ZARAGOZA con otros ojos!

experigoza

Un espacio abierto, lúdico e interactivo para la experimentación y el conocimiento

Cuaderno Didáctico

Zaragoza
Ayuntamiento
Educación

ZARAGOZA con otros ojos!

experigoza

FernandoCorbalánYuste
Ángel Salar Gálvez

Edita: Ayuntamiento de Zaragoza.
Área de Cultura y Educación.
Servicio de Educación
Texto y fotos: Fernando Corbalán y Angel Salar
Impresión:
D.L.:
ISBN:
Diseño gráfico: Aísa Publicidad, S.L.
Logotipos de Experigoza y diseño de tableros de juego: Ana Mota

Aprender jugando es el paradigma educativo más poderoso que existe. Si además éste se aplica al conocimiento y experimentación de los conceptos matemáticos, estamos aportando un valor añadido a uno de los aprendizajes que, tradicionalmente, han sido vividos como más complejos y costosos.

Experigoza, actividad educativa que desarrollamos desde hace varios años en la programación anual del Servicio de Educación del Ayuntamiento de Zaragoza, es la plasmación práctica de lo dicho anteriormente: la experimentación lúdica, no está reñida con el aprendizaje del cálculo, las medidas, la geometría y las simetrías. Las matemáticas pueden aprenderse disfrutando.

Este Cuaderno de trabajo representa, en definitiva, la continuidad de la línea emprendida con las Rutas Matemáticas por Zaragoza y pretende aportar a la comunidad educativa en general y a los profesores de matemáticas en particular, un aliciente y un apoyo metodológico para transmitir a sus alumnos el interés por conceptos matemáticos, no sólo útiles y aplicables en la vida cotidiana, sino también el gusto por el descubrimiento y una aproximación a la enorme capacidad de la razón humana.

Desde esta Concejalía de Educación apostamos por una "Zaragoza con otros ojos" como una propuesta de ciudad educadora e innovadora, donde se puede experimentar y gozar. En suma, experigoza.

Luis Alberto Laguna Miranda
Concejal Delegado de Educación

INTRODUCCIÓN

experigoza está pensado como un espacio abierto, lúdico e interactivo para la experimentación y el conocimiento, destinado a proporcionar actividades científicas y matemáticas para los alumnos de Primaria, y formación en esos temas para el profesorado. Trata de proporcionar cuestiones interesantes y atractivas para obtener respuestas parciales y nuevas preguntas por la manipulación y la práctica, haciendo ciencia y obteniendo conocimientos con las manos y con el cerebro.

experigoza en definitiva procura ser un espacio mágico, como un laboratorio o un taller de tecnología donde se potencia la participación activa, se toca, se experimenta y se aprende en un ambiente divertido y estimulante. En él está presente la magia matemática y pretende ser una ludoteca en la que, por medio del juego y la manipulación, se ayude a la génesis y consolidación del conocimiento.

Desde hace un tiempo hay un consenso científico según el cual una persona es competente no cuando conoce muchas cosas de memoria, sino cuando es capaz de movilizar conocimientos y actitudes para responder a situaciones reales. Como es bien conocido que de los alumnos no obtenemos sino lo que pedimos, **experigoza** trata de proponer otro tipo de tareas para lograr resultados diferentes: aprender en la acción y para la resolución de situaciones complejas, reales, diversas y atractivas.

La actividad **experigoza** se ubica físicamente en el recinto del Antiguo Matadero de Zaragoza, cuya utilidad originaria acabó hace años y está ahora dedicado a diversas actividades sociales. Como es un espacio vallado se tiene la seguridad de que los escolares pueden participar en las actividades sin riesgos, algo que no sucedería en calles o plazas de la ciudad.

Cada una de las actividades está pensada para el nivel psicológico y de conocimientos de las edades propuestas, aunque en algunos casos puede haber alguna pequeña diferencia entre los conocimientos matemáticos del curso que estudian y ciertas necesidades del desarrollo de **experigoza**. Pero nunca son importantes y además hay que pensar que en ella se trata sobre todo de inducir ilusión y ganas de saber, mediante la sorpresa y el placer, por medio de elementos lúdicos. Cuando se profundicen o desarrollen en el propio centro se podrán proporcionar conocimientos más precisos.

Aunque pueda parecer que no hay relación entre algunas de las actividades y los conocimientos matemáticos, hay que pensar que aquí se apela a conocimientos interdisciplinares que hacen referencia a materias diversas, y que en todo caso hay conexiones claras, y también que bastantes de los objetos y actividades que se utilizan tienen aplicaciones diferentes según la edad o maduración de los destinatarios, estando adaptados en nuestro caso al nivel de los asistentes. Se puede hacer posteriormente una utilización más personalizada en las aulas, puesto que uno de los objetivos fundamentales de experigoza es dar instrumentos para realizar una enseñanza lúdica y motivadora en las clases de cada día.

Así, en el **Taller de Juegos** y en los juegos en gran formato, se trata de iniciar o continuar, en un ambiente lúdico, la aplicación de las grandes estrategias de pensamiento y de resolución de problemas, de aplicación permanente en los diferentes campos del conocimiento y a lo largo de toda la vida.

El **Taller de Mosaicos** introduce una geometría creativa y trata de mostrar en la práctica la importancia de la imaginación en el quehacer matemático, a la vez que destaca la importancia de las propiedades geométricas, como la simetría, en la búsqueda de la belleza.

En el **Taller de Medidas** se trata de interiorizar que lo más importante es encontrar la medida adecuada a cada una de las necesidades sociales, algo que puede conseguirse por diferentes procedimientos, así como poner de manifiesto que la intuición no siempre nos proporciona los resultados reales.

El **Taller de Ilusiones ópticas y Figuras imposibles**, además de sorprender e ilusionar, quiere despertar la noción de la necesidad de las medidas y de los instrumentos geométricos para comprobar o rechazar las intuiciones o sospechas.

Por fin, el espectáculo matemático-teatral, además de divertir y proporcionar conocimientos y reflexiones matemáticas, pretende reforzar los sentimientos positivos hacia las matemáticas, presentándolas asociadas a la música, el baile, la participación y el humor. Bastante alejadas, por tanto, de los estereotipos sociales que presentan las matemáticas como algo pesado, repetitivo y sin imaginación.

Una de la tareas fundamentales en la enseñanza de las matemáticas es la **RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS (RP)**, no solo de simples ejercicios que son aplicación directa de lo que se acaba de explicar. A resolver problemas se puede aprender, y es conveniente empezar a hacerlo cuanto antes. **Polya** fue el primer teórico de la **RP**, y da un método en cuatro etapas para afrontar la resolución de un problema:

Plan de Polya

I Comprender el problema

II Concebir un plan

III Ejecución del plan

IV Examinar la solución obtenida

Las *estrategias* de **RP** entran en la etapa II.
Algunas de las más importantes son:

- Empieza por lo fácil.
- Ensayo y error (experimenta).
- Hazte un esquema, una figura, un diagrama.
- Busca la simetría de la situación.
- Escoge un lenguaje adecuado, una notación apropiada.
- Estudio sistemático de todos los casos.
- Busca un problema semejante.
- Inducción.
- Empezar por el final (suponer el problema resuelto).
- Supongamos que no.

Unos problemas, que casi no se reconocen como tales, permiten de una forma muy sencilla experimentar la **RP**: **LOS JUEGOS DE ESTRATEGIA**. **Huizinga** da una definición de juego muy clarificadora para su utilización en la enseñanza: "*Juego es una acción u ocupación voluntaria, que se desarrolla dentro de límites temporales y espaciales determinados, según reglas absolutamente obligatorias, aunque libremente aceptadas; acción que tiene un fin en sí misma y está acompañada de un sentimiento de tensión y alegría*". En un juego se llama ***Estrategia de un jugador*** a una descripción completa de la manera en que se debería comportar el jugador ante cualquier circunstancia posible, en cada jugada. Y en un juego se llama **ESTRATEGIA GANADORA (EG)** a una estrategia que lleva al jugador al éxito (a ganar la partida) hagan lo que hagan sus adversarios.

No todos los juegos tienen **EG**, pero en aquellos en los que la hay, su búsqueda es un problema atractivo que, además, nos permite ganar siempre. Otros juegos permiten llevar a una situación de *empate* (o tablas): si los dos jugadores juegan bien no gana ninguno de los dos. Pero en algunos de esos juegos hay *estrategias favorecedoras*: las que hacen más fácil ganar a la menor equivocación del contrario.

Normalmente se sobrentiende que las situaciones de juego requieren dos personas al menos, pero esa misma situación se da en los juegos solitarios (de una sola persona) en los que el "contrincante" a superar para conseguir el éxito son las propias reglas del juego. Por eso también utilizaremos juegos solitarios en los que hay una tarea que realizar siguiendo unas reglas determinadas de antemano, peleando contra un contrincante incorpóreo (pero no siempre más asequible): **LAS REGLAS DEL JUEGO**. En los juegos de estrategia hay que buscar el procedimiento para ganar siempre. En los individuales solo se tiene que actuar contra las reglas, mientras que en los juegos por parejas hay que hacerlo contra el adversario, siguiendo unas reglas.

Puedes intentar resolver el siguiente juego individual: **COLOCACION DIFICIL**

Situar los nueve primeros números naturales en las nueve casillas de forma que los tres productos sean iguales.

$\square\square \times \square = \square\square \times \square = \square\square \times \square$

Los juegos se suelen considerar poco importantes, *cosas de niños*, con poca cabida en la escuela, al menos en clase de matemáticas, y menos cuando la edad del alumnado aumenta. Pero hay muchas razones que invitan a utilizarlos. En primer lugar, como comenta el poeta alemán **Heine *"aquellos que se toman el juego como un simple juego y el trabajo con excesiva seriedad, no han comprendido mucho ni de uno ni de otro"***.

Las relaciones entre los juegos y las matemáticas no solo se dan en el comienzo de las mismas, sino que hay ramas enteras de las matemáticas que tienen su origen en la actividad lúdica. Hay tres casos significativos y bien conocidos: **la Teoría de Números, la Teoría de Probabilidades y la Teoría de Grafos**. Y es reciente **la Teoría de Juegos**, con aplicaciones en muchas ramas del conocimiento, como la Economía y la Política, además del ámbito militar.

Huizinga dice que "el auténtico, el puro juego es una de las principales bases de la civilización" y, añade **Argemí**, "son las conductas lúdicas las que generan la cultura". Como señala **Bishop** "todas las culturas juegan, y, lo que es más importante, toman sus juegos muy en serio! Por eso es esencial no tratar el juego como un aspecto relativamente poco importante de la vida cultural". Dentro del conjunto de los juegos, los que siguen una reglas predeterminadas, parecen estar en la base del inicio y del desarrollo de las matemáticas: "los juegos son valorados por los matemáticos porque el comportamiento siguiendo unas reglas es como las matemáticas en sí mismas. No es demasiado difícil imaginar que los criterios siguiendo unas reglas de las matemáticas se han desarrollado a partir de los placeres y las satisfacciones del comportamiento de los juegos de reglas", luego son una buena manera de entrenarse en matemáticas.

Todos los grandes juegos que se extienden en el tiempo y en el espacio, son modelos de situaciones atractivas que han arraigado en la conciencia social. **Los juegos de baraja**, de las cuales la española es la gran aportación hispánica al gran universo de los juegos, son modelización de una situación real. Los cuatro palos son una estilización de los estamentos medievales:
el de **oros** representa la burguesía,
el de **copas** al clero,
las **espadas** a la nobleza y
los **bastos** a los campesinos.

Las barajas sajonas también son un modelo de la realidad, en este caso del transcurrir de un año. Así hay cuatro palos, tantos como estaciones; en cada uno hay 13 cartas, luego en total 52, tantas como semanas en un año; los números en cada palo suman 91 (1+2+3+....+13), que multiplicado por 4 son 364, más una del comodín tenemos los días del año.

En los juegos de cartas, a pesar de gozar de bastante mala fama, hay muchos aspectos matemáticos. En las diferentes modalidades de juegos de cartas hay uno o varios de los siguientes aspectos:

Cálculo de probabilidades. Consustancial a todos los juegos con apuestas, como el *poker*. Un buen ejercicio es calcular la dificultad de obtener una jugada, y poder compararla con la valoración que se le da: si un *poker* gana a un *full*, debe ser que esta jugada es más probable que la primera.

Recuentos de posibilidades. Cuando hay que prever todas las posibilidades que se puedan presentar en un juego en función de nuestras cartas y las posibles distribuciones entre el resto de jugadores. Es lo que pasa en el *tute subastado*, en el que uno o varios de los tres jugadores dicen cuántos puntos van a hacer, y juega quien más oferta, contra los otros dos.

Clasificaciones. Clasificar es una tarea central del conocimiento. En los juegos de cartas en que hay que 'ligar', como el *rabino* o el *chinchón*, se trata de hacer clasificaciones, conocida la ley o relación de equivalencia que tenemos que aplicar.

Ordenaciones. Es una tarea habitual en casi todos los juegos de cartas, y objeto específico de algunos como el cinquillo. También para algunas jugadas de los juegos tipo *poker* (escaleras, y orden de prioridad de jugadas).

Operaciones aritméticas. En casi todos los juegos habituales de cartas hay que sumar, restar o multiplicar para saber quien gana en cada partida, para llevar las cuentas de triunfadores parciales o finales.

En cuanto a procedimientos que se aplican habitual mente en los juegos de cartas, y que lo son también en la **RP**, destacamos dos:

Suponer el problema resuelto o empezar por el final. Se hace con frecuencia jugando a cartas, pero que es imprescindible en el subastado, si se quieren contar bien los puntos que se pueden obtener (para lo cual hay que ir descontando los que se pueden perder del total posible).

Resolver problemas parciales. Por ejemplo, en todos los juegos en que hay que hacer determi nadas jugadas (en los que se 'liga'). En el *chinchón* o en el *rabino*, en algunos momentos, la preocupación es no sobrepasar un número de puntos (con el que se pierde la partida) y, una vez conseguido ese obje tivo, se puede intentar ganar.

Los humanos somos simétricos de forma aproximada, seguramente por eso son simétricos buena parte de los utensilios que manejamos, así como las casas en que habitamos y los diseños que nos rodean. Y también la simetría se utiliza de forma generalizada en el arte, con una especial presencia en un arte tan aragonés como el mudéjar.

