

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA TERRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA
CULTURA, EPISTEMOLOGIA E EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

**A MATEMÁTICA RECREATIVA E SUAS POTENCIALIDADES DIDÁTICO-
PEDAGÓGICAS À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO**

MARIA DA CONCEIÇÃO ALVES BEZERRA

**NATAL – RN
2021**

MARIA DA CONCEIÇÃO ALVES BEZERRA

**A MATEMÁTICA RECREATIVA E SUAS POTENCIALIDADES DIDÁTICO-
PEDAGÓGICAS À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey.

**NATAL – RN
2021**

Universidade Federal do Rio Grande do Norte - UFRN
Sistema de Bibliotecas - SISBI
Catalogação de Publicação na Fonte. UFRN - Biblioteca Central Zila Mamede

Bezerra, Maria da Conceição Alves.

A matemática recreativa e suas potencialidades didático-pedagógicas à luz da teoria da objetivação / Maria da Conceição Alves Bezerra. - 2021.

217 f.: il.

Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Natal, RN, 2021.

Orientadora: Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey.

1. Matemática recreativa - Tese. 2. Teoria da objetivação - Tese. 3. Formação de professores de matemática - Tese. I. Morey, Bernadete Barbosa. II. Título.

RN/UF/BCZM

CDU 37(07)

MARIA DA CONCEIÇÃO ALVES BEZERRA

**A MATEMÁTICA RECREATIVA E SUAS POTENCIALIDADES DIDÁTICO-
PEDAGÓGICAS À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovada em: 20/05/2021

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Bernadete Barbosa Morey
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Orientadora

Profa. Dra. Marta Figueredo dos Anjos
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Examinador Interno

Profa. Dra. Maria Maroni Lopes
Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN
Examinador Interno

Profa. Dra. Rogéria Gaudencio do Rêgo
Universidade Federal da Paraíba – UFPB
Examinador Externo

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg
Universidade Federal do Pará – UFPA
Examinador Externo

**NATAL – RN
2021**

AGRADECIMENTOS

Minha gratidão a Deus por ser a força infinita e por ter protegido e guiado os meus caminhos.

À professora orientadora da pesquisa, Bernadete Morey, pelos ensinamentos, tornando possível a finalização desta Tese.

Aos professores, membros participantes da banca de qualificação e defesa, composta por Giselle Costa de Sousa, Marta Figueredo dos Anjos, Adriel Gonçalves Oliveira, Maria Maroni Lopes, Rogéria Gaudencio do Rêgo e João Cláudio Brandemberg. Obrigada pelas sugestões e contribuições ao trabalho.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPgECM/UFRN) pelo exemplo e contribuições.

Agradeço imensamente à professora Marta Figueredo dos Anjos e aos licenciandos do Curso de Matemática (UFRN/Natal), participantes desta pesquisa, pela colaboração, compromisso e Labor conjunto por meio de diálogo.

À turma de 2017.2 do PPgECM/UFRN pelos grandes momentos que passamos juntos.

Aos colegas do Grupo de Estudos (NUPHEM/UFRN) pelas discussões que me orientaram no processo teórico-metodológico para a realização desta investigação.

Agradeço ao meu querido pai, Valdebam, pelo amor e carinho de sempre.

Agradeço à Maria (mãe) da minha vida, pelas orações e com seu amor incondicional me ensinou sobre a vida.

Aos meus irmãos, Vilmar, Valteido, Valdi e Vagner, por serem fontes de luz e inspiração.

Aos meus sobrinhos e sobrinhas por encher a minha vida de alegria.

Minha gratidão ao meu tio Erni Fernandes, pela contribuição ao longo do meu estudo.

Agradeço à Rogéria Gaudencio pela amizade e por todo apoio dado a minha formação enquanto professora e pesquisadora em Educação Matemática.

Sou grata à Jussara Patrícia, minha irmã de coração, pessoa que admiro e a quem devo gratidão por incentivar-me e apoiar-me nas horas mais difíceis.

Às amigas Eloisa Myrela e Marlene Araújo pelo incentivo; pela alegria e as *caminhadas* na orla de Ponta Negra.

À Marília Costa, por sua ajuda incondicional.

Agradeço imensamente aos meus pais por terem me disponibilizado o sítio *Carnaúba* onde moram no sertão da Paraíba, utilizando como ambiente para o isolamento social devido à pandemia de Covid-19. O sítio proporcionou-me uma conexão forte com a natureza e uma grande variedade de experiências com recreação focada nos campos terapêutico e psicológico.

À CAPES, pela concessão da bolsa, tornando possível a realização desta pesquisa.

E, finalmente, GRATIDÃO! GRATIDÃO! GRATIDÃO!

Dedico este trabalho às Marias.

Maria, Maria

É um dom, uma certa magia

Uma força que nos alerta 

Milton Nascimento

RESUMO

Esta pesquisa faz um estudo sobre Matemática Recreativa, abordando seus aspectos conceituais, didático-pedagógicos e as tarefas mais frequentes: jogos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos. A questão norteadora da pesquisa é: quais características da Matemática Recreativa podem ser evidenciadas por meio dos princípios da Teoria da Objetivação, potencializando seu uso em sala de aula? Como objetivo de pesquisa, nos propusemos a investigar contribuições teórico-metodológicas da Teoria da Objetivação para a proposição de tarefas de Matemática Recreativa em sala de aula. Nesse contexto, a tese estabelecida é que tarefas de Matemática Recreativa, elaboradas com base no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação, contribuem a formação matemática do estudante como cidadão em uma coletividade histórico-cultural. Para tal, realizamos um mapeamento de pesquisas em Matemática Recreativa a partir de Teses e Dissertações produzidas entre 1994 e 2018. Esse mapeamento contribuiu para a compreensão da Matemática Recreativa como uma abordagem metodológica que pode proporcionar motivação, prazer e diversão, entre outros aspectos positivos. Esse estudo possui uma abordagem qualitativa do tipo exploratória, utiliza o método de análise multimodal e está fundamentado na Teoria da Objetivação. Assim, organizamos a proposta Didático-Pedagógica à luz da Teoria da Objetivação, de modo a apresentar aos estudantes de Licenciatura em Matemática a Matemática Recreativa em suas vertentes mais relevantes, tanto do ponto de vista de resolução de problemas como de reflexões pedagógicas. Desse modo, desenvolvemos a oficina exploratória Matemática Recreativa para professores e estudantes de Licenciatura em Matemática. Quanto à intervenção pedagógica foi composta por cinco tarefas a serem desenvolvidas com os licenciandos do Curso de Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN/Natal). Contudo, da intervenção proposta, só foi aplicada a Tarefa 1. Quanto à análise da oficina, verificamos que estudantes e professores se mostraram interessados na leitura e na resolução do Problema Recreativo de forma divertida e prazerosa, promovendo um trabalho de cooperação humana, nutrido por uma ética de responsabilidade, compromisso e cuidado com o outro. Em relação à Tarefa 1 proporcionou aos licenciandos pensamentos éticos e reflexivos, pois trabalharam em um ambiente colaborativo por meio do Labor conjunto e sustentado por uma Ética Comunitária. Tais resultados indicam que a inserção de tarefas de Matemática Recreativa na formação de professores de Matemática possibilita maior dinamicidade e ludicidade nas aulas.

Palavras-chave: Matemática Recreativa. Teoria da Objetivação. Proposta Didático-Pedagógica. Formação de Professores de Matemática.

ABSTRACT

This research is a study on Recreational Mathematics, and it approaches its conceptual and didactic-pedagogical aspects as well as its most frequent tasks: mathematical games, mathematical puzzles and Recreational Problems. The guiding question of the research is: which characteristics of Recreational Mathematics can be evidenced through the principles of the Theory of Objectification, enhancing its use in the classroom? As a research objective, we proposed to investigate the theoretical-methodological contributions of the Theory of Objectification to the proposition of Recreational Mathematics tasks in the classroom. In this context, the established thesis is that Recreational Mathematics tasks, based on the Joint Labor and the Community Ethics of the Theory of Objectification, contribute to the student's mathematical formation as a citizen in a historical-cultural community. To this end, a mapping activity was carried out focusing on research in Recreational Mathematics using Theses and Dissertations produced between 1994 and 2018. This mapping contributed to the understanding of Recreational Mathematics as a methodological approach that can provide motivation, pleasure and fun, among other positive aspects. This study has a qualitative exploratory approach, uses the multimodal analysis method and is based on the Theory of Objectification. Thus, a Didactic-Pedagogical proposal was organized in the light of the Theory of Objectification, in order to present to the Mathematics graduate students the Recreational Mathematics in its most relevant aspects, both from the point of view of problem solving and pedagogical reflections. Thus, an exploratory workshop on Recreational Mathematics was developed for teachers and students of Mathematics Degree. As for the pedagogical intervention, it consisted of five tasks to be developed with the the graduates of Mathematics degree at the Federal University of Rio Grande do Norte (UFRN/Natal). However, only Task 1 of the proposed intervention was applied. As for the workshop analysis, we found that students and teachers were interested in reading and solving the Recreational Problem in a fun and pleasurable way, promoting a work of human cooperation, nourished by the ethics of responsibility, commitment and care for others. In relation to Task 1 provided, the students with ethical and reflective thoughts, as they worked in a collaborative environment through Joint Labor and supported by a Community Ethics. Such results indicate that the insertion of Recreational Mathematics tasks in the training of Mathematics teachers allows greater dynamism and playfulness in classes.

Keywords: Recreational Mathematics. Theory of Objectification. Didactic-Pedagogical Proposal. Training of Mathematics Teachers.

RESUMEN

Esta investigación se trata de un estudio sobre Matemática Recreativa, incluyendo sus aspectos conceptuales, didácticos, pedagógicos y las tareas más frecuentes: juegos, rompecabezas matemáticos y Problemas Recreativos. La pregunta orientadora de la investigación es: ¿qué características de la Matemática Recreativa se pueden evidenciar a través de los principios de la Teoría de la Objetivación, potenciando su uso en el aula? Como objetivo de investigación, nos propusimos a pesquisar las contribuciones teóricas y metodológicas de la Teoría de la Objetivación para la proposición de tareas de Matemática Recreativa en aula de clase. En ese contexto, la tesis establecida es que ejercicios de Matemática Recreativa, elaborados con base en la Labor conjunta y en la Ética Comunitaria de la Teoría de la Objetivación, contribuyen a la formación matemática de la estudiante matemática, en calidad de ciudadano en una colectividad histórica y cultural. Para ello, realizamos un mapeo de investigaciones en Matemática Recreativa a partir de Tesis y Disertaciones producidas entre 1994 y 2018. Ese mapeo nos ha permitido comprender la Matemática Recreativa como un abordaje metodológico que posibilita proporcionar motivación, placer y diversión, entre otros aspectos positivos. Ese estudio posee un abordaje cualitativo exploratorio, tiene como método el análisis multimodal y se fundamenta en la Teoría de la Objetivación. Así, organizamos la propuesta Didáctica y Pedagógica basada en la Teoría de la Objetivación a fin de presentar a los estudiantes universitarios de Matemáticas la Matemática Recreativa en sus aspectos más relevantes, tanto en la perspectiva de resolución de problemas como de reflexiones pedagógicas. También desarrollamos el taller exploratorio Matemática Recreativa para profesores y estudiantes universitarios de Matemáticas. La intervención pedagógica fue compuesta por cinco tareas que serían aplicadas a los estudiantes universitarios del curso de Matemáticas de la Universidad Federal do Rio Grande do Norte (UFRN/Natal). Sin embargo, de la intervención propuesta, solo se aplicó la Tarea 1. En cuanto al análisis del taller exploratorio Matemática Recreativa, verificamos que estudiantes y profesores se mostraron interesados en la lectura y en la resolución del Problema Recreativo de modo divertido y placentero, promoviendo un trabajo de cooperación humana, nutrido por una ética de responsabilidad, compromiso y cuidado con el otro. La Tarea 1 ha proporcionado a los estudiantes universitarios pensamientos éticos y reflexivos, una vez que trabajaron en un ambiente colaborativo por medio del Labor conjunto y sostenido por una Ética Comunitaria. Estos resultados indican que incluir tareas de Matemática Recreativa en la formación de profesores de Matemáticas posibilita que las clases sean más dinámicas y lúdicas.

Palabras clave: Matemática Recreativa. Teoría de la Objetivación. Propuesta Didáctica y Pedagógica. Formación de Profesores de Matemáticas.

LISTA DE IMAGENS

Figura 1. Bolas de Pedra Esculpidas da Escócia.	51
Figura 2. Tartaruga Lo-Shu	52
Figura 3. Padrão Quadrado com Marcações e Números.	53
Figura 4. Estrutura Metodológica da Pesquisa.	111
Figura 5. Interações dos estudantes-professores no processo de leitura	122
Figura 6. Labor conjunto entre os estudantes-professores no processo de leitura	126
Figura 7. Labor conjunto estudantes-professor	128
Figura 8. Interação dos alunos do Grupo 4 com reflexão sobre Construtivismo.	139
Figura 9. Interação dos alunos do Grupo 4 com reflexão sobre Ética Comunitária.....	142
Figura 10. Sequência de gestos para explicar os vetores da Ética Comunitária.....	143
Figura 11. Labor conjunto professor-alunos	144

LISTA DE QUADROS

Quadro 1. Dissertações em Matemática Recreativa Publicadas no Brasil.....	29
Quadro 2. Teses em Matemática Recreativa Publicadas no Exterior.	32
Quadro 3. Dissertações em Matemática Recreativa Publicadas no Exterior.	33
Quadro 4. Antigos Problemas (clássicos) de Natureza Recreativa.	53
Quadro 5. Obras relacionadas à Matemática Recreativa.....	72
Quadro 6. Propagadores da Matemática Recreativa.	61
Quadro 7. Outras expressões sobre Matemática Recreativa.	68
Quadro 8. Vantagens do uso da Matemática Recreativa.....	72
Quadro 9. Tarefas da Proposta Didático-Pedagógica	98
Quadro 10. Identificação da Composição dos Grupos de Trabalho.....	114
Quadro 11. Composição dos Grupos de Trabalho da Oficina.....	118
Quadro 12. Primeira parte do Problema dos 35 Camelos.	121
Quadro 13. Segunda parte do Problema dos 35 Camelos.	127
Quadro 14. Vantagens e Desvantagens do uso da Matematica Recreativa.....	132

LISTA DE TABELAS

Tabela 1. Teses e Dissertações Obtidas no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES.	23
Tabela 2. Teses e Dissertações Obtidas no site da BDTD.....	24
Tabela 3. Teses e Dissertações Obtidas após uma Análise no site da BDTD	25

LISTA DE ABREVIATURAS

BDTD – Biblioteca Digital de Teses e Dissertações

CEP – Comitê de Ética em Pesquisa

MR – Matemática Recreativa

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

PPgECM – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

PR – Problemas Recreativos

RM – Recreações Matemáticas

TO – Teoria da Objetivação

TCLE – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

UFRN – Universidade Federal do Rio Grande do Norte

RN – Rio Grande do Norte

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	15
1. MATEMÁTICA RECREATIVA.....	22
1.1. <i>Mapeamento de Teses e Dissertações em Matemática Recreativa.....</i>	22
1.1.1. <i>Teses e Dissertações em Matemática Recreativa Publicadas no Brasil e no Exterior.....</i>	28
1.1.2. <i>Resultados dos Estudos do Mapeamento.....</i>	36
1.2. <i>Teses e Dissertações de Maior Relevância ao nosso Estudo.....</i>	38
1.2.1. <i>Análise das Teses e Dissertações em Matemática Recreativa.....</i>	39
1.2.2. <i>Um Breve Recorte Histórico sobre Antiguidade da Matemática Recreativa como Atividade Humana de Entretenimento</i>	51
1.2.3. <i>Concepções, Aspectos e Principais Tarefas da Matemática Recreativa</i>	64
2. TEORIA DA OBJETIVAÇÃO	78
2.1. <i>Conceitos Fundamentais da Teoria da Objetivação</i>	78
2.2. <i>Análise Multimodal na Perspectiva da Teoria da Objetivação.....</i>	85
3. PROPOSTA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA: À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO	90
3.1. <i>Organização da Proposta Didático-Pedagógica.....</i>	90
3.2. <i>Recomendações Didático-Pedagógica aos Professores de Matemática</i>	93
4. METODOLOGIA DE ANÁLISE	109
4.1. <i>Natureza do Estudo.....</i>	109
4.2. <i>Metodologia da Intervenção Pedagógica.....</i>	110
4.3. <i>Coleta de Dados e Processo de Organização de Dados Coletados para Análise.....</i>	113
4.3.1 <i>Participantes da Pesquisa</i>	115
4.4. <i>Oficina – Matemática Recreativa</i>	116
4.4.1 <i>Análise da Oficina Matemática Recreativa</i>	120
4.4.2 <i>Discussão dos Resultados da Oficina</i>	131
4.5. <i>Tarefa 1 – Introdução à Teoria da Objetivação.....</i>	133
4.5.1 <i>Análise da Ação B – Leitura e Discussão do texto A Teoria da Objetivação: uma teoria de ensino e aprendizagem.....</i>	137
4.5.2 <i>Discussão dos Resultados da Tarefa 1.....</i>	151
5. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	154
REFERÊNCIAS	161
APÊNDICES	166
<i>Apêndice A – Tarefas Matemáticas Recreativas.....</i>	167
ANEXOS	211
<i>Anexo I – Parecer do Projeto de Pesquisa – CEP.....</i>	212
<i>Anexo II – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido</i>	213
<i>Anexo III – Termo de Autorização para Uso de Imagens (fotos e vídeos).....</i>	216
<i>Anexo IV – Termo de Autorização para Gravação de Voz.....</i>	217

APRESENTAÇÃO

No campo da Educação, mais especificamente, da Educação Matemática, há uma crescente preocupação com os tipos de abordagens metodológicas que melhor responderiam às demandas atuais do ensino de Matemática, cabendo aos professores conhecer várias possibilidades que lhes permitam escolher as mais adequadas ao seu contexto educativo.

No Brasil, a partir de 1980, várias abordagens metodológicas em Educação Matemática ganharam destaque. Dentre essas, encontram-se, por exemplo, Resolução de Problemas, Jogos, História da Matemática, Etnomatemática, Modelagem Matemática, Tecnologias Digitais e Investigação Matemática.

Uma vertente que pode associar, como veremos em detalhes adiante no texto, a Resolução de Problemas, o uso de Jogos, a História da Matemática e a Etnomatemática é a Matemática Recreativa (MR), assim, tomamos a MR como objeto de estudo em nossa pesquisa.

No presente estudo, apresentamos algumas possibilidades do uso da Matemática Recreativa nas aulas de Matemática. E, em uma formulação concisa, podemos falar que a MR consiste na busca de promover na sala de aula o aprendizado da Matemática associado à investigação de problemas curiosos, desafiantes e divertidos. Fora da sala de aula, a MR é elemento importante na divulgação científica. Em outras palavras, poderíamos dizer que a MR nas aulas de Matemática procura ir além do aspecto cognitivo, mas, também, desenvolver o aspecto emocional e lógico do aprendizado matemático.

A Matemática Recreativa é uma abordagem metodológica que pode contribuir para propósitos mais gerais, por exemplo: promover o aprendizado de Matemática; relacionar a Matemática estudada em sala de aula com a História da Matemática; proporcionar entretenimento/entusiasmo e, fora da sala de aula, servir como meio de popularização da Matemática. No entanto, queremos destacar algumas potencialidades que a Matemática Recreativa pode promover mais especificamente: o prazer, a alegria, a diversão e outras dimensões positivas em sala de aula e, com isto, o desenvolvimento dos estudantes.

Neste sentido, uma contribuição valiosa para as práticas de sala de aula seria apontar caminhos para melhorar a relação afetiva dos estudantes com a Matemática, de forma que a Matemática Recreativa seria um elemento importante neste processo. Além disso, é importante ter em vista que não basta a Matemática Recreativa ter as potencialidades descritas, pois existe mais um fator importante a considerar: a Matemática Recreativa só entrará nas salas de aula se

os professores conhecerem sua potencialidade e se dispuserem a isto. Para tanto, os professores devem se sentir preparados para o desafio, além de considerar que o esforço dará resultado, ou seja, é necessário que os professores de Matemática se mostrem propensos a levar tal proposta em frente.

Segantini (2015), reconhecendo a importância de trabalhar a MR em sala de aula e em diferentes níveis de ensino, entende que a Matemática Recreativa:

[...] como um vasto campo de possibilidades, tanto para o aluno quanto para o professor, pois propicia ao primeiro, despertar seu interesse, questionar, utilizar suas próprias estratégias, desenvolver formas de raciocínio, usar a criatividade, a imaginação e trabalhar em grupos; e, ao segundo, desmitificar a matemática promovendo discussão, reflexão, participação (SEGANTINI, 2015, p. 121-122).

O uso da Matemática Recreativa nas aulas pode promover alterações tanto na estrutura da sala de aula como também na maneira de ensinar e de aprender os conteúdos matemáticos, mostrando o lado lúdico e criativo da Matemática. Como nos indica Bártlová (2016), a MR é um tesouro de problemas que pode tornar a Matemática divertida. Costa (2014), por sua vez, afirma que a MR “[...] fornece uma variedade de problemas, podendo cada um deles ser alargado ou alterado em função do objetivo que se pretende atingir” (COSTA, 2014, p. 3).

Dessa forma, a Matemática Recreativa pode se constituir como uma importante abordagem metodológica para o ensino de Matemática, pois pode ser vista como uma forma lúdica de apresentar problemas, jogos matemáticos e quebra-cabeças matemáticos, dentre outras estratégias, e não só para a diversão. Nesse sentido, seu uso pode contribuir para tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e atraentes para os estudantes.

A pesquisa desenvolvida por Menezes (2004) evidencia que:

[...] o desconhecimento de muitos colegas professores pelo assunto e suas aplicações ainda é motivo para resistências em adotar a prática do uso de recreações em sala de aula. Apesar de já existirem pesquisas, textos com orientações para essa prática, nem todos têm acesso às informações disponíveis a respeito dela (MENEZES, 2004, p. 3).

No Brasil, existem vários estudos e pesquisas (GÓES, 2002; SPADA, 2009; SILVA, 2010; dentre outros) que enfatizam o uso de jogos matemáticos, resolução de problemas e tarefas recreativas no ensino de Matemática. Nestes trabalhos defende-se que tarefas dessa

natureza podem contribuir para tornar a sala de aula um ambiente divertido e favorável à aprendizagem. No entanto, estes estudos e pesquisas são pontuais e não têm como foco a Matemática Recreativa, uma Matemática de entretenimento.

