caso que tomemos su valor con cien cifras significativas.

Por ello, el extenuante trabajo que realizaron los matemáticos antiguos para obtener cada vez un mayor número de cifras significativas, no tiene ninguna importancia práctica. Además carece de utilidad a nivel científico. Solo expresa la paciencia de quienes realizaron los cálculos. Si lo deseas y disponen de mucho tiempo libre, podrán encontrar las primeras 1000 cifras de π, empleando la siguiente serie infinita, encontrada por Leibniz[32]

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \ldots$$

Un astrónomo, citado anteriormente, Argo, escribió lo siguiente:

“Quienes buscan la cuadratura del círculo siguen dedicando su tiempo a resolver el problema, del cual se ha demostrado que no tiene solución, y si acaso se pudiera realizar, no traería ningún interés práctico. No hace falta ocuparnos de este asunto: Los enfermos del cerebro hacen todo lo posible por descubrir la cuadratura del círculo, pero por desgracia no tiene ningún sentido. Esta enfermedad mental existe de la antigüedad.”

Y concluye así su sátira:

“Las academias de todos países, que mantienen en observación a quienes buscan la cuadratura, notan un fenómeno, y es el hecho de que habitualmente, la enfermedad se agudiza, en primavera.”

7. Triángulo de Bingo

Examinaremos una de las soluciones aproximadas del problema de la cuadratura del círculo, más empleadas en la vida práctica.

El método consiste en calcular (figura 125) el ángulo **α**, formado por el diámetro *AB*, y la cuerda *AC* = *x*, que corresponde al lado del cuadrado buscado.

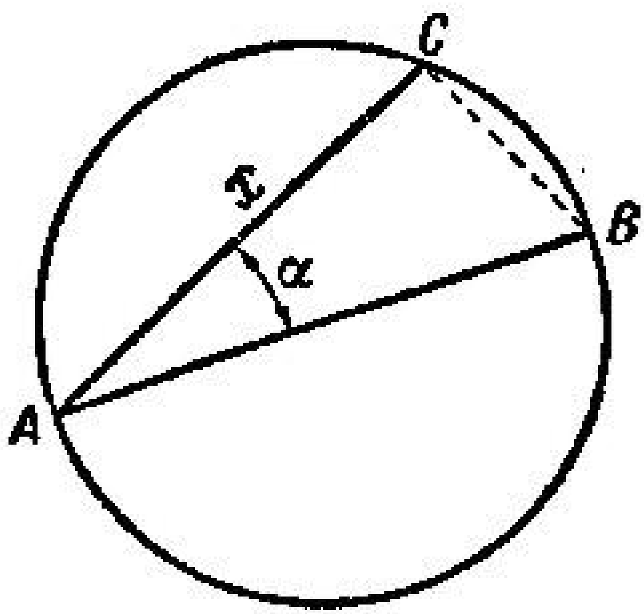


Figura 125. Un modo del ingeniero ruso de Bingo (1836)

Para averiguar el valor de este ángulo, echamos mano de la trigonometría:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{2r}$$

donde *r* es el radio del círculo.

Entonces, un lado del cuadrado buscado $x = 2r \times \cos a$, su superficie es $4r^2 \times \cos^2 a$. Por otro lado, la superficie del cuadrado, πr^2, es la superficie del círculo correspondiente. De aquí se deduce que,

$$4r^2 \cos^2 \alpha = \pi r^2$$

de donde:

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = 0,886$$

En las tablas encontramos:

$$a = 27^{o}\ 36'.$$

Entonces, trazando en el mismo círculo, una cuerda que forme un ángulo de 27º 36' con el diámetro, obtenemos inmediatamente un lado del cuadrado, con una superficie equivalente a la del círculo.

En la práctica se hace así: construye una escuadra[33], en la cual uno de los ángulos agudos mide 27º 36' (el otro, 62º 24'). Con esta escuadra, podemos encontrar un lado del cuadrado de igual área que un determinado círculo.

Para quienes quieran construir esta escuadra resultan útiles las siguientes instrucciones:

Como la tangente de 27º 36' es equivalente a 0,523, o 23/44, los catetos de este triángulo están en la proporción de 23/44. Si por ejemplo, construimos la escuadra de modo que uno de los catetos mida 22 cm, y el otro, 11,5 cm, tenemos el instrumento que se requiere. Esta escuadra se usa igual que las demás.

8. La cabeza y los pies

Parece, que uno de los protagonistas de una novela de Julio Verne, calculó que parte de su cuerpo, la cabeza o los pies, había recorrido un camino más largo durante el viaje en un crucero alrededor del mundo. Este problema resulta más instructivo, si lo planteamos de otra manera. Nosotros la enunciamos de otra forma.

Problema.

Imagínense que ustedes han cruzado el mundo a lo largo del ecuador. ¿Cuál será la diferencia entre la distancia recorrida por la parte superior de la cabeza y la que ha recorrido la punta del pie?

Solución

Los pies recorrieron un camino $2\pi R$, donde R es el radio de la Tierra. La parte superior de la cabeza hizo el recorrido con un radio $2\pi(R+1,7)$, donde 1,7 m es la estatura del cuerpo humano. La diferencia entre ambos recorridos es $2\pi(R + 1,7) - 2\pi R = 2\pi \times 1,7 = 10,7$ m. Entonces, su cabeza recorrió 10,7 m más, que sus pies.

Es curioso, que en la respuesta final no entre el radio de la Tierra. Por esta razón el resultado es idéntico en la Tierra que en Júpiter, u otro planeta pequeño. En general, la diferencia de longitudes de dos circunferencias concéntricas no depende de sus radios, solamente de las distancia entre ellos. Al agregar un centímetro al radio de la órbita terrestre aumentará su longitud tantas veces, cuantas veces prolonga la longitud de una simple moneda a cuyo radio se suma idéntica cantidad.

Mas esta paradoja geométrica se encuentra en uno de los manuales de curiosidades geométricas.

Problema

¿Si se tiende sobre el ecuador terrestre un hilo metálico y luego se le añade un metro, entonces, podrá pasar un ratón entre el alambre y la tierra?

Solución

Normalmente contestan, que el espacio es más angosto que un cabello: ¡Qué significa un metro comparando con 40 millones de metros de longitud del ecuador terrestre! Realmente el espacio será:

$$\frac{100}{2\pi} cm \approx 16 \, cm$$

No solo podrá pasar un ratón, sino que también podrá pasar el gato por este espacio.

9. Alambre a lo largo de ecuador

Problema

Ahora imagínense, que el globo terrestre se rodea fuertemente con un hilo metálico a lo largo de ecuador. ¿Qué sucederá si se enfría el hilo un 1°C? ¿Considerando que no se rompe ni se estira, cuánto se hundirá en la tierra?

Solución

Parece que una pequeña reducción de temperatura de solo 1 ºC, no hundirá demasiado el alambre en la tierra. Los cálculos, sin embargo, indican lo siguiente:

Al enfriarse 1 ºC, el hilo metálico se encogerá una cien milésima parte de toda su longitud. Si tiene una longitud total de 40 millones de metros (es la longitud de ecuador) el hilo se contrae 400 m, como fácilmente se puede calcular. Pero el radio de esta circunferencia metálica no disminuye 400 metros, sino muchísimo menos. Para saber cuanto disminuye el radio, debemos dividir 400 m sobre 6,28, es decir sobre 2π. Obtenemos así, 64 metros. Entonces, al enfriarse el hilo 1 ºC, no se hundirá en la tierra un par de centímetros, ¡sino más de 60 metros!

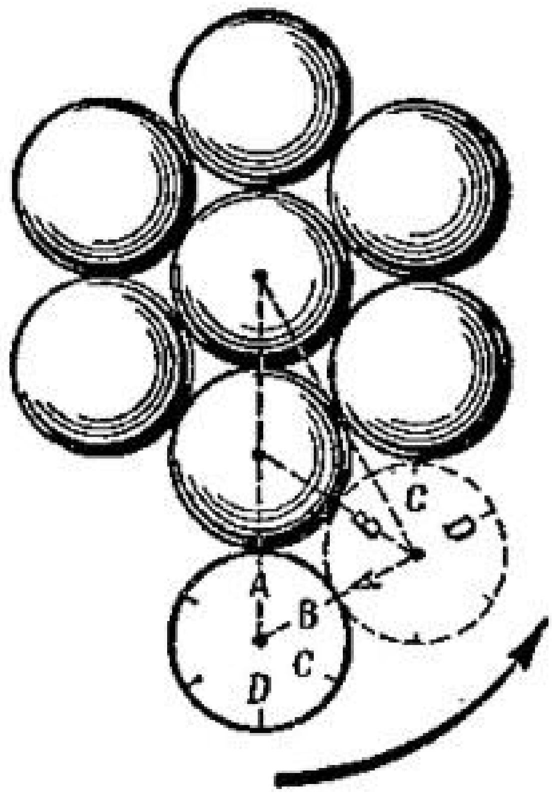


Figura 126. ¿Cuántas vueltas hará el circulo claro, dando un giro alrededor de otros siete?

10. Acción y cálculo

Problema

Frente a ustedes se tienen ocho círculos iguales (figura 126). Los siete sombreados están fijos, el octavo (sin sombrear) se mueve sobre ellos sin deslizarse. ¿Cuántas vueltas daría este, al dar una vuelta alrededor de los círculos fijos?

Ahora mismo podrán comprobarlo en la práctica: Coloquen sobre la mesa ocho monedas del mismo tamaño, como se muestra en la figura y fijen las siete monedas sobre la mesa, dejando girar la octava moneda. Para calcular el número de vueltas observen, por ejemplo, la posición del número sobre la moneda. Cuando el número vuelva a la posición inicial, la moneda habrá dado un giro alrededor de su centro.

Hagan la prueba en el mundo real, no en la mente, y verán, que la moneda solo dará cuatro vueltas.

Ahora vamos a tratar de obtener la misma respuesta con ayuda de análisis y cálculos.

Vamos a encontrar, por ejemplo, el arco que describe el círculo móvil sobre un círculo fijo. Con base en esto, imaginemos el movimiento del círculo móvil desde la "cresta" (la mayor distancia al centro del círculo central) y en el siguiente "valle" (espacio entre dos círculos) entre dos círculos fijos (figura 126 la línea discontinua).

En la figura no es difícil establecer, que el arco *AB*, que corre el círculo entre una "cresta" y el siguiente "valle", es de 60º. Hay dos arcos similares en la circunferencia de cada círculo fijo; juntos forman un arco de 120º ó sea 1/3 de circunferencia.

Por lo tanto, cuando el círculo móvil da 1/3 de vuelta, cruza 1/3 de vuelta de un círculo fijo.

Uniendo los seis círculos fijos; se llega a este resultado: el círculo fijo solo da 1/3 x 6 = 2 vueltas.

¡Obtuvimos un resultado diferente al que encontramos antes por simple observación! Pero "la acción es engañosa". Si la observación no confirma los cálculos, se ha presentado un error.

Ustedes tendrán que encontrar el error con base en el siguiente razonamiento.

Solución

Lo que pasa es que cuando el círculo se mueve, sin deslizarse, sobre un segmento recto que tiene la mitad de la longitud de la circunferencia del círculo móvil, da ½ vuelta alrededor de su centro. Esta conclusión es errónea, no corresponde a la realidad, cuando el círculo se desplaza sobre el arco de una línea curva. En el problema examinado, el círculo móvil que recorre el arco formado, por ejemplo, por 1/3 longitud de su circunferencia, no da ½ vuelta, sino 2/3 de vuelta y por lo tanto, al recorrer los seis arcos se obtienen:

6 x 2/3 = 14 vueltas

Podemos comprobar el resultado por simple observación. La línea punteada de la figura 126, refleja la posición del círculo móvil después de recorrer el arco *AB* (= 60º) del círculo fijo, o sea, el arco formado por 1/6 longitud de la circunferencia. En la nueva posición del círculo, el sitio más alto de su circunferencia no es el punto *A*, sino el punto *C*; esto, como vemos, corresponda a un giro de 120º de cada punto de la circunferencia, es decir, 1/3 de vuelta completa. Al “camino” de 120º le corresponden 2/3 de vuelta completa del círculo móvil.
Entonces, el círculo móvil dará una cantidad diferente de vueltas sobre una línea curva de las que da sobre un camino recto de igual longitud.

* * *

Nos detendremos un poco sobre la parte geométrica de este curioso fenómeno, además, la explicación habitual no siempre es cierta.
Sea el círculo de radio *r* que se desplaza sobre la recta. Este da una vuelta sobre el segmento *AB*, cuya longitud es equivalente a la longitud de circunferencia del círculo móvil (2π*r*).
Doblemos el segmento *AB* por la mitad (figura 127) y formemos con *CB* un ángulo ɑ, proporcional a la posición inicial.

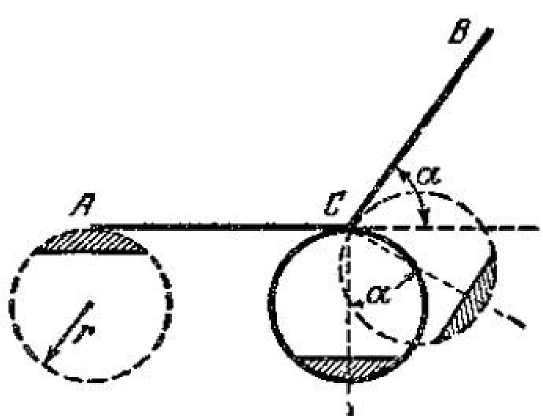


Figura 127. Como se observa la vuelta suplementaria al desplazar el círculo sobre la curva.

Ahora, cuando el círculo da *media vuelta* sobre el segmento *AB*, su parte superior llega al punto *C*, y para conservar la posición en la que el círculo toca al punto *C*, luego de girar sobre la recta *CB*, rote su centro un ángulo equivalente al ángulo *α* (estos ángulos son iguales, porque tienen sus lados perpendiculares).

Al efectuar el giro, el círculo se desplaza sobre el segmento. Esto es lo que genera la parte suplementaria de la vuelta completa comparada al giro del círculo sobre la recta.

La curva suplementaria corresponde a una fracción de vuelta completa, cuyo ángulo es *α*. Luego, el círculo recorre media vuelta más desde *C* hasta *B*. completa, 2π, es decir, otra *media vuelta*, entonces, cuando el círculo se desplaza entre *A* y *C*, sobre la línea quebrada *ACB* da 1 + α/2 π vueltas.

Ahora no resulta difícil imaginar, cuantas vueltas dará el círculo, al moverse sobre el exterior del hexágono (figura 128).

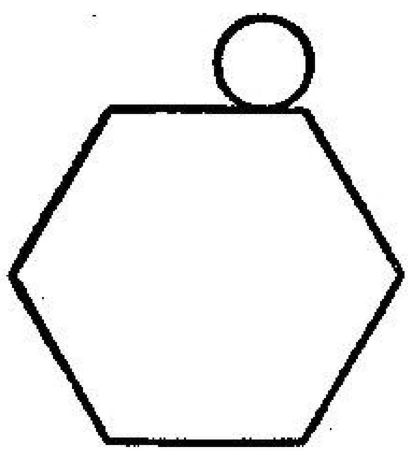


Figura 128. ¿Cuántas vueltas más dará el círculo, si se mueve sobre los lados del polígono, pero no sobre su perímetro extendido en línea recta?

Evidentemente las vueltas que dará sobre en línea recta, equivalen al perímetro (suma de los lados) del hexágono, más la cantidad de vueltas que da en los vértices del polígono, equivalente a la suma de los ángulos exteriores del hexágono, dividida por 2π. Como la suma de los ángulos exteriores de cualquier polígono convexo es exacta y equivalen a 4*d*, ó 2π, entonces 2π /2π = 1.

De modo que, al rodear un hexágono y también cualquier polígono convexo, el círculo dará siempre una vuelta más que al desplazarse sobre el segmento recto, equivalente al perímetro del polígono.

Si se duplican una y otra vez hasta el infinito, los lados del polígono convexo, hasta acercarse a la circunferencia, todo lo dicho aplica para la circunferencia. Sí, por ejemplo, de acuerdo con el problema inicial, el círculo se mueve sobre un arco equivalente a 120º de su circunferencia, entonces, queda clara a la luz de la geometría, la aseveración de que al girar dicho círculo, no da 1/3, sino 2/3 de vuelta.

11. La chica sobre la cuerda

Cuando gira un círculo sobre una línea, situada en su mismo plano, cada punto del círculo se mueve sobre el plano, describiendo una determinada trayectoria.

Figura 129. Cicloide, es la trayectoria descrita por el punto A, del disco que gira sin deslizamiento sobre la línea recta

Si se fijan en la trayectoria de cualquier punto del círculo, que se mueve sobre una línea o sobre de una circunferencia, verán curvas distintas.

Se muestran algunas de ellas en los figuras 129 y 130.

Surge la pregunta: ¿Podrá un punto del círculo, corriendo por la "parte interna" de la circunferencia de otro círculo (figura 130), trazar una línea recta y no una curva? A simple vista parece imposible.

Sin embargo esto lo vi con mis propios ojos. Es un juguete: "la chica sobre la cuerda" (figura 131). Ustedes podrán construirlo también sin ninguna dificultad. En un trozo de cartón dibujan un círculo de 30 cm de diámetro, dejan espacio en el papel, y prolongan uno de los diámetros por ambos extremos.

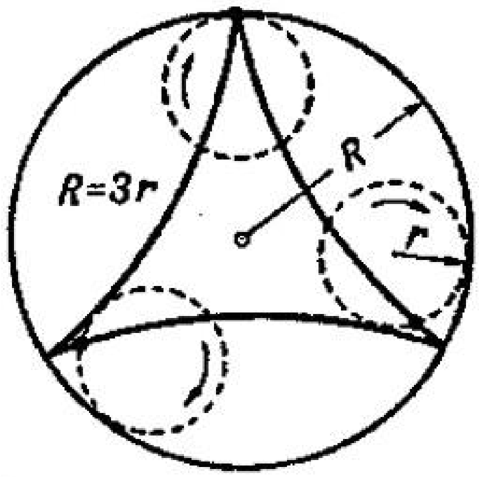


Figura 130. Hipocicloide, la trayectoria del punto de la circunferencia del disco, corriendo por el dentro de una circunferencia más grande, además R = 3r.

En los extremos del diámetro prolongado colocan dos agujas que sostienen un hilo, lo estiran horizontalmente y fijan sus extremos sobre el cartón. Cortan el círculo y dentro del círculo hueco que queda, colocan otro círculo de cartón, de 15 cm de diámetro.

Colocan una aguja sobre el borde del círculo pequeño, como se muestra en la figura 131, cortan del papel la figura de la chica y pegan una de sus piernas a la cabeza de la aguja.

Ahora traten de rodar el círculo menor, contra el borde del hueco circular. La cabeza de la aguja, junto con la figura de la chica, se desliza hacia adelante y hacia atrás, a lo largo del hilo tirante.

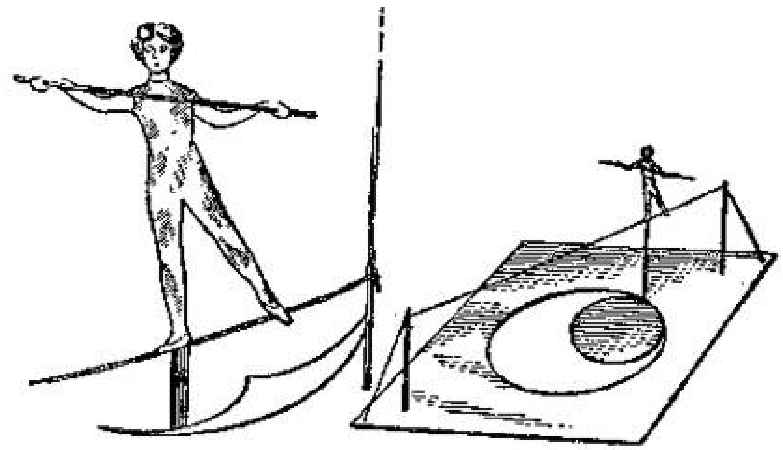


Figura 131. "La chica sobre la cuerda". En el círculo móvil hay unos puntos que se mueven en línea recta.

Esto explica por que el punto del círculo móvil, en el que se fijó la aguja, se mueve justamente a lo largo del diámetro del hueco circular. ¿Pero por qué en el caso análogo, mostrado en la figura 130, el punto del círculo móvil no describe una recta sino una curva (se llama hipocicloide)? Todo depende de la proporción entre los diámetros de ambos círculos.

Problema

Demostrar, que si dentro de un círculo mayor se mueve un círculo cuyo diámetro es la mitad del diámetro del círculo mayor, al efectuarse el movimiento, cualquier punto sobre la circunferencia del círculo menor se moverá sobre una línea recta, que corresponde al diámetro del círculo mayor.

Solución

Si el diámetro del círculo O_1 es la mitad del diámetro del círculo O (figura 132), al moverse el círculo O_1, en todo momento uno de sus puntos se encuentra en el centro del círculo O.

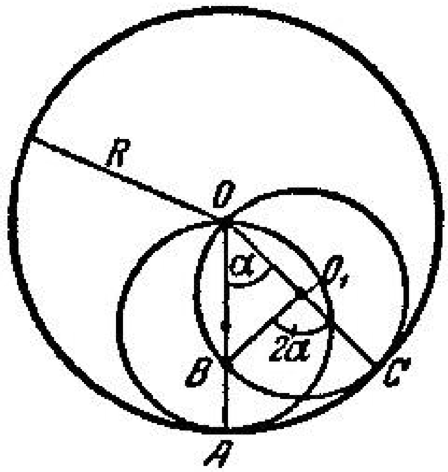


Figura 132. Explicación geométrica de "la chica sobre la cuerda"

Observemos el movimiento del punto *A*. Supongamos que el círculo menor ha recorrido el arco *AC*.

¿Dónde se encuentra ahora el punto *A* del círculo O_1?

Evidentemente, se debe encontrar en el punto *B* de su circunferencia, para que los arcos *AB* y *BC* tengan igual longitud (el círculo se mueve sin deslizarse).

Sea $OA = R$ y $\angle AOC = a$.

Luego $AC = Ra$; por lo tanto, $BC = Ra$, pero como $O_1C = R/2$, entonces

$$\angle BO_1C = R \times a\ /(R/2) = 2a;$$

Luego el ángulo inscrito $\angle BOC$ es $2a/\ 2 = a$, es decir, que el punto *B* se encuentra sobre la recta *OA*.

El juguete descrito aquí representa un mecanismo primitivo para transformación del movimiento giratorio en rectilíneo.

La construcción de estos mecanismos (llamados inversores) resulta de sumo interés a los técnicos mecánicos desde que el inventor ruso I. I. Polzunov, desarrolló la primera maquina a vapor.

Normalmente estos mecanismos, que transmiten al punto un movimiento rectilíneo, se construyen con bielas.

El matemático ruso P. L. Chebyshev (1821 – 1894), (figura 133), hizo un valioso aporte a las matemáticas de los mecanismos. Chebyshev no solo era un gran matemático, sino también un aventajado mecánico. Construyó un modelo de silla:

la “cicleta”, inventó el mejor mecanismo para máquinas contables de aquel tiempo: el “aritmómetro”, etc.

Figura 133 P. L. Chebyshev (1821 – 1894)

12. Un vuelo a través del Polo

Ustedes evidentemente, se acuerdan de un vuelo del famoso M. M. Gromov y sus compañeros desde Moscú hasta San Jacinto a través del Polo Norte, empleando 62 horas 17 min. Se han conquistado dos marcas mundiales de vuelo sin aterrizaje, en línea recta (10.200 km) y en curva (11.500 km).

¿Cómo creen ustedes que fuera posible, que el avión de los héroes diera la vuelta alrededor del eje terrestre junto con la Tierra, y cruzara el Polo al mismo tiempo? Con frecuencia se escucha esta pregunta, mas no siempre nos dan la respuesta correcta. En cualquier avión, también en ese que cruzó el Polo, sin duda alguna tendrá que tomar parte el giro del globo terrestre.

Esto sucede, porque el avión en vuelo permanece separado de la litosfera, pero se queda en la atmósfera, al tiempo que se mueve alrededor del eje de nuestro planeta.

Por lo tanto, al realizar el vuelo desde Moscú hasta Norteamérica, giraban al mismo tiempo el avión y la Tierra alrededor de su eje. ¿Qué trayectoria siguió este vuelo?

Para contestar correctamente esta pregunta, debemos tener en cuenta que cuando digamos “el cuerpo se mueve”, significa que varía la posición del cuerpo con respecto a otros. La pregunta acerca de la trayectoria, y en general, sobre el movimiento, no tendría sentido de no especificar, como dicen los matemáticos, el sistema de referencia, o sencillamente, el cuerpo respecto al cual se presenta el movimiento.

Relativo a la Tierra, el avión de M. M. Gromov se movió a lo largo del meridiano de Moscú; como cualquier otro, giró junto con la Tierra alrededor de su eje, siguiendo la línea del meridiano durante todo el vuelo; pero este movimiento no se manifiesta para un observador en Tierra, porque se da en relación a otro cuerpo cualquiera, no con relación a la Tierra.

Por lo tanto, si nosotros estamos en la Tierra, veremos la trayectoria del vuelo a través del Polo, como un arco de un gran círculo, si tener en cuenta, que el avión se movió sobre el meridiano, conservando siempre la misma trayectoria, entre los polos terrestres.

Ahora preguntaremos de otra manera: tenemos el movimiento del avión con respecto a la Tierra y sabemos, que el avión gira junto a la Tierra alrededor del eje terrestre, es decir, tenemos el movimiento de avión y de la Tierra con respecto de un tercer cuerpo; ¿Cuál es la trayectoria del vuelo para el observador, en relación con este tercer cuerpo?

Vamos a facilitar la tarea. Imaginemos la región polar de nuestro planeta como un disco plano, cuya superficie se sitúa perpendicularmente al eje terrestre. Sea esta superficie imaginaria aquel “cuerpo” respecto al cual se mueve el disco alrededor del eje terrestre, y a lo largo de un diámetro del disco regularmente se desplaza una carreta mecánica: Esta representa al avión, volando a lo largo del meridiano, a través del Polo. ¿Qué trayectoria va a seguir nuestra carreta en la superficie (mejor dicho, un punto de la carreta, en su centro de gravedad)?

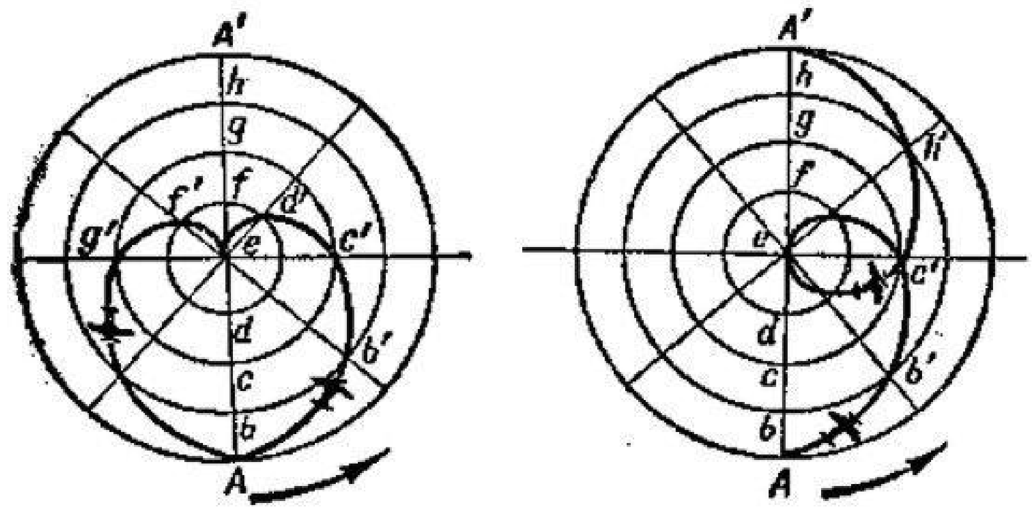
El tiempo durante cual va la carreta desde un extremo del diámetro hasta el otro, dependerá de su velocidad.