Hay diferentes tipos de simetrías (en el plano y en el espacio, central o axial, de diferentes ordenes,...). Para llegar a conocerlas y percibirlas la mejor forma es disfrutarlas y sorprenderse con ellas. Eso se hace en Experigoza con dos aparatos con los que se experimenta y se disfruta: **el caleidoscopio gigante** y **la máquina de volar**. Ambas están compuestas por espejos, útil cotidiano presente en todas las casas y centros de enseñanza, que nos proporciona imágenes simétricas de lo que pongamos delante de ellos. La combinación de varios permite ver otras simetrías y reflexionar sobre ellas.

Algunas cuestiones para pensar:

Cuando estamos delante de un espejo, si movemos la mano derecha en nuestra imagen se mueve la izquierda. ¿Qué podemos hacer para que en la imagen se mueva la misma mano que movemos nosotros?

Los imágenes en los espejos cambian la izquierda por la derecha, pero no lo que está arriba por lo que está abajo. ¿Cómo podemos lograr este cambio?

También hay un recorrido de observación de los edificios y mobiliario urbano del Antiguo Matadero, donde tiene lugar la actividad, una Ruta Matemática en la que se hace mención especial a la observación de la simetría.

SIMETRÍA

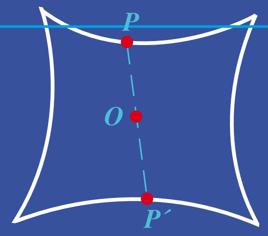


fig. 1

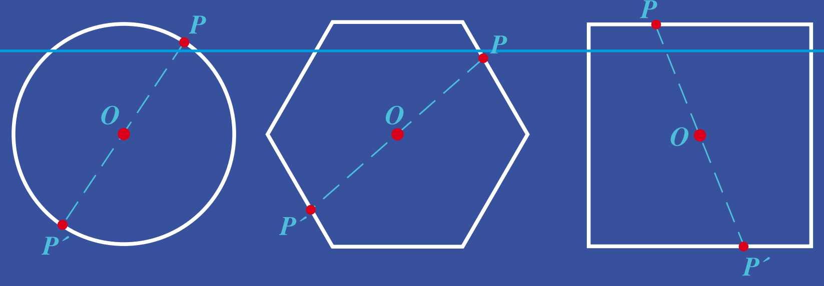


fig. 2

DEFINICIÓN SIMETRÍA CENTRAL. Una figura plana tiene un centro de simetría O (y se dice que tiene simetría central) cuando al unir un punto cualquiera P de la misma con O y prolongar la recta, ésta corta a la figura en otro punto P' tal que O es el punto medio de PP' (figura 1). El punto P' se llama simétrico de P respecto a O. Ejemplos de figuras con simetría central son la circunferencia respecto a su centro, o el cuadrado y el hexágono regular respecto al punto de corte de sus diagonales (figura 2).

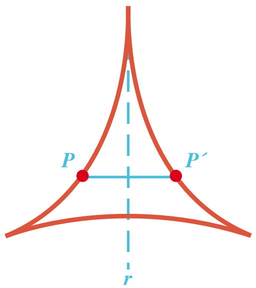


fig. 3

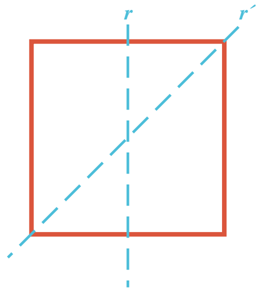
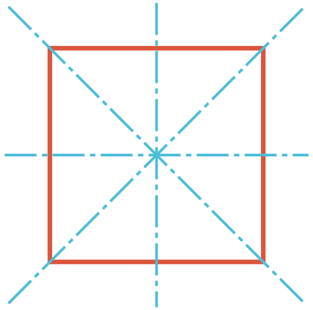


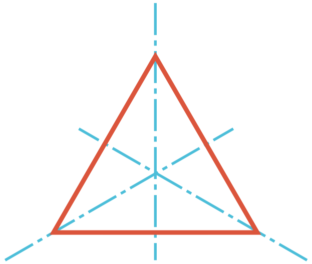
fig. 4

DEFINICIÓN SIMETRÍA AXIAL. Una figura plana tiene un eje de simetría ***r*** (o se dice que tiene simetría axial) cuando si desde cualquier punto P de la misma trazamos una perpendicular a ***r*** y prolongamos la recta, ésta corta a la figura en otro punto P' tal que ***r*** es la perpendicular en el punto medio de PP' (figura 3). El punto P' se llama simétrico de P respecto a ***r***. Ejemplos de figuras con simetría central son la circunferencia respecto a cualquiera de sus diámetros o el cuadrado y el hexágono regular respecto a todas sus diagonales y también respecto a las rectas que unen los puntos medios de sus lados opuestos (figura 4).

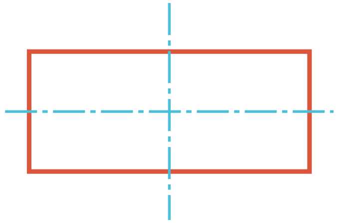
EJEMPLOS DE EJES



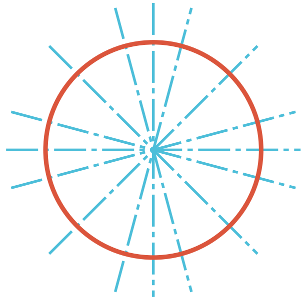
Un cuadrado tiene cuatro ejes de simetría. Se puede doblar por cada una de las lineas azules y siempre quedarán superpuestas las dos mitades.



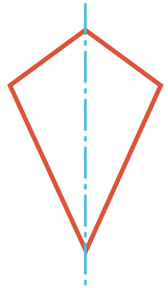
Un triángulo equilátero tiene tres.



Un rectángulo o un rombo tienen dos.



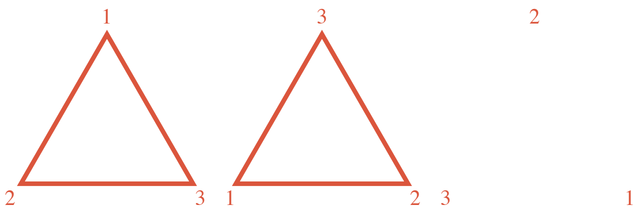
Una circunferencia tiene infinitos.



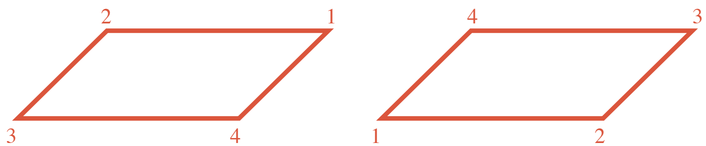
Una cometa tiene uno.

GIROS Y ROTACIONES

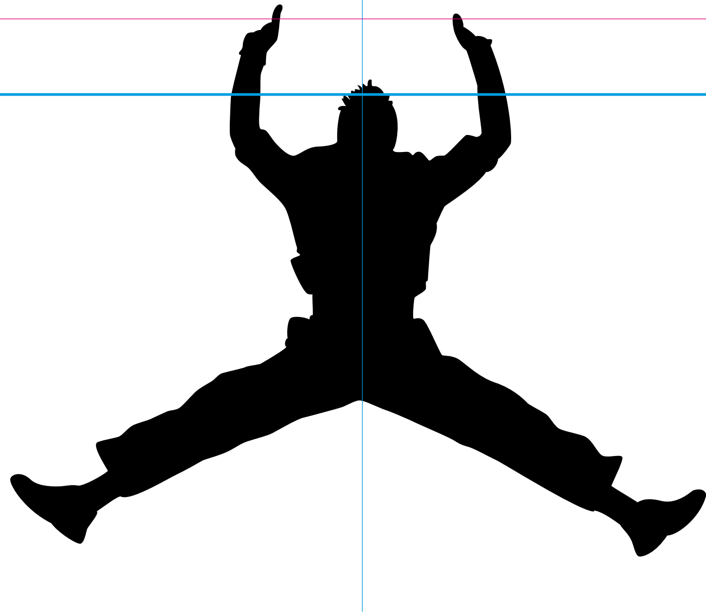
El punto central de un triángulo equilátero es un centro de giro de orden tres. Podemos girar respecto a él la figura, tres veces 120º, y siempre se mantendrá invariante. Para poder distinguir cada movimiento tenemos que numerar los vértices.



Un cuadrado tiene un centro de giro de orden cuatro. Podemos girarlo cuatro veces 90º respecto a su punto central, y en los cuatro casos se mantiene invariante.
El cuadrado y el triángulo equilátero tienen también ejes de simetría. Estos ejes se cortan en el centro de giro. Pero una figura puede tener centro de giro sin tener ningún eje de simetría. Por ejemplo, el centro de un paralelogramo es centro de giro de orden dos. Los giros serán ahora de 180º.



En el caso de cuerpos en el espacio se define la simetría respecto a un plano de la misma forma que en el plano respecto a un eje. Las personas tenemos un plano de simetría aproximado que nos "parte" por la mitad pasando por la nariz y entre los dos pies.



Hay toda una gama de objetos que no son simétricos: aquellos que tenemos que utilizar con la mano derecha (o izquierda), como las tijeras.

Actividad

Buscar objetos no aptos para las dos manos.

Actividad

Somos solo aproximadamente simétricos. Para comprobarlo, coge la foto de una cara, haz el simétrico de cada una de sus dos partes y compáralas con el original.

A nuestro alrededor, la geometría está por todas partes. De esta geometría que 'respiramos' quizás sea la de los mosaicos, suelos o pavimentos una de las más evidentes o, al menos, una de las más fáciles de ver y comprender. En ella se funden la estructura geométrica subyacente, la creatividad plástica del diseño y la parte técnica de su realización y acabado. En Experigoza tratamos de poner de manifiesto la forma que tienen las losetas que embaldosan los suelos de nuestras casas, calles y plazas y sobre todo la estructura geométrica que permite su construcción. Veremos cómo se puede rellenar el plano con formas simples repetidas para conseguir una estructura de una gran complejidad aparente. Esta tarea es enorme si se pretende hacer un estudio exhaustivo. Matemáticos de la talla de **Kepler** intentaron poner orden y sistematizar este tema sin conseguirlo, así que en Experigoza solo presentamos algunos aspectos de los mosaicos más sencillos, pero no por ello de menor interés matemático. En este trabajo geométrico con mosaicos se trata de promover la experimentación y la intuición de los niños. Los profesores interesados en profundizar en estas cuestiones pueden estar seguros que tienen ante sí un campo lleno de posibilidades.

Las distintas civilizaciones, desde muy antiguo, utilizan los mosaicos y han dedicado más o menos empeño a esta tarea. En algunos casos, como en el de los antiguos árabes, especialmente los granadinos, nos han legado ejemplos de los más bellos mosaicos de la humanidad, haciendo de la Alhambra un auténtico museo de la geometría. Visto desde la perspectiva matemática fue una suerte que la religión islámica prohibiese la representación de figuras humanas en lugares públicos por lo que decoraron sus palacios con motivos geométricos.

Los artesanos árabes que trabajaron en la Alhambra descubrieron de forma intuitiva las 17 formas posibles con las que podían combinar baldosas para rellenar el plano. Desconocían que hubiese 17 formas (los grupos de simetría del plano) pero su práctica y experiencia les llevó de hecho, sin ser conscientes de ello, a descubrirlas en la práctica de forma empírica. No fue hasta el siglo XIX cuando los matemáticos establecieron estos resultados de forma definitiva.

Estos artesanos pusieron de manifiesto que la intuición y la práctica casi siempre suelen ir por delante de la teoría, y no al revés. Eso intentamos que los alumnos hagan en Experigoza: experimentar y reflexionar sobre la experiencia destacando los aspectos más interesantes de la geometría que aparece. Para ello disponen de un material atractivo y multicolor para hacer el trabajo experimental, desarrollar la intuición y, a pequeña escala, tratar de emular a aquellos artesanos que sin grandes conocimientos geométricos fueron capaces de crear mosaicos de singular belleza. A continuación se exponen unos pequeños retazos de las posibilidades de este trabajo empírico complementándolo con sugerencias y observaciones sobre sus posibilidades didácticas y, a veces, con algunas ideas geométricas y analíticas que son el fundamento teórico de la experimentación.

MOSAICOS REGULARES

En primer lugar conviene precisar qué se entiende por mosaico. Se trata de una estructura compleja que rellena completamente el plano y está formada de piezas simples que llamamos baldosas, losetas, ladrillos, azulejos o teselas. Además, las baldosas deben cumplir varias condiciones: los vértices de cada polígono se deben unir con los de los otros, no pueden solaparse o superponerse ni deben dejar huecos y han de rellenar completamente el plano, es decir, deben poder extenderse indefinidamente. Estas condiciones iniciales van apareciendo en el desarrollo del trabajo experimental sin necesidad de enunciarlas expresamente. La conveniencia o no de presentarlas explícitamente a los alumnos dependerá bien de la edad de los chicos o de las intenciones didácticas del profesor. En cualquier caso en el trabajo con niños pequeños en los talleres de Experigoza se empieza utilizando una idea intuitiva y coloquial de lo que es un mosaico y, a medida que se trabaja, se van fijando el resto de condiciones.
Conviene empezar por lo más simple que es a la vez base y fundamento de los principios más complejos. Para ello nuestra primera propuesta consiste en embaldosar el suelo (o una pared o cualquier superficie plana) utilizando polígonos regulares iguales: solo podemos utilizar un tipo de baldosas. Estos mosaicos se llaman mosaicos regulares. El más corriente de ellos está formado sólo por cuadrados y es bien conocido porque la mayoría de suelos y pavimentos son así.

En Experigoza, con los niños, no se emplean métodos o procedimientos analíticos en la medida de lo posible, sin embargo estos procedimientos son los que dan cuenta rigurosa de los resultados. En este escrito se desarrollan en paralelo las justificaciones convenientes utilizando dichos procedimientos.
Para empezar en este apartado hace falta saber cuál es el ángulo de un polígono regular de **n** lados. Conviene recordar dos cuestiones previas:

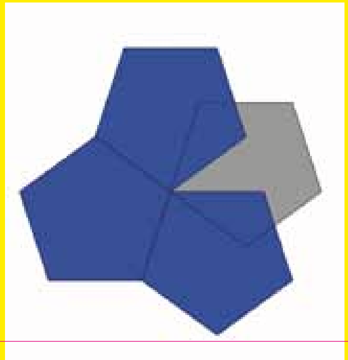
La suma de los ángulos de un triángulo es 180º
Cualquier polígono regular de n lados puede descomponerse en (n-2) triángulos

La suma de los ángulos de esos (n-2) triángulos es exactamente la suma de los ángulos del polígono. Por lo tanto, cada uno de los ángulos de un polígono regular de n lados (que son iguales) medirá $\frac{(n-2) \times 180}{n}$

Por ejemplo, en el pentágono regular, el ángulo será

$$a = \frac{(5-2) \times 180}{5} = \frac{3 \times 180}{5} = \frac{540}{5} = 108º$$

Muchas personas que no conocen el problema piensan que "con todos los polígonos es posible", que cualquier polígono regular sirve para hacer un mosaico.
Esto se debe a que no se ha pensado en los requisitos elementales que necesitamos para poder embaldosar.