O presente estudo apresenta aos professores de Matemática, na formação inicial as possibilidades, as vantagens e desvantagens de introduzir a Matemática Recreativa em sala de aula. Em razão disto, destacamos como objeto de estudo: *a Matemática Recreativa, tomada em seus aspectos conceituais, didático-pedagógicos e tarefas mais frequentes: jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos.*

Antes de tratarmos da utilização da Matemática Recreativa em sala de aula, compreendemos ser importante refletir sobre algumas questões, por exemplo, que Dissertações e Teses versam sobre MR em âmbito nacional e internacional? Quais Teses e Dissertações trazem as definições e os aspectos da MR? Quais as propostas didáticas apresentadas nas Dissertações e Teses? Existem outros termos utilizados para tratar da MR? Existem compreensões distintas entre os pesquisadores sobre a MR? O que estamos entendendo por MR e qual termo iremos adotar?

Para examinar a questão da possibilidade de introduzir a MR em sala de aula, nosso estudo concentra a atenção na parte do processo educacional que envolve o professor de Matemática em formação inicial, porém, existem muitos pontos desconhecidos relacionados ao posicionamento dos licenciandos em Matemática. Nesse sentido, é necessário interrogar:

- *Os licenciandos em Matemática estão familiarizados com a ideia de uma Matemática Recreativa? Quais as oportunidades que eles já tiveram para tal familiarização?*

- *Os licenciandos em Matemática consideram o que é apresentado na literatura vigente como Matemática Recreativa? Se sim, em que sentido?*

- *Os licenciandos de Matemática acreditam que a introdução de tarefas de Matemática Recreativa no cotidiano de sala de aula seria positiva para os estudantes? Este processo iria desperdiçar o tempo que seria dedicado a uma Matemática mais usual?*

- *Os licenciandos de Matemática se sentem preparados para a introdução de tarefas com Matemática Recreativa nas aulas de Matemática? Se não, o que falta?*

Assim, a questão norteadora da nossa pesquisa é: *quais características da Matemática Recreativa podem ser evidenciadas por meio dos princípios da Teoria da Objetivação, potencializando seu uso em sala de aula?*

Entendemos que as respostas a tal indagação nos darão elementos para fazer recomendações didáticas e pedagógicas que ajudem a introduzir a MR em sala de aula de Matemática. Neste sentido, nosso intuito foi levar alguns destes questionamentos ao público-alvo de nossa pesquisa – os licenciandos da disciplina de Tópicos de História da Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRN/Natal, pois sabemos que no referido Curso, além de futuros professores de Matemática do Ensino Básico, também se encontram professores em pleno exercício da função.

Com o objetivo de auxiliar as discussões relacionadas à nossa questão de investigação, apresentamos aos professores de Matemática em formação inicial a Matemática Recreativa por meio de uma proposta Didático-Pedagógica ancorada na Teoria da Objetivação (TO) que é uma teoria de ensino-aprendizagem de corrente sociocultural (ver terceiro Capítulo).

Como aqui tratamos da Matemática Recreativa como uma metodologia de ensino, sentimos a necessidade de assumir um referencial teórico que abordasse o ensino-aprendizagem da Matemática de forma abrangente, o que nos permitiria olhar o processo, não apenas do ponto de vista da eficiência da formação Matemática. Sendo assim, encontramos na Teoria da Objetivação os fundamentos teóricos, filosóficos e metodológicos que procurávamos para nossa investigação.

Para a Teoria da Objetivação o aprendizado é um processo entrelaçado de conhecer e vir a ser, isto é, considera tanto o ponto de vista do saber quanto a formação geral do sujeito cognoscente. A Teoria da Objetivação foi o arcabouço teórico que nos acompanhou do início ao final da pesquisa. A descrição mais detalhada dessa teoria de ensino-aprendizagem e conceitos-chave assumidos, encontra-se dissolvida, tanto no segundo Capítulo, em que apresentamos o arcabouço teórico da pesquisa, como ao longo dos Capítulos seguintes.

Em nossa participação, no Seminário Nacional de História da Matemática¹ (SNHM XIII) e na 29ª Semana de Matemática da UFRN/Natal, tivemos a oportunidade de apresentar a Matemática Recreativa a professores de Matemática (professores em formação inicial e continuada), o que contribuiu para nos ajudar a formular algumas constatações iniciais elencadas a seguir: 1) a MR era desconhecida por alguns dos professores e estudantes do Curso de Matemática; 2) a MR despertou o interesse da maioria dos participantes; 3) os professores

¹ Publicação do artigo, intitulado *O uso da História da Matemática e Matemática Recreativa em sala de aula no XIII SNHM*, realizado na Universidade Estadual do Ceará (UECE), Fortaleza (CE), no período de 14 a 17 de abril de 2019, e a Oficina *Matemática Recreativa* realizada na 29ª Semana de Matemática, na UFRN/Natal, no período de 6 a 8 de novembro de 2019.

não conheciam formas de introduzir a MR em sala de aula e; 4) não tiveram a oportunidade de refletir sobre a validade de tal proposta e/ou sobre a formação profissional necessária para assumir tal tarefa.

Para coletar as informações que possibilitaram essas conclusões iniciais, utilizamos como instrumento de produção de dados notas de campo e, na Semana de Matemática, desenvolvemos a oficina *Matemática Recreativa*, cujo registro de dados foi realizado por meio da gravação de vídeos. Os referidos procedimentos da análise de dados estão esboçados no quarto Capítulo.

Assim, considerando os argumentos expostos e a questão norteadora, temos o seguinte objetivo central de pesquisa: *investigar contribuições teórico-metodológicas da Teoria da Objetivação para a proposição de tarefas de Matemática Recreativa em sala de aula.*

Na perspectiva de atingirmos o objetivo geral, optamos por organizar nossa investigação com base nos seguintes objetivos específicos.

- Traçar o perfil da Matemática Recreativa, apoiado em Teses e Dissertações, destacando os aspectos mais relevantes para um conhecimento significativo e multilateral dessa ferramenta;
- Construir uma proposta Didático-Pedagógica com os tipos mais frequentes de tarefas de Matemática Recreativa (jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos), ancorada no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação;
- Aplicar e analisar elementos da proposta Didático-Pedagógica, a um grupo de licenciandos em Matemática, avaliando as contribuições da Teoria da Objetivação no processo.

Nesse contexto, a tese estabelecida nesta investigação é: *tarefas de Matemática Recreativa, elaboradas com base no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação, contribuem a formação matemática do estudante como cidadão em uma coletividade histórico-cultural.*

Embora, nossa investigação tenha sido realizada com os licenciandos do Curso de Matemática (UFRN/Natal), entendemos que podemos fazer algumas generalizações voltadas para a inserção da Matemática Recreativa em sala de aula, na Educação Básica, considerando as contribuições dos elementos da Teoria da Objetivação destacados em um de nossos Objetivos Específicos.

Compreendemos, ainda, a importância da realização de vivências que estabelecem a vinculação entre teoria e prática com os licenciandos do Curso de Matemática, o que ampliará as suas alternativas de trabalhar Matemática em sala de aula, pensando não apenas no cumprimento de uma lista de conteúdos curriculares, mas permitindo que seus estudantes associem a esses conteúdos, práticas sociais, culturais e históricas, voltadas para o bem-estar de todos.

Assim, antes de iniciar um aprofundamento sobre o tema, apresentamos a estrutura organizacional de nosso texto, que está organizado em cinco Capítulos, incluindo as Considerações Finais.

A *Apresentação* desta Tese é dedicada à exposição inicial de elementos da Matemática Recreativa e da Teoria da Objetivação, da justificativa, do objeto de estudo, a questão de pesquisa, dos objetivos de investigação e a tese defendida.

No primeiro Capítulo – *Matemática Recreativa* – tratamos do mapeamento de Teses e Dissertações produzidas por pesquisadores brasileiros e estrangeiros que versam sobre MR, publicadas no período de 24 anos, mais especificamente, entre os anos de 1994 e 2018. Em seguida, realizamos uma apresentação e análise dos trabalhos de maior relevância para nosso estudo e destacamos autores que discutem a dimensão histórica da MR como atividade humana de entretenimento e descrevemos alguns antigos problemas (clássicos) de natureza recreativa, além de matemáticos, obras e autores que contribuíram para a divulgação da MR. Enfim, apresentamos as concepções e os aspectos da MR; as vantagens e desvantagens de introduzir essa ferramenta em sala de aula, além das principais tarefas em MR.

No segundo Capítulo – *Teoria da Objetivação* – discutimos sobre os conceitos-chave da Teoria da Objetivação (RADFORD, 2014; 2015; 2018a; 2018b; 2020) que utilizamos na pesquisa. Em sequência, discorremos sobre a análise multimodal (ARZARELLO, 2006; RADFORD; ARZARELLO; EDWARDS; SABENA, 2017), suporte para a análise de dados dessa investigação.

No terceiro Capítulo – *Proposta Didático-Pedagógica: a luz da Teoria da Objetivação* – tratamos do processo de organização e construção da proposta Didático-Pedagógica, tendo como suporte teórico-metodológico a Teoria da Objetivação. Em seguida, tecemos algumas recomendações didáticas e pedagógicas ao professor de Matemática sobre a elaboração e o uso das tarefas que compõem a referida proposta didática.

No quarto Capítulo – *Metodologia de Análise* – apresentamos a natureza do estudo, a metodologia de intervenção pedagógica, a coleta e organização de dados, assim como, o público-alvo. Descrevemos a análise de abordagem multimodal dos meios semióticos mobilizados pelos participantes da investigação de duas experiências vivenciadas: a primeira, a oficina denominada *Matemática Recreativa*, envolvendo professores de Matemática da Educação Básica de escolas de Natal/RN e estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática (UFRN/Natal); e a segunda, a Tarefa 1 intitulada *Introdução à Teoria da Objetivação*, desenvolvida com os licenciandos do Curso de Matemática (UFRN/NATAL). Ao final, apresentamos uma discussão dos resultados da oficina e da Tarefa 1, tendo por base a fundamentação teórica adotada nesta investigação – a Teoria da Objetivação.

No Capítulo das *Considerações Finais*, buscamos destacar as respostas que elaboramos às questões norteadoras da investigação e discussão sobre o argumento da tese com base nos dados produzidos e no referencial teórico. Além disso, destacamos as limitações da investigação e orientações para prosseguimento de pesquisas sobre o mesmo tema. Por último, incluem-se as Referências, os Apêndices e os Anexos.

1 MATEMÁTICA RECREATIVA

Este Capítulo tem como objetivo conhecer um panorama de pesquisas que versam sobre Matemática Recreativa a partir de Teses e Dissertações produzidas por pesquisadores brasileiros e estrangeiros, mas também, apresentar os trabalhos de maior relevância ao nosso estudo, com o propósito de obter materiais com indicações de como apresentar a Matemática Recreativa aos professores de Matemática em formação inicial.

1.1. Mapeamento de Teses e Dissertações em Matemática Recreativa

O objetivo desta seção é apresentar um panorama de pesquisas envolvendo Matemática Recreativa a partir de Teses e Dissertações produzidas por pesquisadores brasileiros e estrangeiros entre os anos de 1994 e 2018, bem como, a abordagem metodológica, uma apresentação inicial das Dissertações e Teses do *corpus* da pesquisa, além dos resultados de estudo do mapeamento.

Inicialmente, explicamos os procedimentos metodológicos adotados, ou seja, os passos que trilhamos na construção do *corpus* a ser analisado sobre Matemática Recreativa. Este mapeamento de pesquisas sobre Matemática Recreativa pode contribuir para caracterizar, descrever e compreender melhor este campo de estudo. Fiorentini, Passos e Lima (2016) afirmam que o mapeamento da pesquisa é:

[...] como um processo sistemático de levantamento e descrição de informações acerca das pesquisas produzidas sobre um campo específico de estudo, abrangendo um determinado espaço (lugar) e período de tempo. Essas informações dizem respeito aos aspectos físicos dessa produção (descrevendo onde, quando e quantos estudos foram produzidos ao longo do período e quem foram os autores e participantes dessa produção), bem como aos seus aspectos teórico-metodológicos e temáticos (FIORENTINI; PASSOS; LIMA, 2016, p. 18).

O mapeamento da pesquisa tem como teor principal os aspectos descritivos de um campo de estudo, mais do que vislumbrar seus resultados, portanto, tomamos como objeto de estudo a Matemática Recreativa e realizamos um levantamento das Dissertações e Teses

produzidas por pesquisadores brasileiros e estrangeiros durante o período de 24² anos (1994 a 2018).

Para o levantamento³ das Dissertações e Teses, foi realizada uma pesquisa que teve como fonte de consulta o Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior⁴ (CAPES), a base nacional da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações⁵ (BDTD) e a plataforma Portal Periódicos Capes⁶ para busca da literatura internacional.

O levantamento bibliográfico (nacional e internacional) está apresentado em tabelas e quadros no corpo do trabalho e os demais trabalhos mapeados que não foram incluídos na análise, não serão apresentados nesta pesquisa, pois a maioria dos trabalhos não possuía nenhuma relação com a Matemática Recreativa.

Na primeira etapa adentramos no site de Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e optamos por utilizar no Brasil três termos de busca⁷ – Matemática Recreativa, Recreações Matemáticas e Problemas Recreativos – conforme mostra a Tabela 1.

Tabela 1. Teses e Dissertações Obtidas no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES.

Termos	Matemática Recreativa	Recreações Matemáticas	Problemas Recreativos
Total	45727	3838	82069

Fonte. Produzida pelas autoras (2019).

² Optamos iniciar a busca pelos anos finais do século XX, assim, definimos o período das publicações na literatura de 1994 a 2018.

³ As buscas foram realizadas de junho a agosto de 2019.

⁴ Caso haja interesse, buscar mais informações via link: <<https://www.capes.gov.br/>>.

⁵ A biblioteca citada pode ser consultada via link: <<http://bdtd.ibict.br/vufind/>>.

⁶ O Portal de Periódicos Capes fornece uma vasta gama de pesquisas produzidas em âmbito nacional e internacional. Para mais informações, acesse via link: <<https://www.periodicos.capes.gov.br/>>.

⁷ As definições dos termos serão discutidas na subseção 1.2.3.

Os números apresentados na Tabela 1, como é possível observar, são demasiado grandes, de forma que, devido às limitações de acesso no site da CAPES e à impossibilidade de refinamento da busca, optamos por não apresentar um quadro de todas as produções, mas citar os trabalhos que consideramos relevantes para nossa pesquisa. Esta escolha deu-se por meio dos trabalhos que apresentavam abordagens sobre Matemática Recreativa no título e/ou resumo.

Desse modo, fizemos uma leitura inicial e, em relação à produção científica sobre a temática que constitui o foco do nosso estudo, encontramos três pesquisas: 1) uma Tese de doutorado intitulada *Travessias Difíceis, Divisões Divertidas e Quadrados Mágicos: evolução histórica de três Recreações Matemáticas*, da autoria de Josinalva Estacio Menezes (2004), com o termo Recreações Matemáticas; 2) uma Dissertação de mestrado intitulada *Problemas Recreativos na obra O Homem que Calculava, de Malba Tahan, e a Resolução de Problemas*, da autoria de Clarice Segantini (2015), na qual apareceu ambos os termos, Problemas Recreativos e Matemática Recreativa; 3) uma Dissertação nomeada *Matemática Recreativa: uma experiência baseada em clubes*, de Bruno da Silva Ribeiro (2018), com o termo de busca Matemática Recreativa.

Frente às dificuldades encontradas para selecionar materiais no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, avançamos o levantamento para a segunda fonte de consulta, nesse caso, o site nacional da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD). Para isto, fizemos uma busca avançada em todos os campos e utilizamos as palavras-chave de acordo com a Tabela 2.

Tabela 2. Teses e Dissertações Obtidas no site da BDTD.

Termos	Matemática Recreativa	Recreações Matemáticas	Problemas Recreativos
Total	27	01	91

Fonte. Produzida pelas autoras (2019).

No levantamento inicial mostrado na Tabela 2, é possível verificar a quantidade de trabalhos que apresentam os termos de busca pesquisados, ou seja, 27 trabalhos⁸ com o termo

⁸ No site da BDTD consta 27 trabalhos, mas observamos que existe a duplicação de um trabalho, portanto, totalizam 26.

Matemática Recreativa, 01 (um) com a palavra Recreações Matemáticas e 91 trabalhos com a expressão Problemas Recreativos.

No intuito de identificar a quantidade de Teses e Dissertações dentre os trabalhos mapeados (Tabela 2), fizemos uma busca avançada usando o termo Matemática Recreativa. Para a opção Tese obtivemos 04 resultados e para Dissertação alcançamos 22. Com a expressão Recreações Matemáticas, não foi encontrada nenhuma Tese, mas, apenas uma Dissertação. Por fim, para o termo Problemas Recreativos, encontramos 21 Teses e 70 Dissertações, do total de 91 trabalhos levantados.

Após uma análise preliminar dos dados obtidos nessa etapa (Tabela 2), separamos as Teses das Dissertações e excluimos os trabalhos repetidos e duplicados, o que resultou nos dados da Tabela 3.

Tabela 3. Teses e Dissertações Obtidas após uma Análise no site da BDTD.

Termos	Número de dissertações	Número de teses	Total
Matemática Recreativa	22	04	26
Recreações Matemáticas	01	-	01
Problemas Recreativos	58	20	78
Total	81	24	105

Fonte. Produzida pelas autoras (2019).

Com base no levantamento apresentado na Tabela 3, temos um total de 24 Teses das quais 04 referem-se ao termo Matemática Recreativa e 20 incluem o termo Problemas Recreativos. Em relação ao total de 81 Dissertações catalogadas, 22 remetem ao termo Matemática Recreativa, 01 (uma) traz o termo Recreações Matemáticas e as 58 restantes correspondem ao termo Problemas Recreativos.

É importante mencionarmos que optamos por acrescentar a referência à Tese de Menezes (2004) e a referência à Dissertação de Ribeiro (2018), ambas encontradas no Catálogo

de Teses e Dissertações da Capes, como mencionado anteriormente, associadas aos trabalhos do site da BDTD, portanto, temos o total de 25 Teses e 82 Dissertações.

Não obstante, é importante destacar que, ao longo da coleta de dados no site da BDTD, foram identificadas algumas dificuldades, por exemplo, alguns títulos escritos de forma diferente da versão disponibilizada em PDF; títulos e resumos incompletos; duplicações de registro de trabalhos; materiais que estavam escaneados ou codificados, que dificultaram o processo de registro para citação de partes importantes do texto, como o nome dos autores, os títulos e resumos.

Para o levantamento bibliográfico internacional, tomamos como base a relação do Portal de Periódicos Capes e adotamos apenas o termo Matemática Recreativa em Português, Espanhol, Inglês e Francês.

O Portal de Periódicos Capes consta de várias bases de Teses e Dissertações, a título de exemplo: a base *Cybertesis (Tesis Electrónicas en Línea)*, a *Networked Digital Library of Theses and Dissertations*⁹ (NDLTD) que são bases definidas como um consórcio de universidades de vários países, Austrália, Brasil (BDTD), Canadá, Espanha, França, Itália, Portugal, dentre outros, e a base da *TEL*¹⁰ (*Thèses-En-Ligne*), apresentada como um servidor de Teses multidisciplinares da França.

Para iniciar a busca no Portal supracitado, adentramos pelo acesso CAFe (com login e senha de acesso estudantil) e buscamos a base *Cybertesis*, porém, identificamos que o site estava com problemas e, portanto, não foi possível realizar as pesquisas de informações na referida base.

A respeito da base de dados da NDLTD¹¹, primeiro adentramos na busca pelas Teses publicadas na França, que usavam o termo de busca *Récréations mathématiques*, e obtivemos 08 trabalhos.

Ainda na base NDLTD, fomos à busca de outras produções científicas sobre a temática que constitui o foco do nosso objeto de estudo, dessa vez, buscamos materiais publicados em

⁹ Para conhecer mais informações sobre essa base de pesquisa acesse o link: <<http://www.ndltd.org/>>.

¹⁰ Para conhecer mais informações sobre essa base de pesquisa acesse o link:<<http://tel.archives-ouvertes.fr/>>.

¹¹ Na base NDLTD, apenas França e Portugal tinham trabalhos acadêmicos disponibilizados (Teses e Dissertações).

Portugal, por meio da plataforma Repositórios Científicos de Acesso Aberto de Portugal¹² (RCAAP). Para tanto, empregamos a técnica de busca avançada pelo termo Matemática Recreativa¹³ pelo qual obtivemos 15 resultados para a opção Tese e 78 para a opção Dissertação.

Os trabalhos foram selecionados a partir da leitura dos títulos, resumos e palavras-chave. É importante mencionarmos que o site do RCAAP apresenta trabalhos publicados em diferentes países, a exemplo do Brasil, México, Peru e Equador.

Após uma análise preliminar das Teses mapeadas (RCAAP), observamos que 01 (uma) Tese também foi encontrada no site da BDTD, logo, excluindo essa repetição, temos um total de 14 Teses. Quanto às Dissertações, observamos também que, 10 dos 78 trabalhos – foram encontrados na base de dados da BDTD, portanto, excluindo os trabalhos repetidos, restaram 68 Dissertações.

Na base de dados da TEL, usando o termo de busca *Récréations mathématiques*, encontramos 02 Teses sobre Matemática Recreativa. A primeira delas intitulada *The works of Kőnig Dénes (1884-1944) in the domain of mathematical recreations and his treatment of recreational problems in his works of graph theory*, de autoria de Mitsuko Wate Mizuno (2010) – foi encontrada também na base de dados da NTLTD. A segunda Tese, intitulada *Jeu et apprentissages mathématiques: élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*, é da autoria de Nicolas Pelay (2011).

Cabe destacar a Tese de Tereza Bártlová (2016), intitulada *History and current state of Recreational Mathematics and its relation to serious mathematics*, que se constitui de fundamental importância para a nossa pesquisa e não foi encontrada nos sites de busca mencionados anteriormente, mas, a partir de citações em vários referenciais disponíveis na internet, ou seja, esse trabalho é do país da República Tcheca e não pertence aos países incluídos nas bases NDLTD e TEL.