Vamos a ver tres casos:

1. La carreta recorre su camino durante 12 horas;
2. Recorre el mismo camino durante 24 horas y
3. Recorre igual trayecto durante 48 horas.

En cada caso, el disco da una vuelta cada 24 horas.

Primer caso (figura 134). La carreta se mueve sobre el diámetro del disco durante 12 horas. Durante este tiempo el disco da media vuelta, es decir que gira 180º, y se intercambia la posición de los puntos *A* y *A'*.



Figuras 134 – 135 Las curvas que describe un punto sobre una superficie fija, participando durante dos movimientos.

En la figura 134 el diámetro está dividido en ocho partes iguales, la carreta recorre cada una de ellas en 12/8 = 1,5 horas.

Veamos donde está la carreta después de moverse durante 1,5 horas.

Si el disco no da vueltas, la carreta, sale del punto *A*, y alcanza el punto *b* después de 1,5 horas.

Pero el disco gira 360º/8 = 45º, durante 1,5 horas. Por esto el punto *b* del disco se traslada al punto *b'*.

Un observador que se encuentre sobre el disco y de vueltas junto con este, no notará su giro y verá que la carreta pasa del punto *A* al punto *b*.

Pero el observador, que se encuentre fuera del disco y no participe de su giro, notará otra cosa: La carreta se mueve sobre una línea curva desde el punto *A* hasta el punto *b'*.

Después de 1,5 horas más, el observador que esté fuera del disco, ve la carreta en el punto *c'*.

Luego de otras 1,5 horas la carreta recorre el arco *c'd'.*

Luego de otras 1,5 horas más, alcanzará el centro *e*.

Si el observador que esté por fuera del disco fija su atención al movimiento de la carreta, nota algo curioso: la carreta describe la curva *ef'gf'A*, y curiosamente no termina el movimiento en el extremo opuesto del diámetro, sino en el punto de partida.

Este enigma se explica así: Luego de seis horas de viaje sobre la mitad del diámetro, el radio gira 180º junto con el disco y este se orienta de nuevo hacia la mitad del diámetro que acaba de recorrer. Como la carreta gira a la par con el disco, al momento de pasar por su centro, un punto de la carreta se une con el centro del disco, y en un momento determinado, la carreta gira junto con el disco alrededor de este punto. Ocurre lo mismo con un avión en el momento en que vuela sobre el Polo. Entonces la trayectoria que describe la carreta entre los extremos del diámetro del disco es diferente para dos observadores ubicados en distinto lugar. Aquel que está sobre el disco y gira junto con él, verá la trayectoria como una línea recta. Pero el observador fijo –es decir, que no se encuentra sobre el disco-, verá el movimiento de la carreta como una curva, tal como se muestra en la figura 134 y tendrá forma de corazón.

Cualquier observador en Tierra, ve la misma curva del desplazamiento del avión en vuelo, perpendicular al eje terrestre,

Asumiendo que la Tierra sea etérea, el observador y la superficie no participan del giro de la Tierra, y el vuelo a través del Polo dura 12 horas.

He aquí un ejemplo curioso en el que se suman los dos desplazamientos.

En realidad el vuelo a través del Polo desde Moscú hasta el punto diametralmente opuesto del mismo paralelo dura 12 horas, por eso examinaremos otro ejemplo referente al mismo problema.

Segundo caso (figura 135). La carreta se mueve sobre el diámetro durante 24 horas. Durante este tiempo el disco da la vuelta completa, y por lo tanto para un observador fijo en relación al disco, la trayectoria sigue una curva, tal como se muestra en la figura 135.

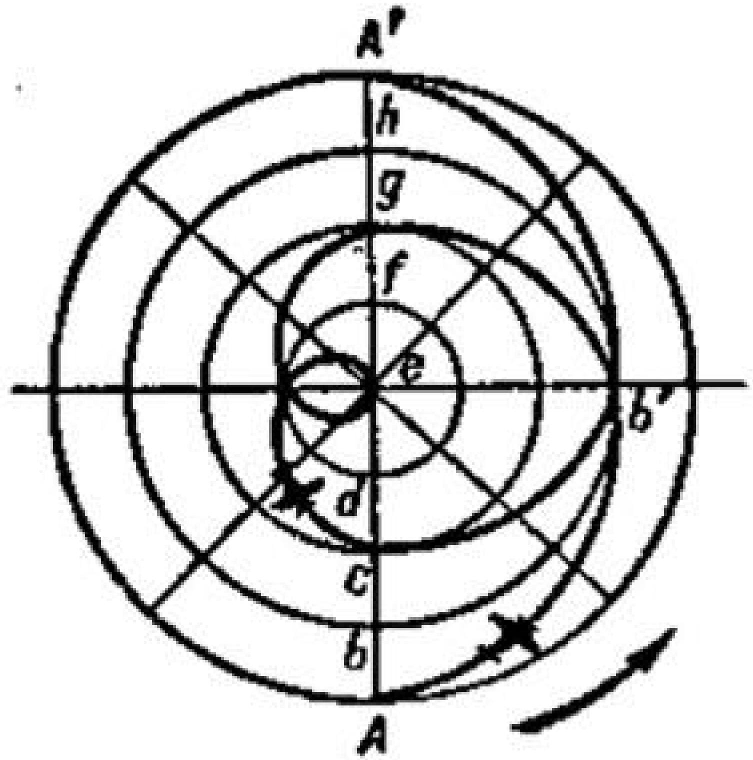


Figura 136. Al sumar los dos movimientos se obtiene una curva muy pronunciada.

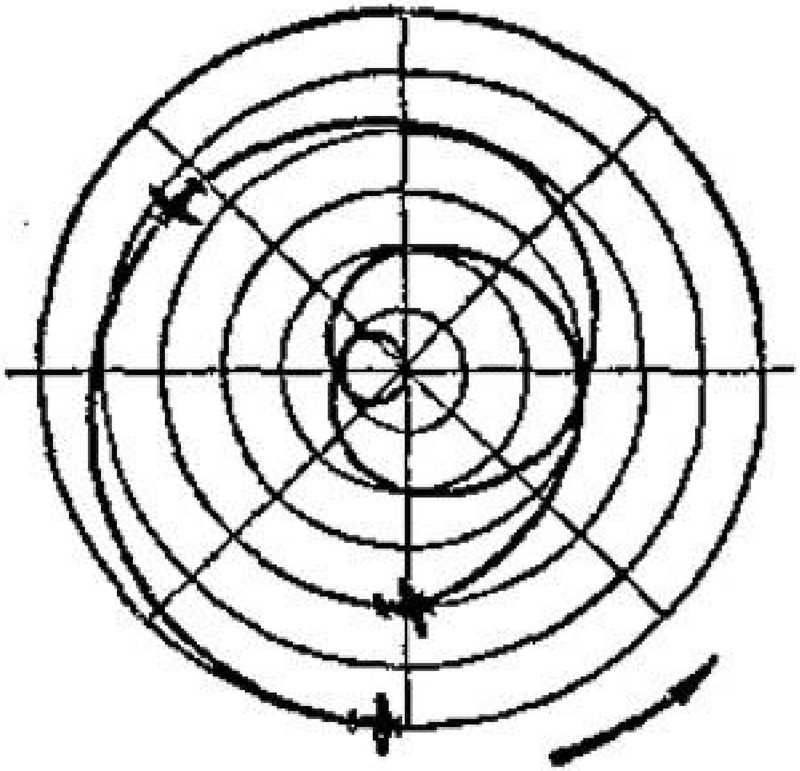


Figura 137. La trayectoria Moscú – San Jacinto como la ve el observador, que no participa en el vuelo, y tampoco en la rotación de la Tierra

Tercer caso (figura 136) El disco, de igual manera que en los casos visto antes, da una vuelta cada 24 horas, pero la carreta recorre el diámetro, de extremo a extremo, durante 48 horas.

En este caso, la carreta recorre 1/8 del diámetro en 48:8 = 6 horas.

Durante estas seis horas el disco da un cuarto de vuelta, o sea, 90º.

Por eso, seis horas después de ponerse en movimiento, la carreta se traslada sobre el diámetro (figura 136) hasta el punto *b*, pero el giro del disco traslada este punto hasta el punto *b'*.

Después de otras seis horas la carreta pasa por el punto *g*, y así sucesivamente.

La carreta recorre todo el diámetro en 48 horas, y el disco da dos vueltas completas. En vez de sumar estos dos movimientos, un observador fijo ve una trayectoria curva, la misma que se muestra con un trazo continuo, en la figura 136.

Observando este caso apreciamos de cerca las verdaderas condiciones de vuelo a través del Polo. El vuelo dura unas 24 horas desde Moscú hasta el Polo; el observador que se encuentra en Tierra, ve esta parte de la trayectoria similar a la primera mitad de la curva (figura 136). La parte restante del vuelo de M. M. Gromov, dura una y media veces más, y el trayecto desde el Polo hasta San Jacinto también es una y media veces más largo que la distancia desde Moscú hasta el Polo Norte. Por eso esta última parte del trayecto se representa con la misma curva, una y media veces más larga que la que corresponde a la primera parte del vuelo.

Probablemente, a muchos de ustedes les confunda el hecho de que el punto inicial y el punto final (figura 137), se ven como vecinos cercanos.

Pero no olvidemos que la figura no indica las posiciones de Moscú y San Jacinto en el mismo instante, sino que distan entre si, un lapso de 2½ veces, en un período de veinticuatro horas.

El trayecto hacia el Polo Norte tiene una forma similar a la antes descrita, si observamos el vuelo desde Tierra. ¿Pero si podemos llamar “verdadera trayectoria a través del Polo” a este complejo bucle, a diferencia de la trayectoria relativa, que se indica en las cartas de navegación? No, ese movimiento también es relativo: El movimiento está relacionando con un cuerpo que no participa en el giro de la Tierra alrededor de su eje, lo mismo que la figura de la trayectoria relativa a la superficie giratoria de la Tierra.

Si observamos el mismo vuelo desde la Luna o el Sol, la trayectoria del mismo tiene otro aspecto.

La Luna no comparte la rotación terrestre cada veinte cuatro horas, pero da la vuelta alrededor de nuestro planeta cada mes. Durante 62 horas de vuelo desde Moscú hasta San Jacinto, la Luna describe alrededor de la Tierra un arco de 30º, y esto afecta la trayectoria del vuelo, para un observador situado en la Luna. La ruta del avión, observada respecto del Sol, involucra un tercer movimiento, el giro de Tierra alrededor del Sol.

“No existe el movimiento de un cuerpo aislado, solo existe el movimiento relativo”, -dijo F. Engels en la “Dialéctica de la naturaleza”.

El problema que acabamos de analizar nos confirma esta frase.

13. Longitud de la correa de transmisión

Cuando los alumnos de escuela profesional terminaron su trabajo, el maestro al despedirse les propuso resolver un ejercicio.

Problema

“Para una de las nuevas instalaciones de nuestro taller, dijo el maestro, se necesita ensamblar la correa de transmisión, pero no sobre dos poleas, como es usual, sino sobre tres poleas, y el maestro les enseñó el esquema de la transmisión (figura 138).

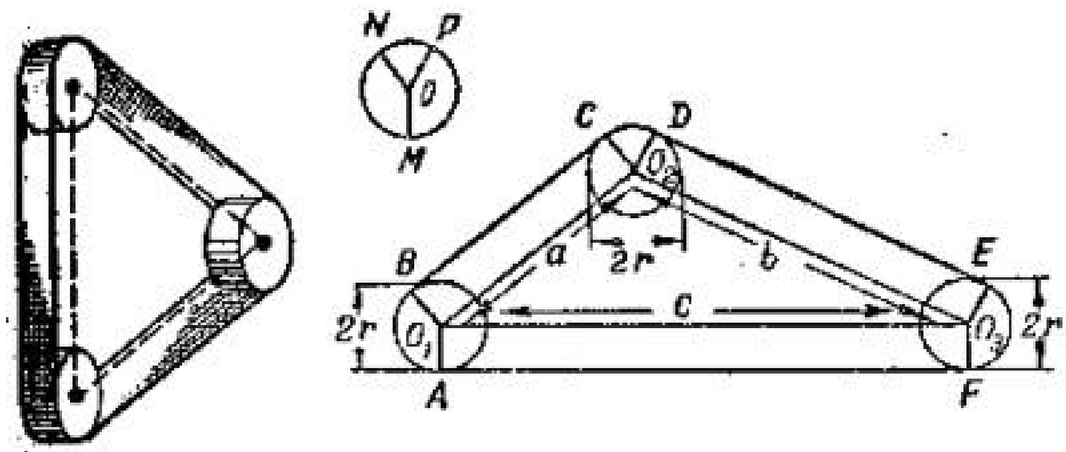


Figura 138. Esquema de transmisión. ¿Cómo hallar la longitud de la correa de transmisión, empleando solamente las medidas dadas?

Las tres poleas, continuaba él, tienen las mismas medidas. Sus diámetros y las distancias entre sus ejes se indican en el esquema.

¿Conociendo estas medidas y sin hacer mediciones suplementarias, cómo se puede encontrar rápidamente la longitud de la correa de transmisión?”

Los alumnos empezaron a pensar. De pronto alguno de ellos dijo:

“Pienso que toda la dificultad radica en que no se indican las medidas de los arcos *AB, CD, EF*, sobre cual rodea la correa cada uno de los rodillos. Para encontrar la longitud de cada arco necesitamos saber el valor de su ángulo central y, a mí me parece que, sin transportador no se puede obtener.”

“Podemos calcular los ángulos de los que estás hablando, respondió el maestro, con las medidas indicadas en la figura, mediante la ayuda de las fórmulas y las tablas trigonométricas, pero este camino es muy largo y difícil. Tampoco necesitaremos aquí el transportador, porque no hace falta conocer la longitud de cada arco, es suficiente saber...”.

"Su suma, dijeron los chicos, habida cuenta de qué se trata".

"Bueno, pero váyanse ahora a casa y traigan mañana sus soluciones."

No se apresuren por conocer la solución que trajeron los chicos.

Después de todo, con lo que ha dicho el maestro no es difícil solucionar por si mismo.

Solución

En realidad, la longitud de la correa se encuentra con extrema facilidad: A la suma de las distancias entre los ejes de los rodillos hay que añadir la longitud de la circunferencia de una polea. Si la longitud de la correa es l, entonces

$$l = a + b + c + 2\pi r$$

Con base en el hecho de que la suma de las longitudes de los arcos con los cuales hace contacto la correa da la longitud total de una polea, todos los alumnos encontraron la clave, pero demostrar la solución resultó difícil para algunos.

De las todas soluciones el maestro ha preferido la más corta el siguiente.

Sea BC, DE, FA, son tangentes a las circunferencias (figura 138). Pasaremos los radios en los puntos del contacto. Como las circunferencias de las poleas tienen mismos radios, entonces las figuras O_1BCO_2, O_2DEO_3 y $O_3FA\ O_1$, son rectángulos, por lo tanto,

$$BC + DE + FA = a + b + c.$$

Deja ver que la suma de las longitudes de los arcos: $AB + CD + EF$ corresponde a la longitud de una circunferencia completa.

Para esto construimos la circunferencia O con el radio r (figura 138, parte superior central). Pasamos $OM \parallel O_1A$, $ON \parallel O_1B$ y $OP \parallel O_2D$, luego $\angle MON = \angle AO_1B$, $\angle NOP = \angle CO_2D$, $\angle POM = \angle EO_3F$, por ser ángulos con lados paralelos.

De aquí se deduce, que

$$AB + CD + EF = MN + NP + PM = 2\pi r.$$

De donde, la longitud de la correa es:

$$l = a + b + c + 2\pi r.$$

De igual manera podemos afirmar que no solo para tres, sino para cualquier cantidad de poleas iguales, la longitud de la correa de transmisión es igual a la suma de los intervalos entre sus ejes más la longitud de la circunferencia de una polea.

Problema

En la figura 139 se presenta un esquema de transmisión con cuatro ruedas (también hay ruedas intermedias, pero no se indican en el esquema, pues no tienen importancia en la solución de este problema).

Utilizando la escala indicada en la figura, introduzca las medidas necesarias y calcule la longitud de la correa.

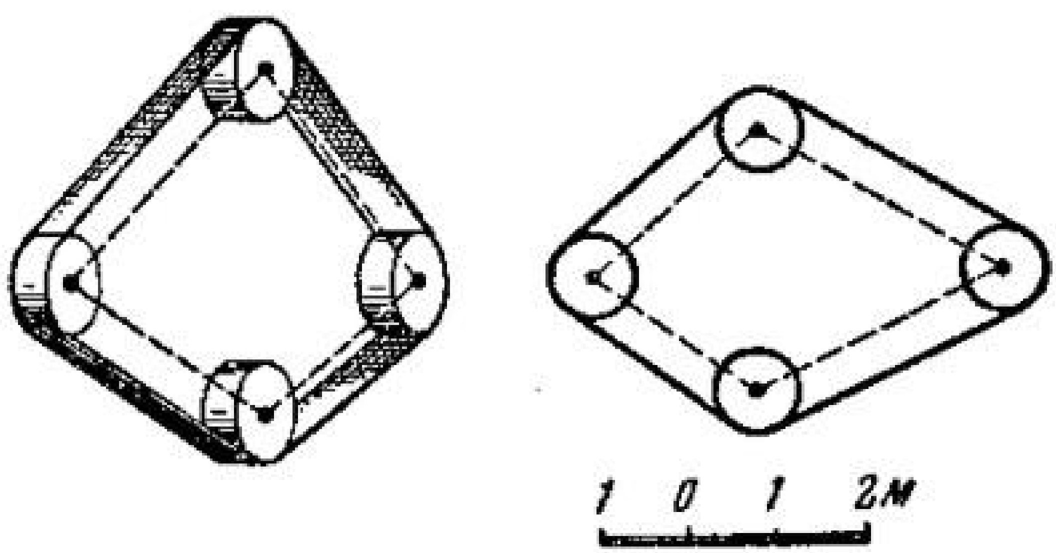


Figura 139. Mediante la escala dada se anotan las medidas necesarias, en la figura, y se calcula la longitud de la correa de transmisión.

14. Un problema sobre la corneja prudente

Nuestros manuales escolares tienen la historia de “la corneja prudente”.

Esta antigua historia cuenta que una corneja muerta de sed encontró un jarro con agua.

Había muy poca agua en el jarro, y con el pico no pudo alcanzarla, pero se le ocurrió una solución a la corneja. Comenzó a tirar los pedruscos en el jarro. Como resultado de esta argucia, subió el nivel del agua hasta el borde, y la corneja pudo tomársela.

No vamos a discutir acerca de si existe o no una corneja tan inteligente. De este problema nos interesa el enfoque geométrico. Nos da motivos para resolver el siguiente problema,

Problema

¿Pudo tomar agua la corneja, si el agua llegaba hasta la mitad del jarro?

Solución

Analizando este problema comprobaremos que el procedimiento empleado por la corneja, puede funcionar o no, dependiendo del nivel inicial de agua en el jarro.

Para simplificar los cálculos, supondremos que el jarro tiene forma de prisma rectangular, y los pedruscos tienen formas esféricas de igual tamaño. Se comprende fácilmente, que el agua sobrepasa el nivel de los pedruscos, siempre que la cantidad de agua que hay dentro del jarro tenga mayor volumen que los intersticios entre los pedruscos: En este caso, el agua llenará los espacios y brotará sobre los pedruscos.

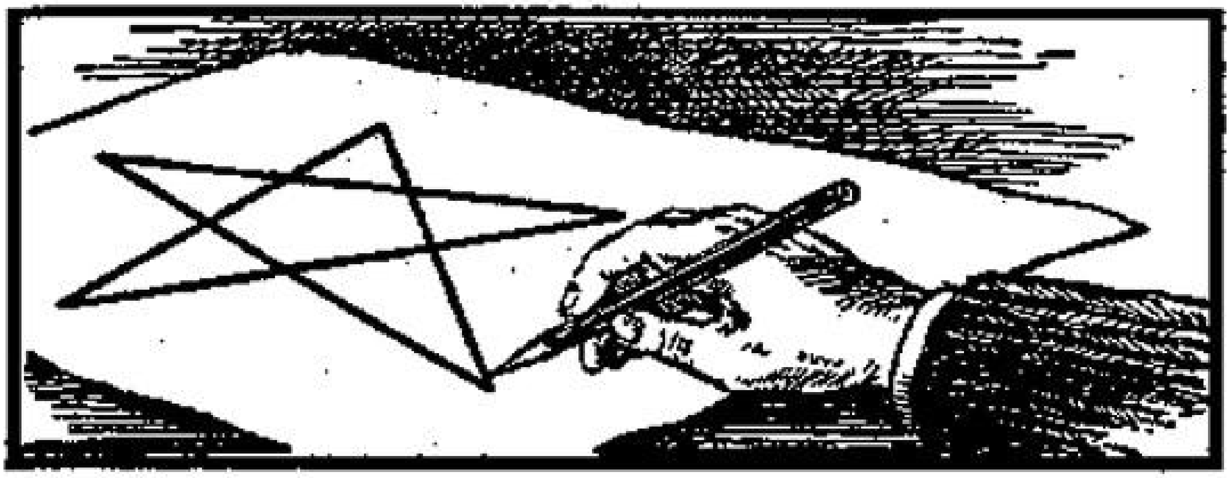
Vamos a calcular el volumen que ocupan estos intersticios. Para facilitar el cálculo, asumiremos que los pedruscos están dispuestos de modo tal que sus centros está situados sobre una recta vertical.

Sea d – diámetro de un pedrusco, por lo tanto, su volumen es: $1/6 \times \pi d^3$, la fracción cúbica, del volumen del jarro, que contiene el pedrusco, es: d^3. La diferencia entre sus volúmenes es: $d^3 - 1/6\ \pi d^3$ que corresponde a la parte vacía del cubo, y se obtiene el valor:

$$\frac{d^3 - \frac{1}{6}\pi d^2}{d^3}$$

Lo que significa que la parte vacía de cada fragmento cúbico del jarro corresponde a 0,48 partes de su volumen. La suma de los volúmenes de todos los intersticios del volumen del jarro da este mismo valor, es decir, un poco menos de la mitad del volumen total. El resultado no varía, si se cambia la forma del jarro y también la forma de los pedruscos. En general podemos afirmar, que si el agua contenida en el jarro, no llega inicialmente a la mitad de su volumen, la corneja no podrá subir el nivel del hasta el borde, tirándole pedruscos.

Si la corneja fuera tan fuerte que pudiera pulverizar y compactar los pedruscos, podría subir el agua al doble de su nivel inicial. Pero de acuerdo con las condiciones del problema, la corneja no logra hacer esto y coloca cada pedrusco sobre otro. Además de esto, usualmente los jarros son más anchos en el centro, lo que reduce el nivel al que sube el agua y comprueba que nuestra conclusión es correcta: Si el agua estaba por debajo de la mitad del jarro, la corneja no pudo tomársela.



Capitulo 10
Geometría sin Mediciones y sin Cálculos

Contenido:

1. Construcción sin compás

Cuando necesitamos resolver problemas en los que se deben realizar construcciones geométricas, usualmente echamos mano de la regla y el compás. Sin embargo, ahora veremos cómo resolver algunos problemas sin instrumentos suplementarios.

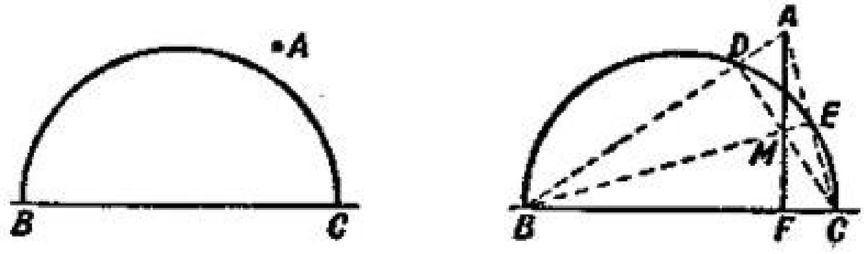


Figura 140. Problema de construcción y solución. Primer caso

Problema

Desde el punto A (figura 140, a la izquierda), que se encuentra fuera de la semicircunferencia dada, trazar la perpendicular a su diámetro, sin utilizar el compás. No se especifica donde se encuentra el centro de la semicircunferencia.

Solución

Para nosotros resulta útil la propiedad del triángulo que establece que todas sus alturas se cruzan en un punto. Uniendo *A* con *B* y *A* con *C*, obtenemos los puntos *D* y *E* (figura 140, a la derecha).

Las rectas *BE* y *CD,* evidentemente, son alturas del triángulo *ABC.* La tercera altura, que es la perpendicular a *BC*, tiene que pasar por el punto de intersección de las otras dos, es decir, por el punto *M.*

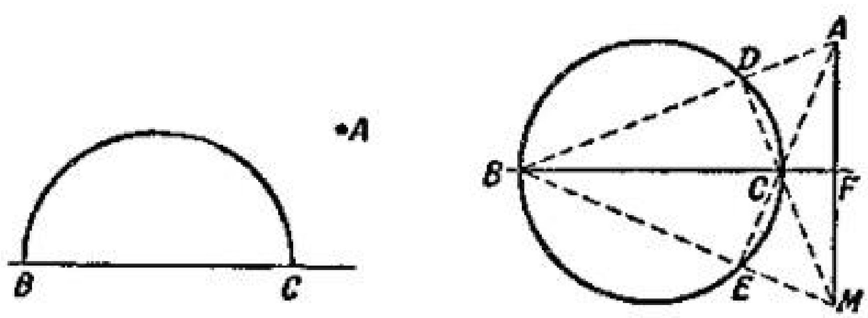


Figura 141. El mismo problema. Segundo caso

Con la regla, trazamos una recta a través de los puntos *A* y *M*, respondemos a las condiciones del problema, sin utilizar el compás.

Si se encuentra el punto de modo que la perpendicular buscada baja *sobre la prolongación* del diámetro (figura 141), entonces podemos resolver el problema con la condición de que tengamos la circunferencia completa, no la semicircunferencia. La figura 141 indica, que la solución de este problema no difiere de la del anterior, cuyo procedimiento ya conocemos; solo que en este caso las alturas del triángulo *ABC* se cruzan fuera de él y no dentro del mismo.

2. El centro de gravedad de una placa

Problema

Quizás, ustedes saben, que el centro de gravedad de una placa fina, de forma rectangular o rómbica, se encuentra en el punto de intersección de sus diagonales, y si la placa es triangular, está en el punto de intersección de sus medianas, si es un círculo, en el centro del mismo.

Ahora intenten adivinar, cómo encontrar el centro de gravedad de una placa, mediante una construcción geométrica. Se unen dos rectángulos cualesquiera, para formar una placa, como se muestra en la figura 142.

Solo se puede usar la regla; no se permiten cálculos ni mediciones.