Hay un contraejemplo claro que nos permitirá reflexionar sobre la afirmación anterior: **con pentágonos regulares no se puede embaldosar.** ¿Por qué? Experimentalmente se ve que no encajan, pero vamos a verlo con mayor detenimiento. Suponemos que tenemos un montón de pentágonos regulares iguales y queremos llenar un plano. Decidimos una primera forma de colocarlos: tocándose los vértices. Con los dos primeros no hay ningún problema, pero al añadir el tercero, vemos que no cierra, sobra un trozo que no podemos llenar con otro pentágono (sí que podríamos romper trozos de baldosa cada vez para rellenar el hueco, pero entonces no serían iguales todas las baldosas). ¿Por qué no se cierra el plano con tres pentágonos? Porque el ángulo del pentágono regular es de 108º y juntando tres pentágonos sus ángulos suman 3 x 108º = 324º. Para cerrar se necesitan 360º, una vuelta completa: faltan 36º. Si utilizamos cuatro pentágonos nos sobran trozos de pentágono porque se solapan unos con otros.

Se puede deducir qué es lo que ha de pasar para poder embaldosar utilizando polígonos regulares iguales: al colocar polígonos en torno a un vértice la suma de sus ángulos ha de dar 360°.
El problema puede plantearse al revés: buscar los polígonos regulares cuyos ángulos sean divisores de 360°.
Sólo hay que encontrar los polígonos cuyos ángulos cumplan esta condición y tendremos la respuesta. Para ello resulta muy útil construir una tabla con los ángulos de los polígonos e ir comprobando.

Nº lados del polígono	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Angulo (grados)	60	90	108	120	128,6	135	140	144	147,2	150	...

REGULARIDADES OBSERVADAS

Experimentalmente se ve enseguida que el ángulo de los polígonos aumenta al aumentar el número de lados, de manera que si se toma el polígono más 'pequeño' (triángulo) el ángulo que forman sus lados es menor que el del cuadrado y éste, a su vez, es menor que el del pentágono, y así sucesivamente. De forma que al juntar polígonos para construir mosaicos aparece una regularidad que a primera vista parece poco importante pero que es fundamental. A medida que aumenta el número de lados del polígono, que voy a utilizar como baldosa, disminuye el número de polígonos que puedo juntar alrededor de un vértice. Con el polígono más pequeño (triángulo) necesito juntar 6 baldosas, si sigo con el cuadrado, necesito sólo 4 baldosas, con el de 5 lados ya hemos visto que no se puede y con el de 6 sólo se necesitan tres polígonos.
Pero a partir del hexágono, si probamos con polígonos de más lados (7, 8, 9,...) lo que ocurre es que los polígonos se solapan y unos montan sobre otros. En este momento parece que la investigación ha llegado a su fin. ¿Por qué estoy seguro de que solo hay estas tres posibilidades?

Mediante un procedimiento analítico se puede llegar a la misma conclusión: los divisores de 360 son: 120, 90 y 60, que corresponden al hexágono regular, cuadrado y triángulo equilátero. Éstas serán, por lo tanto, las únicas baldosas (polígonos regulares) con las que se podrá embaldosar. Otro divisor de 360° que hemos desechado es el propio 180° ¿Por qué? En realidad, de forma experimental también se puede razonar y llegar a la misma conclusión. Así después de utilizar el hexágono, que forma mosaico juntando tres polígonos en un vértice, si se continúa con cualquier otro polígono de mayor número de lados, la formación del mosaico se conseguiría juntando sólo dos polígonos. Y es evidente que al juntar sólo dos polígonos en un vértice no se puede formar un mosaico.

En conclusión: sólo hay tres mosaicos regulares

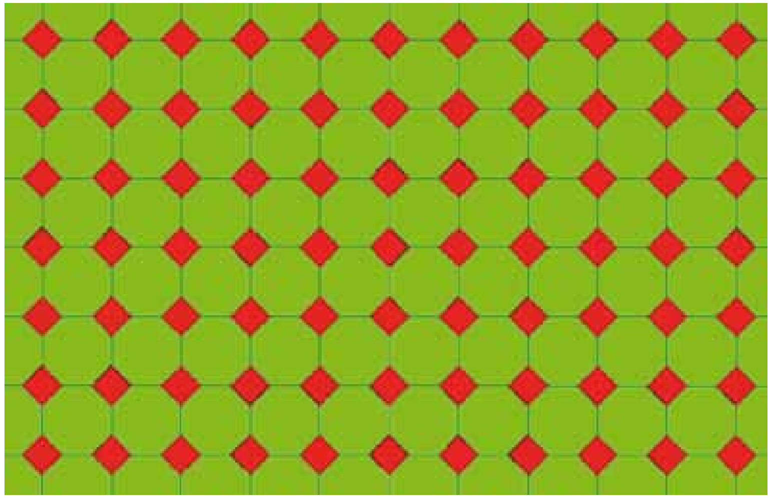
Además, un hexágono se puede dividir en seis triángulos equiláteros, de forma que estructuralmente podría considerarse que sólo hay dos posibilidades de llenar el plano con polígonos regulares: triángulos y cuadrados. Estas estructuras se suelen llamar tramas cuadradas y triangulares. Con ellas, mediante deformaciones y combinaciones de color, se pueden construir nuevos mosaicos de gran belleza. Un buen número de los mosaicos de la Alhambra utilizan estas técnicas.

PONER NOMBRE A UN MOSAICO

Hasta ahora se ha estado utilizando, sin decirlo expresamente, el concepto de vértice de un mosaico como el punto en el que se unen los vértices de los polígonos que lo forman. La importancia de este punto del mosaico es fundamental y conviene destacarla, ya que lo que ocurre en él determina que se pueda o no construir el mosaico y el tipo de mosaico de que se trata. La condición necesaria para que un mosaico exista es que los polígonos encajen todos en torno al vértice. Además el vértice permite ponerle un nombre al mosaico.

MOSAICOS SEMIRREGULARES

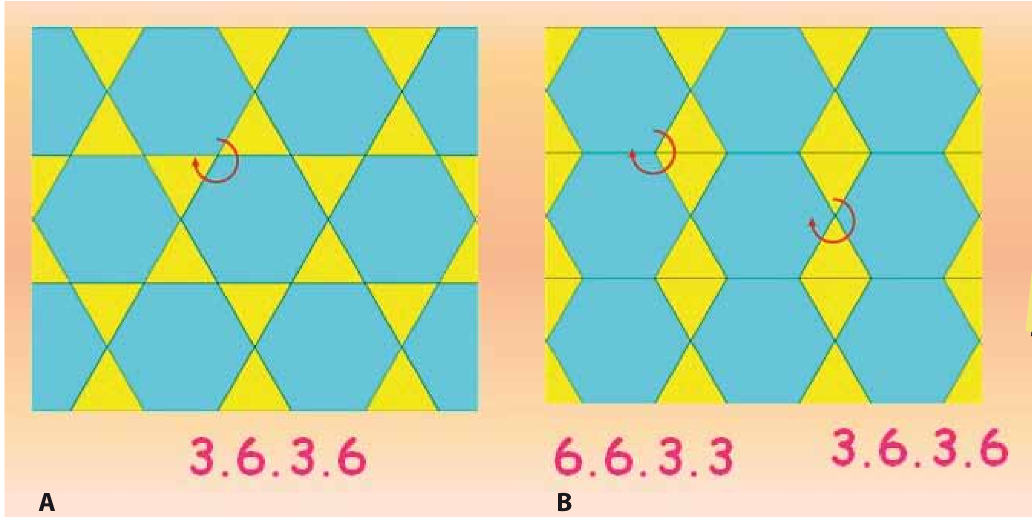
El hecho de que solo hay 3 mosaicos regulares no deja de ser sorprendente. Las restricciones impuestas (utilizar cada vez un solo polígono) limitan mucho las posibilidades. Si dejamos de lado las anteriores condiciones se puede ampliar la búsqueda y encontrar nuevos mosaicos. Se propone una nueva investigación: *encontrar los mosaicos que se pueden construir utilizando dos o más tipos de polígonos regulares* (los mosaicos semirregulares). El número de mosaicos que hay ahora es más numeroso que en el anterior. Pero, ¿cuántos puedo hacer? En el supuesto de que el lector desconozca el resultado, se le sugiere, como se hace con los alumnos, que emita una conjetura previa sobre el resultado. Hay pocos fundamentos para hacerla y es posible que los preconceptos y falsas creencias influyan en ella. A pesar de todo, en matemáticas, la emisión de conjeturas y su comprobación juegan un papel importante. En casos como este nos permiten al final analizar y corregir las creencias y los preconceptos que utilizamos, y de los que no somos conscientes.
Para empezar la investigación, como antes, primero hay que comprobar si los polígonos "encajan" entre sí. Luego hay que ver si, además de encajar, rellenan por completo el plano. Es decir, si forman un mosaico como ocurre en el ejemplo siguiente: un mosaico semirregular formado por octógonos y cuadrados.



A LA BUSQUEDA DE TODOS LOS MOSAICOS POSIBLES

En la resolución de problemas y en el trabajo experimental, en un principio, se suele proceder al azar y de forma desordenada. En algún momento habrá que detenerse a reflexionar y poner orden en los resultados que se van obteniendo para hacer más sistemático el proceso de investigación. Se señalan a continuación algunos aspectos que aparecen en la experimentación y que permiten hacer más sistemático y ordenado el trabajo.
Suelen aparecer mosaicos con estructuras como las dos siguientes:

¿Cuál es la diferencia entre los dos? ¿Son igual de 'regulares'? Aparentemente los dos son 'muy regulares' y eso suelen afirmar los alumnos entendiendo por 'regular' en este caso 'muy simétrico' o 'muy uniforme'. Pero en el A los vértices son todos del mismo tipo [3.6.3.6], mientras que en el B los vértices son de dos tipos: unos son [6.6.3.3] y otros [3.6.3.6].

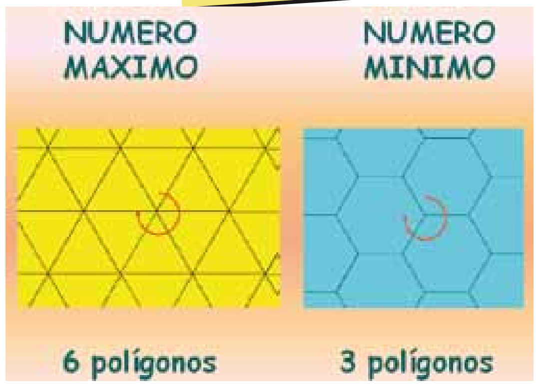


Está claro que el mosaico A es más regular que el B; está mejor hecho. Si una hormiga recorriera los dos mosaicos, en el A, al llegar a cada vértice no notaría ninguna diferencia respecto a otro vértice; en cambio en el otro mosaico, el B unas veces se encontraría en un tipo de vértice y otras veces en otro diferente.

No resulta difícil decidir, para acotar la investigación, que los mosaicos semirregulares que nos interesan son los del tipo A: los que tienen todos sus vértices iguales. En realidad un mosaico semirregular es aquel que cumple esta condición aunque se haya omitido al principio enunciarlo explícitamente.