Somando as Teses do levantamento internacional, foram encontradas 24 sendo: 8 deles oriundos da base de dados da NDLTD, publicadas na França; mais 01(um) encontrado na base da TEL (França); outrossim, excluimos 01 (um) trabalho que foi encontrado na base de dados

¹² Para conhecer melhor a plataforma, acesse o link: <<https://www.rcaap.pt/results.jsp>>.

¹³ O termo Matemática Recreativa possui a mesma grafia no Espanhol e em Português.

da NTLTD; somando mais 01(um) trabalho da República Tcheca encontrado em referenciais disponíveis na internet, além das 14 Teses mapeadas no site do RCAAP.

Contudo, ressaltamos que foram identificadas, ao longo da coleta de dados no Portal de Periódicos Capes, algumas dificuldades, por exemplo, a data de defesa escrita de forma diferente da versão em PDF e problemas de leitura de alguns trabalhos pelo travamento dos arquivos, alguns deles demoravam mais de 30 minutos para abrir. Assim, na subseção seguinte, fizemos uma apresentação das Teses e Dissertações que versam sobre MR produzidas no Brasil e no exterior.

1.1.1 Teses e Dissertações em Matemática Recreativa Publicadas no Brasil e no Exterior

A maioria das 25 Teses que localizamos no Brasil não se refere apenas à área de Educação Matemática, estando incluídas Teses na área das Ciências da Saúde, Tecnologias, Ciências Humanas, dentre outras. Neste sentido, destacamos somente as Teses em Educação Matemática ou de interesse para o nosso trabalho, de modo que obtivemos o material que consta a seguir, ou seja, apenas 02 trabalhos.

Apresentamos os trabalhos, destacando os títulos e o foco principal de cada um. A primeira Tese, intitulada *Matemática viva: o elo mágico entre existência e essência do ser humano*, de autoria de Hannelore Nehring (2003), teve como foco a resolução de situações-problemas, buscando formar alunos autônomos, corresponsáveis por sua formação intelectual, social e moral, além de indivíduos capazes de continuar a aprender, visando a melhoria da qualidade de vida individual e coletiva.

A segunda Tese, intitulada *Travessias Difíceis, Divisões Divertidas e Quadrados Mágicos: evolução histórica de três Recreações Matemáticas*, é da autoria de Josinalva Estacio Menezes (2004), caracteriza-se em um trabalho histórico relativo ao desenvolvimento de várias versões das três Recreações Matemáticas especificadas no título.

Consideramos os trabalhos de Nehring (2003) e Menezes (2004), relevantes para nossa pesquisa, porque, discorrem sobre temas relacionados à Matemática. Contudo, o estudo de Menezes (2004) parece particularmente relevante para a presente pesquisa, pois tem conexão direta com Matemática Recreativa e versa sobre dados históricos relacionados a várias versões de algumas Recreações Matemáticas, de modo que, voltaremos a discuti-lo na próxima seção deste Capítulo.

Sobre as Dissertações publicadas no Brasil, encontramos inicialmente 82 trabalhos, mas após excluir aquelas que não se referiam à Educação Matemática sobraram apenas 12 trabalhos, os quais estão dispostos no Quadro 1.

Quadro 1. Dissertações em Matemática Recreativa publicadas no Brasil.

Nº	Título	Autor	Ano
1.	O jogo como recurso didático na apropriação dos números inteiros: uma experiência de sucesso	Pércio José Soares	2008
2.	Como os estudantes lidam com diferentes representações? Um estudo com o bingo dos números racionais	Amanda Rodrigues Marques da Silva	2016
3.	O Laboratório de Educação Matemática na formação inicial de professores	Ana Maria Silveira Turrioni	2004
4.	A construção de jogos de regras na formação dos professores de Matemática	Arlene Buzatto Delabary Spada	2009
5.	O jogo de xadrez e a formação do professor de matemática	Daniel de Cerqueira Góes	2002
6.	A lógica da descoberta nos jogos digitais	Cristiano Natal Tonéis	2010
7.	O efeito transformador das atividades lúdicas nas aulas de Matemática	Leandro Pinto Bispo	2014
8.	Problemas Recreativos na Obra O Homem que Calculava, de Malba Tahan, e a Resolução de Problemas	Clarice Segantini	2015
9.	A Matemática nos truques, adivinhações e enigmas	Eryvelton Alves Sousa	2014
10.	A ludicidade na aprendizagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental	Gracineide Barros Santos	2016
11.	Contribuições do xadrez para o ensino-aprendizagem de matemática	Leomagon Rodrigues da Silva	2010
12.	Matemática Recreativa: uma Experiência Baseada em Clubes	Bruno da Silva Ribeiro	2018

Fonte. Produzido pelas pesquisadoras (2019).

Agrupamos os trabalhos que nos pareceram similares, a fim de realizar uma análise mais satisfatória como apresentado a seguir.

- Grupo 1 – Dissertações direcionadas para o ensino de tópicos específicos de Matemática como as pesquisas de Soares (2008) e Silva (2016);
- Grupo 2 – Dissertações que visam contribuir com os estudos em formação de professores, como Góes (2002), Turrioni (2004) e Spada (2009);
- Grupo 3 – Dissertações sobre temas diversos: Tonéis (2010), Silva (2010), Bispo (2014), Sousa (2014), Segantini (2015), Santos (2016) e Ribeiro (2018).

Nesta organização, apresentamos os trabalhos descritos no Quadro 1, destacando os títulos e o foco principal de cada um. A primeira Dissertação do Grupo 1, intitulada *O jogo*

como recurso didático na apropriação dos números inteiros: uma experiência de sucesso, da autoria de Pércio José Soares (2008), teve como foco investigar a potencialidade da reintrodução de números inteiros negativos a partir de uma intervenção de ensino pautada na resolução de problemas que utilizava jogos como recurso didático.

Já a segunda Dissertação desse Grupo, intitulada *Como os estudantes lidam com diferentes representações? Um estudo com o bingo dos números racionais*, de Amanda Rodrigues Marques da Silva (2016), teve como objetivo investigar o uso de um jogo para identificar como os estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental lidam com diferentes representações de números racionais.

Os estudos de Soares (2008) e Silva (2016) são importantes para nossa investigação, pois trazem discussões e reflexões sobre o uso de jogos no ensino de Matemática na Educação Básica.

Em relação ao Grupo 2, primeiro destacamos o trabalho de Daniel de Cerqueira Góes (2002), nomeado por *O jogo de xadrez e a formação do professor de matemática*, cujo objetivo era investigar habilidades e competências necessárias à formação do licenciado em Matemática.

A segunda pesquisa do Grupo – *O Laboratório de Educação Matemática na formação inicial de professores* – de autoria de Ana Maria Silveira Turrioni (2004) teve como objetivo analisar a possível contribuição do Laboratório de Ensino de Matemática – LEM para a formação do professor de Matemática.

Finalizando o Grupo 2, focamos no trabalho de Arlene Buzatto Delabary Spada (2009), intitulado *A construção de jogos de regras na formação dos professores de Matemática*, objetivou a análise do processo de inclusão dos jogos de regras nas práticas lúdicas dos estudantes-professores do Curso de Licenciatura em Matemática.

Os trabalhos desenvolvidos por Góes (2002), Spada (2009) e Turrioni (2004), são relevantes para a presente pesquisa, pois ressaltam a importância do uso de jogos matemáticos e das contribuições do LEM na formação de professores de Matemática.

Para o Grupo 3, destacamos inicialmente a Dissertação de Cristiano Natal Tonéis (2010), que é intitulada *A lógica da descoberta nos jogos digitais*, tendo como foco o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dentro de estruturas ontológicas presentes nos jogos digitais, tomando como exemplo modelar o game Myst.

Já o segundo trabalho, nomeado *Contribuições do xadrez para o ensino-aprendizagem de matemática*, da autoria de Leomagon Rodrigues da Silva (2010), investigou as contribuições que esse jogo pode oferecer para a aprendizagem matemática.

Ainda no Grupo 3, o trabalho intitulado *O efeito transformador das atividades lúdicas nas aulas de Matemática*, da autoria de Leandro Pinto Bispo (2014), objetivou a análise dos efeitos da utilização de desafios e truques com fundamentação Matemática em sala de aula como método motivacional para ensino de Matemática aos alunos do Ensino Médio.

O trabalho nomeado *A Matemática nos truques, adivinhações e enigmas*, de Eryvelton Alves Sousa (2014), teve como finalidade a abordagem dos problemas matemáticos conhecidos como truques, adivinhações ou enigmas, do ensino de Matemática no Ensino Fundamental e Médio.

O quinto trabalho deste grupo, intitulado *Problemas Recreativos na Obra O Homem que Calculava, de Malba Tahan, e a Resolução de Problemas*, da autoria de Clarice Segantini (2015), teve como objetivo investigar e analisar as apropriações e representações de um grupo de alunos do Ensino Médio frente aos problemas extraídos da obra *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan, em um ambiente de resolução de problemas.

A sexta Dissertação do Grupo 3, intitulada *A ludicidade na aprendizagem matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental*, de Gracineide Barros Santos (2016), teve como objetivo investigar as contribuições do uso de atividades e/ou estratégias lúdicas para aprendizagem matemática no 5º ano do Ensino Fundamental.

Por fim, o sétimo trabalho nomeado *Matemática Recreativa: uma Experiência Baseada em Clubes*, da autoria de Bruno da Silva Ribeiro (2018), teve como foco a elaboração e aplicação de atividades baseadas no conceito de clubes com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental utilizando a MR.

Consideramos as pesquisas de Tonéis (2010), Silva (2010), Bispo (2014), Sousa (2014), Segantini (2015), Santos (2016) e Ribeiro (2018), relevantes para nossa investigação, pois enfatizam o uso de jogos matemáticos, de Problemas Recreativos, de truques, adivinhações ou enigmas, no ensino de Matemática, em diferentes níveis de ensino.

A seguir, apresentamos as Teses e Dissertações mapeadas nas bases indexadas dos Periódicos Capes, que tratam da Matemática Recreativa publicadas no exterior. Assim, no levantamento internacional, foram encontradas 24 Teses. Contudo, ao realizarmos a leitura dos títulos, resumos e palavras-chave desses trabalhos, a quantidade de publicações foi reduzida a

06, pois a maioria não se referia à área de Educação Matemática e não tinha como foco a Matemática Recreativa. No Quadro 2, trazemos as Teses de maior relevância para nossa pesquisa¹⁴.

Quadro 2. Teses em Matemática Recreativa Publicadas no Exterior.

Nº	Título	Autor	País	Ano
1.	Sciences en jeux: les récréations mathématiques et physiques en France du XVIIe au XVIIIe siècle	Gilles Chabaud	França	1994
2.	The works of Kónig Dénes (1884-1944) in the domain of mathematical recreations and his treatment of recreational problems in his works of graph theory	Mitsuko Wate Mizuno	França	2010
3.	Jeu et apprentissages mathématiques: élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique	Nicolas Pelay	França	2011
4.	Des récréations arithmétiques au corps des nombres surréels et à la victoire d'un programme aux échecs: une histoire de la théorie des jeux combinatoires au XX ème siècle	Lisa Rougetet	França	2014
5.	History and current state of Recreational Mathematics and its relation to serious mathematics	Tereza Bártlová	República Tcheca	2016
6.	Jeu et apprentissages mathématiques, ingénieries didactiques et ludiques de deuxième génération	Alix Boissiere	França	2017

Fonte. Produzido pelas autoras (2019).

Por conseguinte, apresentamos os trabalhos do Quadro 2, destacando os títulos e a abordagem principal de cada pesquisa. O primeiro trabalho, intitulado *Sciences en jeux: les récréations mathématiques et physiques en France du XVIIe au XVIIIe siècle*, da autoria de Gilles Chabaud (1994), teve como foco as Recreações Matemáticas e Físicas na França do século XVII ao XVIII.

A segunda Tese – *The works of Kónig Dénes (1884-1944) in the domain of mathematical recreations and his treatment of recreational problems in his works of graph theory*, de Mitsuko Wate Mizuno (2010) – teve como destaque o matemático húngaro Dénes König (1884-1944), bem como, as Recreações Matemáticas, antes e depois de König, além dos conceitos da Teoria dos Grafos definidos na Monografia de König em 1936.

O terceiro trabalho, nomeado *Jeu et apprentissages mathématiques: élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*, de autoria de

¹⁴ É importante destacar que no levantamento bibliográfico internacional, nas bases NDLTD e TEL, não localizamos Teses escritas em espanhol.

Nicolas Pelay (2011), teve como propósito um estudo didático da relação entre jogo e a aprendizagem da Matemática, bem como, um estudo histórico das Recreações Matemáticas e Físicas (1694) de Jacques Ozanam (1640 – 1718).

A quarta Tese mapeada, intitulada *Des récréations arithmétiques au corps des nombres surréels et à la victoire d'un programme aux échecs: une histoire de la théorie des jeux combinatoires au XX ème siècle*, de Lisa Rougetet (2014), teve como objetivo as recreações aritméticas e a Matemática Recreativa na Europa, mas também, a história da teoria combinatória dos jogos no século XX.

A pesquisa intitulada *History and current state of Recreational Mathematics and its relation to serious mathematics*, de autoria de Tereza Bártlová (2016) teve como base um estudo sobre os aspectos históricos e pedagógicos da Matemática Recreativa.

Por fim, a Tese nomeada *Jeu et apprentissages mathématiques, ingénieries didactiques et ludiques de deuxième génération*, de Alix Boissiere (2017), investigou sobre jogo e aprendizagem matemática, além de engenharias educacionais e recreativas.

Todas as Teses mencionadas no Quadro 2, trazem contribuições relevantes sobre Matemática Recreativa, no cenário mundial de investigação sobre o tema, evidenciando o caráter geral que a temática apresenta, no âmbito das pesquisas em Educação Matemática.

Sobre as Dissertações publicadas no exterior, após filtrar quais do total das 68 levantadas se referiam à Educação Matemática, obtivemos o material que consta no Quadro 3, ou seja, apenas 11 trabalhos.

Quadro 3. Dissertações em Matemática Recreativa Publicadas no Exterior.

Nº	Título	Autor	País	Ano
1.	El uso de la matemática recreativa en la clase de matemáticas del nivel medio básico: Un estudio sobre actitudes y creencias de los alumnos	Edgar García Rojas	México	1998
2.	La matemática recreativa como una estrategia para reforzar los conocimientos matemáticos	Sofía Elena Galván Hernández	México	2013
3.	Probabilidades e Magia Matemática	Justina Araújo Rodrigues Coelho Melo	Portugal	2013
4.	Estrategias recreativas en las capacidades en el área de las matemáticas de los estudiantes del 4º grado de primaria de la I.E.P. "Cruz Saco" San Martín de Porres, Lima, 2013	Mayra Herrera Guerrero	Peru	2013

5.	O ensino da matemática com recurso a materiais manipuláveis e a sua utilização no momento da avaliação	Ana Catarina Marques	Portugal	2013
6.	Matemática recreativa na relação dialética entre escola e família: um estudo envolvendo alunos do 1º ciclo do ensino básico	Ana Cláudia Domingues Correia	Portugal	2014
7.	La Matemática Recreativa y su incidencia en el desarrollo del razonamiento lógico-matemático de los estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH	Jorge Vinício Dacto Tuapanta	Equador	2014
8.	A Matemática Recreativa no ensino básico	Olandino da Costa	Portugal	2014
9.	La Matemática Recreativa y el rendimiento académico de los estudiantes del primer grado de secundaria del Colegio Integrado Gregorio Martinelli de Talavera	Bertha Dipas Mayuri	Peru	2015
10.	Luca Pacioli and his 1500 book de Viribus Quantitatis	Tiago Wolfram Nunes dos Santos Hirth	Portugal	2015
11.	El valor didáctico de la matemática recreativa para optimizar los conocimientos matemáticos de los estudiantes del I semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión	Jhonny Jaime Mamani Lipa	Peru	2016

Fonte. Produzido pelas autoras (2019).

Apresentamos, sequencialmente, os trabalhos do Quadro 3, destacando os títulos e a abordagem principal de cada um.

A primeira Dissertação, intitulada *El uso de la matemática recreativa em la clase de matemáticas del nivel medio básico: Un estudio sobre actitudes y creencias de los alumnos*, de autoria de Edgar García Rojas (1998), teve como destaque um estudo sobre as atitudes e crenças dos alunos.

O segundo trabalho nominado *La matemática recreativa como una estrategia para reforzar los conocimientos matemáticos*, de Sofía Elena Galván Hernández (2015), teve como objetivo uma proposta de apoio à disciplina de Matemática do semestre zero da Faculdade de Engenharia com o uso de 25 problemas relacionados à Matemática Recreativa.

A terceira Dissertação levantada, intitulada *Probabilidades e Magia Matemática*, da autoria de Justina Júlia Araújo Rodrigues Coelho Melo (2013), teve como objetivo estudar um conjunto de truques de Magia Matemática que têm por base questões de probabilidades, por exemplo, o Truque de Kruskal, truques com dados não transitivos ou baseados no Paradoxo de Monty Hall.

A quarta publicação, nominada *Estrategias recreativas en las capacidades en el área de las matemáticas de los estudiantes del 4° grado de primaria de la I.E.P. "Cruz Saco" San Martín de Porres, Lima, 2013*, de Mayra Lisset Herrera Guerrero (2013), teve como meta a utilização de estratégias recreativas com um grupo de 41 crianças, objetivando o desenvolvimento e o estímulo das habilidades matemáticas nas crianças.

O quinto trabalho, intitulado *O ensino da matemática com recurso a materiais manipuláveis e a sua utilização no momento da avaliação*, de Ana Catarina Marques (2013), teve como finalidade a avaliação e a contribuição de materiais manipuláveis na avaliação das aprendizagens matemáticas.

A sexta Dissertação, nomeada *Matemática recreativa na relação dialética entre escola e família: um estudo envolvendo alunos do 1º ciclo do ensino básico*, de Ana Cláudia Domingues Correia (2014), teve como fundamento o uso de atividades com os alunos em forma de magia e brincadeira.

A sétima Dissertação desse mapeamento, intitulada *La Matemática Recreativa y su incidencia en el desarrollo del razonamiento lógico-matemático de los estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH*, de autoria de Jorge Vinício Dacto Tuapanta (2014), teve como objetivo determinar se o uso da MR por meio do trabalho com problemas de declarações divertidas, ajuda no aumento do raciocínio lógico-matemático dos alunos.

O oitavo trabalho, nomeado *A Matemática Recreativa no ensino básico*, de Olandino da Costa (2014), apresentou e estudou algumas Recreações Matemáticas: jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos, dentre outras.

A nona Dissertação desse levantamento é intitulada *La Matemática Recreativa y el rendimiento académico de los estudiantes del primer grado de secundaria del Colegio Integrado Gregorio Martinelli de Talavera*, da autoria de Bertha Dipas Mayuri (2015), e teve como propósito a aplicação do módulo de atividades de Matemática Recreativa com alunos da primeira série do Ensino Médio.

O décimo trabalho, nomeado *Luca Pacioli and his 1500 book De Viribus Quantitatis*, de autoria de Tiago Wolfram Nunes dos Santos Hirth (2015), apresentou um resumo dos conteúdos do manuscrito em italiano da obra *De Viribus Quantitatis* (1496 – 1508), de Luca Pacioli (1445 – 1517) a partir de uma versão em inglês.

A décima primeira Dissertação mapeada, intitulada *El valor didáctico de la matemática recreativa para optimizar los conocimientos matemáticos de los estudiantes del I semestre de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión*, de autoria de Jhonny Jaime Mamani Lipa (2016), analisou o valor didático da Matemática Recreativa como ferramenta para melhorar o conhecimento matemático de alunos da Faculdade de Ciências da Educação.

Todas as Dissertações mencionadas anteriormente, na área de Educação Matemática são de interesse para a temática do nosso trabalho, pois trazem discussões e reflexões a respeito da Matemática Recreativa, por exemplo, a importância, as definições e o valor didático da Matemática Recreativa, além das vantagens e desvantagens de introduzir essa ferramenta em sala de aula nos diferentes níveis de ensino.

É importante destacar que localizamos no exterior (Quadro 3), 11 Dissertações, sendo: 06 trabalhos escritos em espanhol (México, Peru e Equador), 04 em português europeu (Portugal) e outro trabalho escrito em inglês. Desse modo, uma análise mais detalhada de alguns dos trabalhos será tratada na seção 1.2.

A discussão em tons conclusivos sobre esse mapeamento da pesquisa em Matemática Recreativa, publicada em um âmbito nacional e internacional, tem destaque em nossa pesquisa e será tratada na subseção seguinte.

1.1.2. Resultados dos Estudos do Mapeamento

De posse das Teses e Dissertações mencionadas anteriormente, identificamos a partir da leitura dos títulos, resumos e palavras-chave, que alguns trabalhos abordavam os mais diversos temas: o uso de jogos matemáticos, problemas matemáticos com truques de adivinhações e enigmas; contribuições do uso do jogo xadrez; atividades lúdicas nas aulas de Matemática; ludicidade na aprendizagem matemática; Matemática e vida; Matemática e arte; materiais e métodos para o ensino de Matemática; atividades com robótica; atividades históricas sobre função afim; o uso do bingo para o ensino dos números racionais; o uso do jogo para o ensino dos números inteiros; jogos digitais; Laboratório de Ensino de Matemática; formação de professores de Matemática e; recreações e artesanato em aulas de Matemática.

No Brasil, o mapeamento realizado no site da CAPES e da BDTD retornou 25 Teses, das quais, apenas 02 trabalhos foram considerados relevantes para nossa pesquisa. Em relação

às Dissertações, o mapeamento apontou 82, mas, apenas 12 delas foram tomadas com relevância ao nosso estudo. Consideramos esses trabalhos importantes para o presente estudo, pois a maioria apresenta relação com discussões e reflexões teóricas, históricas e pedagógicas a respeito da Matemática Recreativa.

Com relação à produção científica publicada em outros países, foi realizada uma pesquisa no Portal de Periódicos Capes e encontramos 23 Teses, e 01 (uma) mapeada a partir de referenciais na internet, totalizando 24 trabalhos. Desse total, apenas 06 foram consideradas importantes para a temática do trabalho em questão. Sobre as Dissertações produzidas no exterior, foram encontradas 68 e, após uma filtragem de dados, apenas 11 foram significativos a nossa pesquisa. A respeito destes trabalhos, encontramos pontos preponderantes para a nossa investigação, com a ampliação de discussões sobre a antiguidade da Matemática Recreativa, antigos problemas de natureza recreativa, obras recreativas, as concepções e os aspectos da Matemática Recreativa.