Solución

Prolongamos el lado *DE* hasta intersecar al lado *AB* en el punto *N* y el lado *FE* hasta intersecar el lado *BC* en el punto *M* (figura 143). A partir de la figura inicial vamos a analizar se forma mediante los dos rectángulos *ANEF* y *NBCD.* El centro de gravedad de cada uno de ellos se encuentra en los puntos de intersección de sus diagonales: O_1 y O_2.

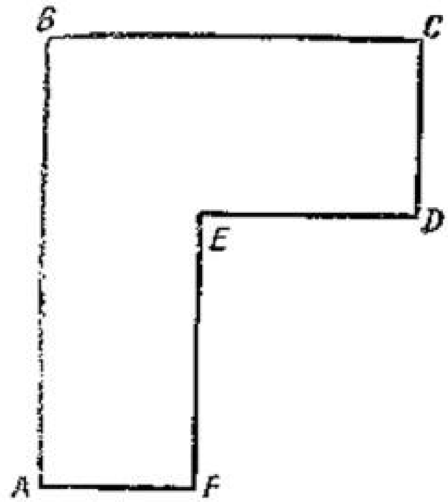


Figura 142. Encontrar el centro de gravedad de la placa, empleando la regla.

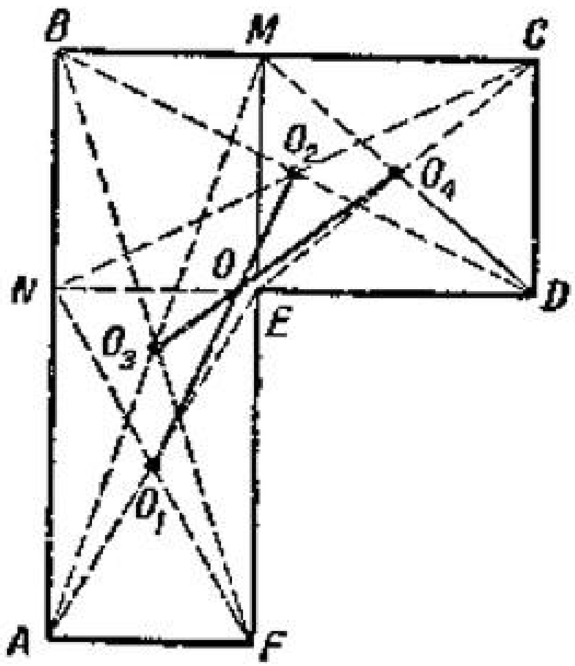


Figura 143. Se encontró el centro de gravedad de la placa.

Por lo tanto, el centro de gravedad de la figura completa se encuentra sobre la recta O_1O_2. Veamos ahora como se forma la misma figura con los dos rectángulos *ABMF* y *EMCD,* donde los centros de gravedad se encuentran en los puntos de intersección de sus diagonales, O_3 y O_4. El centro de gravedad de toda la figura se encuentra sobre la recta O_3O_4. Este se encuentra en el punto *O* de intersección de las rectas

O_1O_2 y O_3O_4. Efectivamente se han realizado todos los trazos únicamente con ayuda de la regla.

3. Una tarea de Napoleón

Hemos dedicado tiempo a construcciones geométricas en las que hemos usado únicamente la regla, y no el compás (con una sola condición: se parte de la circunferencia). Ahora vamos a analizar un par de problemas, en los que se introduce la condición contraria: se prohíbe usar la regla, y se deben realizar las construcciones solamente con ayuda del compás. Por uno de estos problemas estuvo interesado el Napoleón I (como sabemos, fue un admirador de las matemáticas). Recitando un libro sobre estas construcciones, escrito por el científico italiano Macceroni, Napoleón propone a los matemáticos franceses lo siguiente:

Problema

Hay que dividir la circunferencia dada en cuatro partes equivalentes entre sí, sin usar la regla, Se conoce la ubicación de su centro.

Solución

Es necesario dividir en cuatro partes la circunferencia O (figura 144).

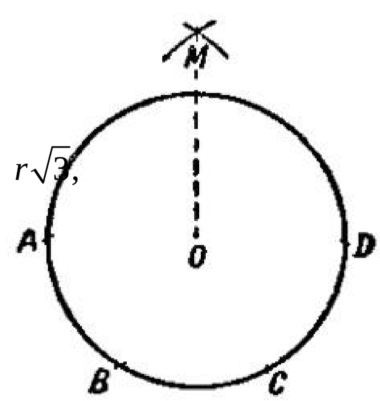


Figura 144. Dividir la circunferencia en cuatro partes iguales, usando solamente el compás.

Desde un punto arbitrario *A*, sobre la circunferencia, tomamos tres veces el radio del círculo: obtenemos los puntos *B, C* y *D.* Es fácil de ver, que la distancia *AC* es la cuerda del arco, formada por ½ de circunferencia, es el lado del triángulo equilátero inscrito y, por lo tanto, es equivalente a $r\sqrt{3}$ donde r es el radio de circunferencia. *AD,* evidentemente, es el diámetro de la circunferencia. Desde los puntos *A* y *D* con un radio equivalente a *AC,* localizamos los arcos, que se cruzan en el punto *M.* Comprobemos que la distancia *MO* es equivalente a un lado del cuadrado, inscrito en nuestra circunferencia. En el triángulo *AMO* el cateto

$$MO = \sqrt{AM^2 - AO^2} = \sqrt{3r^2 - r^2} = r\sqrt{2}$$

es decir, que es igual al lado del cuadrado inscrito. Nos queda ahora con una sola abertura de compás, equivalente a *MO,* trazar sucesivamente en la circunferencia, los cuatro puntos, para tener las alturas del cuadrado inscrito, las que, evidente, dividen la circunferencia en cuatro partes iguales.

Problema

El siguiente problema es más sencillo y versa sobre el mismo tema. Sin usar la regla, aumentar cinco veces los lados de un triángulo equilátero, uno de cuyos lados es AB (figura 145).

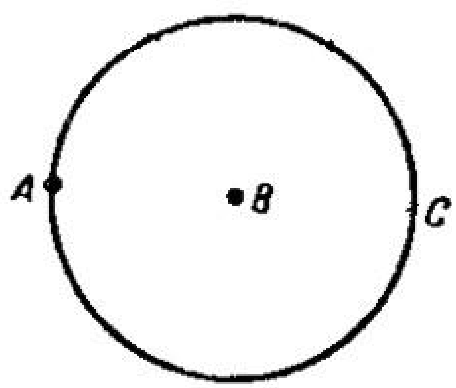


Figura 145. ¿Cómo aplicar la distancia entre los puntos A y B, n veces (n es un número entero), usando el compás?

Solución

Desde el punto *B* con el radio *AB* trazamos la circunferencia (figura 145). Sobre esta circunferencia medimos desde el punto *A* la distancia *AB* tres veces consecutivas, obtendremos el punto *C*, que evidentemente, es diametralmente opuesto a *A.* La distancia *AC* mide el doble de la distancia *AB.* Trazando una circunferencia con centro en *C* y radio *BC,* podemos encontrar un punto D, diametralmente opuesto a *B*, que se encuentra alejado de *A*, el triple de *AB*, y así sucesivamente.

4. Un sencillo trisector (trisecador)

Es posible dividir un ángulo dado en tres partes iguales, empleando solamente un compás y una regla sin ningún tipo de divisiones ni marcas. Las matemáticas, sin embargo, permiten realizar esta división con ayuda de otros instrumentos.

Se han inventado muchos instrumentos mecánicos para tratar este asunto. Estos aparatos se llaman trisectores (trisecadores). Se puede construir un sencillo trisector con un papel grueso, un cartón o una lata fina. Sirve como instrumento para trazar líneas y de ayuda.

En la figura 146 se muestra un trisector en tamaño natural (la figura sombreada).

La franja horizontal sombreada tiene una longitud *AB* equivalente al radio del semicírculo adyacente a ella. La franja *BD* forma un ángulo recto con la recta *AC*, y es tangente al semicírculo en el punto *B*.

Longitud de esta franja es arbitraria. En la misma figura se observa el uso del trisector.

Asumamos, por ejemplo, que se requiere dividir el $\angle KSM$ en tres partes iguales (figura 146). Se coloca el trisector de modo tal que el vértice del ángulo, *S*, quede sobre la línea *BD,* uno de los lados del ángulo pasa por el punto *A,* y el otro lado queda tangente al semicírculo[34].

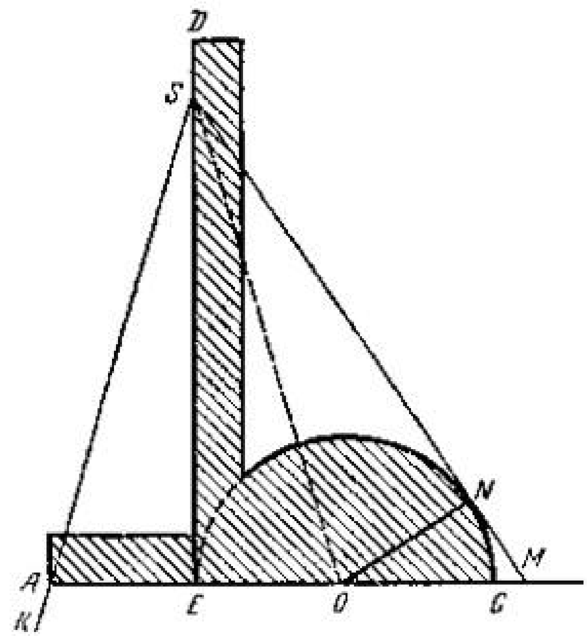


Figura 146. Esquema del trisector y su forma de uso

Luego se trazan las rectas *SB* y *SO,* y el ángulo queda dividido en tres partes iguales. Para demostrarlo, se traza un segmento de recta entre el centro del semicírculo, *O*, y el punto del tangencia, *N.* Se observa que el ΔSBO es congruente con el ΔOSN. La igualdad de estos triángulos se demuestra ya que los ángulos $\angle ASB$, $\angle BSO$ y $\angle OSN$ son congruentes, que era lo que se quería demostrar.

5. El reloj – trisector

Problema

¿Es posible con ayuda del compás, la regla y el reloj, dividir un ángulo en tres partes iguales?

Solución

Es posible. Se traza el ángulo dado sobre un papel transparente y en el momento en que se junten las manecillas del reloj, se coloca la figura sobre la esfera de modo que el vértice del ángulo coincida con el centro de giro de las manecillas y uno de sus lados quede en la dirección en que se encuentran las manecillas (figura 147).

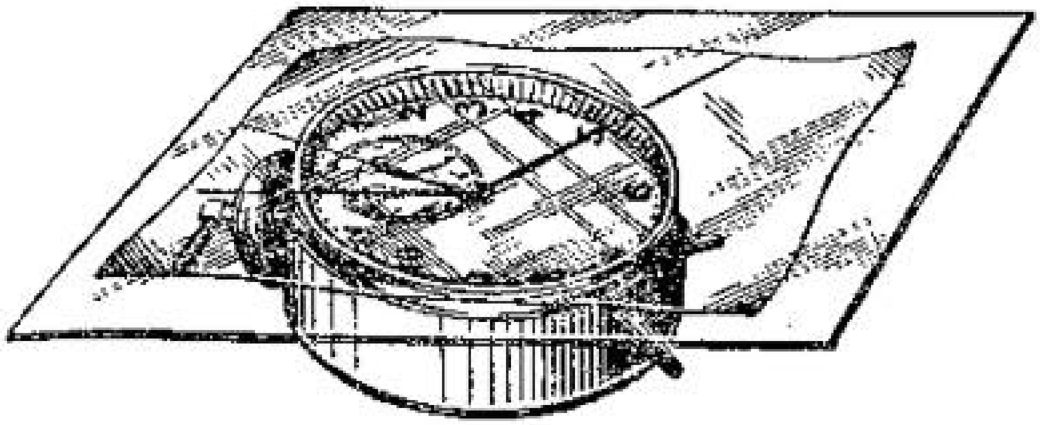


Figura 147. El reloj – trisector

En el instante en que el minutero pase sobre el otro lado del ángulo dado, se traza una línea desde el vértice del ángulo, en la dirección en la que apunta el horario. Este ángulo corresponde al giro del horario. Ahora con ayuda del compás y la regla se duplica dicho ángulo, y luego se duplica una vez más (la duplicación es ampliamente conocida en geometría).

El ángulo así obtenido, equivale a 1/3 del ángulo dado.

Ciertamente, cuando el minutero describe un ángulo α, el horario recorre un ángulo 12 veces menor: $\alpha/12$; si se aumenta 4 veces este ángulo se obtiene:

$$\frac{4\times\alpha}{12}=\frac{\alpha}{3}$$

6. La división de una circunferencia

Los radioaficionados, los constructores, los diseñadores y también los aficionados a las manualidades a veces se quedan pensando en un problema.

Problema

Cortar de una placa para formar un polígono de una cantidad dada de lados. La tarea se expresa de la siguiente forma: dividir la circunferencia en n partes iguales, donde n es el número entero.

* * *

Dejaremos a un lado el uso del transportador y “el tanteo a ojo” para resolver este problema, por lo tanto, pensaremos en la solución geométrica: con ayuda del compás y la regla.

En un comienzo surge la pregunta: ¿Teóricamente, en cuántas partes se puede dividir exactamente una circunferencia, con ayuda del compás y la regla? Los matemáticos resolvieron este problema, pero solo para ciertos valores.

Se puede dividir exactamente la circunferencia en *2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17..., 257,...* partes.

No se puede dividir exactamente la circunferencia en *7, 9, 11, 13, 14...* partes.

Además, no existe un método único de construcción. La forma en que se divide la circunferencia en *15* partes no es igual a la forma en que se divide en *12* partes, etc.; por esta razón, resulta imposible recordar todos los métodos.

Precisamente hay un método geométrico práctico, aunque aproximado, pero bastante simple para dividir una circunferencia en cualquier cantidad de arcos iguales.

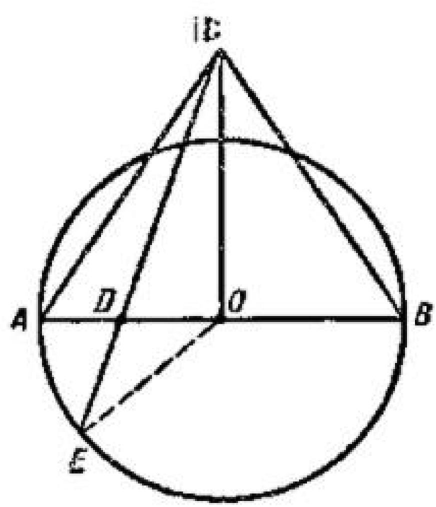


Figura 148. El método geométrico para dividir la circunferencia, de manera aproximada, en n partes iguales

Desafortunadamente los manuales de geometría no prestan atención a este asunto, por eso hemos preparado un método aproximado y curioso para resolver geométricamente este problema.

Si se requiere, por ejemplo, dividir en nueve partes iguales, la circunferencia dada (figura 148).

Sobre un diámetro *AB* de la circunferencia, construimos un triángulo equilátero *ACB* y dividimos ese diámetros por el punto *D* de forma que *AD:AB = 2:9* (en el caso general *AD:AB = 2:n*).

Unimos los puntos *C* y *D* con un segmento de recta y lo prolongamos hasta que corte la circunferencia en el punto *E.* El arco *AE* medirá aproximadamente 1/9 de la circunferencia (en el caso general *AE = 360°/n*, o sea que, la cuerda *AE* será un lado del polígono inscrito de 9 lados (*n*–agono).

El error relativo es ≅ 0,8%.

* * *

Si se expresa la relación entre el valor del ángulo central, ∠*AOE*, (figura 148), y el número de divisiones, *n*, se obtiene la siguiente fórmula:

$$tg(\measuredangle AOE) = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{n^2+16n-32}-n}{n-4}$$

para valores grandes de *n*, se puede sustituir por una fórmula aproximada:

$$tg(\measuredangle AOE) \cong 4\sqrt{3} \times \left(n^{-1} - 2n^{-2}\right)$$

Por otra parte la división exacta del ángulo central de la circunferencia, en *n* partes iguales, tiene que ser 360°/*n.* Comparando el ángulo 360°/*n* con el ángulo ∠*AOE,* obtenemos el error cometido, tomando el arco *AE* como parte de la circunferencia.

Acá tenemos la tabla para algunos *n* significativos:

n	3	4	5	6	7	8	10	20	60
360º/n	120º	90º	72º	60º	51º26’	45º	36º	18º	6º
<*AOE*	120º	90º	71º57’	60º	51º31’	45º11’	36º21’	18º38’	6º26’

error (%)	0	0	0,07	0	0,17	0,41	0,97	3,5	7,2

Como vemos en la tabla, con el método indicado se puede dividir la circunferencia en *5, 7, 8* ó *10* partes con un margen de error que oscila entre *0,07%* y *1%;* Este error es admisible para la mayor parte de los trabajos prácticos. Al aumentar el número de divisiones, *n*, se reduce la exactitud, es decir, que aumenta el error relativo, pero, los análisis muestran que, para cualquier *n* el error no supera el *10%.*

7. La dirección del golpe (un problema sobre la bola de billar)

Mandar la bola de billar a la tronera no con un golpe directo, sino a dos o tres bandas, implica, ante todo, resolver "mentalmente" un problema "empleando una construcción geométrica".

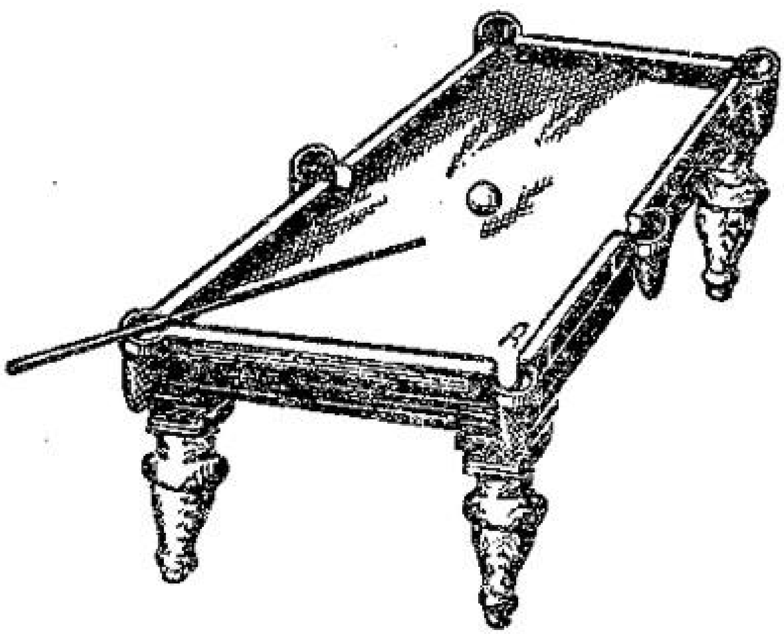


Figura 149. Un problema geométrico sobre la mesa de billar

Lo importante es encontrar "a ojo" el primer punto en que golpea la bola a la banda; de ahí en adelante la ley de reflexión ("el ángulo de incidencia es igual al ángulo reflexión") determina la trayectoria que sigue la bola.

Problema

¿Qué construcciones geométricas podrán ayudarnos a encontrar la dirección del golpe, para que la bola, que se encuentra en el centro de la mesa, después de tres bandas entre en la tronera A? (figura 149)

Solución

Imagínense que frente a uno de los lados más cortos de la mesa se juntan tres mesas de billar por su lado más largo, y apuntan con el taco hacia la tronera más lejana, de la tercera mesa imaginaria.

La figura 150 ayuda a comprender lo antedicho. Sea *OabcA* la trayectoria descrita por la bola. Si giramos 180º "la mesa" *ABCD* sobre el lado *CD*, queda en la posición I, luego de girarla 180º sobre el lado *AD*, queda en la posición II y girándola otra vez 180º, en torno al lado *BC,* queda en la posición III. Finalmente queda la tronera *A* en el punto A_1.

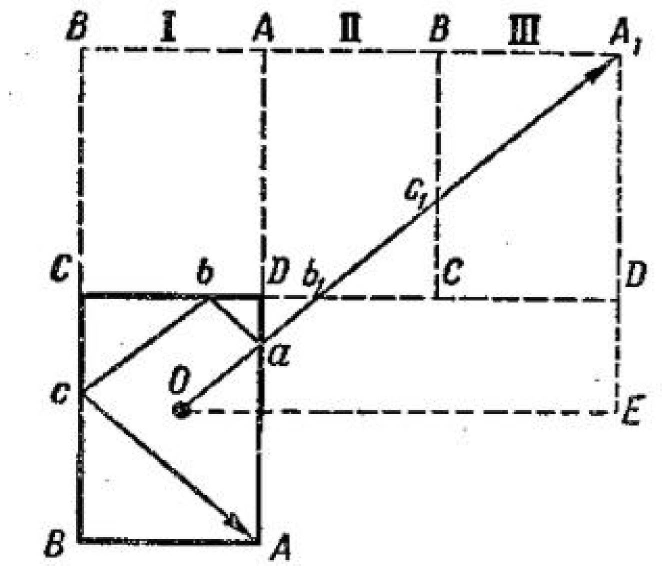


Figura 150. Imagínense, que junto a la mesa de billar se colocan tres mesas más y se apunta con el taco hacia la tronera más lejana.

Partiendo de la igualdad de los triángulos, fácilmente se puede demostrar, que

$$ab_1 = ab,\ b_1c_1 = bc \text{ y } c_1A_1 = cA,$$

es decir, que la longitud de la recta OA_1 es igual a la longitud de la línea quebrada *OabcA,* y llega a la tronera *A.* Vamos a ver otra pregunta más: ¿Bajo qué condición serán iguales los lados *OE* y A_1E, del triángulo rectángulo A_1EO?
Es fácil de establecer, que $OE = 5/2 \times AB$ y $A_1E = 3/2 \times BC$. Si $OE = A_1E$, entonces $5/2 \times AB = 3/2 \times BC$ ó $AB = 3/5 \times BC$.
Por lo tanto, si el lado más corto de la mesa de billar mide *3/5* del lado más largo, entonces $OE = EA_1$. Por lo tanto, si la bola está en el centro de la mesa, se puede apuntar a la bola formando un ángulo de 45º entre el taco y el borde.

8. La bola "inteligente"

Una sencilla construcción geométrica nos ayudó a resolver el problema de la bola de billar, y sería mejor si la misma bola resuelve un problema muy antiguo y bastante curioso.
¿Será posible? – una bola no puede pensar. Es cierto, pero en aquellos casos, en que se debe realizar una serie de cálculos, conociendo además, que operaciones se deben efectuar y que orden deben seguir, se pueden emplear una máquina, que obedezca todas las ordenes de forma rápida y correcta.
Por esta razón se han inventado muchos mecanismos, que van desde un sencillo aritmómetro hasta una calculadora electrónica.
En ratos de ocio, a menudo nos ocupamos de un problema: Como verter una parte de líquido que contiene un recipiente de determinada capacidad, con ayuda de dos vasos vacíos, de capacidad conocida.
Aquí tienen un problema similar:

Problema

¿Cómo verter la misma cantidad de un tonel de 12 cántaros de capacidad, con ayuda de dos cubos que tienen nueve cántaros y cinco cántaros de capacidad, respectivamente?

Solución

Para resolver este problema, por supuesto, no hace falta experimentar con estos cubos.

En un papel podemos efectuar todos lo "trasiegos" necesarios, con ayuda de este esquema:

9-ведерн.	0	7	7	2	2	0	9	6	6
5-ведер.	5	5	0	5	0	2	2	5	0
12-ведерн.	7	0	5	5	10	10	1	1	6

"Ведерн" significa "cántaro", antigua medida rusa de capacidad, equivalente a unos 12 litros

En cada columna se indican los resultados del trasiego.

1. Primera columna: Llenaron el tonel de *5 cántaros, el* de *9 cántaros* permanece vacío (*0*), al de *12 cántaros* le queda *7 cántaros*.
2. Segunda columna: Hay que verter los 7 *cántaros* del tonel de *12 cántaros* al de *9 cántaros*, y así sucesivamente.

El esquema tiene nueve columnas; Entonces se necesitan nueve trasiegos. Intenten hallar su propia solución a este problema, teniendo su propio orden de trasiegos.
Después de que realicen sus pruebas, se darán cuenta de que el esquema propuesto no es único, sin embargo, al variar el orden, se requieren más de nueve trasiegos.
Además de esto, se puede establecer lo siguiente:

1. No se puede fijar el orden de los trasiegos para cada caso, independientemente de la capacidad de los cubos;
2. Con ayuda de dos cubos vacíos, es posible verter en un tercer cubo, una determinada cantidad de líquido, así, por ejemplo, desde el tonel de *12 cántaros* con ayuda de cubos de *9* y *5 cántaros* trasiegan un cántaro o dos, o tres, o cuatro, etc., hasta *11.*

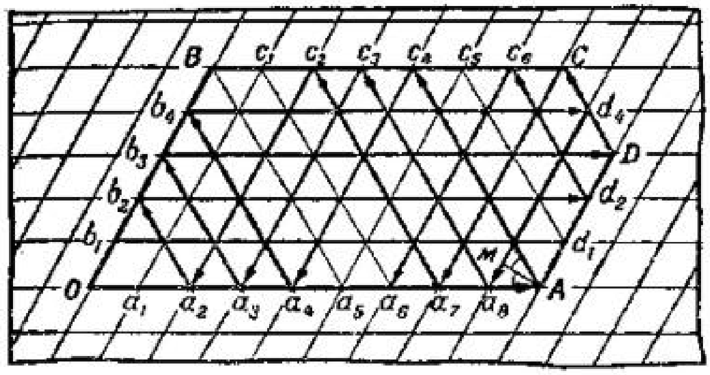


Figura 151. El "mecanismo" de la bola "inteligente".

La bola "inteligente" responderá todas estas inquietudes, si construimos una "mesa de billar" muy especial.

Dibujamos en el papel cuadros inclinados (rombos) iguales con ángulos agudos de *60°,* y se construye una figura *OADCB,* como se muestra en la figura 151.

SI en nuestra mesa "mesa de billar", empujamos la bola de billar a lo largo de *OA*, ésta choca con el borde *AD* y de acuerdo a la ley de incidencia y reflexión, "el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión" ($\angle OAM = \angle Mac_4$), la bola corre sobre la recta Ac_4 uniendo los vértices de los rombos pequeños; se separa en el punto c_4 del borde *BC* y corre sobre la recta c_4a_4, luego sobre las rectas a_4b_4, b_4d_4, d_4a_8, etc.

De acuerdo con las condiciones del problema, tenemos tres cubos: de *9*, *5* y *12 cántaros.* Por esta razón, construimos la figura de modo que el lado *OA* tenga nueve cuadros, *OB,* cinco cuadros, *AD*, tres cuadros *(12 – 9 = 3), BC*, siete cuadros[35] *(12 – 5 = 7).*

Hay que tener presente que cada punto de la figura está separado de los bordes de ésta, por una cantidad de cuadros dados, en relación a los lados *OB* y *OA.* Por ejemplo, desde el punto c_4, hay cuatro cuadros hasta *OB* y cinco cuadros hasta *OA;* Desde el punto a_4 hay cuatro cuadros hasta *OB* y cero cuadros hasta *OA* (porque está precisamente sobre *OA*), desde el punto d_4 hay ocho cuadros hasta *OB* y cuatro cuadros hasta *OA*, y así sucesivamente.

Por lo tanto, cada punto de la figura, con el que choca la bola, representa dos números.