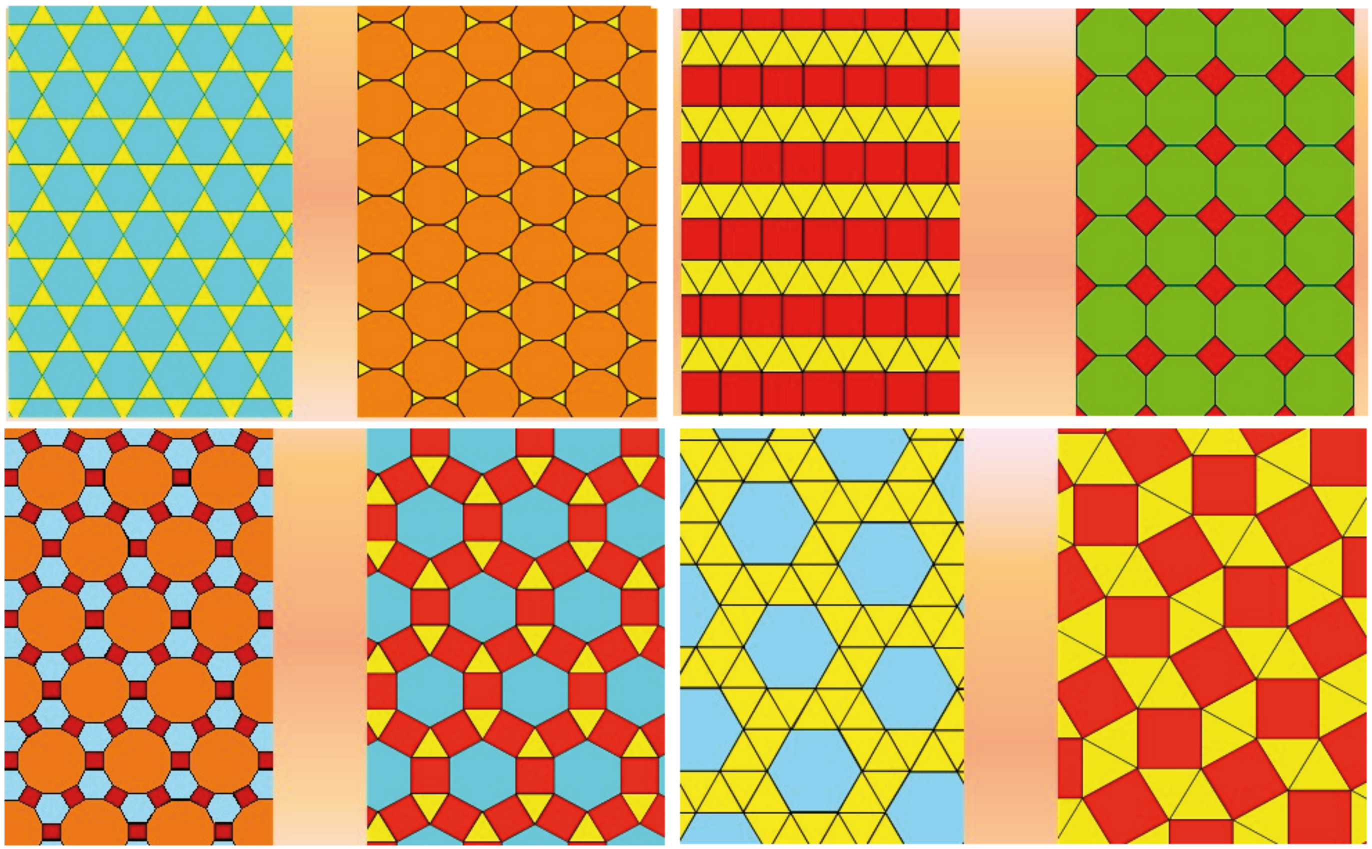
REGULARIDADES QUE PERMITEN SISTEMATIZAR LA INVESTIGACION

Una vez establecidas las condiciones precisas de los mosaicos que estamos buscando hay dos regularidades que permiten cerrar completamente la investigación. ¿Qué se puede decir sobre el número máximo de polígonos que puedo colocar en un vértice? ¿Y del número mínimo?
Lo que se ha estudiado en los mosaicos regulares sirve también ahora. Hay un único caso máximo que consiste en juntar 6 polígonos (triángulos) en un vértice, pero es un mosaico regular. Si se utilizan menos de 6 polígonos hay que estudiar detenidamente cada caso y ver lo que ocurre, pero el número mínimo de polígonos, que es lo que interesa, es tres. Conclusión: los mosaicos semirregulares se forman juntando un mínimo de 3 y un máximo de 5 polígonos regulares, otros casos no son posibles. Dicho de otra forma: no puede haber mosaicos semirregulares que estén formados por más de 5 o menos de 3 polígonos en un vértice.



Nuestra investigación se ha reducido a buscar combinaciones de 3, 4 o 5 polígonos alrededor de un vértice. Si en vez de fijar la atención en el número de polígonos, lo hacemos en el tipo, también se pueden sacar conclusiones relevantes que imponen limitaciones decisivas. ¿Qué pasa cuando trato de juntar tres polígonos distintos en un vértice? Si tomamos para empezar los 'más pequeños', el triángulo, el cuadrado y el pentágono y los unimos en un vértice, la suma de sus ángulos es: 60°+90°+108°=258°. Si añadimos a continuación el hexágono la suma de sus ángulos sería 60°+90°+108°+120°=378°. Como suma más de 360° no se puede formar mosaico. Puesto que hemos utilizado los polígonos que tienen los ángulos menores, cualquier otra combinación de más de 4 polígonos distintos resultaría imposible. La conclusión es que el tipo de polígonos que se use también impone limitaciones. ¿Quiere esto decir que no existen mosaicos regulares que tengan en un vértice 4 polígonos? La respuesta es negativa como ya se ha visto en el ejemplo anterior del mosaico [3,6,3,6]. Lo que ocurre es que si utilizamos cuatro polígonos no pueden ser distintos, dos al menos deberán ser iguales. Hay varias posibilidades, pueden ser tres polígonos de un tipo y el cuarto de otro tipo, o dos de un tipo y los dos restantes de otro tipo. Hay otra posibilidad que dejamos para lector interesado. En cualquier caso puede averiguarse cual es esta posibilidad observando las diferentes combinaciones en la imagen siguiente.

En conclusión, **no puede haber más de tres clases de polígonos distintos en torno a un vértice.**



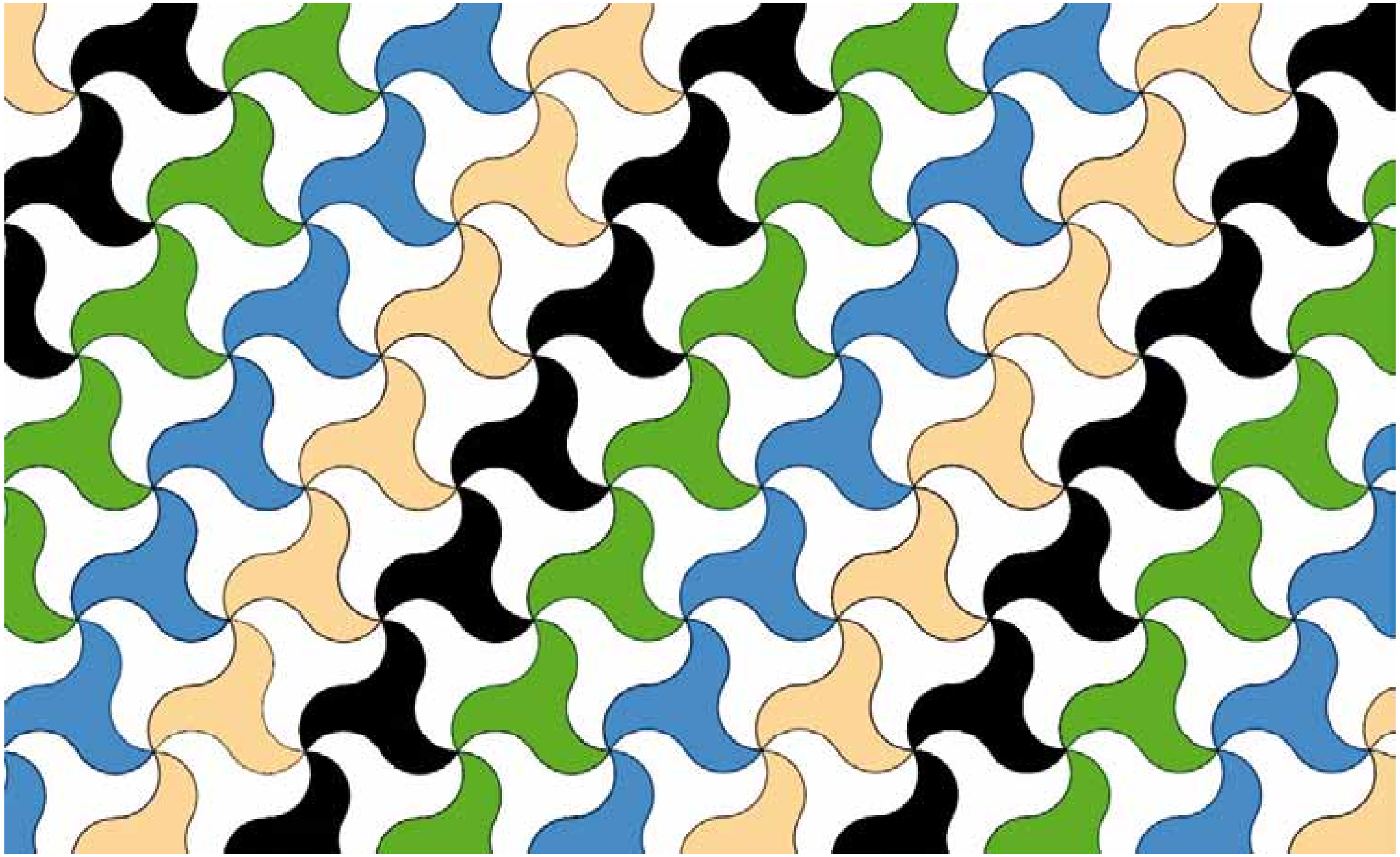
Teniendo en cuenta la conclusión alcanzada, se podría encontrar, después de un estudio combinatorio exhaustivo, cuántos mosaicos semirregulares hay.

El resultado definitivo es que hay sólo 8 tipos distintos.

MOSAICOS MODULARES: MOSAICOS NAZARIES

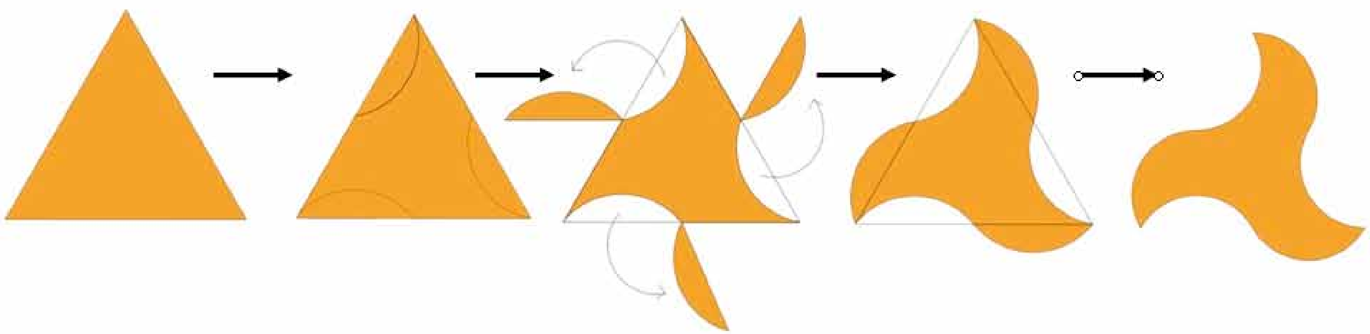
La Alhambra de Granada se construyó en tiempos de la dinastía nazarí. Por esa razón se suele llamar mosaicos nazaríes a los mosaicos que hay en la Alhambra.

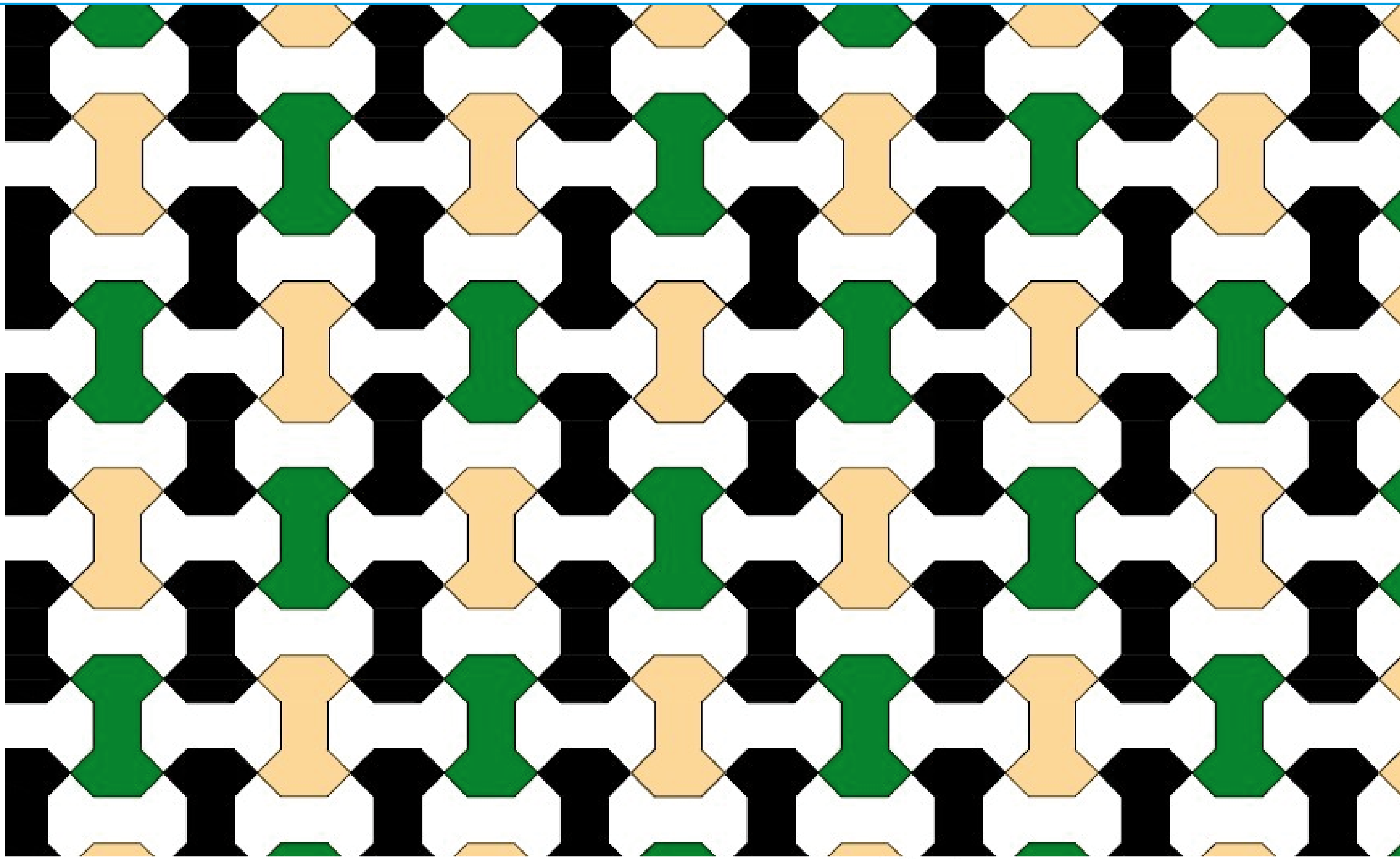
Estos mosaicos, de una gran complejidad aparente, están realizados por descomposiciones sencillas de las baldosas de los mosaicos regulares, formados por cuadrados y triángulos principalmente. A continuación se muestran gráficamente dos ejemplos de estas descomposiciones que dan lugar a mosaicos de una gran belleza.