Na base NDLTD/RCAAP (Portugal), encontramos trabalhos produzidos em países da América do Sul, a citar: Brasil, Peru e o Equador; países europeus, a exemplo de Portugal; além de países da América do Norte – o México. Na base NDLTD, encontramos trabalhos produzidos em outros países europeus, neste, citamos a França. Por fim, na base da TEL, também encontramos publicações da França.

Conforme observamos, nas bases mencionadas anteriormente, as Teses e Dissertações publicadas ficaram restritas aos seguintes países: o Brasil, Portugal, Peru, Equador, México e a França. Em relação à República Tcheca (Praga), destacamos que uma Tese foi encontrada a partir de referenciais na internet.

Em síntese, no mapeamento inicial percebemos que as Teses e Dissertações que têm como área de estudo e pesquisa à Matemática Recreativa são relativamente recentes no Brasil e no exterior. Assim, os dados deste mapeamento, revelam um crescimento dos estudos no final do século XX e uma maior produção no início do século XXI. No Brasil, existe um pequeno número de trabalhos acadêmicos (Teses e Dissertações) no âmbito da Educação Matemática que investigam sobre o tema e uma maior produção delas no exterior.

Nesse sentido, realizamos um levantamento, das Dissertações e Teses em Matemática Recreativa, mas não pretendemos, nesta pesquisa, esgotar as buscas sobre o tema. De forma que há a necessidade de futuras buscas bibliográficas (nacional e internacional) e em outras bases e sites.

Entendemos que nosso mapeamento teve suas limitações, a exemplo das dificuldades de acesso no site da CAPES com a impossibilidade do rebuscamento de busca, o site da base *Cybertesis* apresentava problemas de acesso e na base NDLTD, apenas dois países disponibilizavam Teses e Dissertações.

É importante destacar que o papel desse mapeamento foi fundamental para a Professora-Pesquisadora conhecer as abordagens e perspectivas da Matemática Recreativa. Assim, as informações levantadas permitiram refletir e pensar sobre como a Matemática Recreativa vem sendo empregada nas estratégias didáticas na aula de Matemática nos diferentes níveis de ensino.

Portanto, esse mapeamento, trouxe contribuições pertinentes e adequadas aos propósitos da pesquisa, que serão apresentadas na seção seguinte e em outros Capítulos. Desta forma, depois das primeiras leituras em Matemática Recreativa no mapeamento de pesquisa, já obtivemos indícios de estudos com material sobre a Matemática Recreativa. A seguir, apresentamos uma análise das Teses e Dissertações de maior relevância ao nosso estudo.

1.2. Teses e Dissertações de Maior Relevância ao nosso Estudo

Nesta seção fizemos uma análise das Teses e Dissertações que compuseram o *corpus* deste trabalho. São discutidas 02 Teses e 08 Dissertações em termos de definições e os aspectos da Matemática Recreativa e as vantagens do uso dessa ferramenta em sala de aula. Além disso, apresentamos matemáticos, autores e obras que contribuíram para a divulgação da Matemática Recreativa no Brasil e no exterior.

O processo inicial de seleção dos trabalhos para nosso objeto de estudo, se deu com a leitura dos títulos, resumos e palavras-chave dos trabalhos. A partir disto, fizemos uma leitura integral dos 10 trabalhos que se relacionavam à temática e direcionavam-se ao objeto de estudo em questão, da mesma forma que, nossa análise das Teses e Dissertações, limitou-se, especificamente, àquelas que versavam sobre definições e aspectos da Matemática Recreativa, em particular os aspectos pedagógicos e argumentos a favor do uso dessa ferramenta em diferentes níveis de ensino, além de pesquisas que fizeram uma análise e/ou tradução de obra recreativa.

Optamos em acrescentar a esse escopo os estudos sobre a inclusão do uso de jogos matemáticos nas práticas lúdicas destinadas à formação de professores de Matemática. Estes

trabalhos são importantes, pois tratam de recreações com valor educacional, por meio de jogos – recreações estas que são atribuídas também à Matemática Recreativa.

Considerando os aspectos supracitados, do conjunto de Teses e Dissertações mencionadas na primeira seção deste Capítulo, apenas os 10 trabalhos descritos a seguir foram selecionados para fazer parte do *corpus* da pesquisa: Góes (2002), Menezes (2004), Spada (2009), Melo (2013), Costa (2014), Hirth (2015), Segantini (2015), Bártlová (2016), Lipa (2016) e Ribeiro (2018).

No Brasil, foram selecionadas 04 Dissertações e 01 (uma) Tese, quando no exterior foram 04 Dissertações e 01 (uma) Tese. No entanto, cabe destacar que, alguns trabalhos que direcionavam à Matemática Recreativa, citados na primeira seção deste Capítulo, não fazem parte da análise das Teses e Dissertações desenvolvidas, contudo, podem servir de embasamento teórico quando relevante.

As Teses e Dissertações mapeadas serviram como fonte para responder aos seguintes questionamentos: as pesquisas trazem as definições e os aspectos da MR? Os trabalhos trazem reflexões teóricas a respeito da MR? Os trabalhos apresentam alguma intervenção de MR nas aulas de Matemática? Os estudos e pesquisas trazem vantagens e desvantagens para o uso da MR em sala de aula? O(s) autor(es) faz(em) uma avaliação da intervenção em sala de aula? Qual a natureza da avaliação apresentada?

É com base nesses questionamentos que apresentamos as Teses e Dissertações. Veremos a seguir uma análise das Teses e Dissertações que consideramos de maior relevância para nossa pesquisa.

1.2.1. Análise das Teses e Dissertações em Matemática Recreativa

Em primeiro lugar apresentamos uma análise das Teses produzidas em Programas de Pós-Graduação no Brasil e no exterior, de acordo com o ano de conclusão, desta maneira, iniciamos com a pesquisa de Menezes (2004).

A Tese de Menezes¹⁵ (2004), inserida na área de História da Matemática, foi defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação da UFRN e teve como principal objetivo a análise

¹⁵ Em comunicação por e-mail, a própria autora nos enviou a Tese, pois, não encontramos nos sites pesquisados o trabalho completo em PDF.

sobre a história, suas versões e respectivas variações ao longo do tempo de três recreações matemáticas: as travessias difíceis, as divisões divertidas e os quadrados mágicos.

Esta pesquisa fundamentou-se na obra *Propositiones Ad Acuendos Juvenes de Alcuíno de York* (735 – 804) e na história de três recreações matemáticas escolhidas. Para isto, a autora, realizou uma pesquisa bibliográfica a partir de artigos, livros, obras e documentos virtuais sobre o assunto.

Verificamos que Menezes (2004) usou a expressão *Recreações Matemáticas*¹⁶ para se referir as que necessitam essencialmente de habilidades matemáticas, por exemplo, lógica, concentração, memória, raciocínio, percepção de formas/tamanhos e/ou cálculos matemáticos. A pesquisadora apresenta de forma clara, os objetivos, a questão investigativa, o problema de pesquisa, a abordagem metodológica, além de discutir os resultados e expor suas conclusões finais.

Esta pesquisa não trabalhou com aplicação de tarefas em sala de aula, mas, a autora destacou vantagens do uso de Recreações Matemáticas no ensino de Matemática e trouxe reflexões teóricas a respeito das Recreações Matemáticas, portanto, a pesquisa de Menezes (2004) está em consonância com o nosso objeto de estudo e pode contribuir para o processo de elaboração de tarefas de Matemática Recreativa, ancoradas na Teoria da Objetivação para apresentar aos professores de Matemática, na formação inicial.

A Tese desenvolvida por Bártlová (2016), escrita em inglês, e defendida no Departamento de Análise Matemática da Faculdade de Matemática e Física – Universidade de Charles – Praga, em seu principal objetivo incluiu um estudo histórico e pedagógico da Matemática Recreativa, bem como sua relação com a *Matemática séria* e seus benefícios educacionais.

A presente pesquisa adotou como pressupostos teóricos um estudo histórico e pedagógico da Matemática Recreativa. Para isso, Bártlová (2016) discute sobre as concepções e aspectos da Matemática Recreativa¹⁷ e destaca quatro aspectos: científico-popular, divertido, pedagógico e histórico. Por outro lado, a autora apresenta aspectos históricos da Matemática Recreativa destacando o desenvolvimento de problemas matemáticos e recreativos ao longo da história em áreas particulares da Matemática, por exemplo, na aritmética, geometria,

¹⁶ Expressão já utilizada por outros autores, por exemplo, Trigg (1978).

¹⁷ As concepções e os aspectos da MR serão discutidos na subseção 1.2.3.

combinatória e na probabilidade. Além disto, também destacam autores, matemáticos e obras que tiveram influência no progresso da Matemática Recreativa.

É importante destacar que a autora não traz claramente em seu texto os objetivos (geral e específicos), a questão investigativa, o problema de pesquisa e a abordagem metodológica, todavia, são apresentados os resultados e as conclusões. Para a realização deste trabalho, não houve intervenção de Matemática Recreativa em sala de aula, pois a pesquisadora trouxe reflexões teóricas a respeito da Matemática Recreativa, abordando também sobre as concepções, os aspectos históricos e pedagógicos dessa ferramenta, bem como, os argumentos a favor do seu uso em sala de aula.

Bártlová (2016) utilizou a expressão Matemática Recreativa e seu trabalho envolve o objeto de estudo de nossa investigação. É importante destacar que, esta pesquisa é de fundamental importância para o nosso referencial teórico sobre a Matemática Recreativa, pois a pesquisadora, destacou que as atividades¹⁸ mais frequentes relacionadas à Matemática Recreativa envolvem *jogos matemáticos*, *quebra-cabeças matemáticos* e *Problemas Recreativos*. Neste sentido, temos o material de Matemática Recreativa que queremos apresentar aos professores de Matemática em formação inicial por meio da organização de uma proposta Didático-Pedagógica que envolve as principais tarefas de Matemática Recreativa e utilizando a Teoria da Objetivação como arcabouço teórico (ver terceiro Capítulo).

Em uma síntese das duas Teses (MENEZES, 2004; BÁRTLOVÁ, 2016), podemos observar que, em nenhum dos trabalhos foram realizadas intervenções de Matemática Recreativa em sala de aula. Quanto à área de Educação Matemática, a primeira de Menezes, defendida no ano de 2004 e, a segunda de Bártlová no ano de 2016 no campo da Matemática Recreativa, enfocam as concepções e os aspectos da Matemática Recreativa e/ou Recreações Matemáticas, e apresentam sugestões de tarefas matemáticas e recreativas que podem ser usadas na sala de aula, em diferentes níveis de ensino.

No entanto, é importante lembrar que, nosso ponto de partida em Matemática Recreativa é a Tese de Bártlová (2016), pois a autora, enfoca as concepções e os aspectos dessa ferramenta; além disso, destaca os principais tipos de tarefas recreativas, portanto, temos um ponto de

¹⁸ O termo atividade utilizado por Bártlová (2016), não é a perspectiva de *atividade* (Labor conjunto) proposta na Teoria da Objetivação (ver segundo Capítulo). Por isso, na presente pesquisa, optamos por utilizar o termo *tarefas* para destacar os tipos mais frequentes de tarefas recreativas (jogos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos), e será tratada na subseção 1.2.3.

partida para guiar a elaboração de tarefas de Matemática Recreativa, tendo como suporte teórico-metodológico a Teoria da Objetivação, e direcionamos nosso estudo aos professores de Matemática, na formação inicial.

Haja vista dos argumentos apresentados, defendemos que as pesquisas de Menezes (2004) e Bártlová (2016) podem fornecer subsídios na formação de professores de Matemática em processo de formação inicial ou continuada, uma vez que, fornecem uma oportunidade para o uso pedagógico da Matemática Recreativa em sala de aula. Neste sentido, a nossa investigação, vai mais além, pois propõe o uso de tarefas de Matemática Recreativa, ancoradas na Teoria da Objetivação, para serem desenvolvidas com os licenciandos do Curso de Matemática.

Apresentamos a seguir uma análise das Dissertações produzidas nos Programas de Pós-Graduação no Brasil e no exterior, de acordo com o ano de conclusão. Desta forma, iniciamos a análise com o trabalho de Góes (2002).

A Dissertação de Góes (2002) foi defendida no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina e teve como objetivo identificar as competências necessárias à formação do licenciado em Matemática que podem ser desenvolvidas com a prática do jogo de xadrez, fundamentando o uso do jogo de xadrez e a formação do professor de Matemática.

Metodologicamente, trata-se de uma pesquisa qualitativa e exploratória, portanto, foram aplicados questionários em uma significativa amostra constituída de 73 professores licenciados em Matemática que atuam no Município de Salvador – BA, e eram egressos em grande maioria de Universidades Baianas.

Os resultados deste estudo mostram que: 1) a maioria dos estudantes do curso de Licenciatura em Matemática não sabe jogar xadrez; 2) a inserção do jogo de xadrez na universidade contribui para o aprimoramento de competências à formação do profissional do licenciado em Matemática e; 3) o uso de jogos contribui para a capacidade de abstração, concentração, motivação e reflexão (GÓES, 2002).

O autor apresenta de forma clara os objetivos (geral e específicos), bem como a questão investigativa, o problema de pesquisa, a abordagem metodológica, os resultados e as conclusões. A pesquisa também trouxe as reflexões teóricas a respeito do jogo de xadrez e destaca argumentos a favor do seu uso na formação do professor de Matemática.

A segunda Dissertação mapeada, de autoria de Spada (2009), foi defendida no Programa de Pós-Graduação em Educação da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília e teve como objetivo principal a análise de como se dá o processo de inclusão de jogos de regras nas práticas lúdicas dos estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática.

Quanto à metodologia, trata-se de uma pesquisa de cunho qualitativa, do tipo participante. Para tanto, foram utilizados os seguintes instrumentos: a observação participante; entrevista semiestruturada; técnica focal com os estudantes-professores; técnica focal com cinco estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Município de Lajeado, em Tocantins, trabalhando o uso do jogo de conceito, atividades com jogos e diário reflexivo.

Participaram desta pesquisa dois estudantes-professores do terceiro período do curso de Licenciatura em Matemática – modalidade à distância, ano de 2009 – da Fundação Universidade do Tocantins (Unitins). Foram utilizados seis encontros presenciais, além de encontros virtuais com esse mesmo público mencionado.

Os resultados deste estudo mostraram o seguinte: os estudantes-professores não tiveram experiências lúdicas na formação em universidades; os estudantes-professores afirmam que o ensino de Matemática deve ser dinâmico por meio de jogos, desafios, investigações e outros. Para o aprofundamento da investigação, também foi constituído um grupo de pesquisa denominado Grupo de Pesquisa em Educação Matemática da Unitins (GPEMTINS) com o propósito de contribuir com as pesquisas sobre jogos e suas implicações educacionais (SPADA, 2009).

A autora trouxe em seu texto os objetivos (geral e específicos), questão investigativa, problema de pesquisa e a abordagem metodológica, bem como, os resultados e as conclusões. Foi realizada uma intervenção com a aplicação de jogos de regras com dois estudantes-professores, além disso, a autora produz reflexões teóricas a respeito dos jogos, mas também, constitui argumentos a favor do seu uso na formação do professor de Matemática e na sala de aula da Educação Básica. Quanto à avaliação, os estudantes-professores registravam as reflexões sobre as atividades propostas no diário reflexivo.

Após uma leitura na íntegra dos trabalhos de Góes (2002) e Spada (2009), encontramos pontos importantes para a nossa investigação. O primeiro, é sobre a importância do lúdico na cultura escolar e, o segundo é a respeito de tarefas de caráter lúdico que pode tornar o processo de ensino-aprendizagem, mais divertido e prazeroso para a formação inicial/continuada do

professor de Matemática. Esses pontos trazem contribuições para o presente estudo, de modo particular, na elaboração de tarefas relacionadas à Matemática Recreativa, fundamentadas na Teoria da Objetivação, a serem desenvolvidas com os licenciandos do Curso de Matemática (UFRN/Natal).

A Dissertação de Melo (2013) foi defendida no Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro/Portugal e teve como objetivo principal descrever alguns truques mágicos e paradoxos para impressionar e cativar alunos em sala de aula de Matemática. Para tanto, a autora apresentou um conjunto de truques de *Magia Matemática* que tem por base questões de probabilidade, por exemplo, o *Truque de Kruskal*, truques com *Dados não transitivos* ou truques baseados no *Paradoxo de Monty Hall*.

A pesquisa fundamentou-se em noções básicas da Teoria das Probabilidades, introduzindo conceitos elementares e apresentando exemplos práticos de truques mágicos baseados nessa teoria, além de explorar paradoxos de probabilidade.

Metodologicamente, Melo (2013) relata uma experiência de exploração das probabilidades no contexto de sala de aula utilizando *Dados não Transitivos* de James Grime¹⁹. A proposta didática foi aplicada em sala de aula com uma turma de 7º ano do Ensino Fundamental.

A pesquisadora, trouxe no texto o objetivo principal, os resultados e as conclusões, entretanto, não aponta os objetivos específicos, nem a questão investigativa, bem como, o problema de pesquisa e a abordagem metodológica. O trabalho trouxe as reflexões teóricas a respeito da Matemática Recreativa, apresentando uma intervenção de Matemática Recreativa para aulas de Matemática no Ensino Fundamental, destacando as vantagens a favor do seu uso nas aulas. A autora não fez a avaliação da sequência didática proposta na intervenção.

Nesse contexto, Melo (2013) utiliza a expressão *Magia Matemática* e enfatiza a inserção de jogos, materiais lúdicos e magia nas aulas de Matemática, pois eles podem trazer contribuições para o uso pedagógico da Matemática Recreativa em sala de aula e desempenha papel de motivação, alegria, diversão, além de ajudar o aluno a compreender os conteúdos matemáticos e, em particular, os conteúdos de probabilidade.

Por fim, a pesquisa de Melo (2013) teve como público-alvo estudantes do Ensino Fundamental com a realização de tarefas de caráter pedagógico e recreativo. Neste sentido, o

¹⁹ Ver Melo (2013).

nosso trabalho, vai mais além, e propõe a organização da proposta didática envolvendo tarefas de caráter recreativo, pedagógico e histórico, que se fundamentam nos princípios da Teoria da Objetivação, a serem desenvolvidas com os estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática.

A quarta Dissertação em análise foi defendida por Costa (2014) no Programa de Mestrado em Ciências – Formação Contínua de Professores da Universidade do Minho/Portugal – e teve como objetivo apresentar e estudar atividades de Matemática Recreativa, por exemplo, jogos matemáticos e quebra-cabeça matemáticos.

O referido trabalho fundamenta-se na Matemática Recreativa, mais especificamente, em suas concepções e aspectos pedagógicos. Para isto, o autor destaca como proposta didática três jogos matemáticos: o primeiro, *semáforo* (nome original, traffic lights), que é um jogo matemático do final do século XX criado em 1998 por Alan Parr. O jogo pertence à classe de jogos de tabuleiro denominada Jogos de Território. O segundo jogo, *Pontos e Linhas* (nome original, sprouts – que significa rebentos), de meados do século XX, foi criado em 1967 pelos matemáticos John H. Conway e Michael Peterson. Por fim, o *Jogo do Ouri*²⁰, pertencente à família dos jogos Mancala que é um dos jogos mais antigos do mundo com mais de 7000 anos de existência.

Costa (2014) não descreve de forma explícita os objetivos (geral e específicos), a questão investigativa, o problema de pesquisa, a abordagem metodológica, nem os resultados e conclusões. Esta pesquisa utilizou a expressão *Matemática Recreativa* e traz reflexões teóricas a respeito dessa ferramenta, as suas definições e enfatiza o seu uso pedagógico no ensino de Matemática.

Portanto, a pesquisa de Costa (2014) traz tarefas de Matemática Recreativa, por exemplo, jogos matemáticos e quebra-cabeças matemáticos – tarefas que queremos apresentar aos professores de Matemática, na formação inicial, que compreende uma das etapas de nossa pesquisa.

A próxima Dissertação discutida, produzida por Segantini (2015), foi defendida no Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica da Universidade Federal do Espírito Santo e objetivou a investigação e análise das apropriações e representações de um

²⁰ Sobre a história do Ouri, as regras e as estratégias, ver o trabalho de Costa (2014, p. 14-18).

grupo de estudantes do Ensino Médio com problemas extraídos da obra *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan, em um ambiente de resolução de problemas.

A pesquisa fundamentou-se na resolução de problemas e na Matemática Recreativa. Para tanto, a autora apresenta um breve histórico sobre resolução de problemas destacando concepções a esse respeito. Em sequência, discute sobre a Matemática Recreativa e destaca as concepções e seu uso pedagógico, elenca obras e matemáticos que contribuíram para a sua disseminação. Além disso, traz uma vasta documentação sobre a vida e obra de Malba Tahan.

Em termos de intervenção, Segantini (2015) realizou uma pesquisa de abordagem qualitativa do tipo Estudo de Caso em uma turma de 1ª série do Ensino Médio, do turno matutino de uma escola pública do Município de São Mateus/Espírito Santo.

Realizou-se uma oficina denominada de Resolução de Problemas – extraídos da obra *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan – constituída, principalmente, por problemas que se inserissem no âmbito da Matemática Recreativa. A proposta didática da oficina incluiu cinco problemas extraídos da referida obra, a saber: o problema dos 35 camelos; o problema dos 8 pães; o problema dos 21 vasos; o problema dos quatro quatros e o problema do jogo de xadrez. A autora, apresentou também uma entrevista com a professora regente que teve a finalidade de conhecer melhor os alunos participantes da pesquisa.

Durante a realização da oficina, a pesquisadora discutiu em grupos com os alunos sobre as características de cada Problema Recreativo e os estudantes destacaram as representações de problemas, dentre eles: quebra-cabeça, desafio e divertido. Ao término de cada problema, a autora orientou os alunos a relatarem, por escrito, suas considerações acerca da tarefa realizada.