El primero de ellos, corresponde a la cantidad de cuadros que separan al punto de *OB*, representa la cantidad de cántaros del cubo de *9 cántaros*, y el otro, corresponde a la cantidad de cuadros que separan al punto de *OA,* representa la cantidad de cántaros del cubo de *5 cántaros.* El resto del líquido, corresponde evidentemente, al cubo de *12 cántaros.*

Ahora tenemos todo listo para resolver el problema con ayuda de la bola.

Dejamos pasar a lo largo de *OA* y traduciendo cada punto de su golpe al borde así, como está indicando, observándola su camino hasta el punto a_6 (figura 151).

El primer punto del choque es: *A (9; 0);* Esto significa, que el primer trasiego tiene que dar esta distribución del líquido:

9 cántaros	9
5 cántaros	0
12 cántaros	3

Se efectúa el vaciado.

El segundo punto del choque: c_4 *(4; 5);* Esto significa, la bola entrega el siguiente resultado de trasiego:

9 cántaros	9	4
5 cántaros	0	5
12 cántaros	3	3

Se efectúa el vaciado.

El tercer punto del choque: a_4 *(4; 0);* en el tercer trasiego la bola recomienda devolver cinco cántaros al cubo de *12 cántaros:*

9 cántaros	9	4	4
5 cántaros	0	5	0
12 cántaros	3	3	8

El cuarto punto: b_4 *(0; 4);* es el resultado del cuarto trasiego:

9 cántaros	9	4	4	0
5 cántaros	0	5	0	4
12 cántaros	3	3	8	8

El quinto punto: *d_4 (8; 4),* la bola recomienda llenar con ocho cántaros el cubo vacío de *9 cántaros.*

9 cántaros	9	4	4	0	8
5 cántaros	0	5	0	4	4
12 cántaros	3	3	8	8	0

Seguimos analizando la trayectoria de la bola, y obtenemos la tabla:

9 cántaros	9	4	4	0	8	3	3	0	9	7	7	2	2	0	9	6	6
5 cántaros	0	5	0	4	4	5	0	3	3	5	0	5	0	2	2	5	0
12 cántaros	3	3	8	8	0	4	9	9	0	0	5	5	10	10	1	1	6

Entonces, después de esta serie de trasiegos se completa la tarea: Dentro de dos cubos hay seis cántaros de líquido. ¡La bola ha resuelto el problema!

Pero la bola no parece muy inteligente.

Ha resuelto el problema en 18 pasos, y nosotros necesitamos solamente 9 pasos (ver la primera tabla).

Sin embargo la bola también podrá abreviar el número de trasiegos. Se empuja sobre *OB*, se detiene en el punto *B,* luego se empuja sobre *BC,* y se mueve una y otra vez, según lo establecido por la ley de incidencia y reflexión: "el ángulo de incidencia es igual al ángulo reflejado"; y así se obtiene la serie más corta posible de trasiegos.

Dejando que se mueva la bola desde el punto a_6, entonces no es difícil comprobar, que en el caso estudiado, recorre todos los puntos de la figura (y en un comienzo, todos los vértices del rombo) y luego vuelve de partida, *O.* Esto quiere decir que con el cubo de *12 cántaros* se puede vaciar una fracción entera de su contenido, (entre uno y nueve cántaros) al cubo de *9 cántaros*, y (entre uno y cinco cántaros) al cubo de *5 cántaros*.

Pero puede no tener solución un problema similar.

¿Cómo lo detecta la bola?

Muy fácil: en este caso vuelve al punto de partida, *O*, sin chocar el punto fijo.

En la figura 152 se presenta el mecanismo de solución para los cubos de nueve, siete y doce cántaros.

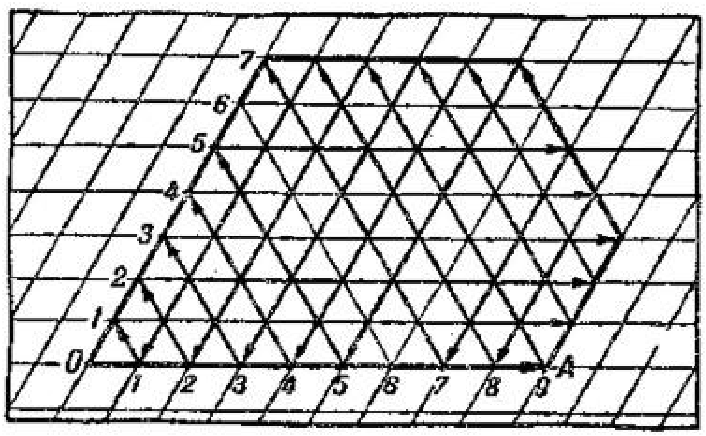


Figura 152. "El mecanismo" indica, que del cubo lleno, de 12 cántaros, no es posible verter la mitad en cada cubo de 9 y 7 cántaros

"El mecanismo" indica, que desde un cubo lleno de *12 cántaros* con ayuda de dos cubos vacíos de *9 cántaros* y *7 cántaros* respectivamente, es posible verter cualquier cantidad de los cántaros, menos la mitad de su contenido, es decir menos de seis cántaros.

En la figura 153 se presenta el mecanismo de solución para cubos de tres, seis y ocho cántaros. Aquí la bola hace cuatro saltos y vuelve al punto principal *O.*

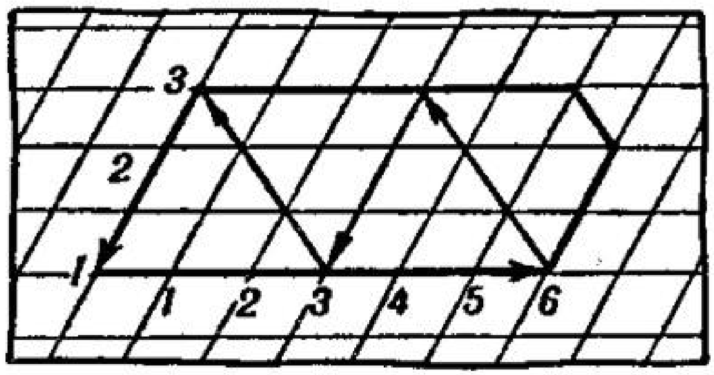


Figura 153. "El mecanismo" de solución de una tarea más.

6 cántaros	6	3	3	0
3 cántaros	0	3	0	3
8 cántaros	2	2	5	5

La tabla indica que en este caso no es posible verter cuatro cántaros o un solo cántaro desde un cubo de *8 cántaros.*

Por esto, nuestro "billar con una bola inteligente" es en realidad una calculadora, excelente para resolver problemas de trasiegos.

9. Con un solo trazo

Problema

Copien en un papel las cinco figuras mostradas en la figura 154, y traten de dibujarlas con un solo trazo, es *decir, sin levantar el lápiz y sin pasar más de una vez sobre la misma línea.*

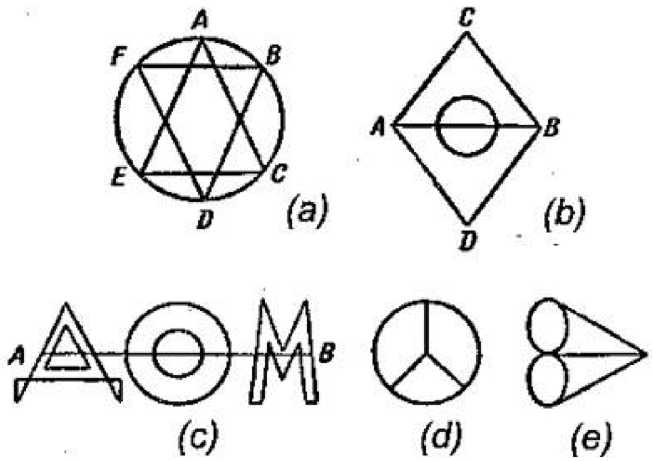


Figura 154. Intenten dibujar cada una de estas figuras con un solo trazo, sin pasar más de una vez sobre la misma línea.

La mayoría de personas a quienes hemos propuesto la tarea, empiezan por la figura d, ya que parece más fácil a primera vista, sin embargo, han fracasado todos los intentos por dibujar esta figura.

Disgustados y con menor seguridad, prueban con otras figuras, y para su sorpresa, logran trazar, sin grandes dificultades, las dos primeras figuras y también han podido con la tercera, presentada por la palabra tachada "ДОМ". Pero al igual que la cuarta figura, d, nadie la ha podido trazar la quinta figura, e.

¿Por qué para algunas figuras resulta fácil encontrar la solución, y para otras no? ¿Será que en unos casos hace falta tener ingenio, o será que la tarea no tiene solución para algunas figuras? ¿No se puede establecer una propiedad que nos permita saber si existe o no una solución que permita dibujar una figura con un solo trazo?

Solución

Llamaremos nodo a cada intersección, en la que se unan las líneas de la figura.

Llamaremos al nodo: par, si se junta en él, un número par de líneas, e impar, si se une en él, un número impar de líneas. La figura *a* tiene todos los nodos pares, la figura *b*, dos nodos son impares (los puntos *A* y *B*); la figura *c,* los nodos impares en los extremos del segmento que tacha la palabra; Las figuras *d* y *e* tienen cuatro nodos impares.

Observemos atentamente una figura, en la que sean pares todos nodos, por ejemplo, la figura *a.*

Iniciamos el trazo desde cualquier punto *S.* Pasando, por ejemplo, por el nodo *A,* trazamos dos líneas: una, acercándonos al nodo *A* y otra, alejándonos del nodo *A*. Como en cada nodo par hay igual número de entradas que de salidas, y cada que nos movemos de un nodo a otro quedan dos líneas menos por dibujar (los nodos siguen siendo pares), es posible, recorrerlos todos, y regresar al punto de partida, *S.*

Pero, supongamos que regresamos al punto de partida, y no podemos salir de él, y que en la figura falta una línea que sale del nodo *B,* donde estuvimos antes.

Entonces, debemos corregir nuestro camino: Llegamos hasta el nodo *B,* para dibujar las líneas que faltaron antes, y seguimos el camino.

Supongamos que decidimos trazar la figura *a* así: Recorremos los lados del triángulo *ACE*, regresando al punto *A*, ubicado sobre la circunferencia *ABCDEFA* (figura 154).

Como nos queda por dibujar el triángulo *BDF,* entonces, al dejar el nodo, *B*, por ejemplo, seguimos sobre el arco *BC,* trazamos el triángulo *BDF*, y luego completamos la figura.

Por lo tanto, si todos los nodos de la figura son pares, siempre es posible de dibujar la figura con un solo trazo, partiendo de cualquier punto de figura, además, el recorrido de la figura debe terminar en el punto de partida.

Veamos una figura en la que hay dos nodos impares.

La figura *b,* por ejemplo, tiene dos nodos impares, *A* y *B*. Entonces se puede dibujar con un solo trazo. Se debe empezar el dibujo en un nodo impar, N_1, y terminar en el otro nodo impar, N_2, por ejemplo, desde *A* hasta el *D* siguiendo la trayectoria *ACB* (figura 154).

Al realizar este trazo, se elimina una línea de los nodos impares, entonces, ambos nodos impares se convierten en pares. Como no existen otros nodos impares en la figura, tenemos una figura que solo tiene nodos pares; En la figura *b,* por ejemplo, después de trazar la línea *ACB*, queda un triángulo con una circunferencia.

Por lo antedicho, podemos dibujar esta figura con un solo trazo.

Una advertencia suplementaria: Si se comienza el trazo desde un nodo impar N_1, y se busca una ruta que lleve al nodo impar N_2, tenemos que evitar que queden segmentos aislados dentro de la figura dada[36]. Por ejemplo, no podemos dibujar la figura *b* (figura 154) si nos trasladamos rápidamente desde el nodo impar *A* hasta el nodo impar *B* trazando la recta *AB,* porque la circunferencia queda aislada del resto de la figura.

En síntesis, si una figura tiene dos nodos impares, el trazo correcto debe comenzar sobre uno de estos nodos y terminar en el otro.

De aquí se deduce que, si la figura tiene cuatro nodos impares, no es posible de dibujarla con un solo trazo, sino con dos, lo que se aparta de las condiciones de nuestra tarea. Ejemplo de este caso son las figuras *d* y *e* (figura 154).

Como ven, si tenemos claros los conceptos, podemos prevenir muchas cosas evitando así un trabajo innecesario, que produce el desgaste de fuerzas y tiempo. Hemos visto que, la geometría también nos enseña a orientarnos correctamente.

Tal vez resulten nuestras explicaciones muy pesadas para ustedes, pero vale la pena el esfuerzo, pues el conocimiento prima sobre la ignorancia.

Ustedes siempre podrán saber con antelación, si el problema tiene o no solución para una figura dada, y saben también, desde cuál nodo hay que empezar el trazo.

Ahora ustedes mismos pueden inventar figuras complejas para sus compañeros.

Finalmente, les presento dos figuras más para que se entretengan (figura 155).

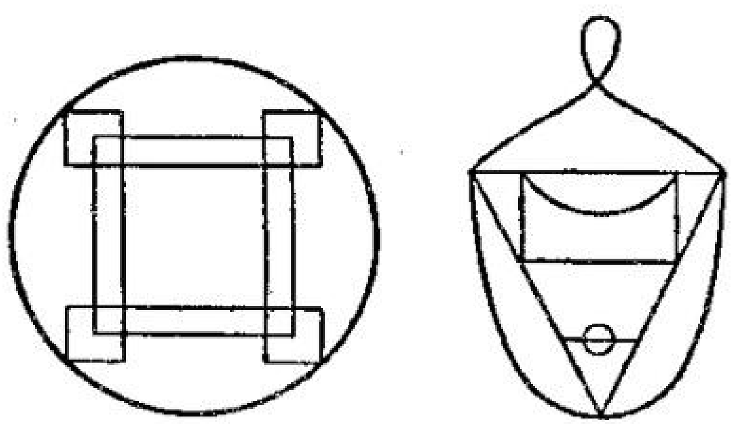


Figura 155. Dibuja cada figura de un solo trazo.

10. Los siete puentes de Kaliningrado

Hace doscientos años en la ciudad de Kaliningrado (antes se llamaba Köenigsberg) había siete puentes, que unían las orillas del río Pregel[37] (figura 156).

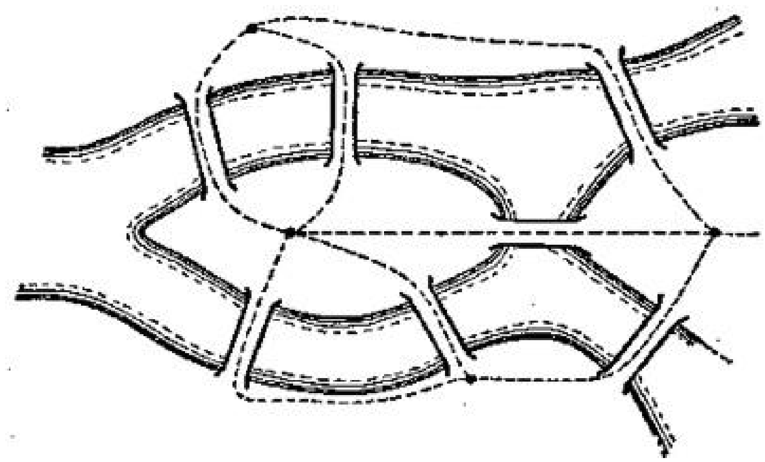


Figura 156. No era posible dar la vuelta por todos los puentes, pasando sobre cada uno de ellos, una sola vez.

En el año 1736, un famoso matemático de aquel entonces, L. P. Euler (tenía 30 años de edad), estuvo interesado en un problema: ¿Era posible pasear por la ciudad, pasando por todos los puentes, pasando una sola vez sobre cada uno de ellos?

Fácilmente comprendemos, que esta tarea es similar a la anterior, que hacía referencia al trazo de diversas figuras.

Vamos a presentar el esquema de los caminos posibles (figura 156, la línea punteada).

Obtenemos una figura con cuatro nodos impares (figura 154, figura *e*). Como ustedes bien saben, es imposible dibujarla con un solo trazo, y por lo tanto, es imposible recorrer los siete puentes, pasando una sola vez por cada uno de ellos. Euler lo demostró en aquella época.

11. Una broma geométrica

Como ustedes ya conocen el secreto de para dibujar una figura con un solo trazo, digan a sus amigos, que saben cómo dibujar la figura con cuatro nodos impares, por ejemplo, una circunferencia con dos diámetros (figura 157), sin separar el lápiz del papel y sin pasar por la misma línea dos veces.

Figura 157. Una broma geométrica.

Ustedes saben perfectamente, que es imposible, pero pueden hacer el sensacional anuncio.

Ahora les enseño un pequeño truco.

Empezamos a dibujar la circunferencia desde el punto *A* (figura 157). Cuando se acerquen a un cuarto de circunferencia, arco *AB,* colocan un papel sobre el punto *B* (o doblan uno de los bordes sobrantes de la hoja en la que realizan el dibujo) y siguen pasando el lápiz por la semicircunferencia inferior hasta llegar al punto *D,* opuesto al punto *B.*

Ahora retiren el papel que agregaron antes. En la cara del papel solamente aparece el arco *AB,* pero el lápiz se encuentra en el punto *D* (¡además ustedes no separaron el lápiz del papel!).

Terminar la figura no es difícil: Tracen el arco *DA,* luego el diámetro *AC,* al arco *CD,* el diámetro *DB* y finalmente, el arco *BC.* Podemos elegir otro camino desde el punto *D;* traten de encontrarlo.

12. Comprobación de una forma

Problema

Se ha cortado un trozo de tela. Queremos saber si es cuadrado. La costurera asegura, que basta doblarlo sobre sus diagonales, y deben unirse sus bordes. ¿Es suficiente esta prueba?

Solución

De esta manera, la costurera solo puede estar segura de que todas las partes del cuadro de tela son iguales. De los cuadrados convexos no solo tiene esta propiedad el cuadrado, sino también el rombo. El rombo solo es un cuadrado cuando sus ángulos son rectos. Por lo tanto, no es suficiente la prueba que utiliza la costurera. Tenemos que verificar, aunque efectuemos la prueba “a ojo”, que los ángulos de los vértices del pedazo de tela sean rectos. Hecha la comprobación, podemos realizar la prueba inicial nuevamente, doblando la tela por sus diagonales.

13. Un juego

Para este juego necesitamos un papel rectangular y algunas figuras simétricas, con idéntica forma, por ejemplo, fichas de dominó, monedas, etc. Se deben tener figuras suficientes para cubrir todo el papel. Se juega entre dos personas. Los jugadores, colocan por turnos, las figuras en cualquier posición, en cualquier sitio libre de la hoja, hasta que no quede espacio.

No se permite mover las figuras, ya colocadas sobre el papel. Gana el juego aquel, quien ponga la última ficha.

Problema

Encontrar la táctica para que gane el jugador que inicia el juego.

Solución

El jugador que empieza el juego, como primera medida, debe ocupar el centro del tablero, colocando la figura de modo que su centro de simetría, de ser posible, coincida con el centro de la hoja, y en las rondas siguientes, debe colocar las fichas en posición simétrica con las del jugador contrario (figura 158).

Siguiendo esta regla, el jugador que empieza el juego siempre encontrará en el papel un sitio para su ficha y sin duda alguna, ganará.

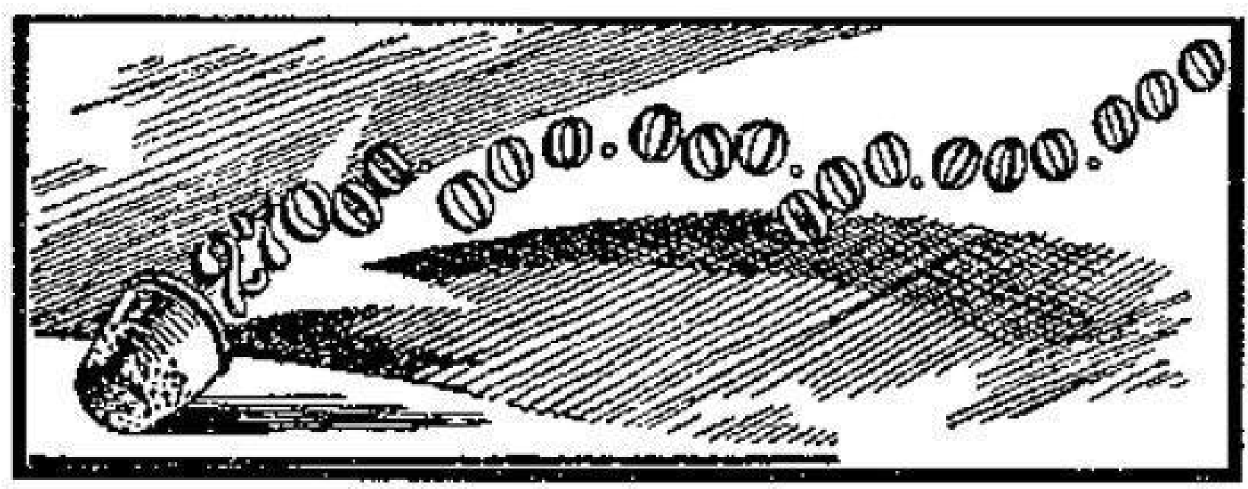
Figura 158. Un juego geométrico. Gana aquella persona, que coloque el último objeto.

La forma de conducir el juego se basa en el siguiente principio geométrico: Un rectángulo tiene un punto de simetría, es decir, un punto que divide por la mitad, todos los segmentos que lo crucen, y por lo tanto, divide la figura en dos partes iguales.

Por esta razón, a cada punto del rectángulo le corresponde un punto simétrico, perteneciente a la misma figura, exceptuando el centro.

De aquí se deduce que si el primer jugador invade el centro del tablero, no importando que lugar que elija el contrincante, en el rectángulo de papel siempre habrá un espacio libre y simétrico para el otro jugador.

Como el segundo jugador siempre debe elegir el sitio, al final no quedará espacio para sus fichas, y el primer jugador gana el juego.



Capítulo 11

Grande y Pequeño en Geometría

Contenido:

1. 27 000 000 000 000 000 000 dentro de un dedal

Podemos leer de varias maneras, el número veintisiete con dieciocho ceros, escrito en el título. Unos dicen: *27 mil veces mil millones;* otros, por ejemplo, los funcionarios de hacienda leen *27 trillones*, otros más lo escriben de forma más abreviada: 27×10^{18} y leen: *27* multiplicado por diez a la decimoctava potencia.

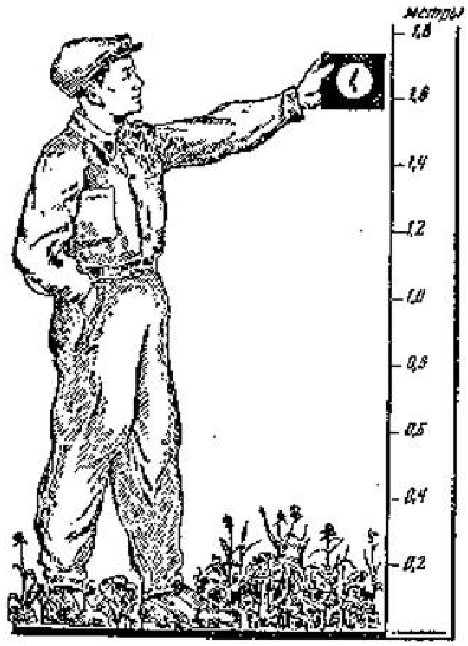


Figura 159. Un joven mira atentamente una bacteria de tifus, aumentada 1000 veces.

¿Qué podrá caber en un dedal, en tan increíble cantidad?

Se trata de las partículas del aire. Como todas las substancias del mundo, el aire está formado por moléculas. Los físicos establecieron, que cada centímetro cúbico (lo que cabe dentro de un dedal) de aire, a una temperatura de *0° C*, contiene *27 mil veces mil millones* de moléculas. Es un gigante numérico. Imaginar ese número en concreto, escapa a las fuerzas de cualquier ser humano. ¿En realidad con qué podemos comparar tan inmensa cantidad?

¿Con la población en el mundo? Pero si en todo el mundo solamente hay dos mil millones de habitantes (2×10^9), es decir, trece millones de veces menos, que las moléculas que caben dentro de un dedal. ¡Si todas las estrellas del universo estuvieran rodeadas por planetas, como ocurre con nuestro Sol, y si cada planeta estuviera poblado como el nuestro, no sería posible tener tantos habitantes como la cantidad de moléculas de aire dentro de un dedal! Si ustedes intentaran alguna vez calcular esa población invisible, contando todo el tiempo, por ejemplo, a razón de cien moléculas por minuto, emplearían más de 500 mil millones de años para realizar el trabajo.

No hay que ser tan exactos, imaginen cantidades más pequeñas.

¿Qué piensan ustedes cuando hablan, por ejemplo, de un microscopio, que aumenta la imagen 1000 veces? No es tan grande esta cantidad, mil, sobre todo, que no interpretamos adecuadamente el aumento un sinfín de veces.

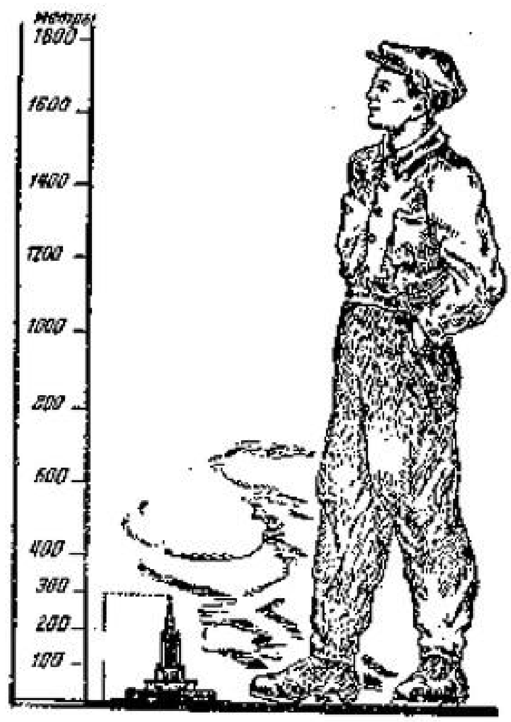


Figura 160. El joven, aumentado 1000 veces.

A menudo no sabemos calcular con exactitud los objetos que vemos en el microscopio, con idéntico aumento. Una bacteria de tifus, aumentada 1000 veces, tiene el tamaño de una mosca (figura 159), viéndola desde la distancia visual adecuada, *25 cm.* ¿Pero, en realidad, cuán pequeña es esa bacteria? Imagínense, que junto con la bacteria ustedes se aumentan también 1000 veces.

¡Esto significa, que la estatura alcanzará *1.700 m!* La cabeza estará más alta que las nubes, cualquier edificio de Moscú está más bajo que la rodilla (figura 160).

Somos menores que ese gigante imaginario, tantas veces cuantas el bacilo es menor que una mosca

2. Volumen y presión

Podemos imaginar, lo apretadas que estarán 27 mil veces mil millones de moléculas dentro de un dedal. ¡En absoluto! Una molécula de oxigeno o nitrógeno tiene un diámetro de 3/10.000.000 mm (ó 3×10^{-7} mm). Suponiendo que el volumen de la molécula equivale al cubo de su diámetro, entonces obtenemos:

$$\left(\frac{3}{10^7} mm\right)^3 = \frac{27}{10^{21}} mm^3$$

Dentro de un dedal hay *27 x 10*^{18} moléculas. Entonces el volumen ocupado por todos habitantes del dedal, es de unos

$$\frac{27}{10^{21}} \times 27 \times 10^{18} mm^3 = \frac{729}{10^3} mm^3$$

es decir, cerca de 1 mm^3, que es la milésima parte del centímetro cúbico. Los espacios entre las moléculas son mucho mayores que sus diámetros, tienen sitio donde jugar. En realidad, como ustedes saben, las partículas del aire están en constante movimiento, se mueven de un sitio a otro de forma continua y caótica, corriendo dentro del espacio que ocupan

El oxígeno, el gas carbónico, el hidrógeno, el nitrógeno y otros gases tienen gran importancia en la industria, pero para almacenarlos en grandes cantidades, necesitamos unos depósitos enormes. Así, por ejemplo, una tonelada *(1.000 kg)* de nitrógeno a presión atmosférica normal ocupa *800* m^3, es decir, que para almacenar una sola tonelada de nitrógeno se precisa una cisterna de *10.000* m^3 de capacidad.