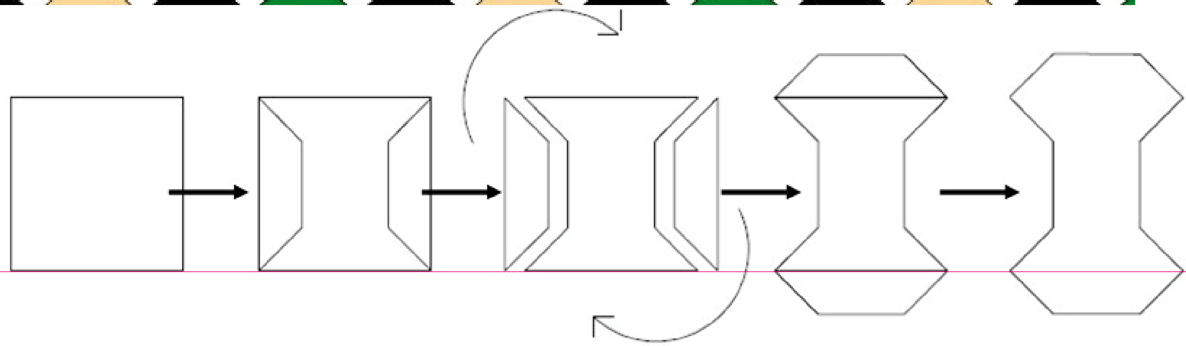
LA PAJARITA

Se forma partiendo de un triángulo equilátero, que da lugar a la baldosa que se conoce con el nombre de "La pajarita".





En este caso el polígono de partida que permite construir la baldosa es un cuadrado.



En este apartado se pretende llegar a tener alguna idea de lo que las unidades de medida suponen en nuestra vida, y experimentar para lograr imágenes mentales de la relación entre magnitudes de medida de distancias, superficies y volúmenes que no son evidentes.

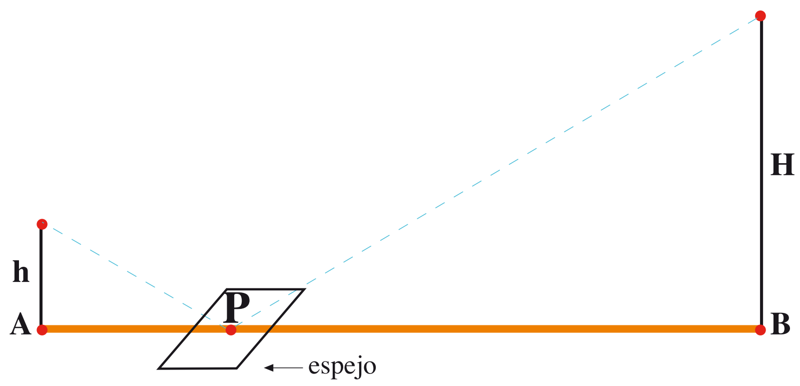
Las primeras unidades de longitud que se registran en la historia estuvieron relacionadas con medidas humanas: palmo, pie, paso… Por eso es lógico que en las primeras etapas del aprendizaje se sigan utilizando esas medidas, aunque hay que advertir sobre las variaciones que pueden ocasionar: no son iguales (y a veces ni parecidos) los pies de todos.

Por eso mismo, en general, las unidades de medida variaban mucho según la región, la comarca e incluso la población, tanto que en la entrada de algunas ciudades se indicaban los patrones de medida oficiales en aquella ciudad. Esa diversidad dificultaba el intercambio comercial y era fuente de abusos y malentendidos. Por ejemplo, la vara de Valencia y de Castellón medía aproximadamente 0,906 m mientras que la vara de Teruel era de 0,768 m. Comprando tela por vara en Valencia y vendiéndola al mismo precio en Teruel, °se podía obtener un beneficio del 18%! Los pies también eran muy distintos, desde el pie de Burgos (0,278 m) al largo pie francés (0,324 m).

La falta de una definición común de las unidades de medida permitía que fueran un instrumento de dominación de las clases populares por parte de los poderosos, por eso su unificación fue uno de los primeros objetivos de la Revolución Francesa, que puso las condiciones para la definición del metro como base del Sistema Métrico Decimal, de uso común en la actualidad. Como en el metro las unidades varían según potencias de 10, los cálculos son muy sencillos. Lo que se pretende en Experigoza es que se comience una relación cordial, vivida y sorprendente de las medidas. Porque para medir de forma aproximada utilizamos el sentido de la vista, que con frecuencia solo nos sirve para hacernos una idea quizás, en el caso de las longitudes. Pero cuando se trata de superficies ya falla bastante, y todavía más cuando abordamos los volúmenes.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Se propone la medición de distancias en una gran superficie (como podría hacerse en los patios de los centros de enseñanza). ¿Cómo medir grandes longitudes? Se escuchan las propuestas de los diferentes asistentes: pasos, pies, la distancia entre los brazos abiertos, número de baldosas, con cinta métrica... Se pasa a la acción con cada una de las propuestas, se ponen en común y se evalúan las ventajas e inconvenientes. Así hasta obtener una respuesta a la distancia, cuya precisión dependerá de las necesidades que tengamos. Finalmente se puede dar una respuesta 'exacta' por medio de un aparato de laser de los usados por los profesionales, que nos da una medición con la precisión de un centímetro (que no es necesaria en la vida corriente). En esa misma superficie se puede intentar delimitar una habitación, o toda una casa, para intentar hacerse idea de esas superficies.



También se hará alguna medida indirecta, como la altura de alguno de los edificios. Para ello se utiliza un método sencillo, con un espejo. Si queremos medir una altura H, elegimos una recta AB hasta la base del monumento y desde una altura h que podemos medir (que puede ser la de nuestro ojo) vamos moviendo un espejo hasta que veamos el extremo del monumento en el punto P.

Como sabemos que $\frac{h}{AP} = \frac{H}{PB}$, y podemos medir h, AP y PB, tendremos que $H = \frac{h \times PB}{AP}$.

La única dificultad del procedimiento es que tenemos que medir con cuidado todas las distancias, y asegurarnos de que el punto P (donde decimos que vemos el extremo del monumento), está situado allí exactamente. Por eso es conveniente entrenar previamente el proceso (deduciendo una altura que podamos medir luego de forma directa) para comprobar la exactitud de nuestras medidas (puede ser por ejemplo la altura de una clase).

TALLER DE MEDIDAS DE VOLUMEN Y PESO.

Tenemos una serie de cuerpos geométricos: conos, cilindros, esferas, prismas, cubos huecos de madera y plástico, cubos de espuma del mismo tamaño y diferente densidad, diferentes envases industriales (tetrabriks, botellas, botes cilíndricos...), y bolas pequeñas de poliuretano de colores para poder llenarlos, así como una balanza electrónica para pesar.

Empezamos con un cuerpo corriente: el cubo. Tenemos uno de lado 20 cm, otro de 10 centímetros (o un decímetro) y otro cuyo lado es la mitad, 5 cm. ¿hay alguna relación entre sus volúmenes? La del mediano es un decímetro cúbico que, como podemos comprobar, es lo mismo que un litro (la capacidad de los tetrabriks y de muchas botellas). ¿Y la del pequeño? En este caso se hacen apuestas: no es ni la mitad, ni la tercera ni la cuarta parte. °Es la octava parte! O dicho de otra forma, hay que llenar 8 veces el cubo pequeño para lograr completar el litro. ¿Por qué? Porque su arista es doble (2 veces) y en el caso del volumen hay que elevar al cubo: $2^3=2 \times 2 \times 2=8$.

Comparamos un cilindro y un cono huecos de las mismas dimensiones, es decir, tienen iguales el radio y la altura, ¿hay alguna relación entre los volúmenes de ambos? De nuevo se hacen apuestas: las respuestas habituales son 2, 3 o 4 veces. Pasamos a experimentarlo. Se llena el recipiente cónico y lo vaciamos en el cilindro hasta que lo llenemos completamente: con tres veces se llena el cilindro de forma completa, exacta. °La 'evidencia' nos puede jugar malas pasadas!

Hacemos lo mismo con un prisma y una pirámide que tienen la misma base y la misma altura. Nos preguntamos de nuevo por si hay alguna relación entre sus volúmenes. ¿Es la misma que en el caso anterior? Se puede comprobar que sí, y podemos enunciar una regla general:

el volumen de los cuerpos acabados en punta (como los conos o pirámides) es un tercio que de los de la misma base pero cuya sección permanece constante (como cilindros o prismas).

MEDIDAS DE SUPERFICIE

En una cristalera hay bloques de vidrio cuadrados. Se trata de ver que si el lado se hace doble, triple, ..., 10 veces,...; el número de bloques es 4, 9, ..., 100,...

CILINDRO Y ESFERA

Cuando queremos jugar a tenis nos encontramos botes con tres o cuatro pelotas. Se trata de esferas dentro de un cilindro. Es evidente que hay muchos huecos, pero, ¿cuánto espacio queda libre?

Se comprueba que el volumen de la esfera es justamente 2/3 del volumen de un cilindro de igual base y altura igual a la de la esfera. En el caso del bote de cuatro pelotas queda libre 1/3 del espacio, la mitad del ocupado. Es decir que en el bote de cuatro hay espacio libre bastante como para otras dos pelotas de tenis.

Tenemos ahora una esfera y un cubo de arista igual al diámetro de la esfera, ¿cuál es la relación entre sus volúmenes? Comprobamos que en este caso la respuesta no es sencilla. °No siempre la naturaleza es fácil!

DIFERENTES ENVASES

En los supermercados encontramos envases de formas diferentes pero con el mismo volumen. Se trata de apostar y experimentar sobre en cuál cabe más o si tienen igual volumen.

DENSIDAD

Tenemos tres cubos de espuma de igual tamaño. ¿Pesarán igual? Después de cogerlos se ve que no, y en la báscula electrónica se comprueban las intuiciones. Así tenemos una introducción al concepto de densidad.

experigoza

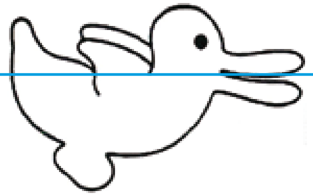
Con el descubrimiento consciente de la primera figura imposible, en 1934, el mundo visual de los humanos ha experimentado una absoluta novedad. Algo que roza los límites de nuestra capacidad de representa ción. En este sentido, las figuras imposibles son un enriquecimiento del espíritu humano. Forman un género propio. No son objetos matemáti cos, aunque puede aplicarse la matemática para describirlos y analizar los. Tampoco son obras de arte; las figuras imposibles pueden dibujarse con gusto y expresividad, pero su eficacia no es subsidiaria de sus cuali dades artísticas. Representan un mundo propio, un mundo que no es en modo alguno ajeno al hombre. Las figuras imposibles son además un valioso material de análisis para conocer mejor el funcionamiento del ojo.

Un mundo de figuras imposibles
Bruno Ernst

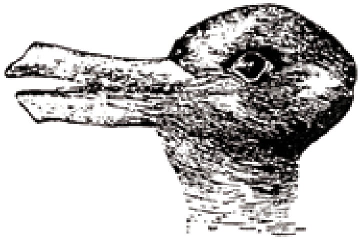
Las ilusiones ópticas son divertidas, sorprendentes, creativas. Tienen algo de mágico y suponen un desafío a la mente tanto para pequeños como para mayores. Estimulan la puesta en acción del pensamiento, la reflexión, la creatividad y especialmente la imaginación. Pero no sólo ocurre con las ilusiones; la magia, los acertijos, las imposibilidades y las paradojas también les gustan particularmente a los niños. Como ha señalado **Martin Gardner** "Las ilusiones ópticas, figuras, objetos o sucesos que no son lo que aparentan al ser percibidos, han tenido y tienen todavía una importante relación con las bellas artes, las matemáticas, la psicología e incluso con la filosofía". Otros campos de conocimiento como la física o la tecnología no han sido ajenos a la atracción que provocan estos fenómenos.

Aunque, desde un punto de vista menos formal, estas actividades puedan considerarse de interés porque son sencillamente divertidas, también y como ha apuntado Martin Gardner, el interés de los matemáticos por las ilusiones ópticas se debe a que muchas de ellas guardan relación con la perspectiva (una rama de la geometría proyectiva) y con otras cuestiones geométricas. Proporcionan situaciones que dan lugar a plantearse múltiples cuestiones acerca de nuestra percepción e interpretación del espacio en el que vivimos y en cómo observamos la realidad.

AMBIGÜEDAD



¿PATO O CONEJO?



Las ilusiones e imposibilidades nos recuerdan que el mundo exterior, en ocasiones, no siempre es lo que parece, y que "mirar" o "ver", como sabemos, son dos cosas bien distintas; porque si bien miramos con los ojos, vemos con el cerebro, que percibe e interpreta la realidad de forma muy diversa y variada. Así, dos personas pueden mirar la misma cosa pero no por ello los dos ven lo mismo. La característica principal de la mayor parte de figuras imposibles es la ambigüedad. Y aunque haya un tipo particular de ilusiones ópticas conocidas específicamente entre los especialistas, como figuras ambiguas, la misma idea de ambigüedad recorre todo el mundo de las ilusiones ópticas. Por esta razón uno de los lemas que hemos seleccionado como hilo conductor de toda la actividad que aquí se presenta es éste: la ambigüedad. Ambigüedad que surge de la dualidad de interpretaciones, o la ausencia de interpretación posible, en muchos casos. Una parte importante de Experigoza lo constituyen este tipo especial de figuras imposibles que reciben el nombre de figuras ambiguas. Estas figuras son aquellas que el ojo ve y que el cerebro interpreta unas veces de una forma y a la vez de otra. La interpretación espacial de estas imágenes se sobrepone a nuestra voluntad. Unas veces son una cosa y otras son otra distinta y lo percibimos así, independiente de nuestro empeño por mantener un enfoque determinado. En las figuras que siguen unas veces vemos un pato y otra un conejo. Las dos cosas son diferentes, pero no existe oposición entre ellas: ***es a la vez pato y conejo***.

Es bien conocida igualmente, entre la figuras ambiguas, la siguiente: a la vez es joven o es vieja, pero no las dos cosas a la vez. Muchas personas no consiguen, en ocasiones, enfocar adecuadamente una de las imágenes y sólo ven una parte, la joven o la vieja.

Pero más sorprendente resulta aún, si cabe, que en este tipo de imágenes cuando se ha conseguido el enfoque adecuado de una de ellas, si intentamos mirarla fijamente el tiempo suficiente, la propia imagen se nos impone y cambia en contra de nuestra voluntad, alternando sorprendentemente entre una y otra interpretación. A los niños, que tienen una gran capacidad para sorprenderse, este tipo de "engaños" visuales les entusiasman a la vez que les provocan no pequeñas frustraciones al no poder controlar adecuadamente su capacidad de enfoque. Bastantes preguntas y debates surgen con estas propuestas, aunque siempre se disfruta con el engaño que nos proporcionan, como se disfruta cuando un mago nos confunde con sus trucos de magia.