Segantini (2015) apresentou em seu texto os objetivos (geral e específicos), a questão investigativa, o problema de pesquisa, a abordagem metodológica, além de discutir os resultados e as conclusões. Nesta pesquisa, a autora trouxe reflexões teóricas a respeito da Matemática Recreativa, realizando uma intervenção na turma de Ensino Médio, trazendo vantagens e desvantagens do seu uso em sala de aula de Matemática e faz uma avaliação dos Problemas Recreativos propostos na intervenção realizada em sala de aula.

Percebemos que o trabalho de Segantini (2015) enfatiza o uso pedagógico da Matemática Recreativa em sala de aula. Os resultados mostrados na pesquisa evidenciaram que a Matemática Recreativa e a resolução de problemas podem dinamizar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática. A autora, usou as expressões *Matemática Recreativa* e

Problemas Recreativos e trabalhou com definições de Matemática Recreativa baseadas nos estudos de Lopes (2012) e Costa (2014).

Em vista dos argumentos apresentados, esta pesquisa pode contribuir também para a seleção de Problemas Recreativos da obra *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan, o tipo de tarefa que queremos apresentar aos licenciandos do Curso de Matemática.

Outra Dissertação sobre Matemática Recreativa, é o trabalho de Hirth (2015), escrita em inglês e defendida no Programa de História e Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa/Portugal, teve como objetivo a apresentação de um resumo dos conteúdos do manuscrito em italiano *De Viribus Quantitatis*, fornecendo uma versão em inglês para melhor compreensão dos conteúdos nos aspectos mais recreativos da Matemática.

A pesquisa fundamentou-se na obra *De Viribus Quantitatis* (1496 – 1508) de Luca Pacioli (1445 – 1517). Para isso, Hirth (2015) apresenta uma cronologia biográfica de Luca Pacioli destacando alguns dos principais eventos de sua vida, das suas principais obras e traz também uma historiografia da obra *De Viribus Quantitatis*, fazendo descrições/observações estruturais sobre a obra.

Na visão de Hirth (2015), o trabalho de Luca Pacioli, ao invés de um texto técnico de aplicações da ciência, configura-se como um verdadeiro livro de entretenimento e de temas recreativos. Para o autor, a obra é certamente um marco do que hoje podemos chamar de Ciência Popular, sendo de grande interesse por seu impacto na Educação Científica e no ensino da Ciência. Observamos, que o autor não explicita no texto os objetivos, nem a natureza da pesquisa, dentre outros aspectos.

Nesta pesquisa, são apresentadas reflexões teóricas a respeito da obra *De Viribus Quantitatis*, porém, não há menção às definições e os aspectos da Matemática Recreativa. Apesar disso, o trabalho de Hirth (2015) é importante porque traz a tradução de uma parte da obra *De Viribus Quantitatis* que é um livro de entretenimento e de temas recreativos que pode nos servir de fonte para futuras pesquisas.

Outra Dissertação sobre Matemática Recreativa, é o trabalho de Lipa (2016), escrita em espanhol e defendida no Programa de Pós-Graduação de Mestre de Ensino de Nível Superior da Universidade Nacional Daniel Alcides Carrión, na cidade de Cerro de Pasco/Peru, cujo objetivo foi analisar o valor didático da Matemática Recreativa como ferramenta para melhorar o conhecimento matemático dos estudantes do primeiro semestre da Faculdade de Ciências.

A pesquisa fundamentou-se na Matemática Recreativa, para tanto, o autor discute sobre a importância, as concepções e o valor didático da Matemática Recreativa, além disso, destaca alguns problemas clássicos de Matemática Recreativa, matemáticos e autores que contribuíram para a divulgação dessa ferramenta.

Lipa (2016) realizou uma pesquisa de abordagem Quase-Experimental do tipo Descritiva-Explicativa. A intervenção pedagógica desenvolveu-se em três etapas: na primeira etapa, foi aplicado um pré-teste com o grupo experimental, contendo 35 alunos matriculados na disciplina Pensamento Lógico Matemático I, no primeiro semestre de 2015, da Faculdade de Ciências da Educação da Universidade Nacional Daniel Alcides Carrión. Como resultado do pré-teste, os estudantes universitários resolveram os problemas de forma automática e sem reflexão.

Na segunda etapa, foram usadas estratégias de aprendizagem por meio da Matemática Recreativa, a exemplos de problemas algébricos recreativos, problemas aritméticos recreativos, jogos, quebra-cabeças lógicos e palavras cruzadas, com o propósito de permitir a aprendizagem de conteúdos matemáticos em um ambiente de confiança e diversão. Nesta etapa, foram necessárias 6 horas aulas semanais de 50 minutos, no período de 8 de abril a 19 de julho de 2015.

Quanto à última etapa, foi aplicado um pós-teste, e os resultados permitiram validar a importância da Matemática Recreativa como estratégias no campo educacional para diminuir as dificuldades que os estudantes apresentam na aprendizagem da Matemática.

De modo geral, o autor, conclui que o valor didático da Matemática Recreativa melhorou o conhecimento matemático dos estudantes do primeiro semestre da disciplina do Pensamento Lógico Matemático I, da Faculdade de Ciências da Educação.

O pesquisador, utilizou a expressão Matemática Recreativa e seu trabalho trouxe os objetivos (geral e específicos), a questão investigativa, o problema de pesquisa, a abordagem metodológica, os resultados e as conclusões.

Portanto, a pesquisa de Lipa (2013) teve como público-alvo estudantes da disciplina Pensamento Lógico Matemático I, da Faculdade de Ciências da Educação, com a realização de tarefas envolvendo problemas algébricos recreativos, problemas aritméticos recreativos, dentre outros. Neste sentido, a nossa investigação, propõe o uso de tarefas relacionadas à Matemática Recreativa tendo como suporte teórico-metodológico a Teoria da Objetivação, a serem desenvolvidas com os licenciandos do Curso de Matemática.

Por último, discutimos a Dissertação de autoria de Ribeiro (2018) que foi defendida no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional vinculado à Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura do Colégio Pedro II que teve como propósito a elaboração e aplicação de atividades baseada no conceito de clubes com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental utilizando a Matemática Recreativa.

A pesquisa fundamenta-se na Matemática Recreativa e o autor destaca os principais autores, os divulgadores, as definições e os valores pedagógicos dessa ferramenta, além de descrever um breve histórico da cultura da Rússia no desenvolvimento da Matemática escolar – os famosos Círculos Matemáticos. Por fim, Ribeiro (2018) aborda os Clubes de Matemática e a Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) que, segundo o autor, tem como finalidade contribuir para o estudo da Matemática nas escolas públicas e privadas do Brasil.

Quanto à metodologia, o pesquisador fez uma intervenção baseada no conceito de clubes com alunos em duas turmas do 9º ano do Ensino Fundamental do Colégio Pedro II, Campus São Cristóvão II/Rio de Janeiro. O objetivo dessa ação foi preparar os estudantes para a participação de Olimpíadas de Matemática, por exemplo, da Olimpíada Internacional Matemática Sem Fronteiras (OIMSF), da Olimpíada Internacional Canguru de Matemática e da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP).

De acordo com Ribeiro (2018), a proposta didática foi elaborada e desenvolvida com base em Problemas Recreativos contidos nas Olimpíadas de Matemática utilizando de materiais concretos, por exemplo, folhas de papel, tesoura, computadores e Torre de Hanói; aulas expositivas e resolução de problemas. Para tal autor, as tarefas foram importantes para os estudantes construírem uma organização do trabalho em equipe, desenvolvendo a cooperação mútua durante a realização dos problemas.

Verificamos que o trabalho realizado por Ribeiro (2018) não discute como a Matemática Recreativa é apresentada nas questões das olimpíadas, além disso, não detalha discussões e reflexões em grupos entre os alunos sobre se os problemas aplicados são recreativos. Quanto aos objetivos, não apresenta os objetivos específicos, bem como, a questão investigativa e a abordagem metodológica.

O pesquisador utilizou as expressões *Matemática Recreativa* e *Recreação Matemática*, trazendo reflexões teóricas a respeito da Matemática Recreativa; realizando uma intervenção com Matemática Recreativa em uma sala de aula no Ensino Fundamental, mas também,

apresentou argumentos a favor do uso dessa ferramenta no contexto escolar, porém, não realizou uma avaliação da intervenção dos problemas propostos. Por isso, encontramos neste trabalho alguns elementos importantes para o presente estudo, em particular, para a organização da proposta didática com os tipos mais frequentes de tarefas de Matemática Recreativa, alicerçadas na Teoria da Objetivação.

Com essa análise, percebemos que os temas das Dissertações eram bastante variados: duas pesquisas foram desenvolvidas na formação dos professores de Matemática com a inserção de jogos matemáticos; outras três pesquisas com intervenção de tarefas envolvendo Matemática Recreativa em sala de aula no Ensino Fundamental e no Ensino Médio; outra Dissertação apresenta tarefas de Matemática Recreativa (jogos matemáticos, quebra-cabeças, dentre outras) destinadas à Educação Básica; outra Dissertação com intervenção desenvolvida no Ensino Superior com a inserção de tarefas de Matemática Recreativa e uma delas detalha a tradução de uma obra recreativa.

Observamos que a maioria dos trabalhos internacionais analisados, não trazem claramente em seus textos os objetivos (geral e específicos), tampouco a questão investigativa, nem o problema de pesquisa, nem a abordagem metodológica, além da ausência dos resultados e conclusões. Já os trabalhos realizados no Brasil apresentam de forma mais explícita esses itens em seus textos, com exceção do trabalho de Ribeiro (2018) que não explicita os objetivos específicos, nem a questão investigativa e a natureza da pesquisa.

Podemos afirmar que alguns dos trabalhos desenvolvidos no Brasil e no exterior, abordam as concepções e os aspectos da Matemática Recreativa, além das vantagens e desvantagens do seu uso em sala de aula, além de experiências de tarefas já aplicadas em sala de aula.

Após a análise das Teses e Dissertações, obtivemos também as principais tarefas em Matemática Recreativa: jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos, que caracterizam o tipo de Matemática Recreativa que queremos apresentar aos professores de Matemática em formação inicial.

Por entender que a compreensão da Matemática Recreativa é central para nosso estudo, nas subseções seguintes, detalhamos sua apresentação. Consequentemente, descrevemos os materiais extraídos das Teses e Dissertações em Matemática Recreativa sobre antigos indícios de atividades com Matemática Recreativa, bem como, antigos problemas (clássicos) de

natureza recreativa, além de matemáticos, obras e autores que contribuíram para a divulgação da Matemática Recreativa.

1.2.2 Um Breve Recorte Histórico sobre Matemática Recreativa como Atividade Humana de Entretenimento

De início, apresentamos uma discussão sobre a Matemática Recreativa a partir das Teses de Menezes (2004) e Bártilová²¹ (2016), uma vez que, consideramos importante essa exposição inicial para situar os professores de Matemática em formação inicial sobre a antiguidade da Matemática Recreativa como uma atividade humana de entretenimento. Para isso, destacamos antigos indícios de atividades com Matemática Recreativa, mas também, alguns antigos problemas de natureza recreativa e históricos do campo da Matemática Recreativa.

Para Bártilová (2016), os indícios mais antigos de atividades relacionadas à Matemática Recreativa são representados pelas *Bolas de Pedra Esculpidas da Escócia*. Estas formam uma classe enigmática de objetos projetados para manipulação e parecem datar do período neolítico tardio (3000 – 2500 a.C.). Os objetos constituem-se de pedras de arenito ou granito. Todas as pedras têm aproximadamente o mesmo tamanho e são decoradas com padrões de saliências esculpidas em espaçamento uniforme sobre botões circulares em torno da superfície da esfera (Figura 1).

Figura 1. Bolas de Pedra Esculpidas da Escócia.



Fonte. Bártilová (2016, p. 13).

Os modelos das Bolas (esferas) variam, mas a maioria delas se encaixa no modelo de seis botões. No entanto, é possível encontrar esferas esculpidas com número de botões variando

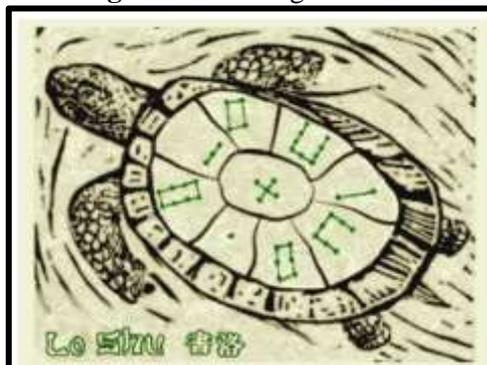
²¹ Tradução nossa para uso acadêmico.

de 3 a 160. Algumas esferas parecem fabricadas mais habilmente do que outras, e algumas raras, têm decoração adicional, mas, em todas se percebe uma valorização da simetria no desenho.

Apesar de seu grande número, pouco se sabe sobre as *Bolas de Pedra Esculpidas*²² e seu objetivo ainda é desconhecido. Dentre elas, poucas estão danificadas ou mostram sinais de uso, porém não foram encontradas em contextos que sugerissem uma função específica. Presume-se que tenham sido objetos não utilitários de significação simbólica. Alguns matemáticos estão interessados nas esferas por causa de sua beleza estética e seus criadores estavam gerando objetos esféricos com máxima simetria.

Outra atividade antiga que pertence a Matemática Recreativa, segundo Menezes (2004) e Bártlová (2016), são os *Quadrados Mágicos*. Para as autoras, o exemplo mais antigo que se conhece de um problema computacional seja o Quadrado Mágico (Figura 2). Supõe-se que o Quadrado Mágico tenha sido construído durante o reinado do imperador Yu que era conhecido pelos matemáticos chineses por volta de 2200 a.C.

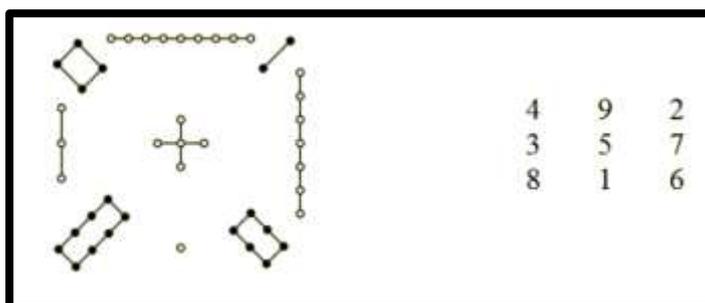
Figura 2. Tartaruga Lo-Shu.



Fonte. Bártlová (2016, p. 14).

A Figura 3 a seguir, no lado esquerdo, mostra a configuração do *Lo-Shu*, na qual os números de 1 a 9 foram compostos de nós feitos em cordas, na cor preta para os números pares e brancos para os ímpares.

²² Para saber mais informações sobre as Bolas de Pedra Esculpidas visite o site do Museu Nacional da Escócia – National Museum of Scotland. Disponível em: <https://www.nms.ac.uk/>. Acesso em: janeiro de 2020. Explore e observe com mais detalhes usando o modelo 3D. Disponível em: <https://www.nms.ac.uk/explore-our-collections/stories/scottish-history-and-archaeology/towie-ball/>. Acesso em: janeiro de 2020.

Figura 3. Padrão Quadrado com Marcações e Números.

Fonte. Bártlová (2016, p. 14).

A literatura disponível hoje em dia sobre Quadrados Mágicos é vasta e inclui muitas variações, como quadrados mágicos em tamanhos diferentes e quadrados mágicos, cujas entradas são todos quadrados perfeitos distintos, cubos mágicos, dentre outros (MENEZES, 2004; COSTA, 2014). Nesse sentido, destacamos o trabalho de Menezes (2004), onde a autora traz as definições sobre os Quadrados Mágicos, mas também, os dados históricos, o mistério e a magia que os envolvem, principalmente ao Lo Shu, bem como, as principais classificações e os métodos de construção dos Quadrados Mágicos.

Para introduzir a ideia de Matemática Recreativa aos professores de Matemática em formação inicial apresentamos aqui alguns problemas (clássicos) de natureza recreativa (Quadro 4), tão antigos e difundidos que já têm, inclusive, nomes próprios. Dos problemas apresentados, os 8 primeiros foram extraídos do trabalho de Bártlová (2016) e o nono foi extraído de Segantini (2015) e da obra O Homem que Calculava, de Malba Tahan (2017).

Quadro 4. Antigos Problemas (clássicos) de Natureza Recreativa.

Nº	Nome do problema	Enunciado	Referências
1.	Problema do tipo pense em um número	Obter um número que somado com seus $\frac{2}{3}$ e desta soma, subtraindo-se a terça parte, dê 10. Qual é o número?	Para uma melhor compreensão acerca do problema, consultar a Dissertação de Martins (2015) e a Tese de Gonçalves (2011).
2.	Problema do tipo canção de ninar	Há 7 casas, em cada casa temos 7 gatos, cada gato mata 7 ratos, cada rato comeu 7 grãos de cevada, cada grão teria produzido 7 hekats de cevada. Qual a soma das coisas enumeradas?	Para uma melhor compreensão acerca do problema, consultar a Dissertação de Martins (2015) e a Tese de Gonçalves (2011).

3.	O Problema do Gado	Hélio, o Deus do Sol, tinha bois e vacas, divididas em quatro rebanhos de diferentes cores: branca, preta, malhada e castanha e, cada parte, tinha bois e vacas. Os bois: o número de bois brancos era um meio mais um terço dos bois pretos mais o de castanhos; o número de bois pretos era um quarto mais um quinto dos bois malhados mais o de castanhos; o número de bois malhados era um sexto mais um sétimo do de bois brancos mais o de castanhos. As vacas: o número de vacas brancas era um terço mais um quarto do total de animais pretos; o número de vacas pretas era um quarto mais um quinto do total de animais malhados; o número de vacas malhadas era um quinto mais um sexto do total de animais castanhos; o número de vacas castanhas era um sexto mais um sétimo do total de animais brancos. Quantos animais existiam ao todo de cada tipo?	Para mais informações sobre as versões deste problema, e as soluções históricas consultar as Teses de Bártlová (2016) e Gonçalves (2011).
4.	O Problema da Princesa Dido	A princesa Dido solicitou ao rei Berbere Iarbas um pequeno pedaço de terra para um refúgio temporário até que ela pudesse continuar sua jornada. Ela pediu a quantidade de terra que poderia ser englobada pelo couro de apenas um touro, o rei concordou. A inteligente Elisa, cortou a pele do touro em tiras bem finas, de modo que ela conseguiu o suficiente para cercar toda uma colina.	Para mais informações sobre os aspectos históricos da Lenda de Dido e as soluções, consultar a Tese de Bártlová (2016) e a Dissertação de Souza (2014). Recomendamos também o vídeo da série Matemática na Escola ²³ sobre a Lenda de Dido ²⁴ .
5.	O Problema de Josefo	Josefo e seus companheiros (40 soldados) foram presos em uma caverna, cuja saída foi bloqueada pelos romanos. Eles preferiram suicidar-se a serem capturados e decidiram que iriam formar um círculo e começar a matar-se pulando de três em três. Existe a possibilidade de alguém ocupar uma posição em que seja possível escapar da morte?	O problema, as versões da lenda e as soluções históricas encontram-se na Tese de Bártlová (2016) e no artigo de Ezquerria (2012).
6.	O Problema de travessia – o lobo, a cabra e a couve	Um homem se encontra na margem de um rio com um lobo, uma cabra e uma couve. Para atravessar o rio existe apenas um barco pequeno, que cabe apenas o homem e um de seus pertences. Como pode atravessar em	O problema, as variações dos enunciados e as soluções encontram-se na tese de Menezes, (2004, p. 15-23) e no artigo de Lopes (2017, p. 73-90).

²³ A Série Matemática na Escola aborda conteúdos de matemática do Ensino Médio.

²⁴ Para conhecer o material acesse o link: <<http://www.youtube.com/watch?v=SSaOcnmYt6I>>.

		segurança o homem junto com seus pertences?	
7.	O Problema dos Coelhos	Quantos pares de coelhos serão produzidos ao fim de um ano, começando com um só par se, em cada mês, cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?	O problema aparece na obra Liber Abaci proposto por Leonardo de Pisa (Fibonacci) e as soluções encontram-se na Tese de Gonçalves (2011, p. 430-437).
8.	O Problema das pontes de Königsberg	O problema consistia em saber se era possível percorrer as pontes que ligavam uma ilha no rio Pregel, em Königsberg (atual Kalinigrado, na Rússia), ao restante da cidade, sem passar pela mesma ponte duas vezes.	Para uma discussão mais detalhada sobre o enunciado e a resolução do problema consultar o artigo de Lopes e Táboas (2015, p. 23-32).
9.	O Problema dos 35 Camelos	Um problema de herança de 35 camelos deve ser repartido, pelos três herdeiros, da seguinte forma: o mais velho deveria receber a metade da herança; o segundo deveria receber um terço da herança; e o terceiro um nono da herança. Como fazer a partilha?	Para mais informações sobre o problema, ver a obra O Homem que Calculava de Malba Tahan (2017) – edição comemorativa de 120 anos do nascimento do autor e a Dissertação de Segantini (2015).

Fonte. Produzido pelas autoras (2019).

Quanto à origem histórica da Matemática Recreativa, Bártlová (2016) afirma que é impossível saber com exatidão e destaca antigos problemas (clássicos) de natureza recreativa que servem como marcadores históricos úteis. Para a autora, a Matemática Recreativa é tão antiga quanto a Matemática em si, como se constata nos problemas de Matemática Egípcia no papiro de Rhind que, também conhecido como Papiro de Ahmes (1650 a.C), o qual contém uma série de tabelas e 87 problemas com as respectivas soluções e no papiro de Moscou (1890 a.C), que contém 25 problemas.

Algumas recreações ainda hoje propostas, em geral, foram escritas há milhares de anos. Segundo Bártlová (2016), no papiro de Rhind encontramos problemas de diversão (nº 28) conhecidos como *pense em um número*, mas também, de um tipo diferente como *canção de ninar*, a exemplo do problema 79. Ainda de acordo com a autora, esses problemas não tinham aplicação na vida cotidiana, porque, seu objetivo principal fosse talvez proporcionar prazer intelectual.

Outro importante problema descrito no estudo de Bártlová (2016) é *O Problema do Gado*, de Arquimedes (287 – 212a.C.), no qual se calcula pelas cores. Arquimedes foi um dos

principais matemáticos da antiguidade, nasceu em Siracusa (Sicília) e morreu durante a pilhagem romana de Siracusa. Para Gonçalves (2011), o famoso Problema do Gado de Arquimedes representa um tipo comum de Recreação Matemática e histórica.