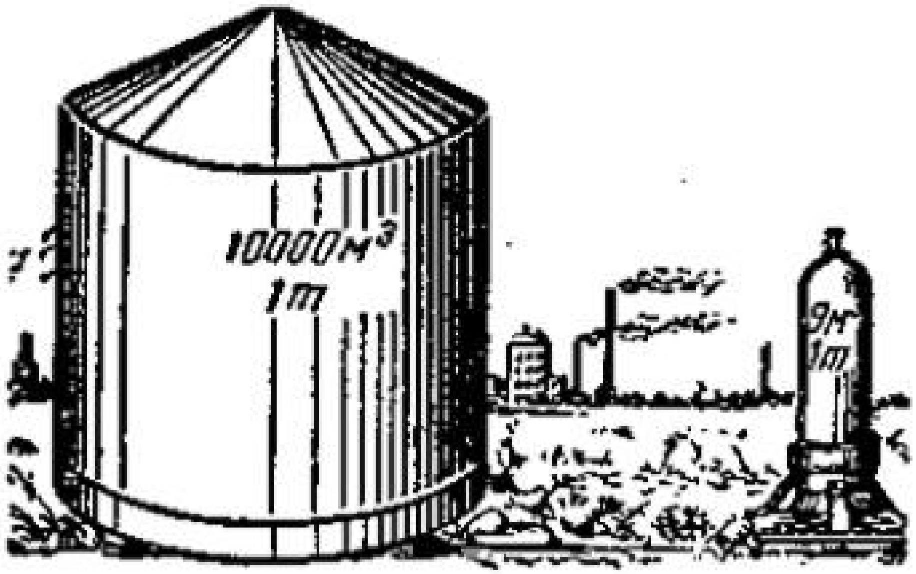


Figura 161. Una tonelada de nitrógeno a presión atmosférica normal (a la izquierda) y con una presión de 5 atm. (a la derecha). (La ilustración es una figura convencional; no se tuvieron en cuenta las proporciones)

¿No podemos obligar a las moléculas de gas a comprimirse un poco? Los ingenieros hacen lo mismo, con ayuda de una prensa, las obligan a acercarse un poco. Pero eso no es tan fácil.

No olviden, que con la misma presión que ejercen sobre el gas, este presiona las paredes del recipiente. Se necesitan paredes muy sólidas, con las que no reaccione químicamente.

Sólo la más moderna instalación para procesos químicos, fabricada por la industria nacional del acero, es capaz de soportar muy altas presiones, altas temperaturas e impedir la reacción química de los gases

Ahora nuestros ingenieros comprimen él hidrogeno *1163* veces, por lo tanto una tonelada de hidrógeno, que ocupa un volumen de *10.000* m^3 a la presión atmosférica, cabe en una bombona de *9* m^3 de capacidad (figura 161)

¿A qué presión creen ustedes, que habrá que exponer al hidrógeno, para reducir su volumen *1163* veces? Acordándonos de la física, que el volumen del gas *disminuye* en tantas veces, cuantas veces se aumenta la presión, suponemos que la respuesta es: La presión ejercida sobre el hidrógeno deberá ser también *1163* veces mayor. ¿Es cierto esto? No. La verdad es que había que someter al hidrógeno a una presión de *5000 atmósferas,* es decir, que se debe aumentar la presión *5000* veces, y no

1163 veces. Lo que pasa es que el volumen del gas se varía en proporción inversa a la presión, a presiones no muy elevadas. A muy altas presiones no se cumple esta regla. Así, por ejemplo, cuando en nuestras factorías químicas una tonelada de hidrógeno se somete a una presión de *mil atmósferas,* una tonelada de ese gas se reduce á $1,7\ m^3$ de volumen, en vez de los $800\ m^3$, que ocupa el hidrógeno a la presión atmosférica normal, y al aumentar la presión hasta *5.000 atmósferas*, el volumen del hidrógeno se reduce á $1,1\ m^3$

3. Más delgada que una telaraña, pero más fuerte que el acero

Un corte transversal de un hilo de una telaraña, pese a ser muy delgado, tiene forma geométrica, generalmente tiene forma circular. Respecto al diámetro del corte transversal, es decir, el ancho del hilo de una telaraña, tiene unos *5 micrones (5/1000 mm).* ¿Hay algo más fino que una telaraña? ¿Quién es el "Maestro del hilado" más hábil, una araña o quizás un gusano de seda?

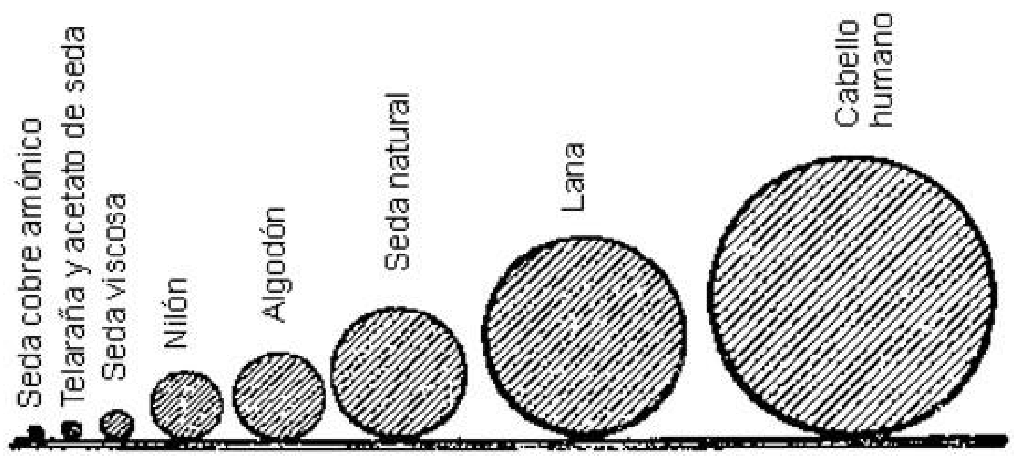


Figura 162. Comparativo del ancho de las fibras

No. El diámetro del hilo de seda natural es *18 micrones,* es decir, que el hilo es *3 1/2* veces más grueso que una telaraña.

Desde la antigüedad la gente soñaba con superar la maestría de la araña y del gusano de seda. Todos nosotros conocemos una antigua leyenda de una tejedora generosa, la griega Ariadna. Ella era dueña del oficio de los tejidos a tal extremo de perfección, que sus telas eran tan finas, como las telas de una araña, transparentes, como el cristal y tan ligeras como el aire. Con ella pudo competir la misma Atenea, Diosa de la prudencia y protectora de los oficios.

Esa leyenda, como muchas otras fantasías antiguas, en nuestro tiempo son narraciones de con contenido real. La Ariadna contemporánea, la más perfecta "maestra del hilado", son los ingenieros químicos, crearon de un simple trozo de madera, la fibra artificial, extraordinariamente fina y extremadamente sólida. Los hilos de seda así obtenidos, son *2 1/2* veces más finos que la telaraña, y su solidez no cede a los hilos de seda natural. La seda natural soporta una carga de *30* kg/mm^2 de sección, y el hilo de cobre, hasta *25* kg/mm^2.

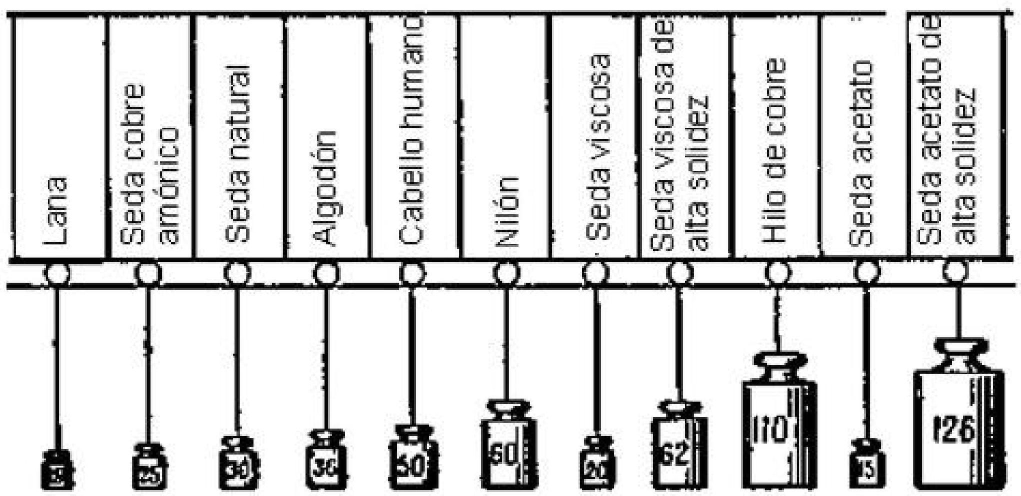


Figura 163. La solidez máxima de las fibras (en kg/mm^2*)*

El método de fabricación del hilo de cobre es muy curioso. La madera se convierte en celulosa, la celulosa se disuelve en una solución de cobre. Se vierten los chorros de solución a través de aberturas finas de agua, el agua le quita el disolvente, después de esto se enrollan todos los hilos en unos aparatos especiales.

EL ancho del hilo de cobre es de *2 micrones.* Un micrón más ancho es la seda de acetato, y también la seda artificial. ¡Es sorprendente, que algunas sedas de acetato sean más fuertes que un hilo de cobre! Mientras que el hilo de cobre soporta cargas de *110* kg/mm^2 de sección, el hilo de seda de acetato soporta más de *126* kg/mm^2.

Todos nosotros sabemos muy bien, que el hilo de la seda viscosa tiene un espesor de más de *4 micrones,* y soporta desde *20* hasta *62* kg/mm^2.

En la figura 162, vemos un cuadro comparativo entre el ancho del hilo de la telaraña, el cabello humano, y otras fibras artificiales, también la fibra de lana y la de algodón; y en la figura 163, su solidez en kg/mm^2.

La fibra artificial, es uno de los más grandes descubrimientos contemporáneos de gran importancia para la economía. Así nos cuenta el ingeniero Buyanov: "El algodón crece con mucha lentitud, y su cantidad depende del clima y la cosecha. El productor de seda natural es el gusano de seda, limitado dentro de sus posibilidades. Durante toda su vida hilará un capullo, donde hay solamente *0,5 gr* del hilo de seda...

La cantidad de seda artificial, obtenida químicamente al procesar $1\ m^3$ de madera, equivale á *320.000* capullos de seda o la cantidad de lana esquilada á *30* ovejas en un año, o la cosecha promedio de *1/2 hectárea* de algodón.

Esa cantidad de fibra es suficiente para fabricar cuatro mil medias ó *1 500 m* de un tejido de seda."

4. Dos botes

Nosotros imaginamos los extremos, lo más grande y lo más pequeño de la geometría, donde ya no tenemos que comparar las cantidades, sino las superficies y volúmenes. Sin pensar demasiado, solemos contestar, que *5 kg* de mermelada ocupan más espacio que *3 kg* de la misma, pero no siempre preguntamos, ¿cuál de los dos botes que se tienen sobre la mesa es más ancho?

Problema

¿Cuál de los dos botes (figura 164) es más espacioso, él de la derecha o él de la izquierda, el primero es tres veces más alto que el segundo, pero doblemente estrecho?

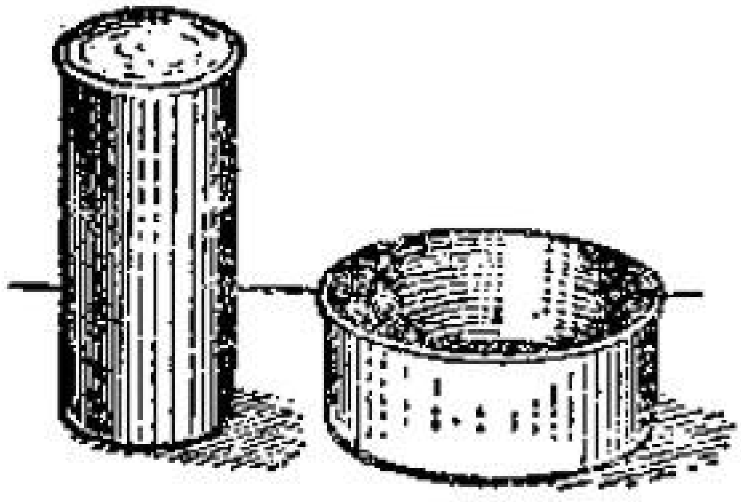


Figura 164. ¿Cuál bote es más espacioso?

Solución

La mayoría de nosotros, probablemente no esperaba que en nuestro caso el bote alto fuese menos espacioso, que el ancho. Sin embargo podemos verificarlo, realizando un cálculo. La superficie de la base del bote ancho es *2 x 2,* es decir, cuatro veces más, que el estrecho; Su altura es la tercera parte de la del bote más alto. Entonces, el volumen del bote ancho en *4/3* veces el volumen del estrecho. Si el contenido del bote alto se vierte al bote estrecho, éste solo se llenará hasta sus *3/4* partes (figura 165)

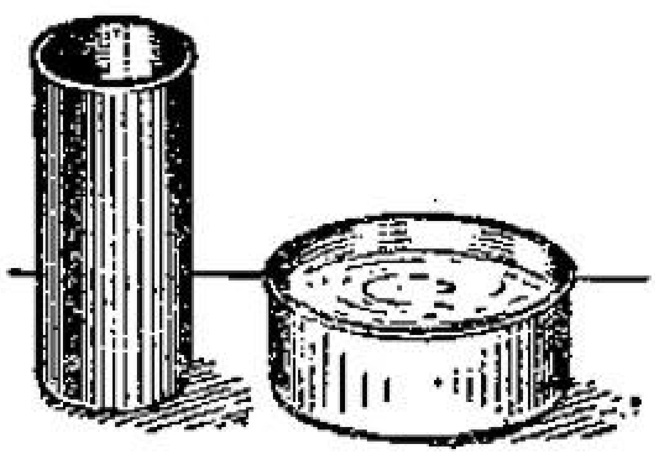


Figura 165. Resultado de trasiego del contenido del bote alto al bote ancho

5. Un cigarro gigantesco

Problema

En un escaparate de una tienda de tabaco hay un cigarro gigantesco, 15 veces más largo y 15 veces más ancho que uno normal. Si para rellenar un cigarro de un tamaño normal se precisa de medio de gramo de tabaco, entonces ¿cuánto tabaco se necesita para rellenar este cigarro gigantesco?

Solución

$$\tfrac{1}{2} \times 15 \times 15 \times 15 = 1.700 \text{ gr}$$

quiere decir más de 1½ kg

6. Huevo de avestruz

Problema

La figura 166 representa a la misma escala un huevo de gallina, a la derecha y un huevo de avestruz, a la izquierda. (Por el medio, un huevo del epiornis desaparecido, sobre el que hablaremos un poco más tarde.)

Fíjense bien y díganme, en cuantas veces excede el contenido del huevo de avestruz al huevo de gallina. A primera vista parece, que la diferencia no es tan grande. Lo más sorprendente es el resultado del cálculo geométrico.

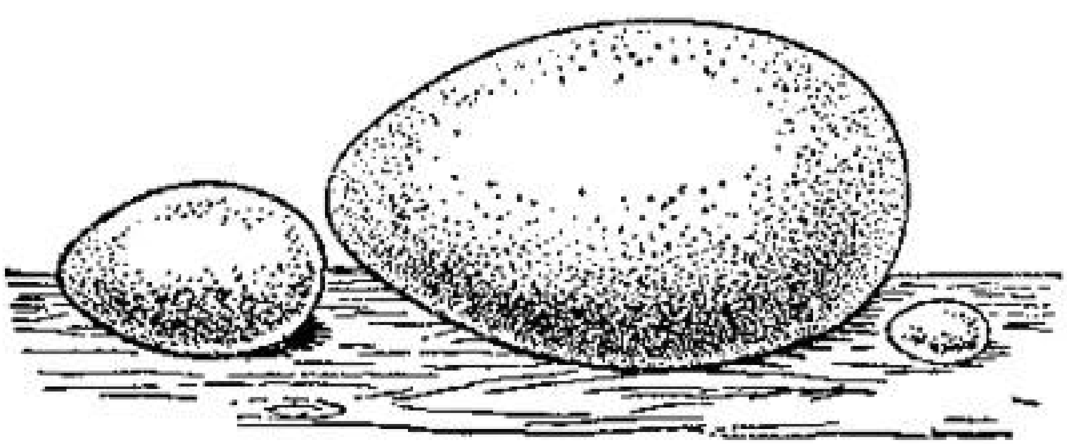


Figura 166. Los tamaños de los huevos de avestruz, del epiornis y de gallina

Midiendo directamente sobre la figura comprobamos que el huevo de avestruz es *2 1/2* veces más largo que el de gallina. Por lo tanto, el volumen del huevo de avestruz es mayor del volumen del de gallina en

$$2\tfrac{1}{2} \times 2\tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = 125/8$$

es decir, unas 15 veces

Con un solo huevo de avestruz podría desayunar una familia entera de cinco personas, calculando, que cada uno queda satisfecho con tres huevos

7. Huevo de epiornis

Problema

Mucho tiempo antes vivieron unos avestruces gigantescos en la isla Madagascar, se llamaban epiornices, ponían huevos de 28 cm de longitud (su imagen se observa en el medio de la figura 166). Sin embargo un huevo de gallina tiene longitud de 5 cm. ¿A cuantos huevos de gallina corresponde un huevo de avestruz de Madagascar, en volumen?

Solución

Multiplicando

$$25/8 \times 25/8 \times 25/8$$

obtenemos cerca de 170. ¡Un huevo de epiornis equivalente casi a 200 huevos de gallina! Más de un centenar de personas podrían quedar satisfechas con un solo huevo, su peso sería de 8 á 9 kg. (Recordamos a los lectores, que existe una historia fantástica sobre el huevo de epiornis escrita por el Gerbert Hueles)

8. Los huevos de las aves rusas

Problema

El contraste más intenso entre los tamaños lo obtenemos, sin embargo, cuando volvemos hacia nuestra propia naturaleza y comparamos el huevo del cisne con el huevo del régulo amarillo, la más pequeña de todas aves rusas. En la figura 167 se ilustran un comparativo de estos huevos en tamaño natural (no en esta figura). ¿Cuál es la proporción entre sus volúmenes?

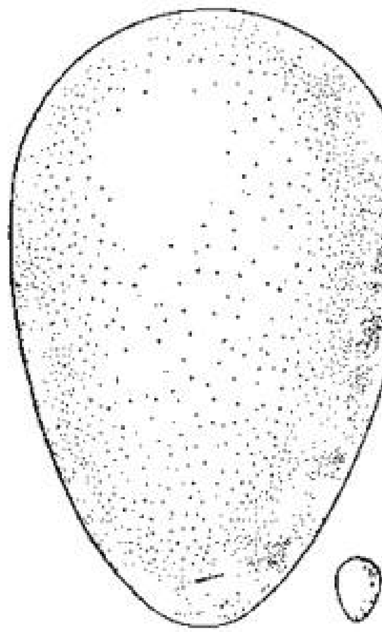


Figura 167. Un huevo del cisne y el del régulo (no se muestran en su tamaño natural) ¿Cuántas veces es mayor el volumen del uno que el del otro?

Solución

Midiendo la longitud de ambos huevos, obtenemos 125 mm y 13 mm. Midiendo también su ancho obtenemos 80 mm y 9 mm. Es fácil de ver, que estas cantidades son aproximadamente proporcionales. Verificamos la proporción

$$125/80 \approx 13/9$$

comparando los productos de sus extremos y sus medios, y obtenemos *1125* y *1040*, dos números con muy poca diferencia. De aquí se deduce que tomando esos huevos como cuerpos geométricos semejantes, no cometemos un error grande. Por esto la proporción de sus volúmenes es aproximadamente

$$\frac{80^3}{9^3} = \frac{512.000}{729} \approx 700$$

¡Entonces, el huevo del cisne tiene un volumen *700* veces mayor que el huevo del régulo!

9. Encontrar el peso de la cáscara sin romper el huevo

Problema

Tenemos dos huevos de la misma forma, pero de diferente tamaño. Se necesita encontrar el peso de la cáscara, sin romper los huevos. ¿Qué mediciones, peso y cálculos se necesitan para resolver este problema?

Solución

Medimos la longitud del eje más grande de cada huevo, tenemos *D* y *d.* El peso de la cáscara del primer huevo le llamaremos *x*, la del segundo, *y.* El peso de la cáscara es proporcional a su superficie, es decir, que es proporcional al cuadrado de su longitud. Por eso, asumiendo que la cáscara de ambos huevos tiene igual ancho, construimos la proporción

$$x : y = D^2 : d^2$$

Pesamos los huevos: obtenemos *P* y *p*. Podemos asumir que el peso del contenido del huevo es proporcional a su volumen, esto quiere decir, que es proporcional al cubo de su longitud:

$$(P - x) : (p - y) = D^3 : d^3$$

Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas; resolviendo el sistema, encontramos:

$$x = \frac{pD^3 - Pd^3}{d^2(D - d)}$$

$$y = \frac{pD^3 - Pd^3}{D^2(d - D)}$$

10. Los tamaños de nuestras monedas

El peso de nuestras monedas es proporcional a su valor, esto quiere decir, que una moneda de dos *kopeks* pesa el doble de la moneda de un *kopek*, la de tres *kopeks*, el triple, etc. Lo mismo es ocurre para el cambio de moneda. Una pieza de 20 *kopeks* (moneda), por ejemplo, pesa el doble de la de 10 *kopeks*. Y como las monedas de igual valor habitualmente tienen la forma geométrica semejante, conociendo el diámetro de una moneda, podemos calcular los diámetros de otras similares a ella. Veamos un ejemplo de estos cálculos

Problema

El diámetro de una moneda de cinco kopeks es de 25 mm. ¿Cuál es el diámetro de una moneda de tres kopeks?

Solución

La relación entre el peso y el volumen de una moneda de tres *kopeks*, es de *3/5,* es decir, *0,6* del volumen de cinco *kopeks*. Entonces, su tamaño tiene que ser

$$\sqrt[3]{0,6}$$

veces menor, es decir, que mide *0,84* del tamaño de una moneda de cinco *kopeks*

11. Una moneda de mil rublos

Problema

Imaginen una moneda fantástica de plata de mil rublos, que tiene la misma forma de una moneda de 20 kopeks, pero conforme a su valor, su peso es mayor. ¿Cuál sería su diámetro? ¿si la colocamos al lado de un auto, cuantas veces será mas alta, que el auto?

Solución

El tamaño de las monedas no es tan grande como parece. Su diámetro es de unos *3,8 m,* un poco más alto que el primer piso de un edificio. Si en verdad, su volumen es *5.000.000* de veces mayor que el volumen de la moneda de 20 *kopeks*, entonces el diámetro (y también el ancho) es

$$\sqrt[3]{5.000.000}$$

veces mayor, es decir *172* veces mayor.

Multiplicando *22 mm* por *172,* obtenemos unos *3,8 m,* tamaño bastante moderado para una moneda de este valor

Problema

Se necesita calcular, a qué moneda del mismo valor corresponde una moneda de 20 kopeks, ampliada al tamaño de un edificio de 4 pisos de altura (Figura 168).

Figura 168. ¿A qué moneda corresponde esta gigantesca moneda de 20 kopeks?

12. Las imágenes didácticas

No puedes sorprender a un lector que haya adquirido experiencia con base en los ejemplos anteriores, en referencia a las comparaciones entre volúmenes y tamaños de cuerpos geométricamente semejantes, con preguntas de este tipo. Fácilmente puede encontrar el error de algunas imágenes didácticas, que a veces aparecen en las revistas ilustrativas.

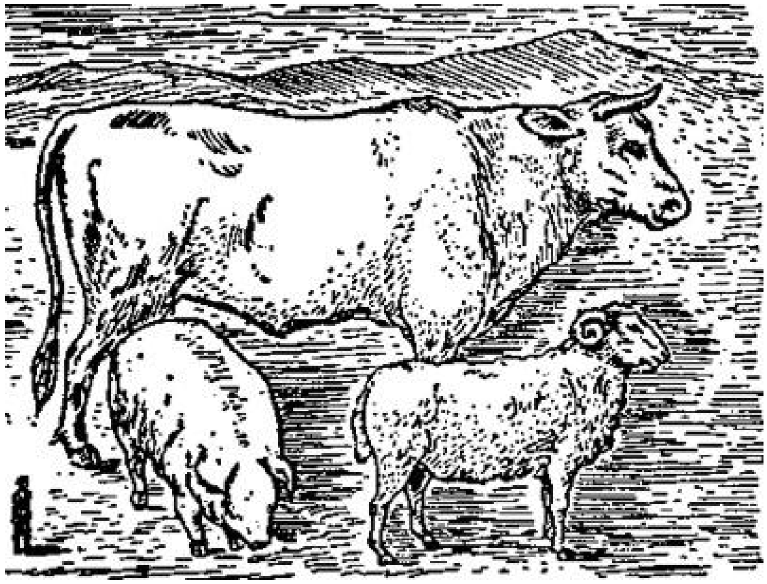


Figura 169. ¿Cuánta carne se comerá una persona durante la vida? (Encuentra el error de la imagen)

Problema

Aquí tenemos un ejemplo de una imagen con errores. Si una persona come al día, en promedio, 400 gr de carne, se calcula que durante 60 años de vida habrá consumido cerca de 9 toneladas. Como el peso de un toro es de ≈ 1/2 tonelada, entonces el hombre podrá decir, que durante toda su vida, ha comido 18 toros

La figura 169, reproducida de una revista inglesa, representa ese toro gigantesco al lado de un hombre. ¿La figura es correcta? ¿Cuál escala sería la más adecuada?

Solución

La figura no es correcta. El toro, presentado aquí, es 18 veces más alto de lo normal, y por ende, ese número de veces es más grande y más largo. Por lo tanto, el volumen será 18 x 18 x 18 = 5.832 veces mayor que su volumen normal. Una persona podría comer un toro así de grande, durante dos mil años.

Tiene que presentarse el toro más alto, más largo y más ancho que un toro normal en

$$\sqrt[3]{18}$$

es decir, *2,6* veces; no tan dramático como lo muestra la figura.