En Experigoza además se muestran muchos otros fenómenos que por su aparente imposibilidad física presentan un cierto grado de ambigüedad, análoga a la apuntada anteriormente, pero tienen, sin embargo, una clara explicación científica. Aunque todo lo que se va a ver choca con la realidad esperada, no por ello todo es imposible realmente. Sólo lo es de forma aparente. En tal sentido es por lo que nos ha parecido conveniente utilizar como hilo conductor la ambigüedad.

EXPERIGOZA: UN MODO DE ENTENDER LA REALIDAD

Las interpretaciones y explicaciones que de algunos de estos fenómenos proporcionan diferentes estudiosos del tema, especialmente los sicólogos, son variadas, contradictorias, o incluso divergentes. Esta multiplicidad pone de manifiesto la complejidad y desconocimiento que existe acerca del funcionamiento cerebral cuando se trata de explicar la percepción visual, incluso cuando se trata de las ilusiones más simples. Un ejemplo histórico de esta variedad de interpretaciones, que sigue sin tener una respuesta universalmente aceptada, es la conocida desde la antigüedad como la ilusión de la luna, que consiste en el aumento aparente de tamaño cuando se encuentra cerca de nuestro horizonte visual.
En tal sentido nos ha parecido superfluo tratar de dar interpretaciones o respuestas acabadas a los niños de las situaciones que se presentan. Experigoza es un lugar en el que se debe disfrutar y sorprenderse por encima de todo. Tratamos no tanto de responder como de provocar la curiosidad por saber más y sobre todo despertar la imaginación espacial y visual.
En cualquier caso conocer y disfrutar de estas experiencias ya nos parece suficientemente enriquecedor y gratificante. Si se tiene éxito en nuestra propuesta serán los profesores de los grupos que nos visitan los que deberán decidir si amplían y profundizan en estos temas en sus clases, y si consideran conveniente plantear alguna de las explicaciones posibles.

SENTIDO DEL ESPACIO Y VISION ESPACIAL

Ya hemos señalado anteriormente algunas de las razones por las que los matemáticos han estado interesados desde antiguo en estos temas, pero no es ésta la razón fundamental por la que se ha planteado esta actividad y que la justificaría plenamente. Hay un motivo que no tiene tanto que ver con las matemáticas académicas como con la enseñanza de las matemáticas y la competencia social de nuestros alumnos. Se trata de la imaginación y la visión espacial. Como profesores de matemáticas creemos que la visión espacial, o mejor, el sentido espacial, es un componente fundamental en el aprendizaje de las matemáticas y no sólo de la geometría. Los estudios internacionales de evaluación de los sistemas educativos, PISA en particular, han puesto el énfasis en este aspecto del conocimiento como un componente fundamental de las competencias matemáticas que un ciudadano debería adquirir en su etapa escolar. Cuando trata de los contenidos matemáticos que sería deseable que nuestros alumnos alcancen no hablan (como se ha hecho clásicamente) de geometría, sino de Espacio y Forma. Y en este sentido atribuyen a la visión espacial y a la imaginación una importancia que, siendo fundamental en la geometría, trasciende el marco de ésta y alcanza al diseño, la plástica, la técnica y muchas otras materias de importancia fundamental en la vida de los ciudadanos.

¿QUÉ ES EL SENTIDO ESPACIAL?

El sentido espacial está íntimamente relacionado con la capacidad de crear imágenes mentales. Como ha señalado **Hernán**, esta capacidad de la imaginación, que él ha llamado "imaginabilidad", expresa dos ideas relacionadas con ella: la cualidad de imaginable (como carácter de algo) y la habilidad para crear imágenes (como facultad sicológica).

Tener sentido espacial es poseer la capacidad de comparar la forma de figuras con diferente orientación (mentalmente giramos una de ellas para hacerlo más fácil), reconocer las simetrías de ciertas figuras, relacionar rectángulos y paralelogramos (manteniendo las longitudes de los lados pero cambiando los valores de los ángulos), dibujar un diagrama para ayudarnos en la resolución de un problema de enunciado verbal, o estimar el valor del ángulo de dos líneas rectas que se cortan.

El sentido espacial juega un gran papel en el razonamiento matemático y traspasa los límites de la misma geometría. Se ha puesto de manifiesto en diversas investigaciones que los buenos resolutores de problemas usan más la imaginación mental que los malos, y que la habilidad para transformar y comparar imágenes mentalmente está en estrecha relación con el éxito en el cálculo integral, por citar sólo dos ejemplos de importancia capital en matemáticas.

El desarrollo del sentido espacial tiene un componente, ya apuntado, asociado íntimamente con las matemáticas, pero su ámbito desborda los límites estrechos de la disciplina. Ocupa un territorio fronterizo en el que pueden confluir una gran parte de las áreas del currículum, en especial la Educación Plástica y visual; pero no es menos importante en Educación Física, Ciencias Sociales, Ciencias Naturales, Educación Ambiental, etc. Esto le confiere unas características interdisciplinares de primer orden que vendrían a abundar aún más, si cabe, en la necesidad de un tratamiento en profundidad en el currículum escolar.

Conviene además hacer una precisión final acerca del término "imaginación" citando textualmente ideas de F. Hernán: "En su acepción más común, la imaginación tiene un aura de capacidad innata: hay escritores con imaginación y escritores sin ella; hay empresarios con imaginación y otros que son más realistas; los poetas tienen imaginación y los lingüistas necesitan de un pensamiento más analítico. Imaginación suele alinearse con intuición, y ambas se contraponen a realismo y análisis". Aquí haremos uso de la expresión "sentido espacial y creación de imágenes" de una manera menos ambigua, de una manera mucho más plástica que literaria. Y consideraremos la capacidad de crear imágenes mentales como una capacidad no innata, sino educable, es decir, cógnitivamente evolutiva y perfeccionable.

Dicho de otra manera, la imaginación es un recurso didáctico cuya principal característica es que es dinámica: las imágenes no funcionan sino a través de la dinámica de la mente. Este recurso tiene la ventaja añadida de que, al no ser un recurso material, es el más barato de todos.

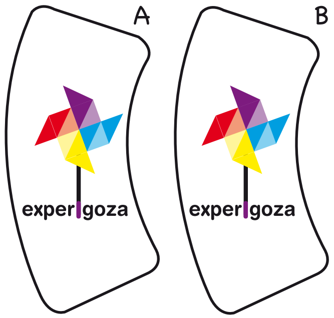
Es por todas estas razones que, desde Experigoza, utilizando las ilusiones ópticas como pretexto, y el arte y la ciencia como medios, se pueden favorecer el desarrollo de todas estas capacidades a la vez que se pasa una mañana divertida.

ACTIVIDADES PROPUESTAS

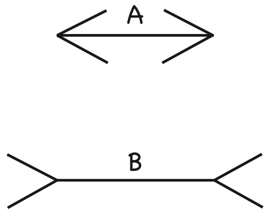
ILUSIONES ÓPTICAS

Ilusiones ópticas clásicas

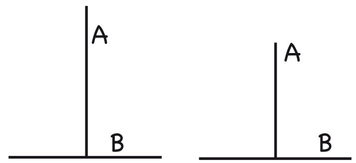
Con estas viejas y conocidas ilusiones los alumnos pueden emitir hipótesis, y a continuación comprobar lo acertado o no de ellas. También pueden los alumnos servirse de instrumentos de medida para comprobar realmente si su vista les engaña y, finalmente, discutir sobre la limitación de nuestras apreciaciones y la conveniencia de la comprobación.



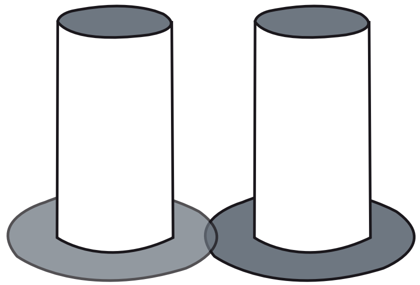
¿Cual es más grande, la A o la B?



Los segmentos A y B ¿son iguales o diferentes?



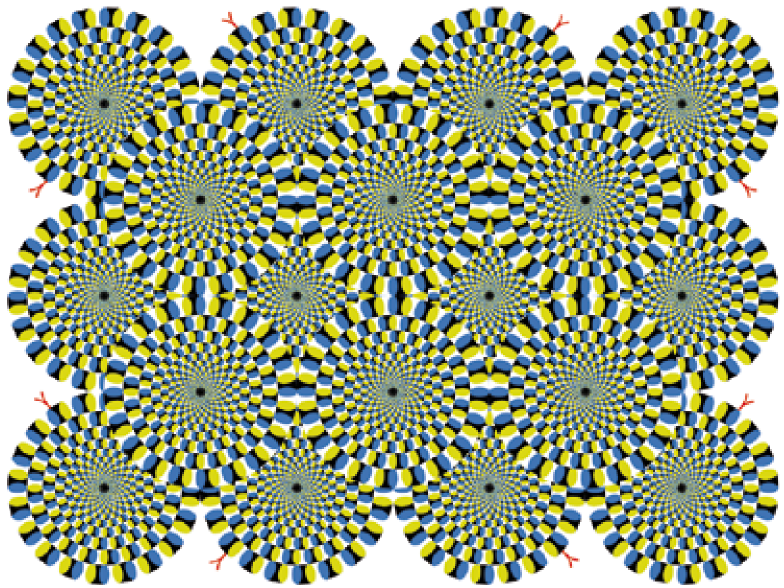
Los segmentos A y B ¿son iguales o diferentes?

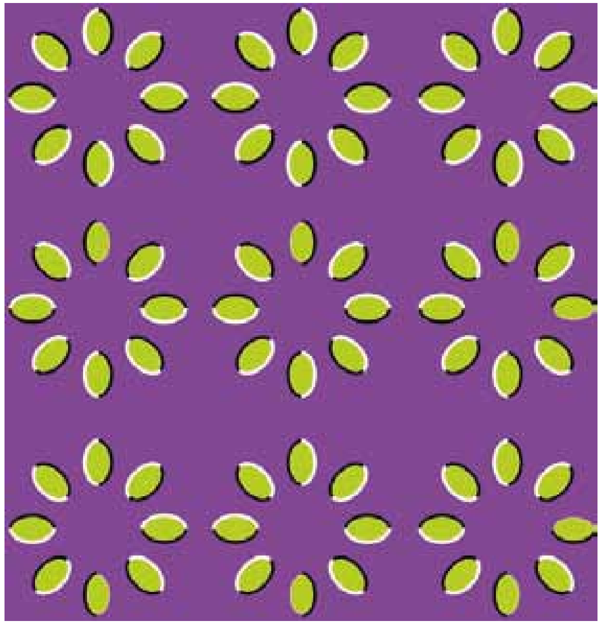


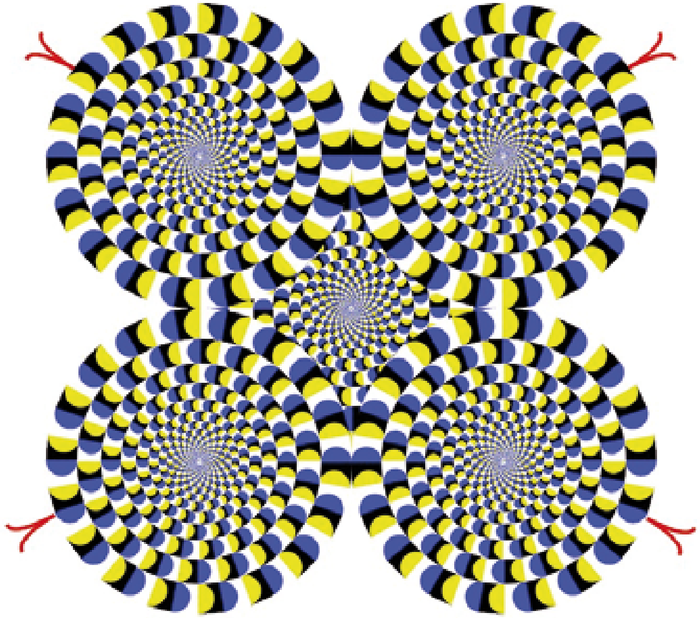
Este sombrero ¿mide más de ancho o de alto?

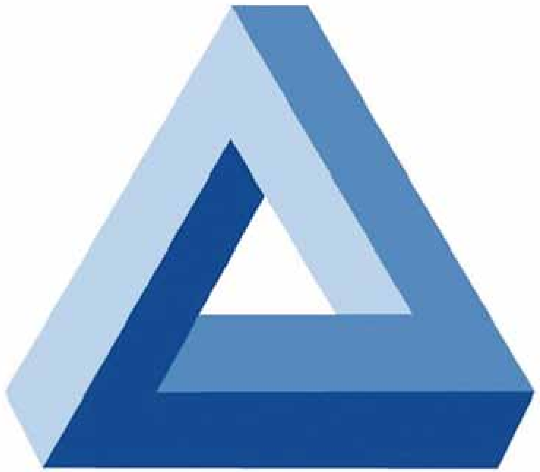
Ilusiones que producen un movimiento aparente

Recientemente han conocido una cierta popularidad, por razones propagandísticas y comerciales, un nuevo tipo de ilusiones ópticas que producen una sensación de movimiento aparente. Lo más sorprendente de estas ilusiones es que si fijamos la vista en un espacio reducido de la imagen, en ese sector de la imagen el movimiento cesa, mientras que en los contornos sigue moviéndose el resto del conjunto. Si cambiamos de sector y desplazamos la vista a otra parte reducida de la imagen, nuevamente la zona en la que nos fijamos cesa en su movimiento y, sin embargo, la zona anterior, que habíamos comprobado que permanecía en reposo, comienza de nuevo su movimiento aparente. Nada se mueve, y por más que forcemos a nuestra voluntad para detener el movimiento, éste sigue y sigue. Son imágenes que suscitan una gran perplejidad y asombro.









FIGURAS IMPOSIBLES

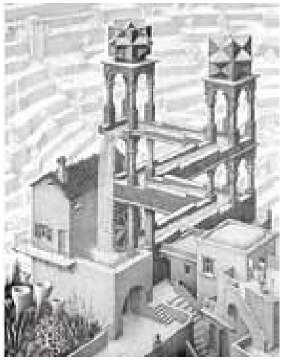
Clásicas

Puede que sea el *tribar* la más conocida de entre todas las figuras imposibles. En un gran número de museos de la ciencia hay un modelo de tribar junto al cual los visitantes pueden incluso fotografiarse si se colocan en un determinado punto de vista. En Experigoza se ha diseñado un tribar que los alumnos pueden "materializar" colocándose en la posición adecuada. Si además se cierra uno de los ojos y se hace desaparecer la visión tridimensional, los efectos conseguidos se acentúan.