Outro problema considerado por Bártlová (2016) é *O Problema da Princesa Dido*, conhecido também como *Lenda de Dido* – sobre maximização de área – O poeta romano clássico Publius Vergilius Maro, conhecido por Virgílio (70 a.C – 19a.C.) descreveu em Eneida²⁵, a lenda da princesa fenícia Dido. Elisa era uma princesa do século IX a.C. na cidade de Tiro, às margens do Mediterrâneo, onde se localiza o Líbano. A princesa fenícia fundou uma nova cidade que ficou conhecida como Cartago que hoje pertence à Tunísia, considerada o menor país do norte da África.

Dido solucionou, de forma intuitiva, o que hoje é chamado de *problema isoperimétrico*, cujo enunciado, é da seguinte forma: *Entre todas as curvas fechadas simples no plano, de comprimento dado L , encontre aquela que engloba maior área*. A primeira demonstração do problema isoperimétrico amplamente aceita, surgiu em 1870 como consequência do trabalho do matemático alemão Karl Weierstrass (1815 – 1897) em *Cálculo das Variações*. Depois de Weierstrass, outros matemáticos obtiveram demonstrações do problema isoperimétrico usando Geometria, Cálculo Diferencial e Integral e Séries de Fourier (BÁRTLOVÁ, 2016).

Segundo Bártlová (2016), outro problema da antiguidade é *O problema de Josefo*, uma lenda de Flávio Josefo, (em latim, Flavius Josephus), historiador romano-judaico que viveu no século I, primeiro século da Era Cristã (37 ou 38 d.C), e é autor do livro *Bellum Judaicum* (A Guerra dos Judeus). O famoso *Problema de Josefo* é baseado em um evento histórico que é um clássico na Matemática Recreativa.

Bártlová (2016) e Menezes (2004) destacam também os *Problemas de travessia* – *o lobo, a cabra e a couve*. Neste problema, destacamos as contribuições do trabalho de Menezes (2004) que traz a história, as versões e as respectivas variações, ao longo do tempo, de um problema de travessia da obra *Propositiones Ad Acuendos Juvenes de Alcuíno de York* (735 – 804), com versão em português denominado de *Problemas para estimular os jovens*. Menezes (2004) destaca um famoso problema de lógica que pertence a uma classe de problemas conhecidos como problemas de travessia – *O problema do lobo, a cabra e a couve* – (problema número 18 de Alcuíno).

²⁵ A Eneida, faz parte do período clássico (80 a.C. – 70 d.C.).

Bártlová (2016) destaca na obra *Liber Abaci* (O Livro do Ábaco, em 1202) os Problemas Recreativos e históricos do maior matemático italiano da Idade Média²⁶, Leonardo de Pisa (1170 – 1250), mais conhecido como Fibonacci. O *Liber Abaci* é um tratado sobre métodos e problemas algébricos, no qual, o uso de numerais indo-arábicos é fortemente recomendado. Fibonacci introduziu no Capítulo XII o problema 37 que lhe deu fama, *O problema célebre dos coelhos*, e originou a conhecida sucessão de Fibonacci. Segundo a autora, a sequência de Fibonacci foi a primeira dessas sequências recursivas conhecidas na Europa, assim, uma sequência numérica é dita recursiva quando um determinado termo pode ser calculado, em função de termos antecessores.

Outro exemplo que merece destaque é apontado por Bártlová (2016) na origem da Topologia ou, mais especificamente, da Teoria dos Grafos. A origem dessa teoria está relacionada a um problema proposto por Leonhard Euler (1707 – 1783) sobre a possibilidade de percorrer as sete pontes da cidade de Königsberg (atual Kalinigrado, Rússia) sem passar pela mesma ponte duas vezes. Bártlová (2016) afirma que Euler fez um modelo simples da realidade que estava estudando, o qual foi considerado por trabalhadores, posteriormente, um modelo útil em outras situações. Dessa forma, a Matemática Recreativa surge como uma importante fonte de modelos matemáticos que são a matéria prima para a pesquisa matemática.

Por fim, *O Problema dos 35 Camelos* extraído da obra *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan (2017), narra as aventuras e proezas matemáticas de um calculista Persa – Beremiz Samir – na cidade de Bagdá²⁷ no século XIII.

Portanto, não há uma definição clara sobre o que pertence ou não à Matemática Recreativa, porém, o mais importante é chamar atenção aos Problemas Recreativos e históricos que influenciaram a *Matemática séria*. Nesse sentido, é importante destacar que nem todo problema matemático é um Problema Recreativo.

Os problemas apresentados no Quadro 4, ilustram um tipo de tarefa normalmente usada na Matemática Recreativa. É importante destacar que, certos Problemas Recreativos não têm autoria conhecida por serem muito antigos, enquanto outros são de autoria de personagens de renome na Matemática. De uma forma ou de outra, os problemas carregam historicidade e

²⁶ A Idade Média é dividida pelos historiadores em duas partes: a Alta Idade Média (período entre os séculos V e X) e a Baixa Idade Média (período que vai aproximadamente do século X ao século XV).

²⁷ Capital do Iraque, situada à margem do Rio Tigre.

foram criados com finalidade de entretenimento, espontaneamente ou não. Além disso, os Problemas Recreativos têm potencialidade para divulgação científica ou para uso pedagógico. Se, a este tipo de problema, acrescentarmos jogos matemáticos e quebra-cabeças matemáticos, temos o que se costuma chamar de *Matemática Recreativa*.

O que conhecemos hoje como Matemática Recreativa, tem uma longa história e está intimamente ligada à própria Matemática. Além dos exemplos anteriores (Quadro 4), é importante ressaltar que, nos séculos passados, os grandes matemáticos se ocupavam da Matemática Recreativa por interesse, curiosidade ou hobby, todavia, na atualidade, a Educação Matemática procura usar a Matemática Recreativa para fins pedagógicos.

Para concluir, esta subseção, apresentamos alguns matemáticos, obras e autores que contribuíram para a divulgação da Matemática Recreativa. Assim, no curso da História, muitos matemáticos se dedicaram ao estudo das Recreações Matemáticas, como foi o caso de Leon Battista Alberti (1404 – 1472), Luca Pacioli (1445 – 1517), Leonhard Euler (1707 – 1788), Pierre de Fermat (1601 – 1665), dentre outros. Esses matemáticos têm sido citados nos estudos de História da Matemática para auferir aos Problemas Recreativos, por exemplo, o problema proposto por Euler sobre a possibilidade de percorrer as sete pontes da cidade de Königsberg sem passar pela mesma ponte duas vezes (ver Quadro 4).

Um dos movimentos considerado o berço dos trabalhos recreativos foi o Renascimento, pois, caracterizou-se em um período de longa duração, cujo desenvolvimento ocorreu entre os séculos XIV e XVI, na Itália, nas cidades ligadas ao comércio, a exemplo de Veneza, Pisa, Gênova e Florença. O Renascimento foi um movimento de mudanças sociais, culturais, econômicas e científicas, que atingiu as camadas urbanas da Europa Ocidental (CESANA, 2013).

Dada a diversidade de obras recreativas²⁸, particularmente, obras de autores da Europa e do período do Renascimento, apresentamos a seguir (Quadro 5), algumas obras que foram selecionadas com base em seu valor pedagógico para o ensino de Matemática, além disso, destacamos outras obras recreativas do século XVII.

²⁸ Não é nossa intenção nesse trabalho fazer uma análise das obras recreativas, mas sim destacar algumas obras de MR.

Quadro 5. Obras relacionadas à Matemática Recreativa.

Obras	Descrição
Antologia Grega	A <i>Antologia Grega</i> (em latim, <i>Anthologia Graeca</i>) conhecida como <i>Antologia Palatina</i> é a maior coletânea de epigramas e poemas (breves composições poéticas), que remonta ao século IV a.C. O manuscrito da Antologia de Planudes (<i>Codex Palatinus Graecus 23</i>) está na Biblioteca da Universidade de Heidelberg. A Antologia Grega está organizada em 16 livros, reunindo poemas de todos os períodos da história grega (ANTUNES; JÚNIOR; BRUNHARA, 2019). O livro XIV é uma coleção de epigramas e contém 45 problemas (aritméticos, oráculos e enigmas) – problemas de caráter lúdico e pedagógico (GONÇALVES, 2011). Outras informações sobre a Antologia Grega e o manuscrito da Antologia de Planudes, consulte o trabalho ²⁹ de Antunes, Júnior e Brunhara (2019).
Propositiones ad Acuendos Juvenes	Alcuíno de York (735 – 804) nasceu na Northumbria (Grã-Bretanha) no século VIII e morreu em 804 em Tours (França) reconhecido como um dos matemáticos notáveis da sua época. No ano de 781 foi convidado por Carlos Magno para ser responsável pela escola do palácio, onde permaneceu até 796 com o cargo de conselheiro educacional. Alcuíno foi o responsável pela maior reforma na educação no império Carolíngio. A ele é creditada a primeira coleção de problemas de MR escritos em latim – <i>Propositiones ad Acuendos Juvenes</i> (Problemas para estimular os jovens) (MENEZES, 2004). De acordo com Lopes (2017), “as Propositiones consistem em 53 problemas de matemática e lógica recreativas, muitos dos quais têm longa tradição na história da Matemática, de origem egípcia, árabe e europeia” (LOPES, 2017, p. 74). Outras informações sobre a obra de Alcuíno de York, consulte os trabalhos de Menezes (2004) e Lopes (2017).
Ludi rerum mathematicarum	O italiano Leon Battista Alberti (1404 – 1472) nasceu na cidade de Gênova/Itália e escreveu a obra <i>Matemática Lúdica</i> , em latim, <i>Ludi rerum mathematicarum</i> , por volta de 1452. Alberti dedicou o seu trabalho ao príncipe matemático Meliaduse d’Este, denominando o texto de páginas de entretenimentos matemáticos. A obra <i>Matemática Lúdica</i> é composta por 20 resoluções de problemas práticos referente à arquitetura, construção civil ou militar, topografia e navegação (CESANA, 2013). É importante destacar que, encontramos sites ³⁰ que disponibilizam cópias não originais do manuscrito em italiano. Segundo Cesana (2013, p. 25) “[...] o manuscrito original está perdido até hoje”. Outras informações sobre a obra <i>Matemática Lúdica</i> , destacamos uma edição brasileira da obra de Alberti (2006), e outra versão da obra foi traduzida e editada por Cosimo Bartoli ³¹ (edição de 1568).

²⁹ Este trabalho foi traduzido do texto grego editado por Cougny em seu *Epigrammatum anthologia Palatina cum Planudeis et appendice nova* (Paris: Didot, 1890).

³⁰ Para mais informações acesse os links: <[https://iif.lib.harvard.edu/manifests/view/drs:8282412\\$1i](https://iif.lib.harvard.edu/manifests/view/drs:8282412$1i)>. <<https://teca.bncf.firenze.sbn.it/ImageViewer/servlet/ImageViewer?idr=BNCF0003654507>>.

³¹ BARTOLI, C. *Opuscoli morali di Leon Battista Alberti gentil’huomo fiorentino, tradotti e parte corretti da M. Cosimo Bartoli*. Venezia Francesco de’Franceschi, 1568. Disponível via link (http://books.google.com.br/books?id=MDY8AAAACAAJ&printsec=frontcover&dq=Opuscoli+morali+di+Leon+Battista+Alberti&hl=ptPT&sa=X&ei=gd2aUMmBBKzU0gHi9oBw&redir_esc=y). Acesso em: dezembro 2019.

De Viribus Quantitatis	O italiano Luca Pacioli (1445 – 1517), natural de <i>Borgo di San Sepolcro</i> (Atual Sansepolcro), uma província da cidade de Arezzo na região da Toscana/Itália, foi um frei e matemático renascentista do século XV, é autor do primeiro manuscrito inteiramente dedicado à MR, <i>De Viribus Quantitatis</i> . Dentre os documentos disponíveis sobre a obra, encontramos o manuscrito ³² italiano. O manuscrito é preservado na Biblioteca da Universidade de Bolonha (código 250). A obra é um tratado único, é um dos primeiros (se não o primeiro) a reunir múltiplas recreações matemáticas, efeitos mágicos e experimentos científicos, além disso contém segredos e truques ilusionistas do comércio que ensinam aptidões diferentes (HIRTH, 2015). A obra configura-se como um livro de entretenimento e de temas recreativos. <i>De Viribus Quantitatis</i> que significa <i>O Poder dos Números</i> é uma coleção de jogos e Recreações Matemáticas (recreações aritméticas, problemas geométricos e topológicos, contém provérbios, poemas, adivinhações e truques de magia) (SINGMASTER, 2008). Para mais detalhes desta obra, consultar os trabalhos de Hirth (2015) e Singmaster (2008).
Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres	O francês Claude-Gaspar Bachet de Méziriac (1581 – 1638), foi matemático, filósofo, teólogo, poeta e escritor. Em 1612, publicou a obra mais popular – a obra é uma coletânea de Recreações Matemáticas intitulada <i>Problèmes plaisans et délectables qui se font par les nombres</i> (Problemas Agradáveis e Divertidos que podemos criar com os números). Na França, a obra de Bachet, é a primeira obra famosa e desempenha um papel essencial na constituição do gênero das Recreações Matemáticas (PELAY, 2011).
Récréations mathématiques et physiques	O francês Jacques Ozanam (1640 – 1718), foi um matemático conhecido por seus escritos sobre tabelas trigonométricas e logarítmicas. Em 1694 publicou a obra <i>Récréations mathématiques et physiques</i> (Recreações Matemáticas e Físicas). Posteriormente, a obra teve republicações, completadas com revisões e acréscimos. A obra de Ozanam foi traduzida e distribuída em outros países durante o século XVIII e início do século XIX (PELAY, 2011).

Fonte. Produzido pelas autoras (2019).

Conforme evidenciado no Quadro 5, o livro XIV da obra *Antologia Grega*, os *Problemas para estimular os jovens* de Alcuíno de York e a obra *Matemática Lúdica* de Alberti são coleções pequenas. Como percebido, todos foram trabalhos dedicados à Matemática Recreativa. Segundo Gonçalves (2011), a coleção de Alcuíno de York é o primeiro conjunto notável de Problemas Recreativos depois da *Antologia Grega*. Também é importante destacar que, os problemas e soluções produzidos por Alcuíno, oferecem-nos uma ideia do ensino de Matemática durante o império de Carlos Magno (MENEZES, 2004).

A obra *De Viribus Quantitatis* (1496 – 1508) é um dos maiores compêndios de Matemática Recreativa, possuindo grande valor científico e histórico. Apesar da contribuição

³² Para mais informações acesse o link: <<http://www.uriland.it/matematica/DeViribus/Pagine/index.html>>.

significativa de Luca Pacioli para a Matemática no século XV, pouco se sabe sobre a referida obra (HIRTH, 2015).

Para Hirth (2015), a obra é certamente um marco no que hoje podemos chamar de Ciência Popular, por isso, na visão de Singmaster (2008), a obra *De Viribus Quantitatis* é o primeiro trabalho inteiramente dedicado à Matemática Recreativa. Nesse sentido, consideramos que essas obras podem auxiliar a compreender as concepções do que era o *fazer matemático* no século XV.

Os matemáticos franceses do século XVII, a exemplo de Bachet e Ozanam deixaram suas contribuições para a Matemática Recreativa. A obra *Récréations mathématiques* é essencial para a história da Ciência e da Matemática, é considerada a primeira a surgir no gênero editorial da Matemática Recreativa (PELAY, 2011).

Após apresentar algumas obras recreativas, destacamos a seguir (Quadro 6), outros matemáticos e autores dos séculos XIX e XX que contribuíram para a divulgação da Matemática Recreativa.

Quadro 6. Propagadores da Matemática Recreativa.

Matemáticos e autores que contribuíram para a divulgação da Matemática Recreativa	
Henry Ernest Dudeney (1857 – 1930)	O matemático inglês Henry Ernest Dudeney foi considerado o maior criador de jogos e quebra-cabeças britânicos. Além de ter escrito para jornais e revistas de sua época, tais como <i>The Weekly Dispatch</i> , <i>The Queen</i> , <i>Blighty</i> , e <i>Cassell's Magazine</i> (BÁRTLOVÁ, 2016).
Samuel Loyd (1841 – 1911)	O matemático americano Samuel Loyd, mais conhecido como Sam Loyd, foi um representante da MR do século XIX, um pioneiro na criação de enigmas que aprendeu a jogar xadrez entre 10 e 14 anos. Sam Loyd teve o seu primeiro problema de xadrez publicado na <i>New York Saturday Courier</i> , escreveu problemas de xadrez para a revista <i>Scientific American Supplement</i> , além de escrever vários quebra-cabeças como, por exemplo, <i>14-15 Puzzle</i> e <i>Get Off the Earth</i> . Sam Loyd é considerado o maior charadista das américas (O'CONNOR e ROBERTSON, 2003).
Yakov Perelman (1882 – 1942)	O escritor russo, Yakov Perelman, publicou obras recreativas, a exemplo de Física Recreativa; Álgebra Recreativa; Aritmética Recreativa; Geometria Recreativa; Astronomia Recreativa; e <i>Matemática Recreativa</i> . Desde 1913 na Rússia, os livros de Perelman alcançaram mais de 300 edições e foram traduzidos para várias línguas (espanhol, alemão, francês, inglês, italiano, português, búlgaro, finlandês, dentre outras) (O'CONNOR e ROBERTSON, 2011).
Martin Gardner (1914 – 2010)	O americano Martin Gardner, licenciado em filosofia, foi escritor e pesquisador que muito contribuiu para a disseminação da MR no século XX. Durante 25 anos o autor escreveu para a revista <i>Scientific American</i> na coluna intitulada <i>Mathematical Games</i> , cujos conteúdos foram editados em livros posteriormente. Destacamos algumas de suas obras que apresentam recreações matemáticas como,

	por exemplo, <i>Aha! Insight</i> (1978), <i>Aha! Gotcha: Paradoxes to Puzzle and Delight</i> (1982), <i>Mathematics, Magic and Mystery</i> (1956), <i>Mathematical Puzzles of Sam Loyd</i> (1959), <i>More Mathematical Puzzles of Sam Loyd</i> (1960), <i>Entertaining Mathematical Puzzles</i> (1986), <i>Perplexing Puzzles and Tantalizing Teasers</i> (1988), <i>Puzzles from Other Worlds</i> (1984) (O'CONNOR e ROBERTSON, 2010).
Miguel de Guzmán Ozámiz (1936 – 2004)	O espanhol Miguel Guzmán, foi matemático, filósofo, escritor e membro da Real Academia Espanhola. Escreveu artigos sobre o ensino de Matemática e publicou livros relacionados à Matemática Recreativa, a exemplo de <i>Mirar y ver</i> , <i>Cuentos con cuentas</i> e <i>Aventuras Matemáticas</i> .
Júlio César de Mello e Souza (1895 – 1974)	No Brasil, destacamos Mello e Souza, nascido na cidade do Rio de Janeiro no século XIX. Sob o pseudônimo Malba Tahan, foi um escritor, matemático e educador brasileiro e publicou várias obras de divulgação para a popularização da Matemática. No rol de obras referentes à MR podemos citar a Matemática Divertida e Curiosa; <i>O Homem que Calculava</i> ; Histórias e Fantasias da Matemática; Dicionário Curioso e Recreativo da Matemática; Matemática Divertida e Pitoresca; Matemática Divertida e Diferente; Matemática Divertida e Delirante; <i>Matemática Recreativa</i> ; Didática da Matemática (SEGANTINI, 2015).

Fonte. Produzido pelas autoras (2019).

Henry Dudeney, Yakov Perelman, Sam Loyd, Miguel de Guzmán e Martin Gardner foram considerados importantes propagadores da Matemática Recreativa mundial e no contexto brasileiro, destacamos Mello e Souza – o Malba Tahan.

Martin Gardner contribuiu notavelmente para a popularização da Matemática Recreativa. O autor publicou mais de 100 livros sobre temas de Matemática, literatura, magia e religião. Outro dado importante que merece destaque é um encontro em honra a Martin Gardner sobre Matemática Recreativa e Magia que acontece em Atlanta/Geórgia (EUA) desde 1993 no mês de março. Trata-se do *Gathering for Gardner* (G4G) que é realizado de 2 em 2 anos.

A Fundação Gathering 4 Gardner (G4G)³³ tem como objetivo estimular a curiosidade e o intercâmbio lúdico de ideias e o pensamento crítico da Matemática, magia, ciência, literatura e quebra-cabeças recreativos, cujo propósito é preservar o legado do escritor Martin Gardner. Outro evento global – *Celebration of Mind*³⁴ – celebra a vida de Martin Gardner acontece anualmente no dia 21 de outubro, data do seu aniversário. Este evento é desenvolvido pela G4G e tem como objetivo reunir pessoas para explorar e desfrutar dos quebra-cabeças, jogos, magia,

³³ Para conhecer essa fundação e seus propósitos acesse: <<http://www.gathering4gardner.org/>>.

³⁴ Para conhecer mais sobre o evento acesse o site: <<https://www.celebrationofmind.org/>>.

dentre outras – é um evento para que as pessoas possam conhecer e compartilhar o legado de Martin Gardner.

No Brasil, Malba Tahan é considerado o principal nome da Matemática Recreativa (SEGANTINI, 2015). Entre as décadas de 1940 e 1950 circulou uma revista de Recreações Matemáticas, intitulada *Al-Karismi* constituídas por oito volumes publicados entre os anos de 1946 e 1951, sob autoria de Mello e Souza, com o pseudônimo Malba Tahan. A revista *Al-Karismi* é considerada a primeira revista de Matemática Recreativa brasileira. Era uma revista de Recreações Matemáticas, jogos, curiosidades, histórias, anedotas, contos, concursos, desenhos, tópicos sobre a História da Matemática, problemas, dentre outros (SIQUEIRA FILHO, 2008).

Mello e Souza, na década de 1960, foi colaborador da revista *Matemática*, da Universidade de São Paulo (USP), além de divulgador de suas ideias sobre o ensino de Matemática, escrevendo para uma coluna no *Jornal Última Hora* denominada *Matemática Recreativa* (SIQUEIRA FILHO, 2008; SEGANTINI, 2015).