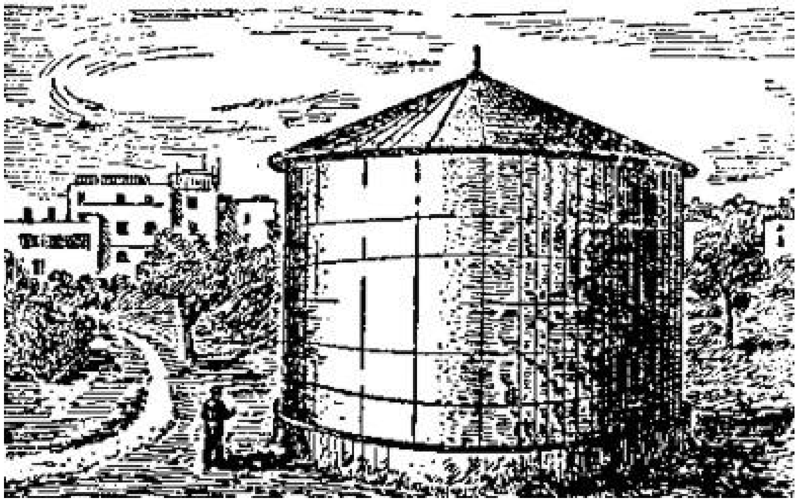


Figura 170. ¿Cuánta agua tomará una persona durante toda su vida? (¿Dónde está el error del pintor?)

Problema

La figura 170 representa otra imagen sobre el mismo asunto. Una persona toma durante el día 1 1/2 litros de líquido (de 7 á 8 vasos). Durante 70 años de vida consume cerca de 40.000 litros. Como un cántaro contiene 12 litros, entonces el pintor tendría que dibujar un cubo cuyo tamaño fuera 3.300 veces mayor que un cántaro. Él supuso, que lo había hecho así, en la figura 170. ¿Tiene razón?

Solución

Los tamaños de la figura son muy exagerados. El cubo tiene que ser más ancho y más alto que un cántaro normal en

$$\sqrt[3]{3300} = 14{,}9 \text{ veces}$$

que al redondear el valor da 15 veces. Si la altura y el ancho de un cántaro miden *30 cm,* para almacenar el agua tomada durante toda la vida, será suficiente un cántaro de *4,5 metros* de altura y del mismo ancho. La figura 171 presenta ese cubo en una escala adecuada.

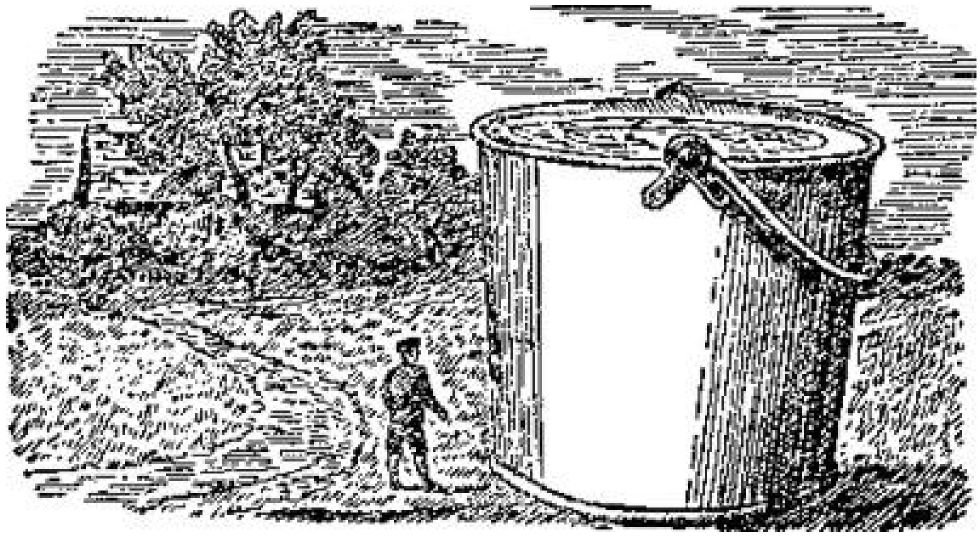


Figura 171. Lo mismo que vimos en la figura 170, pero acá se tiene la imagen correcta

Los ejemplos analizados indican que la representación mediante números fijos del aspecto del *volumen* de los cuerpos es poco práctica, no producen la impresión que se espera. En este caso, son de vital importancia, los diagramas de barras

13. Nuestro peso normal

Si aceptamos que los cuerpos de todos los seres humanos son semejantes desde el punto de vista de la geometría (en general, son iguales), entonces podemos calcular el peso del cuerpo humano con base en su estatura (la estatura media de una persona es de *1,75 cm*, su peso es de *65 kg*). Los resultados que arrojan estos cálculos son bastante sorprendentes

Supongamos, que su estatura mide *10 cm* por debajo de la mediana. ¿Cuál será su peso normal?

Habitualmente el problema se resuelve así: Del peso normal se resta una fracción, equivalente á *10 cm* sobre la estatura normal. En el caso actual, por ejemplo, se disminuyen los *65 kg* en *10/175* y se asume que el peso normal es el valor obtenido, *62 kg.*

Este cálculo es erróneo.

El peso aproximado se obtiene con ayuda de una proporción:

$$65 : x = 175^3 : 1{,}65^3,$$

de donde x ≈ 54 kg.

La diferencia con el resultado obtenido anteriormente es bastante notable, 8 kg

Caso contrario, para una persona, con una estatura *10 cm* por encima de la mediana, su peso normal se obtendrá de la proporción

$$65 : x = 1{,}75^3 : 1{,}\ 85^3$$

De aquí se obtiene: *x = 78 kg,* es decir, *13 kg* por encima del valor medio. Esta diferencia es bastante significativa.

Evidentemente, cálculos bien hechos, similares a éstos, tienen gran importancia médica para buscar el peso exacto y así poder calcular la dosis de medicamentos, etc.

14. Los gigantes y enanos

¿Cuál debería ser la proporción entre el peso de un gigante y el de un enano? La mayoría de gente piensa, estoy seguro de eso, algo inverosímil, que un gigante podría ser 50 veces más pesado que un enano. Pero verifiquemos esta suposición, mediante un cálculo geométrico

Uno de los hombres más altos, cuya existencia ha sido verificada, fue un austriaco, Vinquelmeyer, 278 cm de altura; Otro, fue un alsaciano, Kron, de 275 cm; El tercero era inglés, O'Brik, se decía que podía encender un cigarro con los faroles de la calle, alcanzaba 268 cm.

La estatura de todos ellos sobrepasaba en más de un metro, la de una persona normal. El caso contrario, los enanos adolescentes tienen estatura cercana a los *75 cm*, es decir, que miden un metro por debajo de la estatura normal. ¿Cuál es la proporción del volumen y el peso de un gigante con relación al volumen y la estatura de un enano?

Es:

$$275^3 : 75^3,\ ó\ 11^3 : 3^3 = 49$$

¡Entonces, el peso de un gigante es equivalente al peso de medio centenar de enanos!

Si creemos en la prensa, las últimas noticias dicen que una enana árabe, Aguiba, tiene *38 cm* de altura, por lo tanto, la proporción será aún más sorprendente: El gigante de mayor altura, es siete veces más alto que esa enana y por lo tanto pesa *343* veces más. La noticia más verídica, habla de Bufón, un enano que mide *43 cm* de alto: Este enano es *260* veces más liviano que el gigante.

Debemos tener en cuenta que los cálculos de la relación entre el peso de un enano y el peso de un gigante son bastante exagerados: Se asume que las proporciones de sus cuerpos son iguales. Si alguna vez han visto a un enano, sabrán que una persona de poca altura tiene un aspecto diferente al de una persona de altura normal. De acuerdo a su tamaño, el cuerpo, los brazos y la cabeza de un enano son diferentes. Lo mismo sucede con los gigantes.

Es probable, que la relación entre los pesos del último caso estudiado, de un valor por debajo de *50*

15. Geometría de Gulliver

El autor de los «Viajes de Gulliver», evitó con sumo cuidado, el peligro de enmarañarse entre las proporciones geométricas. Los lectores, sin duda, se acordarán, que en el mundo de los liliputienses nuestro pie (*30,5 cm*), era equivalente a una pulgada (*2,54 cm*). Y en el mundo de gigantes, ocurría lo contrario, una pulgada nuestra, era equivalente a un pie. De otra manera, para el liliputiense toda la gente, todas las cosas, todas las criaturas de naturaleza eran *12* veces más pequeñas de lo normal, para los gigantes, eran *12* veces más grandes. A simple vista estas proporciones eran simples, sin embargo, en algunos casos dificultaron las respuestas a preguntas como estas:

1. ¿En cuántas veces superaba la cantidad de comida de Gulliver a la de un liliputiense?
2. ¿En cuántas veces sobrepasaba la cantidad de tejido requerido para elaborar un traje para Gulliver a la cantidad que se necesitaba para elaborar el traje de un liliputiense?
3. ¿Cuánto pesa una manzana del mundo de los gigantes?

El autor de «Los viajes» resolvió problemas como estos, en la mayoría de casos. Calculó de forma correcta que la estatura de un liliputiense era *12* veces menor que la de Gulliver, entonces el volumen de su cuerpo era *12 x 12 x 12* veces menor, es decir, *1.728* veces; Por lo tanto, para que Gulliver quedara satisfecho con la comida, necesitaba una cantidad *1.728* veces mayor que la que requería un liliputiense. Leamos la descripción de la comida de Gulliver:

> *"Trescientos cocineros preparaban mi comida. Alrededor de mi casa se montaron unas cabañas, donde vivían los cocineros con sus familias. Cuando se acercaba la hora de comer, cogía las 20 personas del servicio y las colocaba sobre la mesa, y otras cien personas servían desde el suelo: Unos servían la comida, otros traían latas de vino y otras bebidas, colgadas en pértigas sobre sus hombros. Todos los que estaban arriba, servían la mesa usando cuerdas y bloques..."*

El autor (Swift) efectuó un cálculo exacto de la cantidad necesaria de tejido para elaborar el traje de Gulliver. La superficie de su cuerpo es mayor que la de un liliputiense *12 x 12 = 144* veces: En este mismo número, necesitaba Gulliver más cantidad de tejido, de sastres, etc.

Swift tuvo en cuenta todos esos detalles, que al relatar la historia de Gulliver, señala que para él «habían agregado 300 sastres liliputienses (figura 172) que debían elaborar un par de trajes con base en un modelo regional». (La prisa del trabajo requería doble cantidad de sastres.)

Figura 172. Sastres liliputienses toman las medidas de Gulliver

En casi todas las páginas se hacen necesarios los cálculos. Y Swift los efectuó correctamente de principio a fin. Si Pushkin, en su libro «Evgeniy Onegin», asegura que «el tiempo se calcula con el calendario», entonces en «Los viajes de Gulliver» de Swift, todas las medidas se ajustan a las normas geométricas. Esporádicamente, en algunos pasajes, no encaja la escala. Donde describe el mundo de los gigantes, se encuentran algunos errores

> *"Un día, - cuenta Gulliver - se fue con nosotros pasear por el jardín un liliputiense del palacio. Cuando paseaba quise tomar un descanso y me senté bajo un árbol. Mi acompañante trepó al árbol, cogió una rama y la sacudió sobre mi cabeza. Empezó a caer una lluvia de manzanas del tamaño de una lata grande; una me golpeó en la espalda y me derribó..."*

Gulliver se puso en pié fácilmente, después de recibir este golpe. Sin embargo, un sencillo cálculo nos muestra que el golpe de una manzana tenía que ser verdaderamente exterminador: Una de esas manzana pesa *1.728* veces más que la nuestra, esto quiere decir, que cayó un cuerpo de *80 kg* desde una altura *12* veces mayor que la nuestra. La energía del golpe tenía que superar *20.000* veces la energía de la caída de una manzana normal y podría comparase, al menos, con la energía de un proyectil...

Swift cometió un pequeño error referente a la fuerza muscular de los gigantes. Desde el primer capítulo sabemos que la capacidad de los animales grandes no es proporcional a su tamaño. Si empleamos este razonamiento en torno a los gigantes de Swift, resulta que la fuerza muscular de Gulliver era *144* veces mayor, mientras que el peso de su cuerpo era *1.728* veces mayor. De ser así, Gulliver podía levantar, incluso, el peso de su propio cuerpo, además de la carga misma; pero los gigantes ni siquiera eran capaces de levantar el peso de su cuerpo. Todo el tiempo permanecían quietos en el mismo sitio, sin poder realizar ningún movimiento significativo. Su poder era enorme, de acuerdo con el escrito, pero los cálculos indican que el resultado no es correcto

16. ¿Por qué el polvo y las nubes flotan en el aire?

Porque ellos son más ligeros, que el aire, es la respuesta habitual e indiscutible, de la que no queda sitio para la duda. Pero esta explicación tan simple, es totalmente errónea. Las partículas de polvo no solo no son más ligeras del aire, sino que pesan cien e incluso mil veces más.

¿Qué son las partículas de polvo? Son pequeñas partículas de otros cuerpos pesados: Trozos de piedra o de cristal, granos pequeños de carbón, madera, metal, fibras, tejidos, etc. ¿Es posible, que todos esos materiales sean más ligeros que el aire? Un simple dato, tomado de la tabla del peso específico, nos muestra que cada una de ellas pesa dos o tres veces más que el agua. El agua pesa *800* veces más que el aire. Por lo tanto, las partículas de polvo pesan más de cien o, mejor aún, de mil veces. Ahora queda clara la incongruencia de la razón expuesta al intentar explicar por que flotan las partículas en el aire.

¿Cuál es la verdadera causa? Antes de todo hay que anotar, que habitualmente apreciamos de modo incorrecto este fenómeno, pues lo concebimos como un fenómeno de flotación. Solo flotan en el aire (o en el agua) aquellos cuerpos cuyo peso no supera el peso equivalente al volumen del aire (o del líquido) desplazado. Las partículas superan significativamente este peso, por eso, no pueden *flotar* en el aire. Ellas no flotan, sino que «están en las nubes»; esto quiere decir bajan lentamente, debido a la resistencia del aire. Cada partícula que cae se abre camino entre las partículas de aire, empujándolas o llevándolas tras de sí. En ambos casos, las partículas consumen energía durante su caída. A mayor superficie del cuerpo, mayor es el gasto es el gasto de energía, comparando su peso. Cuando caen cuerpos grandes y pesados, no se aprecia la resistencia del aire, debido que su peso supera significativamente esta fuerza.

Pero veamos que pasa cuando el cuerpo es muy pequeño. La Geometría nos ayuda a resolver este asunto. Fácilmente notamos que al disminuir el volumen de un cuerpo la variación en la reducción del peso es mayor que la variación en la reducción de la superficie del corte transversal:

La disminución del peso es proporcional al volumen, es decir, a la *tercera* potencia de la reducción lineal, pero la reducción de la resistencia es proporcional a la superficie, es decir, a la *segunda* potencia de la reducción lineal.

El siguiente ejemplo nos aclara, lo que significa lo antedicho, en nuestro caso.

Cogemos una bola de críquet de *10 cm* de diámetro y una bola pequeña, del mismo material, de *1 mm* de diámetro*.* La proporción de sus medidas lineales equivale á *100,* por que *10 cm* son *100* veces *1 mm*. La bola pequeña es 100^3 veces más liviana que la mayor, es decir un millón de veces; La resistencia que encuentra en su camino a través del aire, solo es 100^2 veces mayor, es decir, diez mil veces.

Es evidente, que la bola pequeña tiene que bajar más despacio que la mayor. Más breve, la causa de que las partículas “floten” en el aire, es su «empuje», condicionado por su tamaño, y no porque parezcan más ligeras del aire. Una gota de agua con un radio de *0,001 mm* cae a través del aire, regularmente con una velocidad de *0,1 mm/seg*; la menor corriente de aire, es suficiente para poner obstáculos a su caída libre.

Por esta razón, en una habitación donde circula gente, hay menos precipitación de polvo durante el día que por la noche, aunque aparentemente debería suceder lo contrario: Los torbellinos que se forman en el aire detienen la precipitación; en el aire en calma, al interior de una habitación poco visitada, no existen estas corrientes de aire, por lo tanto se reduce la resistencia del mismo, lo que facilita una mayor precipitación de polvo.

Si un cubo de piedra de *1 cm* de altura lo reducimos a partículas cúbicas de *0,0001 mm* de lado, entonces la superficie total, con el mismo peso de la piedra, aumenta *10.000* veces, y en igual número de veces, aumenta la resistencia del aire que se opone a su movimiento. A menudo las partículas alcanzan estos tamaños y está claro, que si la resistencia crece, cambia completamente la caída.

Por la misma razón «flotan» en el aire las nubes. Hace tiempo se ha descartado la concepción de las nubes, como burbujas llenas de vapor de agua. La nube es una aglomeración de gran cantidad de partículas pequeñas de agua, pero sólo una aglomeración. Estas partículas, aunque pesan unas *800* veces más que el aire, caen poco.

Bajan a muy baja velocidad. Esta caída tan lenta, se explica del mismo modo que se hizo con las partículas, debido a que tienen una mayor superficie, comparada con su peso.

Aún la corriente del aire más débil no solo es capaz de suspender la caída lenta de las nubes, manteniéndolas al mismo nivel, sino que también las puede subir.

La causa principal, común a todos esos fenómenos, es la presencia del aire: dentro del vacío las partículas y las nubes (si existieran) caerían como caen las piedras.

Es útil agregar que la caída lenta de un paracaidista (≈ 5 m/segundo) pertenece a los fenómenos de orden semejante.

Capítulo 12
Economía Geométrica

Contenido:

1. Como compraba la tierra Pajom.

(Un problema del León Tolstoi)

"- ¿A qué precio queda? - dice Pajom.

- Tenemos un único precio: 1.000 rublos por día.

Figura 173. «Pajom corre al máximo de sus fuerzas, mientras que el sol se acerca al horizonte»

Pajom no había entendido.

- ¿A cuánto equivale esta medida por día? ¿Cuántos diezmos (*Diezmo; Diesiatina, es la antigua medida rusa de los terrenos, equivalente a 109 Ha*) por día serán?

- Nosotros no sabemos contarlos, dice. Nosotros vendemos al día. Cuánta tierra dejes atrás durante el día, será toda tuya, y su precio son 1.000 rublos.

Se extrañó Pajom.

- Pero sería mucha tierra durante un día, dice.

El jefe sonríe.

- Toda tuya, pero a condición de que si no vuelves antes de la puesta del sol al sitio de donde partiste, pierdes tu dinero.
- ¿Pero, dice Pajom, cómo voy a marcar por donde pasé?
- Nosotros estaremos en el sitio que más te guste; nos quedaremos quietos mientras que tú caminas, hazlo en círculo, coge un rascador y marca donde sea necesario, haciendo hoyos en las esquinas; luego pasaremos con el arado, de una esquina a otra.
Cualquier círculo es tuyo, la única condición es que, antes de la puesta del sol tendrás que regresar al punto de partida. Todo lo que dejes atrás será tuyo.
Los baskirios se fueron. Prometieron volver al mismo sitio, al amanecer del día siguiente.

* * *

Todos llegan al amanecer. El jefe se acerca e indica con la mano a Pajom:
- Todo lo que ves alrededor es mío, le dice. Elige cualquier lugar.
El jefe pone su gorra de piel de zorro en la tierra.
- Aquí estaré esperándote, dice, esta será la primera marca. Parte desde aquí y vuelve aquí. Todo lo que dejes atrás, tuyo será.
Con el primer rayo de sol, Pajom se echa al hombro el rascador y comienza su viaje por la estepa.
Cuando se ha alejado una versta, se para y hace un hoyo. Se aleja todavía más y hace otro hoyo.
Ha dejado atrás cinco verstas. Mira al sol, es la hora del desayuno. "Dejé un atelaje, pensó Pajom. Durante el día hay cuatro, aun es pronto para girar… Voy a recorrer a otras cinco más; luego giraré a la izquierda…» y sigue su marcha en línea recta.
«Ahora, piensa, en este lado he cogido demasiado; Tengo que girar» Se paró, excavó otra vez un hoyo y volteó a la izquierda.
Se aleja bastante en la misma dirección, y llega a la otra esquina. Echa un vistazo a la colina; se marea por el calor que hace, a lo lejos se ve la gente. «Ahora, piensa, he cogido un lado muy largo, ahora tomaré un poco menos». Inicia el recorrido por el tercer lado. Mira al sol, se acerca el mediodía, sobre tercer lado recorre

solamente dos verstas. Y hasta el punto de partida le quedan 15 verstas. «No, piensa, aunque salga un terreno irregular, tengo que llegar a tiempo».

Pajom excava un hoyo y hace el último giro, caminando hacia la colina.

Camina en línea recta hasta la colina y de pronto empieza a sentirse mal. Necesita tomar un descanso, pero no puede, no llegará antes de la puesta de sol. El sol se acerca al horizonte.

Pajom sigue caminando; es difícil para él, pero se apura aún más. Camina y camina, aún está lejos el sitio de llegada; trota... corre, la camisa y el pantalón se pegan a su cuerpo por el sudor y su boca está seca.

El pecho se hincha como fuelle de fragua, el corazón late como martillo.

Corre Pajom, gastando sus últimas fuerzas, y el sol se acerca más y más al horizonte.

Pronto se ocultará el sol (figura 173).

El sol está cerca y el sitio tampoco está lejos. Ve la gorra de piel de zorro sobre la tierra y el jefe está sentado en el suelo.

Pajom ve como el sol toca la tierra, y poco a poco empieza a desaparecer.

Pajom hace un mayor esfuerzo, suspira, sube a la colina. Ve la gorra. Se le doblan las piernas y cae al suelo; con sus manos sudorosas, toca la gorra.

- ¡Qué muchacho! - grita el jefe: - ¡Cuanta tierra ha ganado!

Se acerca un trabajador, quiere ayudarle a levantarse, pero ve sangre en su boca, el hombre está muerto...”

Problema *(de León Tolstoi):*

Dejemos a un lado el triste final de esta historia y vamos a examinar la parte geométrica de este relato. ¿Podemos encontrar con los datos dispersos por todo el texto, cuántos diezmos de tierra ha recorrido Pajom? La tarea, a simple vista, parece inconclusa; sin embargo, se resuelve de manera bastante simple.

Solución

Leemos de nuevo la historia prestando mucha atención a los detalles, y obtenemos los datos geométricos; fácilmente nos damos cuenta de que los datos obtenidos son suficientes para responder la pregunta.

Podemos dibujar el plano del terreno recorrido por Pajom.

En primer lugar, está claro, que Pajom ha caminado sobre los lados de un rectángulo. Sobre el primer lado leemos:

“He dejado atrás cinco verstas... Voy a pasar a otros cinco más; luego tomaré a la izquierda...”

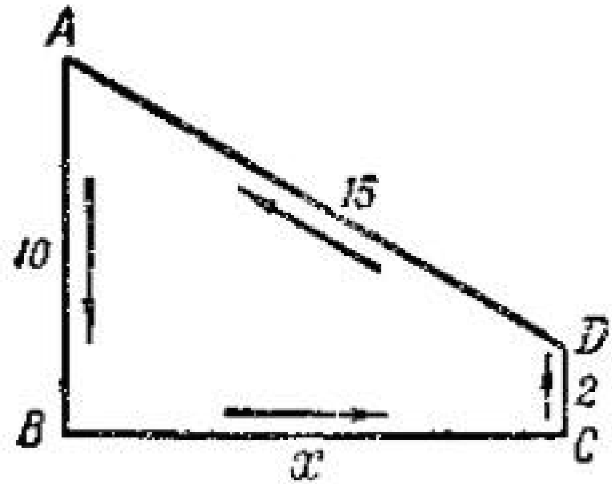


Figura 174. El camino de Pajom

Entonces, el primer lado del rectángulo tenía una longitud de unas 10 verstas.

Sobre el segundo lado, en ángulo recto con el primer lado, no se dice nada.

El tercer lado, evidentemente, es perpendicular al anterior, se dice a continuación: «Sobre tercer lado recorre solamente dos verstas».

Se conoce, por supuesto, la cuarta parte del rectángulo: «Y hasta el punto de partida le quedan 15 verstas. »[38].

Con estos datos podemos dibujar el plano del terreno recorrido por Pajom (figura 174). En el rectángulo obtenido *ABCD* se tiene: lado *AB* = 10 verstas; *CD* = 2; *AD* = 15 verstas; Los ángulos *B* y *C*, son rectos.

La longitud *x* del lado incógnito *BC* se calcula fácilmente, si pasamos desde *D* una perpendicular *DE* hacia *AB* (figura 175).

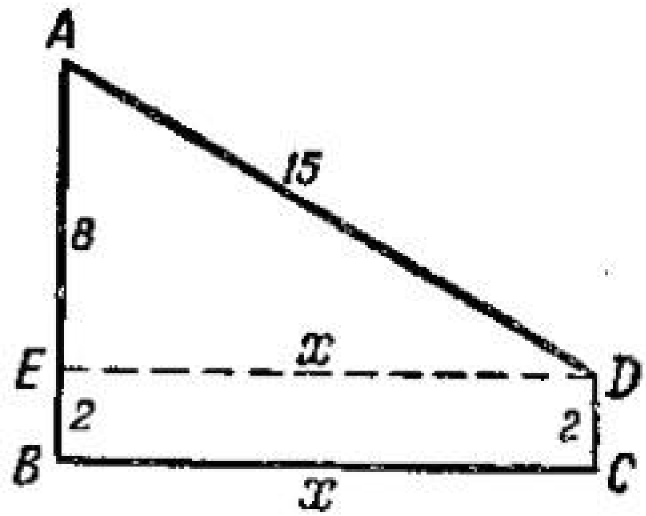


Figura 175. Especificación del camino.

En el triángulo rectángulo *AED* conocemos un cateto *AE* = 8 verstas y la hipotenusa *AD* = 15 verstas. El cateto desconocido mide:

$$AD = \sqrt{15^2 - 8^2} = 13 \text{ verstas}$$

Entonces el segundo lado tiene 13 verstas de longitud. Evidentemente, Pajom se equivocó, al tomar el segundo lado más corto que el primero.

Como vemos, al dibujar el plano de aquel terreno, vemos el recorrido real que efectuó Pajom.

Con toda seguridad podemos afirmar que Tolstoi tenía frente a él una ilustración semejante a la que se muestra en la figura 174, cuando estaba escribiendo esta historia.

Ahora resulta fácil a encontrar la superficie del trapecio *ABCD*, formado por el rectángulo *EBCD* y por el triángulo rectángulo *AED*. Esta es:

$$2 \times 13 + \frac{1}{2} \times 8 \times 13 = 78 \text{ verstas}^2$$

El cálculo sobre la fórmula del trapecio nos arroja el mismo resultado:

$$\frac{AB+CD}{2}\times BC=\frac{10+2}{2}\times 13=78\,\text{verstas}^2$$

Encontramos que Pajom recorrió un extenso terreno con una superficie de 78 verstas cuadradas, unos 8.000 diezmos. Un diezmo era equivalente á 12 kopeks.

2. Trapecio o rectángulo

Problema

Durante el día más fatídico en su vida Pajom recorrió 10 + 13 + 2 + 15 = 40 verstas caminando sobre los lados de un trapecio. Su intención principal era caminar sobre los lados de un rectángulo; el trapecio le salió por causalidad, como resultado de un cálculo mal hecho. Es curioso: ¿Ganó o perdió, cuando su terreno resultó ser un trapecio? ¿En qué caso podría recibir el mayor terreno posible?

Solución

Se pueden formar muchos rectángulos con un perímetro de 40 verstas, cada uno con área diferente. Aquí se tienen algunos ejemplos:

14 x 6	=	84	verstas cuadradas
13 x 7	=	9	verstas cuadradas
12 x 8	=	96	verstas cuadradas
11 x 9	=	99	verstas cuadradas

Vemos, que estos rectángulos cuyo perímetro es de 40 verstas, tienen un área mayor que la de nuestro trapecio.