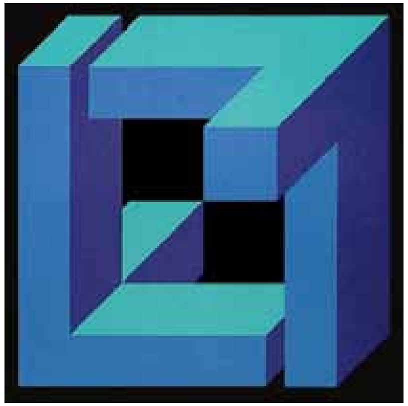
Pintores y artistas

Numerosos artistas han creado ilusiones visuales de gran impacto y difusión. **Escher** es sin duda el más conocido de ellos, pero otros como **Ernst** o, en España, **Yturralde** han contribuido a desarrollar este campo artístico.

Escher

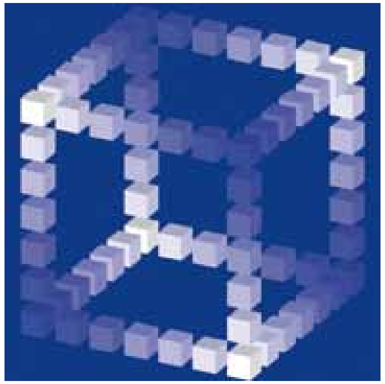


Yturralde


Bruno Ernst





Publicidad

Las figuras imposibles y las ilusiones ópticas ocupan también un lugar destacado en la publicidad y en los logotipos que utilizan las marcas para anunciar sus productos. Aquí van algunos ejemplos

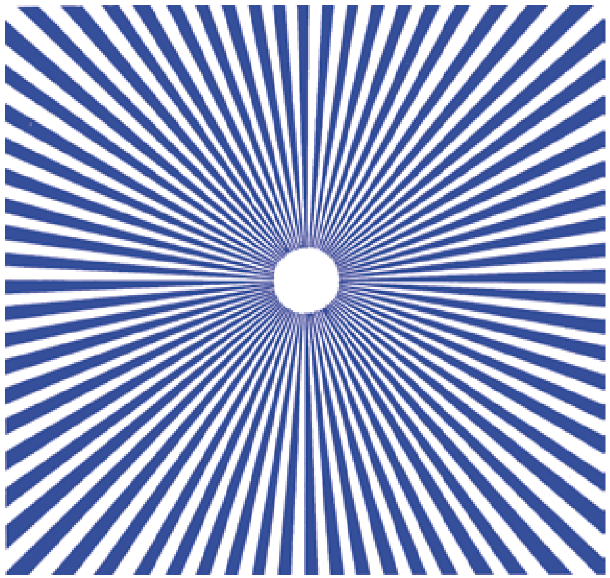
Vallés Pintura y Montajes, s.l.

PITTSBURGH ZOO©

ANAMORFOSIS

Las anamorfosis son imágenes deformadas de la realidad o de otras imágenes. Las deformaciones se producen de acuerdo con determinadas reglas proyectivas del plano sobre otras superficies, generalmente sobre superficies cilíndricas o cónicas.

Supongamos que un cilindro en el que hemos dibujado unas imágenes se coloca sobre un espejo. Las imágenes dibujadas en el cilindro, al proyectarse sobre el espejo, aparecerán deformadas e ininteligibles. Podemos hacer una copia en papel de las imágenes reflejadas y proceder a la inversa; esto es, colocando sobre el papel con las imágenes deformes un cilindro cuya superficie fuese un espejo. Las imágenes deformes del plano se recompondrían sobre el cilindro restaurando las imágenes iniciales. Esta curiosa propiedad dio lugar en la época victoriana a juegos muy divertidos que gozaron de gran popularidad, en los que láminas de dibujos deformes y sin sentido se recomponían como imágenes "normales" en cilindros o conos cuyas superficies eran espejos. Un apartado de Experigoza consiste en la reproducción de estos juegos.



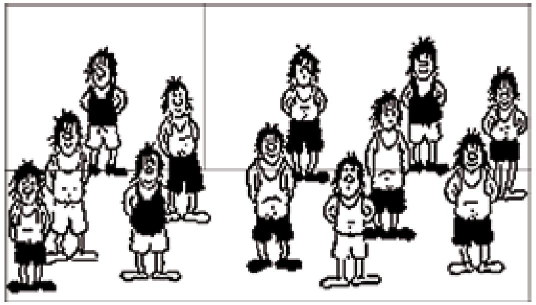
EFECTO MOIRÉ

Este efecto se produce al superponer dos patrones geométricos uno de los cuales debe ser transparente. Se consigue con ello un efecto de movimiento y animación de los modelos geométricos. Durante el siglo XIX se diseñaron juguetes que producían movimiento y que tuvieron una gran aceptación. En la actualidad se han creado transparencias sorprendentes con escenarios figurativos con las que se consiguen animar imágenes de objetos, animales y personas.

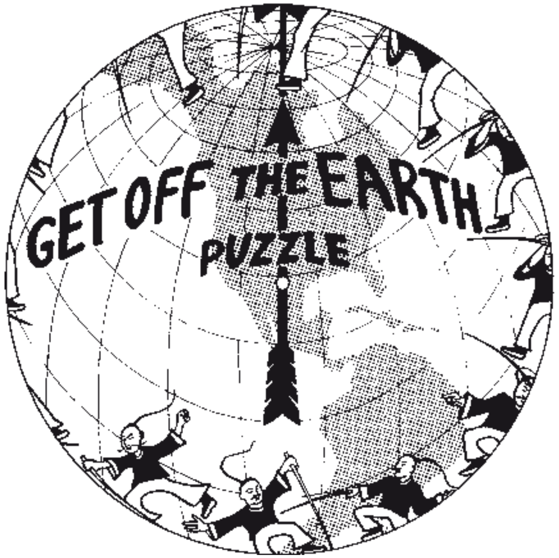
APARICIONES Y DESAPARICIONES

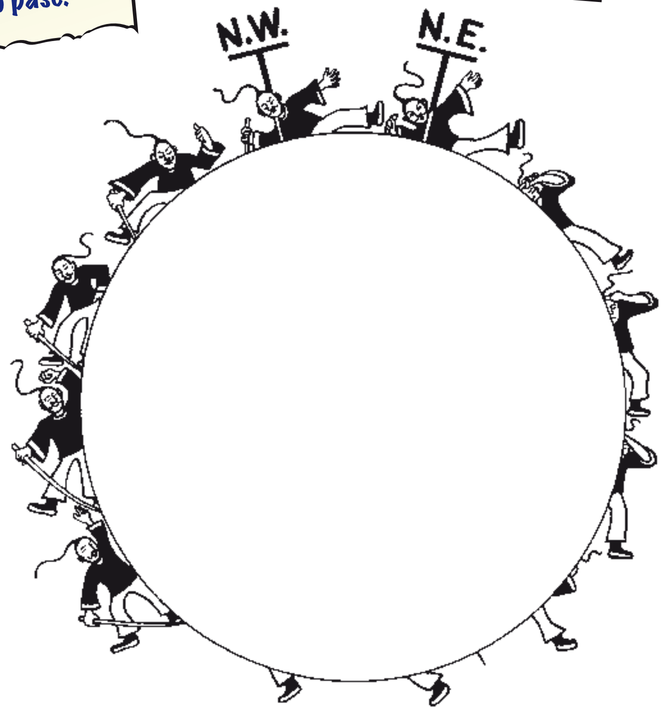
En este caso, más que de ilusiones ópticas, se trata de conocidos rompecabezas geométricos o figurativos que provocan gran sorpresa. Traemos como ejemplos dos de ellos:

a) uno de tipo geométrico: descomposición y recomposición de un cuadrado.



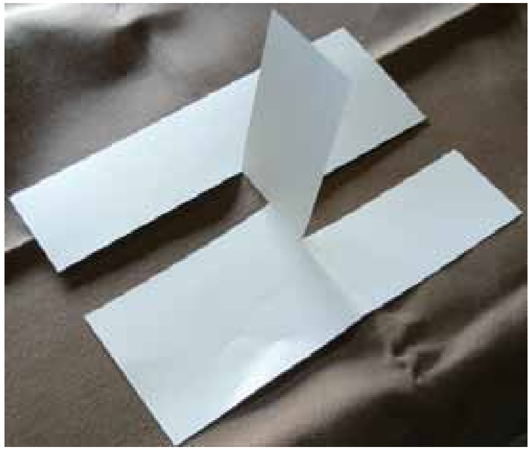
b) Desde que **Sam Loyd** popularizara su conocido rompecabezas *Get Off the Earth*, un montaje de dos piezas donde al girar un globo terráqueo "desaparece" uno de los personajes, han ido apareciendo otros rompecabezas similares basados en la misma idea. El que presentamos es esta ocasión en Experigoza consta de tres partes que se pueden recortar y recomponer de dos formas distintas. En una de las ocasiones aparecen 12 y en la otra 13 personajes. ¿A dónde va a parar el personaje que unas veces aparece y otras desaparece?





FIGURAS APARENTEMENTE IMPOSIBLES QUE PUEDEN CONSTRUIRSE

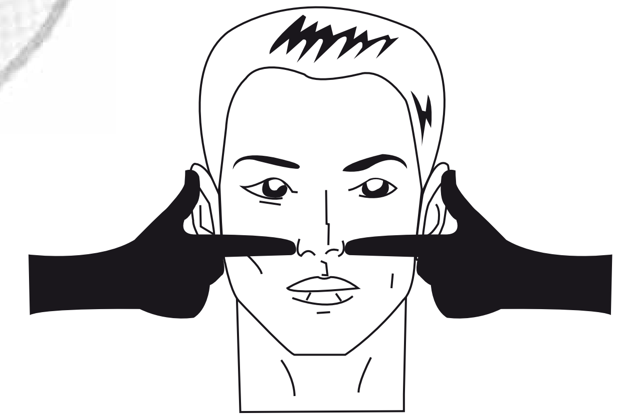
Folio imposible



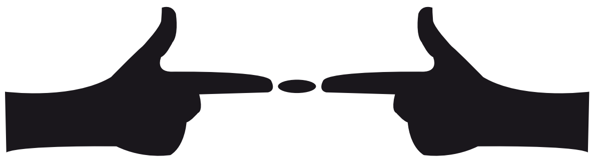
Círculo imposible

ILUSIONES QUE PUEDES HACER EN CASA

Bajo este epígrafe traemos un conjunto de ilusiones y actividades curiosas que pueden realizarse fácilmente sin apenas medios. Algunas de ellas tienen su origen en el hecho de que poseemos dos ojos y que la visión tridimensional se produce como consecuencia de la superposición de las imágenes que cada ojo produce por separado; es lo que se llama la **visión binocular**. Forzando o modificando las condiciones umbrales de distancia en las que se produce la visión tridimensional se consiguen estos curiosos fenómenos. Otras de estas impropiamente llamadas ilusiones porque son sólo efectos ópticos sorprendentes, están basadas en las propiedades de los espejos. En estos casos la explicación no hay que ir a buscarla más allá de las leyes de la física por más que los resultados no dejen de parecernos ilusiones sorprendentes.

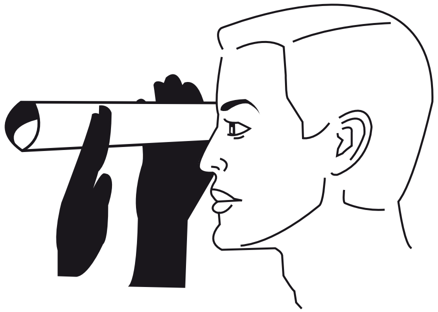


Coloca las puntas de los dedos índices juntos y delante de los ojos a poca distancia. Separa los dedos poco a poco y verás aparecer una especie de salchicha flotando como si los dedos se hubiesen cortado.

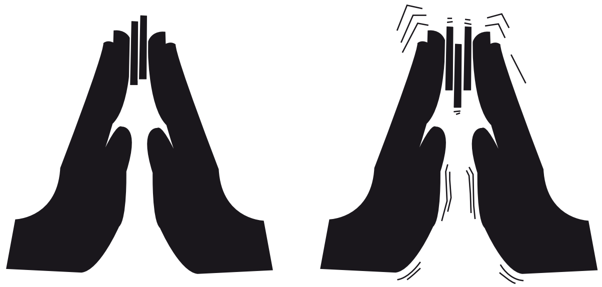


Sosteniendo un lápiz suavemente entre los dedos pulgar e índice, y haciendo que el lápiz oscile entre los dedos a la vez que se hace un pequeño movimiento hacia arriba y abajo, da la sensación de que el lápiz fuese de goma y estuviera doblándose.

Coloca un tubo pequeño en el ojo derecho. Con la palma de la mano izquierda tapa el otro ojo. Enfoca con el tubo a una pared en blanco. Ambos ojos deben estar abiertos. Ahora, manteniendo la palma de la mano pegada al tubo, ve separándola poco a poco del ojo. Verás que aparece un agujero en tu mano.

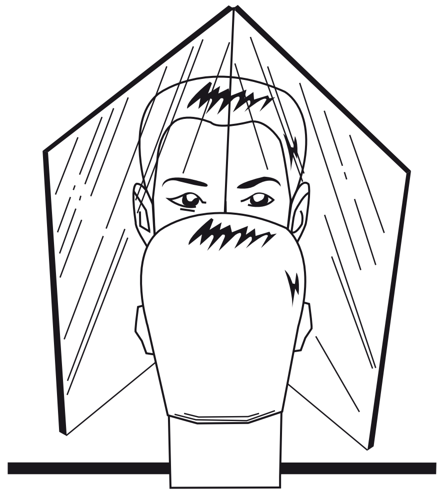


Coloca dos monedas grandes entre los dedos. A continuación frota una contra la otra con un movimiento de giro rápido hacia arriba y hacia abajo. Verás que aparece una terecera moneda entre las dos.



Cruza los dedos índice y corazón. Coloca entre ellos una canica y sentirás que estás tocando dos canicas. El experimento funciona mejor si cierras los ojos.

Coloca dos espejos simples formando un ángulo recto. Si te miras en el espejo ajustando la imagen hasta que veas tu cara completa podrás comprobar que se origina un extraño efecto. °Guiña el ojo derecho y observa qué sucede!