A obra *O Homem que Calculava* foi traduzida em vários idiomas. É a obra mais popular de Malba Tahan que reúne matemática, ficção e literatura, além de usar elementos da Matemática Recreativa, como Problemas Recreativos inseridos em contos árabes, quebra-cabeças, curiosidades, desafios e histórias. Em 2015 foi lançada uma edição especial dessa obra em capa dura – uma homenagem aos 120 anos do nascimento do autor (1895 – 2015).

Outra informação importante que merece destaque é o *Dia Nacional da Matemática*, foi instituído em julho de 2013 (Lei Federal nº 12.835, de 26 julho 2013), e é comemorado, anualmente, em todo o território nacional no dia 6 de maio, data do nascimento de Mello e Souza.

Dessa forma, o estudo da Matemática Recreativa nos levou a conhecer os escritos de Mello e Souza – o Malba Tahan – de forma a enxergar neste imaginativo brasileiro um produtivo autor de Matemática Recreativa. Atualmente, podemos citar outros matemáticos que se dedicam à divulgação da Matemática Recreativa, por exemplo, David Singmaster, um americano que se dedica ao estudo de quebra-cabeças mecânicos e enigmas e que criou a notação para o Cubo Rubik.

Outro autor contemporâneo de diversos livros de divulgação matemática é Ian Stewart, professor do Departamento de Matemática da Universidade de Warwick, na Inglaterra. Stewart publicou, durante anos, em jornais e revistas no Reino Unido, Europa e Estados Unidos. Ele

escreveu na coluna mensal *Recreações Matemáticas* na *Scientific American* e escreve ficção científica.

Em Portugal encontramos matemáticos a exemplo de Jorge Nuno Silva, professor da Universidade de Lisboa, autor de livros de jogos matemáticos e de *Matemática Recreativa* e presidente da Associação Ludus (AL)³⁵. A AL é uma associação sem fins lucrativos que tem como ênfase principal a promoção e divulgação da *Matemática Recreativa*, desenvolvendo eventos com jogos, *Recreações Matemáticas* e colóquios, por exemplo, o Colóquio de *Matemática Recreativa*³⁶ – *Recreational Mathematics Colloquium* – RMC, a revista denominada *Matemática Recreativa* – *Recreational Mathematics Magazine*, o Circo Matemático e outros.

Assim, nesta subsecção, discorremos sobre antigos indícios de atividades com *Matemática Recreativa*, bem como alguns antigos problemas (clássicos) de natureza recreativa, além de matemáticos, obras e autores, que podem servir de fonte para futuros estudos sobre a *Matemática Recreativa*.

Por conseguinte, apresentamos um aprofundamento sobre as concepções e aspectos de *Matemática Recreativa*, a partir dos trabalhos analisados anteriormente, além de outras referências. Traremos também a respeito de outras expressões sobre *Matemática Recreativa*, além da nossa compreensão e dos termos que iremos adotar. Destacamos ainda, algumas vantagens e desvantagens em introduzir essa abordagem metodológica na sala de aula de *Matemática*, e, por fim, expõem-se as principais tarefas em *Matemática Recreativa*.

1.2.3 Concepções, Aspectos e Principais Tarefas da Matemática Recreativa

O termo *Matemática Recreativa* ainda hoje causa espanto a muitas pessoas, por isso, nesta subsecção, desenvolvemos ideias para entender essa expressão, mesmo que não seja nossa pretensão em oferecer uma definição formal para o termo *Matemática Recreativa*. Como os pesquisadores conceituam *Matemática Recreativa*? Para tentar responder essa questão,

³⁵ Mais informações sobre a AL e o RCM podem ser obtidas no site: <<http://ludicum.org/>>.

³⁶ O RMC é realizado de 2 em 2 anos, nos anos ímpares, em Portugal. O primeiro Colóquio *Recreational Mathematics Colloquium* (RMC I) foi realizado na Universidade de Évora, de 29 de abril a 2 de maio de 2009 e o sétimo (RMC VII) – (G4G, Europe) será realizado em São Miguel, Açores, Portugal, de 27 a 29 de janeiro de 2023.

pesquisamos em dicionários, revistas científicas, livros e artigos nas Dissertações e Teses analisadas.

Segundo o minidicionário da Língua Portuguesa (BUENO, 2007, p. 659), recreação significa “recreio; lazer; divertimento” enquanto, o significado de recreativo remete ao “[...] que diverte; divertido”.

Uma definição sobre recreação é dada por Trigg (1978), no artigo *What is Recreational Mathematics?*

[...] “um passatempo, diversão, exercício ou outro recurso que ofereça relaxamento e prazer”. A pessoa se entrega à recreação para recriar a si mesmo, relaxar das atividades do dia a dia, limpar e refrescar a mente antes de devolvê-la à sua ocupação regular” (TRIGG, 1978, p. 18, tradução nossa, grifo do autor).

A palavra recreação também pode ser entendida como divertimento, entretenimento e lazer. Desta forma, é importante que as tarefas envolvendo Matemática Recreativa sejam desafiadoras e se diferenciem das tarefas do dia a dia.

O artigo *The Utility of Recreational Mathematics* Singmaster (1992) traz algumas definições de Matemática Recreativa. Para o autor, uma definição óbvia é que a Matemática é divertida, concepção esta que abrangeria quase toda a Matemática, portanto, muito geral. Outra definição dada é que a Matemática Recreativa “é a matemática divertida e popular (1992, p. 4, tradução nossa), ou seja, “[...] os problemas devem ser compreensíveis para os leigos interessados, embora as soluções possam ser mais difíceis” (1992, p. 4, tradução nossa).

Corroborando com essa definição, Gardner (1998, p. 13) afirma que a Matemática Recreativa “[...] pode tomar vários aspectos: um quebra-cabeça a ser resolvido, um jogo de competição, uma mágica, um paradoxo, falácia ou simplesmente matemática com um toque qualquer de curiosidade ou diversão”.

Costa (2014) nos apresenta a seguinte definição de Matemática Recreativa: “[...] a matemática recreativa é aquela matemática que nos desafia a pensar, nos entretém e nos diverte quando pensamos nela” (2014, p. 6). Para o autor, a Matemática Recreativa envolve jogos, puzzles matemáticos, enigmas, charadas, quebra-cabeças, figuras mágicas, problemas históricos, além de outras tarefas de caráter lúdico e pedagógico, cuja pretensão é dar soluções a certo problema (COSTA, 2014).

A Matemática Recreativa, segundo Santos (2014, p. 1), “é um termo de difícil definição”. Para o autor, o melhor é não tentar defini-la, pois, as definições tendem a fechar e, a Matemática Recreativa, em sua gênese, é aberta (SANTOS, 2014). Ainda de acordo com Santos (2014) “[...] a utilidade não é a sua preocupação: engenho, imaginação e beleza é o que importa. *Há quem diga de forma muitíssimo simplista que a matemática recreativa é o assunto que engloba puzzles e jogos matemáticos*” (2014, p. 101, grifo nosso).

Com base em Bártlová (2016), Nunes³⁷ (2019) elaborou a seguinte definição de Matemática Recreativa:

Matemática Recreativa (MR) é uma parte da matemática de sempre, a matemática “séria”, que carrega um traço de diversão. Nela se entrelaçam quatro aspectos de fronteiras indefinidas que podem ser assim nomeados: aspecto científico-popular; aspecto de entretenimento, diversão; aspecto pedagógico e aspecto histórico (NUNES, 2019, p. 23).

Desse modo, a Matemática Recreativa pode servir de ponte para a elaboração de conceitos matemáticos e sua abrangência vai além de jogos, quebra-cabeças, problemas, desafios, e competições, pois a Matemática Recreativa é muito ampla no campo da Matemática.

Conforme Bártlová (2016), a Matemática é considerada recreativa se tiver um aspecto lúdico³⁸ que pode ser entendido e apreciado por pessoas que não são da área de Matemática. Para a autora, essa definição é muito geral, pois abrangeria quase toda a Matemática. A Matemática Recreativa envolve problemas elementares com soluções elegantes e, por vezes, surpreendentes. Engloba também jogos, quebra-cabeças, truques mágicos e curiosidades topológicas. Nesse sentido, podemos entender a Matemática Recreativa como uma abordagem com a qual podemos tornar a *Matemática séria* compreensível ou, pelos menos, mais prazerosa.

Compreendemos a definição de Matemática Recreativa na perspectiva de Bártlová (2016), a qual se configura em quatro aspectos – científico-popular; divertido (entretenimento);

³⁷ A Dissertação de Eloisa Myrela de Araújo Nunes, intitulada *Estudo sobre Matemática Recreativa e suas aplicações no ensino de Matemática*, foi defendida no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da UFRN, e concluída em novembro de 2019, depois da realização do mapeamento de pesquisa sobre Teses e Dissertações em MR.

³⁸ Kishimoto (2002, p. 21) denomina “[...] lúdico em ação, a atividade mais ampla em que as crianças e adultos se envolvem com brinquedos, brincadeiras e jogos”.

pedagógico e histórico – que estão interligados e influenciam uns aos outros. Os quatro aspectos se sobrepõem consideravelmente, de forma que não há limites claros entre eles e a *Matemática séria*. Para nós, o novo na definição de Bártlová (2016) reside no fato de considerar-se que a Matemática Recreativa está em algum lugar na fronteira indefinida entre os quatro aspectos descritos.

A Matemática Recreativa envolve um conjunto de tarefas: jogos, enigmas, problemas históricos, Problemas Recreativos, quebra-cabeças matemáticos, curiosidades topológicas, adivinhações, desafios, charadas, anedotas, magia, arte, origami, cartas de jogar, além de outras tarefas de caráter lúdico e pedagógico. Ou seja, a Matemática Recreativa está na fronteira entre esses quatro importantes aspectos: o científico-popular, o divertido (entretenimento), o pedagógico e o histórico.

Concordamos com os autores Santos (2014) e Bártlová (2016) quando afirmam que a expressão Matemática Recreativa não tem definição única. Além disso, pudemos observar que existe, entre os pesquisadores, Singmaster (1992), Gardner (1998), Santos (2014), Costa (2014) e Bártlová (2016), uma visão comum para a conceituação da Matemática Recreativa e não obrigatoriamente relacionada à História da Matemática.

Um estudo em Matemática Recreativa que aponta direcionamento relevante para o entendimento dessa abordagem metodológica é o trabalho de Sumpter (2015) que analisou como o conceito de Matemática Recreativa aparece em documentos de políticas educacionais como padrões, programas e currículos de oito países de diferentes culturas (China, Inglaterra, Finlândia, Índia, Japão, Cingapura, Suécia e Estados Unidos).

O resultado do estudo de Sumpter (2015) mostra que a Índia é o país que mais enfatiza em seu currículo atitudes positivas e de desenvolvimento em relação à Matemática por meio do uso de jogos e quebra-cabeças. Já os documentos americanos não mencionam nada que se reporte à Matemática Recreativa e retratam uma Matemática demasiada e utilitária, direcionada à resolução de problemas.

Chamou nossa atenção o fato da pesquisadora realizar sua busca utilizando termos que pudessem estar relacionados à Matemática Recreativa, por exemplo, prazer, diversão, alegria ou qualquer outra dimensão positiva. Isto nos levou a olhar à Matemática Recreativa como uma abordagem metodológica para ser usada em sala de aula de Matemática e, dessa forma, promover o desenvolvimento dos estudantes.

Para além das definições descritas, também encontramos outros termos utilizados para tratar da Matemática Recreativa, conforme demonstrado no Quadro 7.

Quadro 7. Outras expressões sobre Matemática Recreativa.

Outras expressões sobre Matemática Recreativa	
Recreações Matemáticas	As Recreações Matemáticas englobam uma categoria de jogos estruturados, Problemas Recreativos e outros elementos interdisciplinares. As recreações estão presentes em forma de problemas, quebra-cabeças, jogos estruturados, enigmas e objetos de arte (MENEZES, 2004).
Magia Matemática	[...] a magia pode ser muito mais do que simples brincadeira. Pode levar a descobertas importantes. Um bom truque de magia é tão surpreendente, que não resistimos a tentar descobrir os seus princípios de funcionamento (MELO, 2013, p. 23).
Problemas Recreativos	“[...] são carregados de história e cultura, além de possuírem uma característica bastante comum: despertam a curiosidade e imaginação de quem os lê” (SEGANTINI, 2015, p. 61).

Fonte. Produzido pelas autoras (2019).

Com relação às Recreações Matemáticas, Trigg (1978) afirma que compreendem: “[...] quebra-cabeças e jogos que variam de divertimentos ingênuos a problemas sofisticados, alguns dos quais nunca foram resolvidos” (TRIGG, 1978, p. 19-20, tradução nossa).

Segundo Melo (2013) a Magia Matemática é como um recurso pedagógico que pode contribuir para que os estudantes gostem de aprender conteúdos matemáticos, mudando a rotina da sala de aula e despertando o interesse dos estudantes pela Matemática.

Quanto aos Problemas Recreativos, Varizo (1993, p. 9) concebe-os como “[...] aqueles que envolvem aspectos históricos curiosos, lendas, jogos (principalmente naqueles onde se procura descobrir a estratégia que leva a vitória) do tipo quebra-cabeça”.

Neste trabalho, adotamos as expressões Matemática Recreativa (COSTA, 2014; SEGANTINI, 2015; BÁRTLOVÁ, 2016), Problemas Recreativos (SEGANTINI, 2015) e Tarefas Matemáticas Recreativas. A escolha desses termos foi justificada pelo uso dos tipos de tarefas mais frequentes que envolvem a Matemática Recreativa: jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos, em sala de aula para diferentes níveis de ensino.

Conceituamos *Tarefas Matemáticas Recreativas* – como um conjunto de tarefas de caráter recreativo, pedagógico e histórico que, na maioria das vezes, estão relacionadas aos fenômenos do dia a dia e conceitos matemáticos, podendo oferecer resultados inesperados. As *Tarefas Matemáticas Recreativas* podem ser baseadas em recursos, como jogos, resolução de

problemas, História da Matemática, recursos tecnológicos, dentre outros, para a implementação da Matemática Recreativa em sala de aula em diferentes níveis de ensino.

Agora vamos dialogar sobre os aspectos da Matemática Recreativa. É importante questionar se os estudos e pesquisas discutem aspectos da Matemática Recreativa? Diversos estudos e pesquisas internacionais (MELO, 2013; COSTA, 2014; BÁRTLOVÁ, 2016), bem como estudos realizados no Brasil (MENEZES, 2004; SEGANTINI, 2015) destacam as vantagens da Matemática Recreativa e seu uso pedagógico em diferentes níveis de ensino.

Os resultados dos estudos mencionados anteriormente e o reconhecimento das possibilidades do uso de jogos, quebra-cabeças, quadrados mágicos, problemas históricos, Problemas Recreativos, dentre outros, permitem perceber a Matemática Recreativa como recurso didático utilizado no dia a dia que pode promover a concentração, curiosidade, autoconfiança, autoestima, alegria, diversão e auxiliar na produção de atitudes. Nesse sentido, o uso da Matemática Recreativa pode estimular e atrair os estudantes, além de contribuir para auxiliá-los a pensar sobre conceitos matemáticos (COSTA, 2014; MENEZES, 2004; SEGANTINI, 2015).

No que diz respeito à parte da Matemática que é considerada divertida, Bártlová (2016) afirma que as pessoas podem ter opiniões diferentes sobre qual parte da Matemática seria divertida, uma vez que para alguns, por exemplo, pode ser o quebra-cabeça Sudoku ou os quadrados mágicos e para outros, o jogo de xadrez. Dessa forma, é difícil definir com precisão o que faz parte da Matemática Recreativa.

Nesse contexto, o que determina se um problema ou uma tarefa é recreativa ou não? Para responder a essa pergunta, Bártlová (2016) destaca quatro aspectos que cobrem a maioria dos tópicos relacionados à Matemática Recreativa, os quais estão interligados e influenciam uns aos outros: o aspecto científico-popular, o aspecto divertido (entretenimento), o aspecto pedagógico e o aspecto histórico. Sobre isso, apresentamos a seguir, resumidamente, o que entendemos por cada um desses aspectos da Matemática Recreativa.

Sob o olhar do primeiro aspecto, *o científico-popular*, a Matemática Recreativa é aquela parte da Matemática que é divertida e popular, isto é, uma Matemática que pode atrair a atenção do não matemático profissional. Para Bártlová (2016), os problemas utilizados devem ser compreensíveis para um leigo interessado, embora as soluções possam ser mais difíceis.

Ainda de acordo com a autora, enigmas matemáticos e problemas de entretenimento são conexões importantes entre problemas originalmente destinados a divertir e entreter, bem como,

conceitos matemáticos. A autora, destaca exemplos de problemas de Matemática Recreativa em ramos particulares da Matemática, por exemplo, a aritmética, a Teoria dos números, a geometria, combinatória, a probabilidade e a Teoria dos Grafos.

No âmbito do segundo aspecto, *divertido (entretenimento)*, a Matemática Recreativa é entendida como uma Matemática que é usada como um desvio de *Matemática séria*, ou seja, para diversão. Por exemplo, um dos proeminentes matemáticos recreacionais contemporâneos é Ian Stewart, que vê o papel da Matemática Recreativa nesse aspecto. Stewart está tentando ver a Matemática como uma fonte de inspiração e alegria (BÁRTLOVÁ, 2016).

O terceiro aspecto, *o pedagógico*, destaca que a Matemática Recreativa pode ser usada para fins de ensino. Essa ferramenta é vista como uma grande utilidade pedagógica em sala de aula e suas partes estão presentes na Matemática mais antiga e isto continua até os dias atuais.

O processo de ensino e aprendizagem da Matemática não deve se limitar apenas à memorização de regras, fórmulas ou exercícios, pois pode levar os estudantes a não gostarem da Matemática. Nesse sentido, enfatizamos o uso da Matemática Recreativa como uma ferramenta que pode fornecer uma variedade de problemas para investigações em sala de aula. Nesse aspecto, uma Matemática que pode permitir à criação de práticas pedagógicas inovadoras.

Por fim, no âmbito do quarto aspecto, *o aspecto histórico*, a Matemática Recreativa sempre desempenhou papel importante na História da Matemática e foi responsável pela origem de teorias e conceitos matemáticos que não existiriam sem a Matemática Recreativa. Com o passar do tempo, um número significativo de problemas de Matemática Recreativa tornou-se parte integrante do desenvolvimento de ramificações inteiramente novas no campo e muitos desses exemplos de problemas de natureza recreativa podem ser consultados no Quadro 4.

A Matemática Recreativa é uma área ideal para trabalhar aspectos históricos e multiculturais da Matemática, pois permite o desenvolvimento da criatividade, o prazer em fazê-la, traz à tona emoções e nos faz sentir parte de um trabalho coletivo realizado pela humanidade há milhares de anos. Assim, a Matemática Recreativa é um veículo ideal para comunicar aspectos históricos e multiculturais da Matemática.

De modo geral, os aspectos popular-científico e o divertido (entretenimento) implicam que a Matemática Recreativa tem potencialidades para ser usada em tarefas de divulgação científica, pois, podem apresentar a Matemática de modo divertido e compreensível para um

público amplo. O aspecto pedagógico indica que tarefas envolvendo Matemática Recreativa podem ser um meio de se aprender Matemática.

O aspecto histórico refere-se ao fato de que a Matemática Recreativa é antiga e existem indícios que essa ferramenta se originou há milhares de anos. Outro sentido que podemos atribuir ao aspecto histórico é a possibilidade de podermos usar tarefas de Matemática Recreativa para estudar História da Matemática.

Na visão de Costa (2014), a Matemática Recreativa “[...] tem uma grande utilidade pedagógica, ao contemplar problemas que tornam a Matemática divertida independentemente do contexto em que são trabalhados” (2014, p. 13). Nessa perspectiva, a Matemática Recreativa é uma abordagem pedagógica capaz de transmitir emoções que colocam à prova a capacidade de raciocinar e uma ferramenta que pode motivar o indivíduo a aprender mais, não importa quão difícil for.

O uso pedagógico da Matemática Recreativa pode contribuir, por exemplo, para a introdução de alguns conteúdos abordados na Educação Básica e no Ensino Superior, despertando nos estudantes a curiosidade e a vontade de desvendar os problemas e os truques, percebendo a Matemática subjacente. A Matemática Recreativa é uma abordagem metodológica que estimula e motiva o ensino de Matemática e pode fortalecer a capacidade de raciocinar e resolver problemas.

Considerando a importância de trabalhar a Matemática Recreativa em sala de aula, Segantini e Siqueira Filho (2016, p.11), enfatizam o uso da Matemática Recreativa “[...] como um campo rico para despertar o interesse, produzir questionamentos, favorecer o uso de estratégias próprias, criatividade, imaginação e o trabalho em grupo dos sujeitos envolvidos no processo educacional”. Nessa perspectiva, entende-se que a Matemática Recreativa tem potencial para fazer a integração entre os conteúdos matemáticos, mostrando o lado lúdico da Matemática.

Corroborando com as ideias destes autores, Bigode (2018, p. 231) destaca a importância da Matemática Recreativa “[...] como recurso didático e como fonte para conhecerem mais da cultura matemática”. O valor pedagógico da Matemática Recreativa hoje, é largamente reconhecido. Os jogos, os enigmas, os quebra-cabeças, os problemas históricos e os Problemas Recreativos, ou seja, as tarefas de Matemática Recreativa em geral produzidas em torno da Matemática, constituem um recurso valioso para o ensino de Matemática.

Anteriormente, foi discutido sobre os aspectos da Matemática Recreativa. Diante disto, apresentamos (Quadro 8), uma síntese das atividades³⁹ e as vantagens apontadas pelos pesquisadores a favor do uso da Matemática Recreativa.

Quadro 8. Vantagens do uso da Matemática Recreativa.

Atividades relacionadas à Matemática Recreativa	Vantagens
Jogos matemáticos e quebra-cabeças	Desenvolvimento de tópicos matemáticos; o raciocínio e cálculo mental; atitudes de persistência e de motivação; caráter lúdico (GÓES, 2002; SPADA, 2009; COSTA, 2014).
Recreações Matemáticas da antiguidade	Compreensão de conceitos; motivação para a busca do conhecimento matemático; caráter histórico e recreativo (MENEZES, 2004).
Problemas Recreativos: algébricos e aritméticos; jogos; quebra-cabeças lógicos e palavras cruzadas	Desenvolvimento de tópicos matemáticos; raciocínio lógico; caráter lúdico, recreativo e pedagógico (LIPA, 2016).
Problemas Recreativos	Introdução de conceitos; uso de estratégias para a resolução de problemas; despertar a criatividade e a imaginação; caráter recreativo (SEGANTINI, 2015).
Antigos indícios de atividades com MR e antigos problemas (clássicos) de natureza recreativa	Trabalhar aspectos recreativos, históricos e pedagógicos da MR (BÁRTLOVÁ, 2016).
Truques de Magia Matemática	Aprendizado de conceitos como o de cálculo de probabilidades; caráter pedagógico e recreativo (MELO, 2013).
Problemas recreativos extraídos das Olimpíadas de Matemática	Aprender matemática de maneira recreativa, lúdica e com o uso de materiais concretos (RIBEIRO, 2018).