Sin embargo, existen otros rectángulos cuyo perímetro también es de 40 verstas, cuya superficie es menor que la de nuestro trapecio:

18	x	2	=	84	verstas cuadradas
19	x	1	=	9	verstas cuadradas
19½	x	½	=	96	verstas cuadradas

Por lo tanto, no podemos dar una respuesta concreta a este problema. Hay rectángulos con superficie mayor que la del trapecio, pero hay también con una menor superficie que la de éste, todos con idéntico perímetro. Aunque podemos dar una respuesta exacta a la pregunta: ¿Cuál de todas las figuras rectangulares con igual perímetro tendrá la superficie más grande? Comparando nuestros rectángulos, notamos, que a menor diferencia entre los lados, mayor es la superficie del rectángulo. Se concluye que, cuando no existe diferencia, es decir, cuando el rectángulo se convierte en cuadrado, la superficie alcanza su máximo valor. Por lo tanto, tendrá 10 x 10 = 100 verstas cuadradas. Es fácil de ver, que realmente el cuadrado tiene una superficie mayor que cualquier rectángulo de igual perímetro. Pajom tenía que caminar sobre los lados de un cuadrado para conseguir la superficie más grande posible de terreno, es decir, 22 verstas cuadradas más, de las que logró.

3. Una propiedad excelente del cuadrado

Esta propiedad se refiere a que el cuadrado encierra la mayor superficie posible en comparación con otros rectángulos de igual perímetro. Haremos una demostración concreta de esta propiedad.

Llamemos *P* al perímetro de la figura rectangular. Si el cuadrado tiene el mismo perímetro *P*, entonces cada uno de sus lados mide *P*/4.

Demostremos, que si acortamos dos lados opuestos una cantidad *b* y prolongamos igual cantidad los otros dos, obtenemos un rectángulo de igual perímetro, pero con menor área. Dicho de otra manera, demostraremos, que la superficie del cuadrado:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2$$

es mayor que la superficie del rectángulo:

$$\left(\frac{P}{4}+b\right)\times\left(\frac{P}{4}-b\right)$$

O sea que, asumimos que:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4}+b\right)\times\left(\frac{P}{4}-b\right)$$

Como el miembro derecho de esa desigualdad es:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 - b^2$$

La desigualdad se transforma en:

$$\left(\frac{P}{4}\right)^2 > \left(\frac{P}{4}\right)^2 - b^2$$

De donde se obtiene:

$$0 > -b^2 \text{ ó}$$

$$b^2 > 0.$$

La última desigualdad es evidente: El cuadrado de cualquier cantidad, negativa o positiva, es mayor que 0. Por lo tanto, es correcta la suposición hecha al comienzo, y que nos condujo hasta aquí.

O sea, el cuadrado tiene la mayor superficie de todos rectángulos con idéntico perímetro.

De aquí se deduce, además, que entre todas las figuras rectangulares con igual área, el cuadrado tiene el menor perímetro. Podemos verificarlo mediante el siguiente razonamiento. Supongamos, que esto no es cierto y que existe un rectángulo *A*, con idéntica superficie al cuadrado *B* y con menor perímetro que el cuadrado. Tracemos ahora un cuadrado *C* con igual perímetro que el rectángulo *A*; obtenemos así un cuadrado de mayor superficie que *A* y, por lo tanto, mayor que el cuadrado *B*. ¿Qué tenemos entonces? Que el cuadrado *C* tiene el perímetro menor que el cuadrado *B*, pero su superficie es mayor que la de dicho cuadrado *B*. Naturalmente, esto es imposible: Como el lado del cuadrado *C* es menor, que el lado del cuadrado *B*, entonces su superficie tiene que ser menor. Por lo tanto, no es posible que exista un rectángulo *A*, el que con la misma área tenga su perímetro menor que el cuadrado. Dicho de otra manera, de todos los rectángulos con igual área, el menor perímetro lo tiene el cuadrado.

Si Pajom hubiera conocido esta propiedad del cuadrado le hubiera resultado de gran ayuda, para poder calcular sus fuerzas y conseguir un terreno rectangular con la mayor superficie posible.

Sabiendo, que podía recorrer durante todo el día, sin ningún esfuerzo, digamos que unas 36 verstas, podría recorrer los lados de un cuadrado de 9 verstas de lado, y al atardecer sería propietario de un terreno de 81 verstas cuadradas, - de 3 verstas cuadradas más que el que había conseguido con un mal final. Y, recíprocamente, si hubiera definido el límite de la superficie rectangular de un terreno, por ejemplo, de 36 verstas cuadradas, podría lograr el resultado con mínimo esfuerzo, caminando sobre los lados del cuadrado, de 6 verstas de lado.

4. Los terrenos de otra forma

Quizás, para Pajom fuera más rentable conseguir un terreno de forma diferente a un rectángulo, quizás triangular, pentagonal, cuadrada, etc.

Esta pregunta se estudia a la luz de las matemáticas; pero, por ciertas razones, no vamos a entrar en detalle, solo vamos a demostrar los resultados.

En primer lugar, podemos demostrar, que de todos cuadriláteros de igual perímetro, el cuadrado abarcará la máxima superficie. Por eso, si Pajom quisiera tener un terreno en forma de cuadrilátero, sin emplear ningún artificio, no podría alcanzar más de 100 verstas cuadradas (suponiendo que diariamente puede recorrer hasta 40 verstas).

En segundo lugar: Podemos demostrar, que el cuadrado tiene una superficie mayor que la de cualquier triángulo de igual perímetro.

Un triángulo equilátero con el mismo perímetro tiene cada lado de:

40/3 =13 1/3 verstas

Y de acuerdo con la fórmula:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

(siendo *S* la superficie, y *a* el lado)
Tiene un área de:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{40}{3}\right)^2\sqrt{3} = \ 77 \text{ verstas}^2$$

Es decir, de menor superficie que el trapecio que recorrió Pajom. Más adelante se demuestra que (ver «El triángulo de mayor superficie»), de todos triángulos con igual perímetro, el triángulo equilátero tiene la mayor superficie. Además de esto, el triángulo de máxima superficie encierra un área menor que la que abarca el cuadrado, entonces todos los triángulos con idéntico perímetro al cuadrado, tienen menor superficie que éste.
Pero si vamos a comparar la superficie del cuadrado con la superficie del pentágono, del hexágono, etc. De idéntico perímetro, se llega a que: un pentágono regular tiene mayor superficie, un hexágono, un área aún mayor, etc. Es fácil comprobarlo, teniendo como ejemplo un hexágono regular. Con el perímetro de 40 verstas su es lado mide 40/6 verstas, y su superficie se calcula con la fórmula:

$$S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$$

Y su valor es: 115 – 78

$$S = \frac{3}{3}\left(\frac{40}{5}\right)\sqrt{2} \text{ verstas}^2$$

Conociendo y eligiendo un terreno con forma de hexágono regular, Pajom podría alcanzar la superficie de 115 verstas cuadradas, con el mismo esfuerzo, terreno cuya área sobrepasa en 115 – 78 verstas cuadradas, es decir, en 37 verstas cuadradas más, al lote que obtuvo, y en 15 verstas cuadradas más, que el terreno cuadrado (pero para lograrlo tendría que haber iniciado el recorrido con un instrumento goniométrico).

Problema

Con seis cerillas se necesita formar una figura con la mayor área posible.

Solución

Con seis cerillas podemos construir varias figuras distintas: un triángulo equilátero, un rectángulo, hexágonos irregulares y por fin - un hexágono regular. Un geómetra, sin comparar entre si, las superficies de estas figuras, sabe muy bien, que la figura que tiene la mayor superficie posible es el hexágono regular.

5. Las figuras con mayor superficie

Podemos demostrar geométricamente, que el polígono regular que tenga mayor cantidad de lados, alcanza la mayor superficie posible, que los demás polígonos de igual perímetro. La circunferencia encierra la mayor superficie posible para un perímetro dado. Si Pajom hubiera caminando en círculo, recorriendo las mismas 40 verstas, hubiera conseguido un terreno de:

$$\pi \times \left(\frac{40}{2\pi}\right)^2 = 127 \text{ verstas}^2$$

Con la mayor superficie posible para un perímetro dado, a la circunferencia no le gana ninguna otra figura, igual si es rectilínea o curvilínea.

Permítanme detenerme un poco más en esta sorprendente propiedad del círculo, como es la de abarcar dentro de sus límites mayor superficie que cualquier otra figura, teniendo el mismo perímetro. Puede ser, que algunos lectores tengan curiosidad de saber de qué manera se demuestran casos semejantes. La demostraremos a continuación. En verdad, la demostración de esta propiedad del círculo no es clásica, la presenta el matemático Yakov Shteyner. El texto es bastante largo, y si ustedes lo encuentran demasiado molesto, pueden saltarlo, sin preocuparse por no entender la siguiente parte.

Se necesita demostrar, que la figura que encierra la máxima superficie con un perímetro dado, será el círculo. Ante todo, establecemos que la figura buscada tiene que ser convexa.

Esto significa, que cualquier cuerda debe estar dentro de la figura.

Tenemos una figura *AaBC* (figura 176), que tiene la cuerda externa *AB*. Cambiaremos la cuerda *a* por la cuerda *b*, simétricas entre sí. Con este cambio el perímetro de figura *ABC* no varía, pero aumenta su superficie. No pueden existir figuras como *AaBC* que tengan máxima superficie con idéntico perímetro.

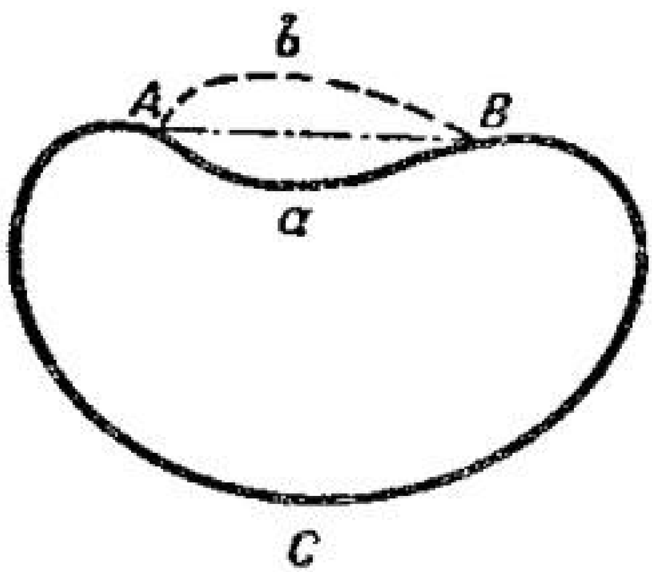


Figura 176. Ordenamos, que la figura con mayor superficie debe ser convexa también y la superficie

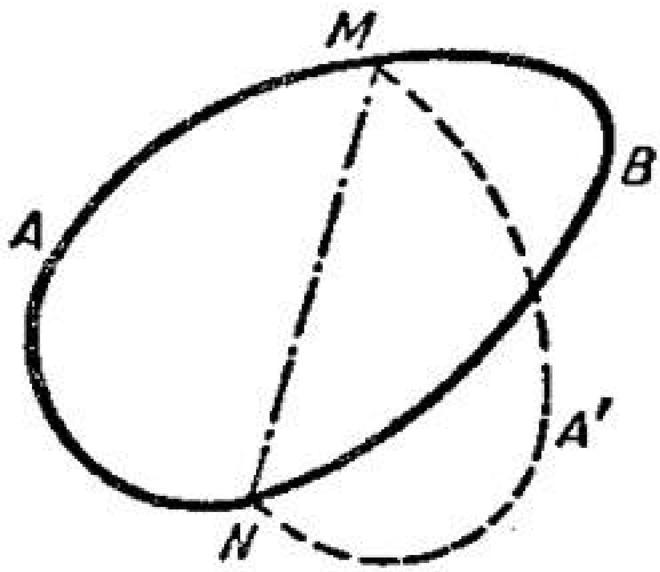


Figura 177. Si la cuerda divide por la mitad el perímetro de una figura convexa de mayor superficie, también corta por la mitad su superficie.

O sea, que la figura buscada es convexa. Podemos establecer otra propiedad más de esta figura: Cualquier cuerda, que divida su perímetro a la mitad, también corta por la mitad su superficie. Sea la figura *AMBN* (figura 177), tal que la cuerda *MN* divide su perímetro por la mitad. Demostremos, que superficie *AMN* es igual a la superficie *MBN*. Si asumimos que una de estas dos figuras tiene mayor superficie que la otra, por ejemplo, *AMN* > *MNB*, al doblar la figura *AMN*, se obtiene otra figura de mayor superficie que la de la figura inicial *AMBN*, ambas con igual perímetro. Por lo tanto, no es posible que la figura *AMBN*, en la cual la cuerda corta el perímetro por la mitad, divida la superficie en dos partes de diferente área (es decir, que no puede tener mayor superficie con igual perímetro).

Antes de seguir adelante, demostraremos el siguiente teorema adicional: De todos los triángulos con dos lados conocidos, tendrá mayor superficie, el que forme con sus lados un ángulo recto. Para demostrar esto, recordamos la expresión trigonométrica para la superficie *S* del triángulo de lados *a* y *b* y ángulo *C* entre ellos:

$$S = \frac{1}{2} a \times b \times sen(C)$$

Esta expresión alcanza el máximo valor cuando el *sen(C)* tome su máximo valor, es decir, cuando sea igual a uno. Pero el ángulo cuyo seno es *1*, es el ángulo recto. Es lo que queríamos demostrar.

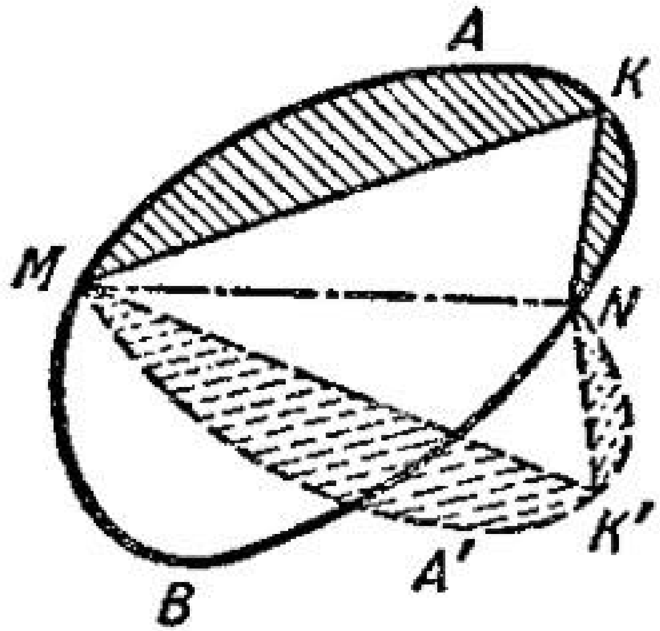


Figura 178. Supongamos la existencia de una figura convexa, que no es un círculo, con la mayor superficie.

Ahora podemos empezar a resolver el problema principal, demostrando que de todas las figuras con perímetro *p,* la de mayor superficie es la circunferencia. Para demostrarlo, admitimos la existencia de una figura convexa, no circular, *MANB* (figura 178), que tiene esta propiedad. Pasamos por ella una cuerda *MN*, de modo que *MK'N* sea simétrica a *MKN*. Observamos, que la figura *MNK'M* tiene el mismo perímetro y la misma superficie, que la figura inicial *MKNM*.

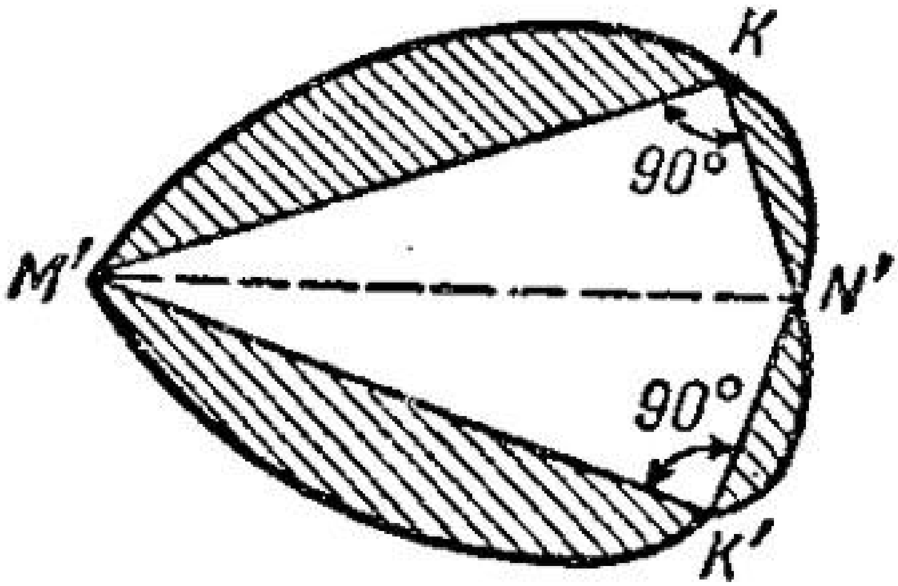


Figura 179. Establecemos que de todas las figuras con un perímetro dado, la de mayor superficie es la circunferencia

Como la cuerda *MKN* no es la mitad de una circunferencia, habrán algunos puntos de ella, desde los cuales no forman un ángulo recto, los segmentos trazados desde dichos puntos hasta los extremos del segmento *MN*. ES decir que, si el punto *K'*, es simétrico al punto *K*, los ángulos *K* y *K'* no son rectos.

Alejando o acercando los lados *MK*, *KN*, *MK'*, *NK'*, podemos formar entre ellos un ángulo recto y obtenemos triángulos rectángulos equivalentes. Colocamos estos triángulos unidos por sus hipotenusas, como se observa en la figura 179, y unimos sus extremos a las áreas sombreadas. Obtenemos la figura *M'KN'K'*, con igual perímetro que la figura inicial, pero con mayor superficie (porque los triángulos rectángulos *M'KN'* y *M'K'N'* tienen mayor superficie, que los no rectángulos *MKN* y *MK'N*). Entonces, ninguna figura fuera del círculo, puede tener la máxima superficie con el mismo perímetro.

Sustentando lo antedicho, hemos demostrado que el círculo es la figura que tiene la máxima superficie, con un perímetro dado.

Es fácil demostrar la validez de esta propiedad: De todas las figuras de igual superficie, el círculo es el que tiene menor perímetro. Podemos observar que se pueden aplicar al círculo todos los argumentos que usamos antes para el cuadrado (ver «Una propiedad excelente del cuadrado»)

6. Los clavos

Problema

¿Qué clavo es más difícil de sacar, el redondo, el cuadrado o el triangular, si se han clavado a la misma profundidad y tienen la misma superficie de corte transversal?

Solución

Intuitivamente sabemos que el clavo que tiene mayor resistencia a la extracción es aquél que tiene mayor superficie de contacto con la madera ¿Cuál de los tres clavos, tiene mayor superficie de contacto? Nosotros sabemos, que con igual superficie, el perímetro del cuadrado es menor que el perímetro del triángulo, y el perímetro de la circunferencia es menor que el perímetro del cuadrado. Si asignamos el valor *1* a un lado del cuadrado, entonces el cálculo arroja estos resultados 4,53; 4; 3,55, para el clavo redondo, el cuadrado y el triangular. Por lo tanto, el clavo triangular se mantiene más fuerte que los otros.

Sin embargo, no se fabrica este tipo de clavos, o por lo menos no está a la venta. Esto se debe a que estos clavos son se doblan y de rompen con suma facilidad.

7. El cuerpo de mayor volumen

La superficie esférica tiene una propiedad semejante al círculo: entre cuerpos de idéntica superficie exterior, la esfera tiene el máximo volumen. Y recíprocamente, entre todos los cuerpos de igual volumen, el de menor superficie es la esfera.

Estas propiedades juegan un gran papel en la vida práctica. El samovar esférico tiene menor superficie, que el cilíndrico o el de cualquier otra forma, conteniendo todos ellos la misma cantidad de vasos; como el cuerpo pierde calor en función de su superficie, entonces el samovar esférico se enfría más lentamente que cualquier otro de igual volumen. Y caso contrario, el receptáculo del termómetro se calienta y se enfría más rápido (es decir, que se adapta con mayor rapidez a la temperatura del medio ambiente), cuando tiene forma cilíndrica y no esférica.

Por la misma razón el globo terrestre, formado por una capa sólida y el núcleo, debe reducir su volumen, es decir, solidificarse y contraerse; a causa de ello, se transforma la forma de su superficie: Su contenido profundo -magma- es menor cada vez, cuando se presenta algún cambio en esta capa interior, varía la forma esférica de la Tierra. Es posible, que este asunto geométrico guarde relación cercana con los terremotos y, en general, con los fenómenos tectónicos; pero respecto a eso deben dar su opinión los geólogos.

8. El producto de factores iguales

Se pueden analizar las tareas, a las que hemos venido dedicando el tiempo, desde el punto de vista de la economía: el consumo (por ejemplo, el mínimo esfuerzo realizado al caminar 40 verstas), y ¿cómo conseguir el máximo resultado (abarcando el terreno más grande posible)? De aquí surge el título de esta parte de la presente obra: «Economía geométrica». Pero esta referencia resulta bastante prosaica; en matemáticas, los problemas que versan en torno al citado tema reciben otro nombre: Problemas sobre «máximos y mínimos».

Estos ejercicios varían según su orden de aplicaciones y nivel de dificultad. La mayor parte de estos problemas se soluciona únicamente mediante matemáticas superiores; sin embargo, algunos se pueden resolver mediante conocimientos elementales. A continuación vamos a analizar un par de problemas de este tipo, los que vamos a resolver, empleando una curiosa propiedad, la igualdad de los factores.

Ya conocemos esta propiedad en aquellos casos en los que se tienen dos factores. Sabemos, que la superficie del cuadrado es mayor que la superficie de cualquier rectángulo de igual perímetro. Si traducimos esta situación geométrica a la lengua aritmética, significa lo siguiente: Cuando se requiere dividir un número en dos partes, de modo que su producto alcance el máximo valor posible, se debe dividir dicho número a la mitad. Así, por ejemplo, la suma de los factores de todos los productos:

$$13 \times 17$$
$$16 \times 14$$
$$12 \times 18$$
$$11 \times 19$$
$$10 \times 20$$

15 x 15

etc., es 30; el máximo producto será 15 x 15, aún teniendo en cuenta los productos entre números fraccionarios (14 ½ x 15 ½, etc.).

Esta propiedad también es válida para productos de tres factores, cuya suma sea constante:

Su producto alcanza el máximo valor, cuando los factores son equivalentes entre sí.

Esto se deduce de lo antedicho. Sean tres factores *x*, *y*, *z*, cuya suma es *a*:

x + y + z = a.

Supongamos, que *x* e *y* no son iguales entre sí. Si reemplazamos cada uno de ellos por la semisuma:

$$\frac{x+y}{2}$$

entonces la suma de los factores no cambiará:

$$\frac{x+y}{2}+\frac{x+y}{2}+z=x+y+z=a$$

De acuerdo con lo anterior:

$$\frac{x+y}{2}\times\frac{x+y}{2}>x\times y$$

Entonces el producto de tres factores:

$$\frac{x+y}{2}\times\frac{x+y}{2}\times z$$

es mayor que el producto de *xyz*:

$$\frac{x+y}{2}\times\frac{x+y}{2}\times z>x\times y\times z$$

en general, si el producto *xyz*, tiene al menos uno de los factores de diferente valor, siempre se pueden encontrar tres números, que sin variar el total, den el máximo producto, de *xyz*. Y esto solo es posible cuando los tres factores son iguales. Por lo tanto, para $x + y + z = a$, se tendrá el producto máximo *xyz* cuando:

$$x = y = z$$

Emplearemos esta propiedad de factores iguales, para resolver problemas muy interesantes.

9. El triángulo de mayor superficie

Problema

¿Qué forma debe de tomar el triángulo, para que tenga la mayor superficie posible, conocida la suma de sus lados?

Nosotros ya hemos visto anteriormente (ver «Terrenos de otra forma»), que el triángulo equilátero cumple esta propiedad. ¿Pero como podemos demostrarlo?

Solución

La superficie *S* del triángulo con lados *a*, *b*, *c* y con el perímetro $a + b + c = 2p$ se expresa, como sabemos del curso de geometría, así:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

De donde:

$$\frac{S^2}{p} = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

La superficie *S* del triángulo será mayor, cuanto mayor sea su cuadrado S^2, o el término: S^2/p, donde *p* es el semi-perímetro, y de acuerdo con la condición del problema, es constante. Pero como ambas partes de la igualdad alcanzan simultáneamente el máximo valor, entonces la pregunta se reduce a encontrar que condición debe cumplir el producto:

$$(p - a)(p - b)(p - c)$$

para alcanzar el máximo valor. Teniendo en cuenta, que la suma de estos tres factores es constante,

$$p - a + p - b + p - c = 3p - (a + b + c) = 3p - 2p = p,$$

concluimos que su producto alcanza el máximo valor cuando los factores son iguales entre sí, es decir, cuando se cumple la igualdad:

$$p - a = p - b = p - c$$

de donde:

$$a = b = c.$$

En síntesis, un triángulo con un perímetro dado, tendrá la máxima superficie posible, cuando sus lados sean iguales entre si.

10. La viga más pesada

Problema

De un madero de forma cilíndrica se necesita aserrar una viga que tenga el máximo peso posible. ¿Cómo debemos proceder?

Solución

EL problema, evidentemente, se expresa inscribiendo un rectángulo de máxima superficie dentro de un círculo. Aunque nuestros lectores estén preparados a contestar, que ese rectángulo debe ser un cuadrado, hay que demostrarlo. Llamemos *x*, a un lado del rectángulo buscado (figura 180); el otro se define como:

$$\sqrt{R^2 - x^2}$$

donde *R* es el radio del corte circular del madero.

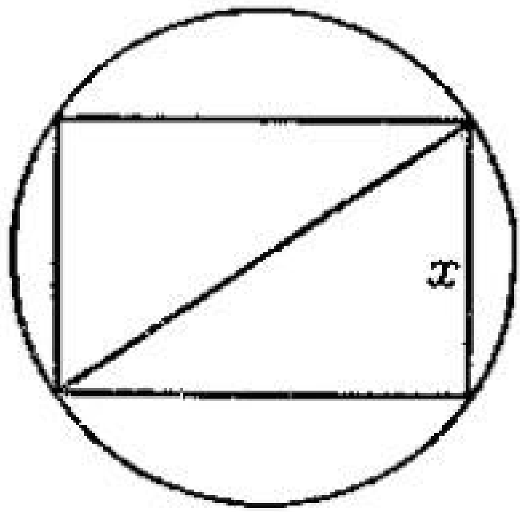


Figura 180. El problema de la viga de mayor peso posible.

La superficie del rectángulo es:

$$S = x \times \sqrt{R^2 - x^2}$$

de donde:

$$S^2 = x^2 \times \left(4R^2 - x^2\right)$$

Como la suma de los factores x^2 y $4R^2 - x^2$ es un valor constante ($x^2 + 4R^2 - x^2 = 4R^2$), entonces su producto S^2 alcanza el máximo valor cuando $x^2 = 4R^2 - x^2$, es decir que

$$x = R\sqrt{2}$$

Este rectángulo alcanza el máximo valor de *S*, la superficie del rectángulo buscado.
O sea que, uno de los lados del rectángulo de máxima superficie es

$$R\sqrt{2}$$

es decir, que esta medida corresponde al lado del cuadrado inscrito. La viga alcanza el máximo volumen posible, cuando su corte cuadrado está inscrito dentro del madero cilíndrico.