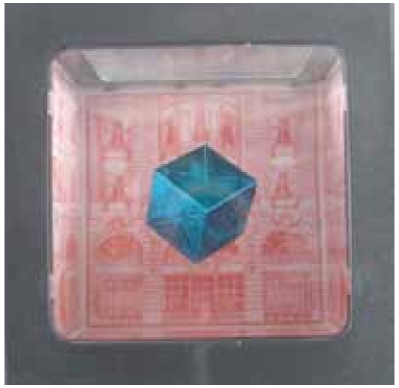


PARADOJAS FÍSICAS

Algunos experimentos producen resultados que aparentemente desafían las leyes físicas de forma espectacular. No es posible dar crédito a lo que ven nuestros ojos por más que su explicación esté dentro de las mismas leyes de la física.

Huchas mágicas

Colocando dos espejos con un ángulo apropiado (45° en nuestro caso), se consigue el efecto óptico de que un objeto (un cubo o un avión) aparece suspendido en el aire, como volando en el vacío, en el interior de una caja cúbica.



Disco de Euler

Se trata de un disco cilíndrico de gran inercia con la apariencia de una moneda grande. Cuando se le hace girar, de forma análoga a como se hace con una moneda sobre una superficie pulida, el disco gira y a la vez rueda sobre la superficie. El efecto resultante es similar al de una peonza que utiliza el momento angular para mantenerse en pie, contrarrestando en cierta medida la fuerza gravitatoria que tiende a hacerla caer. Como el rozamiento es pequeño, y el disco tiene una gran inercia, se mantiene sorprendentemente girando durante varios minutos dando la sensación, contra toda lógica, de que nunca vaya a detenerse y a caer.

Levitrón

Una peonza imantada gira suspendida en el aire. Parece increíble pero la peonza vuela y vuela. El efecto del giro combinado con la fuerza de unos potentes imanes consigue hacerla "levitar" mientras gira durante varios minutos.

Espejos esféricos

Se trata de dos espejos cóncavos superpuestos con una ranura central en el espejo superior. Al colocar un objeto en el interior del conjunto, una pequeña rana de goma o una moneda, como se aprecia en la figura, la imagen del objeto se refleja sobre la ranura superior. La imagen reflejada parece real. Sin embargo, cuando se intenta coger la rana, o la moneda, con no poca sorpresa, resulta imposible porque lo que parece real se trata tan sólo de una imagen virtual.

QUINCESUMA

ACTIVIDADES PROPUESTAS

Para dos jugadores, que utilizan 3 fichas de un color diferente cada uno.

REGLAS

- El primer jugador coloca una de sus fichas en la casilla que quiera.
- Al llegar su turno, el jugador coloca una de sus fichas en cualquier casilla vacía.
- Colocadas las seis fichas los jugadores pueden mover sus fichas a una casilla vacía.
- **GANA el primer jugador que consiga colocar sus tres fichas en casillas que sumen 15.**

QUINCESUMA

experiGoza

1	2	3	4	5	6	7	8	9

QUINCESUMA

Zaragoza
AYUNTAMIENTO
EDUCACIÓN

LA MARGARITA

Para dos jugadores, y una margarita con una ficha en cada uno de sus 11 pétalos.

REGLAS

El orden del inicio en la primera partida es por sorteo y en las demás por turno.

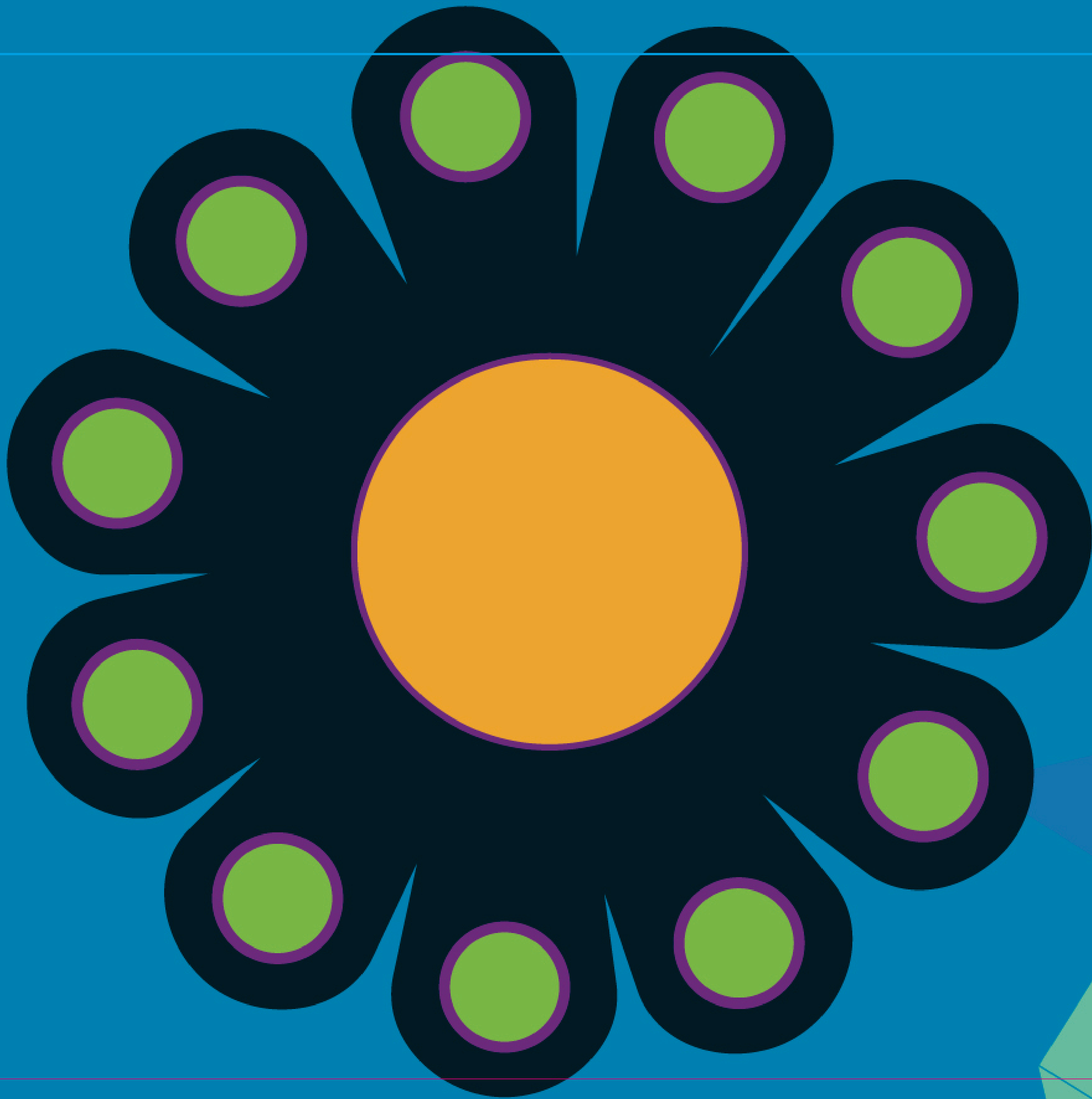
Los dos jugadores van haciendo sus jugadas alternativamente.

Cada jugador en su turno puede quitar de la margarita con 11 pétalos uno o dos pétalos, a su elección. Pero si decide quitar dos pétalos tienen que estar juntos.

GANA el jugador que se lleva el último pétalo.

Se pueden hacer diferentes versiones
Tablero: en el que dos jugadores juegan con fichas.
Gran formato (tipo lona para el suelo) y **Participativo:** once participantes hacen de fichas y los jugadores los van quitando en el desarrollo del juego
Marcado en el suelo (en el recinto de Experigoza, aprovechando los ladrillos)**:** se juega de la misma forma que en el caso anterior.

LA MARGARITA



QUITAFICHAS

Para dos jugadores.

REGLAS

El orden del inicio en la primera partida es por sorteo y en las demás por turno.

Los dos jugadores van haciendo sus jugadas alternativamente.

Se colocan 10 fichas y cada jugador en su turno puede quitar 1 ó 2, según quiera.

GANA el jugador que consigue retirar la última ficha.

Se pueden hacer diferentes versiones
Tablero: en el que dos jugadores juegan con fichas.
Participativo: diez participantes hacen de fichas y los jugadores los van quitando en el desarrollo del juego
Marcado en el suelo (en el recinto de Experigoza, aprovechando los ladrillos)**:** se juega de la misma forma que en el caso anterior, con grandes fichas.

QUITAFICHAS

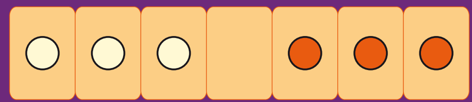
experiGoza

Es un juego individual.

REGLAS

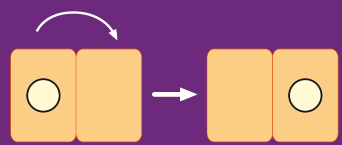
El juego consiste en intercambiar la colocación de las fichas; las que estaban a la izquierda ponerlas en la derecha y viceversa. Hacerlo en el menor número de movimientos posible.

POSICIÓN INICIAL

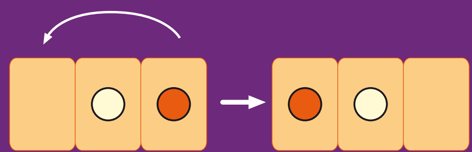


FORMA DE MOVER LAS FICHAS

1. Las fichas colocadas inicialmente a la izquierda solo se mueven hacia la derecha. Las de la derecha solo hacia la izquierda.
2. Una ficha puede moverse a la casilla de su lado si está vacía.



3. Si una ficha tiene a su lado una de otro color y a continuación una casilla libre, puede saltar a dicha casilla libre.



NUNCA PUEDE HABER EN UNA CASILLA MÁS DE UNA FICHA.
NO ES NECESARIO MOVER ALTERNATIVAMENTE FICHAS DE LOS DOS COLORES.

SOL Y SOMBRA

experiGoza

Zaragoza
AYUNTAMIENTO
EDUCACIÓN

Es un juego individual.

REGLAS

Se trata de colocar los ocho números consecutivos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en la tira de ocho casillas que aparece abajo con la condición de que **entre cada uno de ellos y los que están a su lado haya por lo menos 4 unidades de diferencia.** Y hay que lograrlo de todas las formas posibles.

OCHO NÚMEROS 1

experiGoza

Zaragoza
AYUNTAMIENTO
EDUCACIÓN

Es un juego individual.

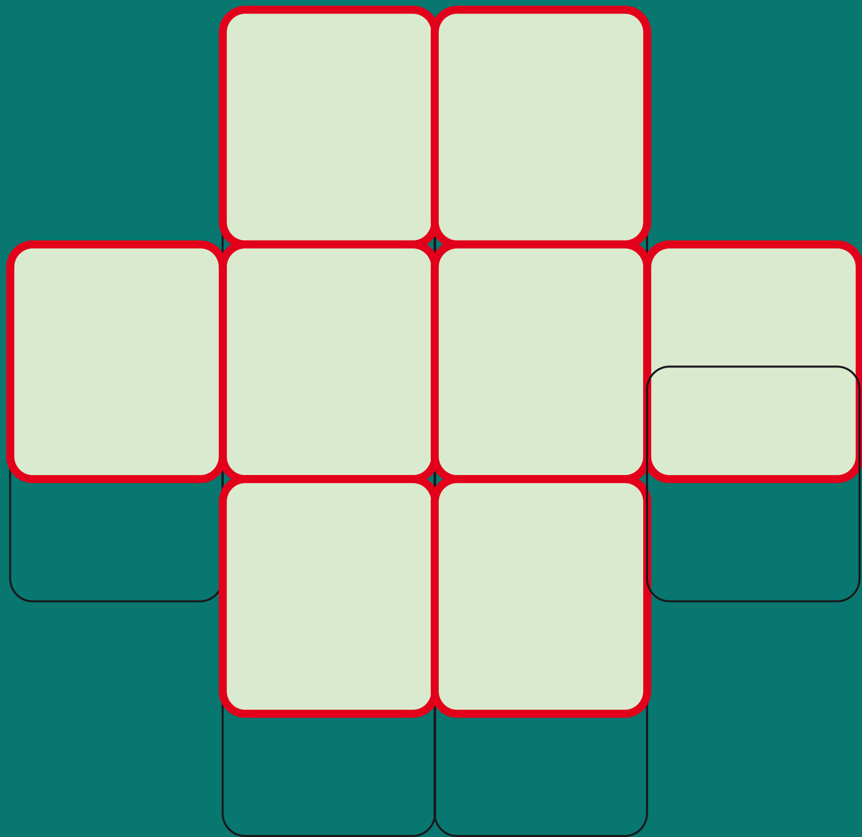
REGLAS

Se trata de colocar los ocho números consecutivos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 en la cuadrícula adjunta con la condición de que ninguno de los números tenga al lado uno consecutivo con él, y eso mirando en horizontal, en vertical y en diagonal. Y se trata también de hacerlo de todas las formas posibles.

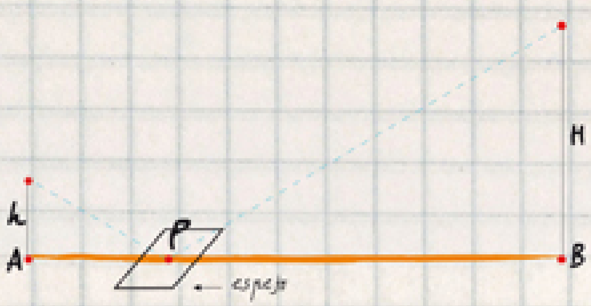
De los dos juegos se pueden hacer diferentes versiones
Tablero: en el que un jugador coloca fichas
Gran formato (tipo lona para el suelo)**:** en el que las fichas son ocho personas con camisetas con los números que se colocan en las casillas adecuadas (bajo su propia decisión o guiados por un jugador externo)
Marcado en el suelo (en el recinto de Experigoza, aprovechando los ladrillos)**:** se juega de la misma forma que en el caso anterior.

OCHO NÚMEROS 2

experigoza



$$a=\frac{(5-2)\cdot 180}{5}=\frac{3\cdot 180}{5}=\frac{540}{5}=108^{\circ}$$



Como sabemos que $\frac{h}{AP}=\frac{H}{PB}$, y podemos medir h, AP y PB, tendremos que $H=\frac{h\times PB}{AP}$