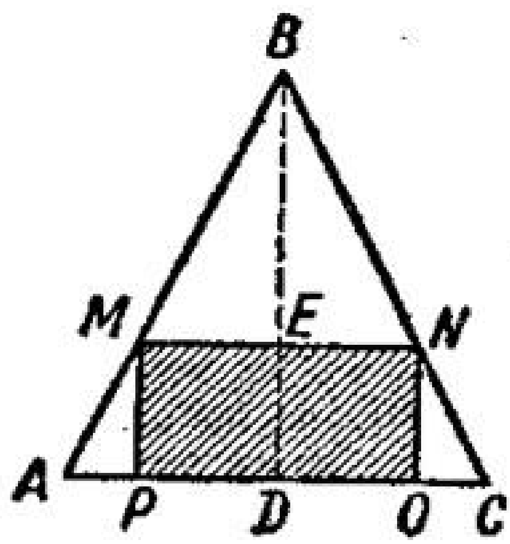


Figura 181. Dentro del triángulo hay que inscribir el rectángulo de mayor superficie posible.

Sea el triángulo *ABC* (figura 181), y *MNOP* - el rectángulo que debe quedar después del corte.

11. De un triángulo de cartón

Problema

Tenemos un pedazo de cartón de forma triangular. Necesita cortar de forma paralela a su base y a su altura, el rectángulo que tenga la mayor superficie posible.

Solución

Como *ABC* y *NBM* son triángulos semejantes, tenemos:

$$\frac{BD}{BE} = \frac{AC}{NM}$$

De donde:

$$NM = \frac{BE \times AC}{BD}$$

Llamando *y* a *NM*, uno de los lados del rectángulo buscado, *x* a su distancia *BE*, desde el vértice del triángulo, *a* a la base *AC*, del triángulo, y *h* a su altura *BD*, escribimos la fórmula anterior así:

$$y = \frac{ax}{h}$$

La superficie *S* del rectángulo buscado *MNOP* es:

$$S = MN \times NO = MN \times (BD - BE) = (h - x) \times y = (h - x) \times \frac{ax}{h}$$

Por lo tanto:

$$\frac{Sh}{a} = \left(h - x\right) \times x$$

S será la mayor superficie posible, cuando el producto *Sh/a* alcance el máximo valor posible, es decir, cuando el producto de los factores (*h* - *x*) y *x* sea máximo. Pero la suma *h* - *x* + *x* = *h*, es constante. Entonces, su producto es máximo, cuando:

$$h - x = x,$$

De donde:

$$x = h/2$$

Ahora sabemos, que el lado *NM* del rectángulo buscado pasa a través de la mitad de altura del triángulo y, por lo tanto, se une los puntos medios de sus lados. Entonces, Los lados del rectángulo miden *a*/2, y *h*/2.

Problema

Un hojalatero tuvo que fabricar a partir de un pedazo cuadrado de hojalata de 60 cm de ancho, una caja con el fondo cuadrado, sin tapa, y con una condición: La caja debería tener la máxima capacidad posible.

Figura 182. El problema de hojalatero

El hojalatero pasó bastante tiempo buscando el ancho de los bordes, pero al final no pudo hallar la solución correcta (figura 182).

¿Será que el lector pueda sacar a nuestro hojalatero de esa dificultad?

Solución

Sea x, el ancho de los dobleces de los lados (figura 183). Luego el ancho del fondo cuadrado será $60 - 2x$; el volumen v de la caja se expresará mediante el producto

$$v = (60 - 2x)(60 - 2x)x.$$

¿Qué valor de x dará a este producto el máximo valor?

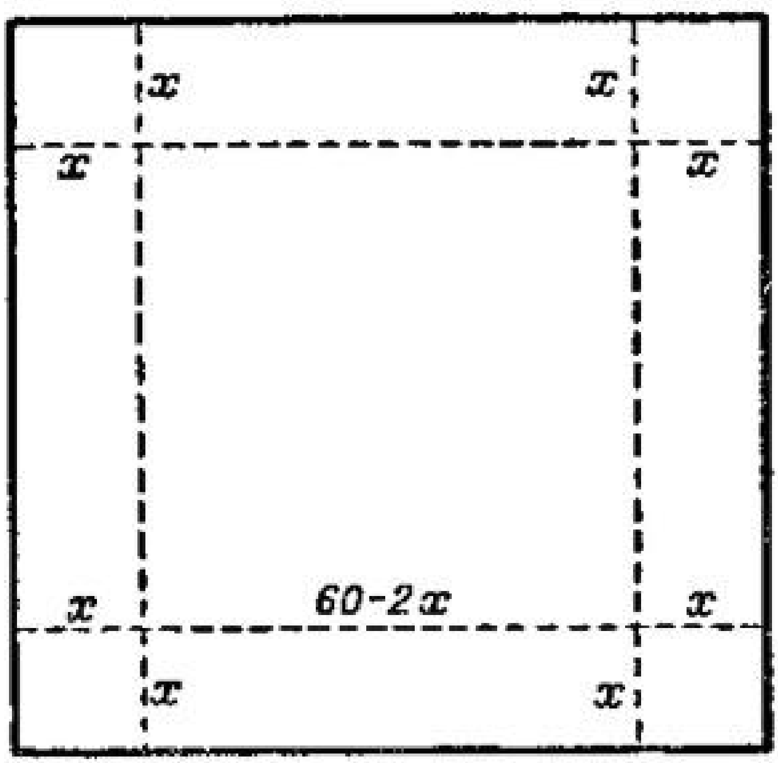


Figura 183. Solución de problema del hojalatero

Si la suma de los tres factores es constante, el producto toma su máximo valor cuando dichos factores son iguales. Pero aquí la suma de los factores es

$$60 - 2x + 60 - 2x + x = 120 - 3x$$

no es constante, porque varía con *x*. Sin embargo no es difícil conseguir que la suma de los tres factores sea constante: Para esto basta multiplicar ambas partes de la igualdad, por 4. Obtenemos así:

$$4v = (60 - 2x)(60 - 2x) 4x.$$

La suma de los factores es equivalente a:

$$60 - 2x + 60 - 2x + 4x = 120,$$

una cantidad constante. Entonces, el producto de estos factores consigue su máximo valor cuando:

$$60 - 2x = 4x,$$

de donde:

$$x = 10.$$

Por lo tanto, el volumen *v* alcanza su máximo valor. Entonces, la caja tendrá el máximo volumen posible, si doblamos a cada lado, 10 cm de hojalata. La caja tendrá un volumen de 40 x 40 x 10 = 16.000 cm^3. Si doblamos los bordes de la hoja, un centímetro más o un centímetro menos, disminuimos el volumen de la caja. Veamos:

$$9 \times 42 \times 42 = 15900 \text{ cm}^3,$$

$$11 \times 38 \times 38 = 15900 \text{ cm}^3,$$

como vemos, ambos valores son menores que 16.000 centímetros cúbicos[39]

12. El problema del tornero

Problema

A un tornero le han dado un cono y le han encargado tornear un cilindro, gastando la menor cantidad posible de material (figura 184). El tornero comenzó meditar sobre la forma del cilindro buscado: haciéndolo más alto, pero angosto (figura 185, a la izquierda), y viceversa, más ancho, pero más bajo (figura 185, a la derecha). Al final no pudo resolver el problema. ¿Cómo debería actuar el tornero?

Figura 184. El problema del tornero

Solución

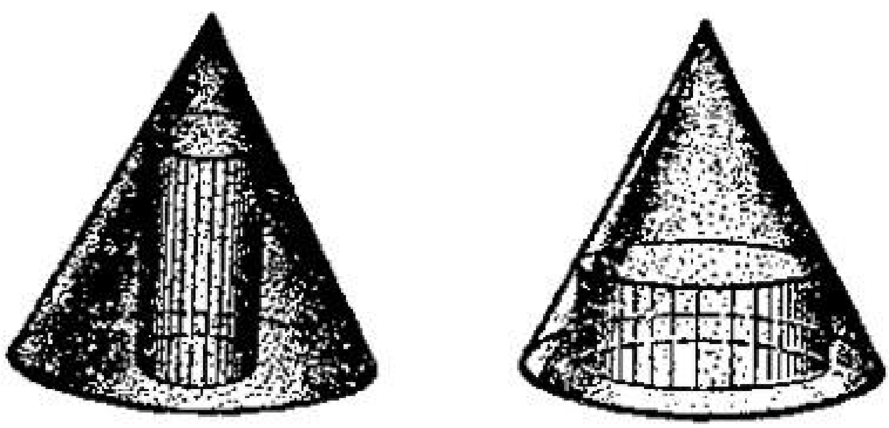


Figura 185. De un cono es posible tornear un cilindro alto y angosto, o ancho y bajo. ¿En qué caso se gastará menos material?

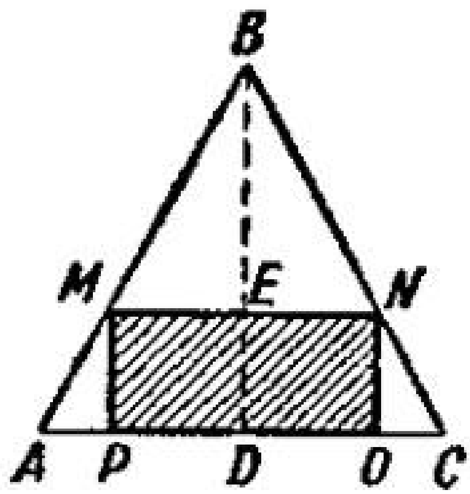


Figura 186. Sección cónica y cilíndrica

El problema requiere de la geometría. Sea la sección cónica *ABC* (figura 186), *BD*, su altura, la que llamaremos *h*; El radio de su base *AD* = *DC*, le llamaremos *R*. El cilindro, que podamos tornear del cono, tiene la sección *MNOP*. Debemos encontrar a qué distancia *BE* = *x*, del vértice *B*, debe quedar la base superior del cilindro, para que alcance el máximo volumen posible.

El radio del cilindro (*PD* o *ME*) se encuentra fácilmente, mediante la proporción:

$$\frac{ME}{AD} = \frac{BE}{DE}$$

es decir:

$$\frac{r}{R} = \frac{x}{h}$$

de donde:

$$r = \frac{Rx}{h}$$

La altura del cilindro, *ED*, es *h* - *x*. Por lo tanto su volumen es:

$$v = \pi\left(\frac{Rx}{h}\right)^2 (h - x) = \pi\frac{R^2x^2}{h^2}(h - x)$$

de donde:

$$\frac{vh^2}{\pi R^2} = x^2\left(h - x\right)$$

En la expresión:

$$\frac{vh^2}{\pi R^2}$$

Los valores *h*, π y *R* son constantes y solamente *v* es variable. Queremos hallar el valor de *x*, con el cual *v* se hace máximo. Pero, evidentemente, *v* será máximo cuando

$$\frac{vh^2}{\pi R^2}$$

sea máximo, es decir, cuando sea máximo: x^2 (*h* - *x*).

¿Cuándo alcanzará esta última expresión su máximo valor? Aquí tenemos los tres factores variables *x*, *x* y (*h* - *x*). Si su suma fuera constante, entonces el producto seria máximo, cuando los factores fueran iguales entre sí. Fácilmente conseguimos que esta suma sea constante, si multiplicamos por 2, ambas partes de la última igualdad. Veamos:

$$2\frac{vh^2}{\pi R^2} = 2x^2\left(h - x\right)$$

Ahora tres factores de la parte derecha tienen la suma constante

$$x + x + 2h - 2x = 2h$$

Por lo tanto, su producto tomará el máximo valor, cuando todos los factores sean iguales, es decir, cuando:

$$x = 2h - 2x$$

$$x = 2h/3$$

Entonces, la expresión:

$$\frac{vh^2}{\pi R^2}$$

Logrará su máximo valor, y también alcanzará su máximo valor el volumen del cilindro *v*.

Ahora sabemos, como se debería tornear el cilindro: su base superior debe estar a una distancia del vértice del cono igual á 2/3 de su altura.

13. ¿Cómo se alarga una tabla?

A veces en un taller o en casa, cuando queremos construir algún objeto, no coinciden las medidas del material que tenemos a mano con las que necesitamos.

Entonces tenemos que cambiar las medidas del material con un procedimiento adecuado, y lo podemos conseguir con ayuda de la geometría y el cálculo.

Figura 187. Como se alarga una tabla por medio de tres cortes y un encolado.

Imaginemos este caso: queremos construir un estante para los libros y necesitamos una tabla con unas medidas exactas, de 1 m de longitud y 20 cm de ancho, y tenemos una tabla de menor longitud, pero más ancha: Por ejemplo, de 75 cm de longitud y 30 cm de ancho (figura 187 a la izquierda).

¿Cómo procedemos?

Es posible que a lo largo de esta tabla podamos cortar un listón de tres trozos iguales con longitud de 25 cm cada una y con dos de ellas alargar la tabla (figura 187 abajo).

Esta solución de problema no permite hacer un ahorro desde el punto de vista de la cantidad de operaciones (tres cortes y tres pegas) y tampoco responde a las exigencias de solidez (en los tramos donde las tablas van unidas).

Problema

Encontrar la forma de prolongar una tabla mediante tres cortes y un solo encolado.

Solución

Tenemos que aserrar la tabla (figura 188) *ABCD* diagonalmente (en dirección *AC*) y deslizar una de las mitades (por ejemplo, el ΔABC), a lo largo de la diagonal hasta alcanzar una distancia C_1E, igual a la longitud faltante, es decir, 25 cm. La longitud total de las dos mitades llegará á 1 m. Se pegan estas dos partes sobre la línea AC_1 y se cortan los trozos sobrantes (los triángulos sombreados).

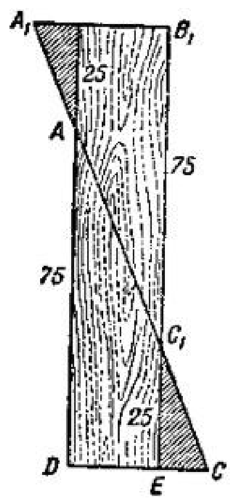


Figura 188.Solución del problema de la prolongación de una tabla

En nuestro caso, dada la semejanza de los triángulos ΔADC y ΔC_1EC, tenemos:

$$AD:DC = C_1E:EC$$

de donde:

$$EC = \frac{DC}{AD} \times C_1E$$

$$EC = \frac{30}{75} \times 25 = 10 \text{ cm}$$

$$DE = DC - EC = 30 \text{ cm} - 10 \text{ cm} = 20 \text{ cm}.$$

14. El camino más corto

Resumiendo vamos a ver como se resuelve un problema de «máximos y mínimos», mediante de una construcción geométrica simple.

Problema

Se requiere construir un depósito de agua en la orilla de un río, desde el cual llegue el agua a través de tuberías, a los pueblos *A* y *B* (figura. 189).

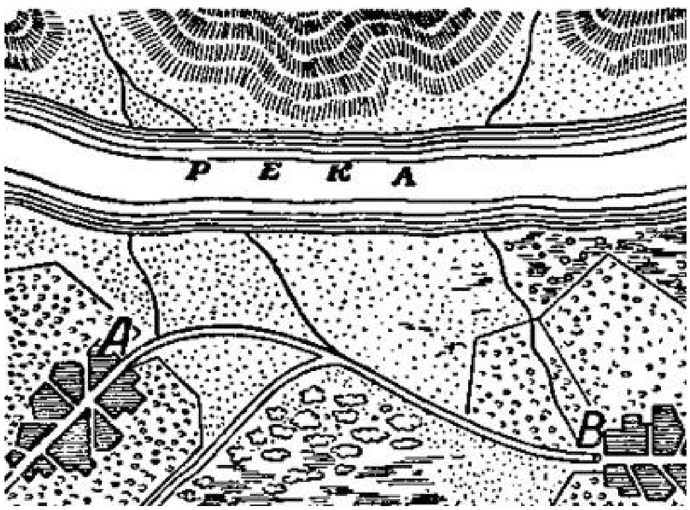


Figura 189. El problema del depósito de agua

¿En qué sitio se debe construir el depósito, para que la longitud total de las tuberías desde el depósito hasta ambos pueblos sea mínima?

Solución

El problema consiste en hallar el camino más corto desde el punto *A* hasta la orilla y de ésta hasta el punto *B*.

Supongamos, que *ACB* es el camino que se busca (figura 190). Doblamos la figura sobre *CN*.

Obtenemos el punto *B'*. Si *ACB* es el camino más corto, entonces, como *CB'* = *CB*, el camino *ACB'* tendrá que ser más corto que cualquier otro (por ejemplo, de *ADB'*).

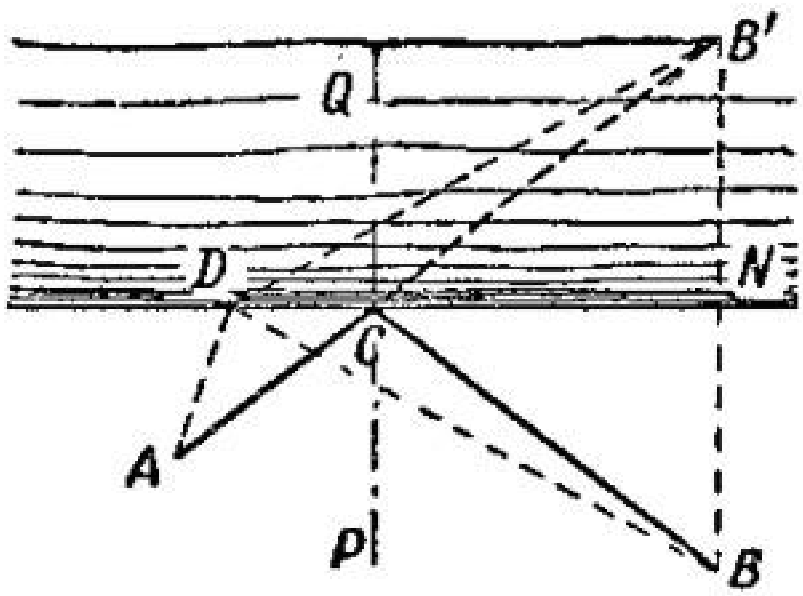


Figura 190. La solución geométrica de un problema sobre la elección del camino más corto

Entonces, para buscar el camino más corto tenemos que encontrar el punto de intersección *C,* entre la recta *AB'* y la línea sobre la orilla. Uniendo *C* con *B*, encontramos los dos tramos del camino más corto desde *A* hasta *B*.

Trazando por el punto *C* una perpendicular a *CN*, podemos ver, que los ángulos ΔACP y ΔBCP, formados por ambos tramos del camino más corto y esta perpendicular, son iguales entre sí.

$$\angle \text{ACP} = \angle \text{B'CQ} = \angle \text{BCP}$$

Esta es, como bien sabemos, la Ley del rayo de la luz que se refleja en un espejo: "El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión". De aquí se deduce, que un rayo de luz, reflejado elige el camino más corto, conclusión conocida hace dos mil años, por un físico y geómetra, llamado Herón de Alejandría.

F I N

[1] Por supuesto, la longitud de la sombra debe ser considerada desde el punto medio de la base cuadrada de la pirámide, anchura que Thales podía medir directamente.

[2] Los haces dirigidos desde cualquier punto del Sol a puntos extremos del círculo de la Tierra, forman un ángulo entre ellos es lo suficientemente grande como para medir unos 17" de arco. La definición de este ángulo da a los astrónomos un medio para establecer de distancia de la Tierra al Sol.
[3] De aquí en adelante, los episodios de la Segunda Guerra Mundial, son descritos por A. Demidov, en la revista "Conocimiento Militar", N°8, 1949, "Exploración del río".
[4] Esta curva se aproxima a la llamada "parábola semicúbica" $y^3 = ax^2$); el cuerpo obtenido mediante la rotación de este paraboloide llamado "neiloide" (llamado así por el antiguo matemático Neil, que se concentró en la manera de determinar la longitud del arco de la curva). La forma de los árboles se acerca a un neiloide. El cálculo del volumen se realiza por técnicas de las matemáticas superiores.
[5] Es decir, el área de la sección transversal del cuerpo en la mitad de su altura.
[6] Construido del mismo modo que el dispositivo bien conocido, pie de metro, para la medición de diámetros. (Fig. 20, derecha).
[7] Es necesario recordar que "el número de especie" sólo hace referencia a los árboles que crecen en el bosque, es decir, altas y delgados (incluso sin nudos), excluyendo los árboles ramificados que no se pueden especificar en las reglas de cálculo.
[8] Este método tiene, sin embargo, la ventaja que se puede comparar el área de la hoja con forma desigual, lo que puede hacerse por el método descrito más adelante.
[9] Ver a Yakov I Perelman, "Mecánica de la naturaleza"
[10] Las diferencias se explican con la resistencia del aire, la que nosotros excluimos de este Problema
[11] Por la misma razón el hilo incandescente de una bombilla eléctrica, parece ser mucho más ancho, que cuando está frío y apagado.
[12] Es necesario que su atmósfera esté totalmente transparente y homogénea, similar a la nuestra. En el mundo real, el aire no es transparente ni homogéneo; por esta razón, las imágenes amplificadas se ven distorsionadas y cubiertas de bruma. Este limitante en el uso de los telescopios ha llevado a los astrónomos a construir los observatorios en las partes altas de las montañas, donde el aire es más limpio.
[13] Las mediciones hechas con instrumentos de precisión, indican que se observa la Luna con diámetro menor, aunque esté cerca del horizonte, debido a de que la refracción de la luz hace que se "aplaste" el disco.
[14] En las ediciones anteriores de "Geometría Recreativa" Y. I. Perelman explicaba el aparente aumento de tamaño de la Luna bajo el horizonte afirmando que: "en el horizonte la vemos *junto* a otros objetos lejanos, pero en lo alto del cielo solo vemos la Luna". Sin embargo, se observa la misma ilusión sobre el horizonte en mar abierto, entonces, las explicaciones anteriores planteadas sobre el citado efecto, se consideran poco satisfactorias.
[15] Se pueden ver los detalles en el libro del mismo autor: "Física Recreativa", tomo segundo.
[16] Conocida por experiencia, descrita en el libro de N. F. Platonov "Aplicación del análisis matemático en la solución de tareas prácticas". En él articulo "altura de las nubes" N. F. Platonov concluye que la fórmula para calcular *H*, describe otros posibles montajes de los equipos para fotografiar la nube y da un par de consejos prácticos.
[17] A algunos lectores les cuesta creer que la rampa *AB* tiene una medida cercana a *AC.* Se puede observar que tan pequeña es la diferencia de longitud entre *AC* y *AB,* cuando se tiene que, por ejemplo, *BC* es *0,01* de *AB.* Por el teorema de Pitágoras:

$$AC^2 = \sqrt{AB^2 - \left(\frac{AB}{100}\right)^2} = \sqrt{0,9999\ x\ AB^2} = 0,99995\ \ x\ AB$$

La diferencia de longitud es *0,00005.* Para efectuar cálculos aproximados no se tiene en cuenta este error.
[18] La señal *0,000* indica un tramo horizontal de una vía (puede ser una plataforma, o una plazoleta).
[19] En la práctica se efectúa esta operación *multiplicando* la circunferencia por *0,318,* si se busca el diámetro y por *0,159*, si se busca el radio.
[20] *Sazhen* es la medida rusa equivalente a *2,13 metros.*
[21] Como el radio es demasiado grande y requiere una cuerda bastante larga, no resulta práctico este método.
[22] 1 verst equivale 1,0668 km; 150 verstas son unos 160 km.
[23] Ver el libro de Y. I. Perelman, "Astronomía Recreativa'', capítulo II, el artículo, "Paisajes Lunares''.
[24] Nuestro reloj no anda de acuerdo con el reloj solar: Entre el "tiempo solar real" y el "tiempo promedio", el que indica el reloj, no hay diferencia solamente cuatro días al año: 16 de abril, 14 de junio, 1 de septiembre y 24 de diciembre. (Ver "Astronomía Recreativa" de Y. I. Perelman)
[25] Como el ingeniero hizo las mediciones desde una roca, entonces, la línea recta desde el ojo del observador hasta horizonte no era perpendicular al radio de la Tierra, pues formaba con él un ángulo. Sin embargo, este ángulo es tan pequeño, que no le resultó necesario incluirlo en sus cálculos (para una altura de *100 m* mide un tercio de grado).
[26] No tenemos que pensar, que la obra de Kepler carece de valor, siendo pura diversión para el genio. Realmente es una obra bastante seria, donde por primera vez la geometría habla sobre los infinitesimales, el principio del cálculo integral. El tonel de vino, su importancia en tareas agrícolas y su capacidad de almacenamiento, son motivo de extensos análisis matemáticos. (Traducción rusa de 1935, de la obra "Estereometría de los toneles").
[27] En aquel tiempo no se usaba este valor: fue traducido en el siglo XVIII, por un académico matemático ruso, Leonardo Pavlovich Euler
[28] Versos extranjeros:
En inglés:

See I have a rhyme assisting
My feeble brain, its tasks off times resisting

En alemán:
Wie o dies ð
Macht ernstlich, so vielen viele Muh'!
Lernt immerhin, Jungltnge, leichte Verselein,
Wie so zum Beispeil dies durfte zu merken sein'

En francés:
Que j'aime a faire apprendre un
Nombre utile aux sages!
Immortel Archimede, sublime ingenieur,
Qui de ton jugement peut sender la valeur?
Pour moi ton probleme eut de pareils avantages

En español:
Rima Para Recordar El Número PI
(por: Manuel Golmayo, ajedrecista cubano)

Soy y seré definible, (3,14159)
mi nombre tengo que daros, (26535)
cociente diametral siempre inmedible, (8979)
soy de los redondos aros, (32384)

[29] Cuando la punta de la aguja toca la línea se anota una intersección.

[30] El número π es irracional, es decir, que no puede expresarse como fracción entre dos enteros.

[31] Ver" Aritmética Recreativa" Y. I. Perelman.

[32] Este ejercicio aritmético no aporta nada útil, ni siquiera representa un avance en la solución del famoso problema.

[33] Este método práctico fue propuesto en el año 1836 por un ingeniero ruso de apellido Bingo; el triángulo lleva el nombre de su inventor, "triángulo de Bingo".

[34] Podemos usar el trisector para un ángulo dado gracias a una sencilla propiedad de los puntos de las líneas que dividen al ángulo en tres partes iguales: Si desde cualquier punto O de la línea SO se trazan los segmentos $ON \perp SN$ y $OA \perp SB$ (figura 146), entonces vamos a tener: $AB=OB=ON$. El lector puede comprobarlo por su propia cuenta.

[35] Un cubo lleno siempre es mayor que tres. Las capacidades de los cubos vacíos son a y b, y la del cubo lleno es c. Si $c \geq a + b$, tenemos que construir "la mesa de billar" como un paralelogramo con los lados de a y b cuadros de longitud.

[36] Los lectores podrán encontrar el análisis detallado de este asunto, en manuales de topología.

[37] En Köenigsberg (Pomerania) existe una isla sobre el río Pregel, llamada Kueiphof. El río la rodea y divide en dos brazos sobre los cuales se han tendido siete puentes.

[38] Aunque aquí no queda claro, Pajom como pudo distinguir la gente desde aquella distancia

[39] Resolviendo este problema, encontramos que para obtener la caja de mayor volumen posible, a partir de una hoja cuadrada de ancho a, se deben doblar sus bordes con un ancho de $x = a/6$, porque el producto:

$$(a - 2x)(a - 2x)\, x, \text{ o } (a - 2x)(a - 2x)4x, \text{ es máximo cuando: } a - 2x = 4x$$