Fonte. Produzido pelas autoras (2019).

Conforme demonstrado no Quadro 8, essas tarefas recreativas podem ser um recurso didático importante no ensino-aprendizagem de Matemática, pois podem motivar os alunos e tornar a aprendizagem mais divertida e agradável, mas, sempre com finalidade didática e pedagógica.

Segantini (2015), evidenciou algumas *desvantagens* do uso da Matemática Recreativa, elencadas a seguir: 1) dificuldades dos estudantes na leitura e interpretação dos enunciados dos problemas e; 2) dificuldades diante de conceitos matemáticos e cálculos matemáticos. Ribeiro

³⁹ O termo atividade utilizado nas Teses e Dissertações analisadas, não é a perspectiva de *atividade* (Labor conjunto) conforme proposta pela Teoria da Objetivação (ver segundo Capítulo).

(2018), por sua vez, destacou uma *desvantagem* relacionada com o tempo, pois aulas com materiais concretos o tempo gasto é maior.

Observamos que os estudos e pesquisas citados anteriormente destacam as vantagens, as desvantagens e a importância dos aspectos da Matemática Recreativa e, que alguns dos estudos já trazem experiências de tarefas aplicadas em sala de aula nos diferentes níveis de ensino. Com base nessas ideias defendemos a importância didática desse tipo de tarefa para o ensino de Matemática.

Destacamos agora as principais tarefas em Matemática Recreativa. Segundo Bártlová (2016), a História da Matemática está repleta de exemplos de quebra-cabeças matemáticos, jogos matemáticos e Problemas Recreativos, sendo que a maioria dessas propostas foram basicamente destinadas à diversão. Nesse sentido, os jogos, quebra-cabeças e Problemas Recreativos são tarefas tão antigas quanto às civilizações.

Certos jogos existem há milhares de anos e, hoje em dia, aprendemos sobre jogos antigos, principalmente, quando eles estão relacionados com a Matemática Recreativa, por exemplo, a Mancala que usa uma placa que lembra um ábaco, um velho dispositivo de cálculo.

As tarefas mais frequentes relacionadas à Matemática Recreativa podem ser divididas em três campos independentes: *jogos matemáticos*, *quebra-cabeças matemáticos* e *Problemas Recreativos*. Vejamos mais detalhadamente a seguir sobre os aspectos dessas tarefas com Matemática Recreativa.

Jogos Matemáticos

Costa (2014, p. 5) afirma que “[...] os jogos matemáticos aliam: raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição, de uma forma lúdica”. De forma que, a “[...] a sua prática contribui para o desenvolvimento da capacidade de formalização de estratégias, memorização e para o desenvolvimento pessoal e social” (COSTA, 2014, p. 5).

Na visão de Fanti e Suleiman (2012, p. 321), o jogo alia “[...] o desenvolvimento cognitivo a uma dimensão lúdica e relacional”. Nesse sentido, o jogo traz o prazer de brincar, permitindo a leitura e a compreensão de regras, oportunizando a organização de ideias, as estratégias e a interação dos alunos, de forma que, o uso de jogos nas aulas de Matemática, pode favorecer o desenvolvimento dos estudantes.

Para Bártlová (2016), um jogo matemático é um jogo, cujas regras, estratégias e resultados são definidos por parâmetros matemáticos claros. Além disso, os jogos matemáticos não precisam ser conceitualmente intrincados para envolver fundamentos computacionais mais profundos. Um exemplo disso é o jogo Mancala, pois, mesmo que suas regras sejam relativamente básicas, o jogo pode ser rigorosamente analisado por meio da teoria combinatória dos jogos.

Como nos indica Bártlová (2016), os jogos matemáticos diferem nitidamente dos enigmas matemáticos, pois os enigmas exigem perícia matemática específica para completar, ao passo que, os jogos matemáticos não exigem conhecimento profundo da Matemática para jogar.

É importante destacar os trabalhos desenvolvidos por Góes (2002), Spada (2009), Melo (2013) e Costa (2014) que trazem alguns jogos matemáticos (jogo de xadrez, jogo da memória com frações, jogo adição de números inteiros, jogo semáforo, jogo de pontos e linhas, jogo do ouri, dentre outros), bem como a história, as regras e estratégias.

Quebra-cabeças Matemáticos

Existe um grande número de quebra-cabeças matemáticos que podem, de alguma forma, estar ligados à Matemática Recreativa. Como indica Bártlová (2016), alguns quebra-cabeças matemáticos requerem apenas uma certa dose de destreza, enquanto, em alguns deles, existe a necessidade de engenhosidade e pensamento lógico. Há ainda aqueles que exigem a aplicação sistemática de ideias ou padrões matemáticos como o Cubo de Rubik⁴⁰, os anéis chineses⁴¹ e a Torre de Hanói⁴². Dessa forma, os problemas, os quebra-cabeças, os enigmas matemáticos e jogos formam um grande ramo de atividades intelectuais.

⁴⁰ O quebra-cabeça foi criado pelo húngaro Erno Rubik em 1974. A versão mais conhecida é a de dimensões 3x3x3, composta por seis faces de seis cores diferentes. Existem outros modelos como 4x4x4, 5x5x5, dentre outros.

⁴¹ O quebra-cabeça dos anéis chineses consiste em vários anéis pendurados em um longo laço de arame. Cada anel é conectado livremente por um suporte a uma plataforma abaixo do laço. Uma discussão detalhada pode ser encontrada em Bártlová (2016, p. 24-25).

⁴² O quebra-cabeça Torre de Hanói foi inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883. Constitui-se de uma torre com alguns discos, inicialmente empilhados por tamanhos decrescentes em três pinos verticais colocados em uma placa. Mais detalhes consulte Bártlová (2016, p. 49-51).

Costa (2014) destaca também alguns puzzles que podem ser trabalhados na sala de aula: o puzzle 14 – 15; puzzle numérico (Sudoku⁴³); puzzle geométrico (Tangram); além de outras tarefas matemáticas que, segundo o autor, tem caráter recreativo e potencialidades pedagógicas, por exemplo, tarefas com números, com o Geogebra e o jogo de isometrias.

Na perspectiva de Bártlová (2016), os jogos e quebra-cabeças matemáticos satisfazem a necessidade de diversão, alegria e prazer, além do desejo de alcançar domínio sobre assuntos desafiadores, ou simplesmente, testar nossas capacidades intelectuais.

Os quebra-cabeças matemáticos podem ser resolvidos tanto por crianças, quanto por adultos. É fundamental que as diversões matemáticas também ofereçam um amplo campo de jogo, tanto para o matemático amador, quanto para o matemático profissional.

De acordo com nossa experiência em sala de aula na Educação Básica e no Ensino Superior, muitos alunos gostam de trabalhar com jogos e quebra-cabeças matemáticos, sendo assim, serem facilmente motivados a adotar estratégias de aprendizagem que melhorem suas habilidades de resolução de jogos e quebra-cabeças.

Os quebra-cabeças e jogos fornecem motivação intrínseca para resolvê-los, porque, como muitos problemas matemáticos têm uma forma semelhante, os alunos que gostam de resolver quebra-cabeças, também podem desenvolver atitudes positivas em relação a outras formas de aprender Matemática em contextos que não envolvam quebra-cabeças e jogos.

Por fim, destacamos os estudos desenvolvidos por Costa (2014) e Bártlová (2016) que trazem quebra-cabeças matemáticos (Sudoku, Quadrados Mágicos, puzzle 14 – 15, Tangram, Torre de Hanói, anéis chineses, dentre outros), além de destacar a história, as técnicas para resolver os quebra-cabeças e suas classificações.

Problemas Recreativos

Os quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos ou jogos formam um grande ramo de atividade intelectual que reflete um espírito jovem, indiferente e indagador. Lidando com um quebra-cabeça, resolvendo um problema ou jogando um jogo, cada vez que a paciência e a persistência são necessárias, é uma forma de estimular a aprendizagem de Matemática, em que essas qualidades também são necessárias.

⁴³ Sobre a história do Sudoku, as técnicas para resolver e a classificação, consulte o trabalho de Costa (2014, p. 26-31).

No que diz respeito aos Problemas Recreativos, Bártlová (2016) afirma que eles são frequentemente a base de algumas matemáticas sérias. Para a autora, “[...] seu grande benefício é que eles usam uma mistura de pensamento abstrato e do mundo real para motivar várias ideias matemáticas” (2016, p. 18).

A Matemática Recreativa fornece alguns problemas de natureza recreativa (ver Quadro 4), e quase todos os problemas podem ser estendidos ou corrigidos, de forma que, a Matemática Recreativa também é um tesouro de problemas para investigações dos estudantes. Nesse sentido, a Matemática Recreativa pode ser uma abordagem metodológica para o trabalho com a Matemática na sala de aula dos diferentes níveis de ensino.

Por último, destacamos os trabalhos desenvolvidos por Menezes (2004), Segantini (2015) e Bártlová (2016) que trazem antigas Recreações Matemáticas e problemas (clássicos) de natureza recreativa, além de Problemas Recreativos.

Diante do exposto, as principais tarefas em Matemática Recreativa podem ser usadas em sala de aula para introduzir um conceito ou consolidá-lo, de modo a praticar uma técnica ou para desenvolver estratégias de resolução de problemas. A grande aposta pedagógica da Matemática Recreativa é que as tarefas relacionadas à Matemática Recreativa atraem a curiosidade de não matemáticos e nos inspirem para o seu estudo. Dessa forma, o valor pedagógico da Matemática Recreativa reside na sua eficácia em desenvolver a mente e seus potenciais intelectuais, sensíveis, afetivos, criativos e de concentração.

Como resultado dos estudos de maior relevância para nossa pesquisa, encontramos os materiais extraídos das Teses e Dissertações em Matemática Recreativa. Desse modo, um dos resultados da nossa pesquisa, é a organização da proposta Didático-Pedagógica com as principais tarefas relacionadas à Matemática Recreativa: jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos, tendo como suporte teórico-metodológico a Teoria da Objetivação, destinadas à introdução da Matemática Recreativa aos professores de Matemática em formação inicial, que serão apresentados e discutidos nos próximos capítulos.

Neste Capítulo, após esse mapeamento, pudemos conhecer melhor sobre a Matemática Recreativa, e obtivemos informações sobre a antiguidade da Matemática Recreativa como atividade humana de entretenimento, antigos problemas (clássicos) de natureza recreativa; as obras relacionadas à Matemática Recreativa; os matemáticos e autores que contribuíram para a divulgação dessa ferramenta; as concepções e os aspectos da Matemática Recreativa; as

vantagens e desvantagens de introduzir essa ferramenta em sala de aula; além das principais tarefas em Matemática Recreativa.

Dessa forma, o viés teórico sobre a Matemática Recreativa é uma das contribuições da nossa investigação, portanto, de posse dessas informações, temos o material de Matemática Recreativa para apresentar aos professores de Matemática, na formação inicial, tendo como aporte teórico-metodológico a Teoria da Objetivação.

No próximo Capítulo, iremos apresentar os conceitos-chave da Teoria da Objetivação para a presente investigação.

2 TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

No presente Capítulo, iniciamos apresentando a definição da Teoria da Objetivação (TO) e, em seguida, abordamos os conceitos-chave da Teoria da Objetivação para esta investigação. Por fim, discorreremos a respeito da análise multimodal, que orienta o processo de análise de dados da pesquisa.

2.1 Conceitos Fundamentais da Teoria da Objetivação

A Teoria da Objetivação (TO), é uma teoria educacional contemporânea inspirada nos trabalhos filosóficos de Hegel (1770 – 1831), Marx (1818 – 1883), em filósofos contemporâneos como Ilyenkov (1924 – 1979) e na escola histórico-cultural de Vygotsky⁴⁴ (1896 – 1934). Idealizada pelo pesquisador e educador matemático Luis Radford, a Teoria da Objetivação é uma proposta que se afasta das abordagens subjetivistas de aprendizagem, por exemplo, empiristas e construtivistas, assim como das epistemologias tradicionais sujeito-objeto (RADFORD, 2018a; 2018b).

Para Radford (2017a) a Teoria da Objetivação permite explicar os processos de ensino-aprendizagem que ocorrem em sala de aula, considerando os sujeitos como indivíduos culturais⁴⁵ e historicamente situados enquanto desenvolvem um *Labor conjunto*⁴⁶.

Entendemos a Teoria da Objetivação como uma teoria sociocultural de ensino e aprendizagem baseada em uma concepção social de aprendizagem. Além disso, a Teoria da Objetivação defende uma concepção não mentalista do pensamento, ou seja, o pensamento pode ser observado, uma vez que emerge por meio de gestos, movimentos corporais, atividade perceptiva, artefatos e sinais utilizados pelos indivíduos e não como algo que não pode ser observado, que ocorre apenas no plano mental (RADFORD, 2010; 2018a).

⁴⁴ Lev Semenovitch Vygotsky nasceu em Orsha (Bielo-Rússia), foi um psicólogo soviético que lançou as bases da psicologia soviética e que desenvolveu os fundamentos psicológicos das correntes educacionais histórico-culturais. Para mais informações, aconselhamos que veja o vídeo que traz a biografia de Vygotsky disponível via link (<https://www.youtube.com/watch?v=9VNxexCUfTo>). Acesso em: 22 dezembro 2019.

⁴⁵ Cultura é entendida como um conjunto de "conhecimentos, conceitos, técnicas, atividades, crenças e valores, expressos em símbolos e práticas, que caracterizam qualquer grupo humano, e que geralmente é transmitido – embora não mecanicamente – ao longo do tempo (de uma geração a outra) e no espaço (de um lugar para outro)" (VERGEL, 2014, p. 37, tradução nossa).

⁴⁶ Mais adiante, conversaremos sobre Labor conjunto.

De acordo com Radford (2018b), são princípios básicos da Teoria da Objetivação ambientes educacionais que não só produzem conhecimentos, mas também subjetividades. Como resultado disso, a Educação Matemática deve envolver tanto o saber (dimensão do saber) quanto o vir a ser (dimensão do sujeito). Nesse sentido, a Teoria da Objetivação concebe a Educação Matemática como incorporada em um projeto educacional de transformação maior.

A Teoria da Objetivação postula o objetivo da Educação Matemática como um empreendimento dinâmico, político, social, histórico e cultural, voltado para a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se posicionam criticamente em discursos e práticas matemáticas, historicamente e culturalmente constituídas e sempre em evolução (RADFORD, 2018a; 2018b).

A Teoria da Objetivação baseia-se em princípios fundamentais que são de natureza *ontológica e epistemológica*. A *ontológica* consiste em especificar o sentido em que a teoria aborda a questão da natureza dos objetos conceituais (por exemplo, a natureza dos objetos matemáticos e sua forma de existência). Por sua vez, o fundamento *epistemológico* da teoria propõe que o conhecimento dos objetos matemáticos é o resultado de ações e reflexões dos sujeitos sobre o mundo que são orientadas por formas culturais e históricas, ou seja, por formas de argumentar, testar, pensar e validar, que são enquadrados pela atividade de cada cultura de acordo com o momento histórico em que está imersa (RADFORD, 2006).

Dessa forma, os princípios da Teoria da Objetivação possibilitam novas concepções sobre o propósito da educação, da aprendizagem, de sujeitos, de conhecimento, de objetos matemáticos, de pensamento, dentre outras.

Outros conceitos utilizados na Teoria da Objetivação relevantes para nossa pesquisa referem-se aos processos de *objetivação* e de *subjetivação*. Os *processos de objetivação* são os processos sociais por meio dos quais os alunos são confrontados com formas de pensamento e ação historicamente e culturalmente constituídas e gradualmente se familiarizam com eles, de uma maneira crítica (RADFORD, 2018a).

Para Radford (2014), “a objetivação é o processo social, corpóreo e simbolicamente mediado de consciência e discernimento crítico das formas de expressão, ação e reflexão historicamente e culturalmente constituídas” (RADFORD, 2014, p. 10, tradução nossa).

Os *processos de objetivação* são ativos, discursivos, simbólicos e materiais, por meio dos quais os estudantes encontram, observam e se tornam criticamente familiarizados com

sistemas de pensamento, reflexão e ação. Os *processos de objetivação* são mediados pelo corpo, por gestos, linguagem, sinais e artefatos.

Nesse contexto, para Radford (2018a; 2018b) a *aprendizagem* é o resultado, sempre parcial e em andamento, de *processos de objetivação*. Como os sistemas de pensamento são parcialmente revelados, esses processos são sempre infinitos e, portanto, o mesmo acontece com a aprendizagem. A *aprendizagem* para a Teoria da Objetivação é o encontro com o saber e sua transformação subjetiva em algo que aparece na consciência.

Conforme Radford (2018a), a aprendizagem de Matemática envolve emoções e afetos de maneiras que nos afetam como seres humanos. Por esse motivo, em sala de aula, não apenas produzimos saberes, mas também subjetividades. Os *processos de subjetivação*, por sua vez, são os processos de criação incessante do sujeito, criação contínua de um sujeito histórico e culturalmente singular, único (RADFORD, 2018a).

Para Radford (2014, p. 11, tradução nossa), “a subjetivação consiste nos processos pelos quais os sujeitos tomam posição nas práticas culturais e são formados como sujeitos culturais históricos e únicos”. A subjetivação não é possível sem a participação do sujeito, pois o sujeito é constituído de suas ações, reflexões, alegrias, sofrimentos, dentre outras. Essas ações pelas quais o sujeito é constituído estão imersas em formas de ação e em relação a outras formas de atuar e pensar que são culturais e históricas.

Para investigar a produção de subjetividades em sala de aula, a Teoria da Objetivação utiliza o construto teórico dos processos de subjetivação. Nesse sentido, como afirma Radford (2018a),

[...] a natureza dialética desse movimento nos leva a conceber os estudantes (e os indivíduos, em geral) como entidades em fluxo – entidades que, coproduzindo continuamente no contexto da história, encontram em sua cultura a matéria-prima de sua própria existência (RADFORD, 2018a, p. 10, tradução nossa).

Nesse movimento dialético, alunos e professores são considerados subjetividades em formação, abertos ao mundo. Professores e alunos são conceituados como projetos de vida inacabados e em contínua transformação, em busca de si mesmos, engajados no mesmo esforço em que sofrem, lutam e encontram prazer e satisfação juntos (RADFORD, 2018a).

Uma das principais características da Teoria da Objetivação reside em tratar o ensino-aprendizagem como um processo único no qual toda atividade humana é mediada por artefatos,

signos e práticas culturais constituídas historicamente. Na Teoria da Objetivação a *aprendizagem* é vista como um processo social de tomada de consciência progressiva de algo frente a nós, uma figura, uma forma, algo cuja generalidade notamos gradualmente (RADFORD, 2018a).

Na perspectiva da Teoria da Objetivação o ensino-aprendizagem também produz subjetividades. “Como resultado, devemos nos esforçar para entender as produções de saberes e subjetividades na sala de aula e promover ações pedagógicas que podem levar a um ensino e aprendizagem significativos, ou seja, não alienante” (RADFORD, 2014, p. 136, tradução nossa).

Ainda de acordo com Radford (2014), para conseguirmos a aprendizagem e ensino significativos é fundamental que as ações pedagógicas devam abranger: 1) uma compreensão profunda dos conceitos matemáticos e; 2) a criação de um espaço político e social para desenvolver subjetividades reflexivas, solidárias e responsáveis.

Nesse cenário, a Teoria da Objetivação se apresenta como uma teoria sociocultural de ensino e aprendizagem desenvolvida para trabalhar o ensino de Matemática de forma ética e política, e a formação de indivíduos críticos e reflexivos.

É importante destacar que a Teoria da Objetivação ajuda a materializar a Matemática Recreativa em sala de aula, por exemplo: as tarefas de Matemática Recreativa são, em geral, abertas, o que ajuda a promover um aprofundamento do pensamento matemático em relação a um conteúdo, estimula a discussão coletiva, motivam, além disso, podem conter elementos de natureza histórica e social, e promovem a discussão sobre posicionamentos éticos e reflexivos, dentre outros.

Destacamos agora outros conceitos-chave da Teoria da Objetivação que julgamos pertinentes para a elaboração e implementação das tarefas, coleta e análise de dados que compõem nossa pesquisa. São eles: saber, conhecimento e Labor conjunto.

O *saber*, para a Teoria da Objetivação, é um sistema de processos corporais, sensíveis e materiais de ação e reflexão, constituídos histórica e culturalmente (RADFORD, 2018a). O saber muda de cultura para cultura ao longo do tempo e é produzido pela e na atividade humana. Segundo Radford (2018a, p. 3), “[...] o saber é considerado altamente estético, ético, simbólico e político”. Para este autor, o saber é uma potencialidade presente na cultura que traz possibilidades de pensar, refletir e resolver problemas.

Segundo Radford (2018a), o saber aparece como uma capacidade geradora histórico-cultural, capacidade de pensar, refletir e fazer algo, por exemplo, plantar sementes de milho; calcular hipotecas; pensar o espaço, a quantidade, o tempo, resolver equações lineares, dentre outros aspectos.

O *conhecimento* para Radford (2017a) é a atualização⁴⁷ ou materialização⁴⁸ do saber – é algo real e inteligível que podemos perceber, notar e sentir, é objeto da consciência humana. Para o autor, é importante distinguir três aspectos: o saber como entidade geral, o processo por meio do qual o saber é atualizado ou materializado e o conhecimento como atualização ou materialização do saber.

Entendemos o conhecimento como o produto de uma atividade humana específica. O pensamento, de natureza mediada, é considerado como uma reflexão, um movimento dialético entre uma realidade histórica e culturalmente constituída e um indivíduo que a refrata (e modifica-a) de acordo com suas próprias interpretações subjetivas e significados (RADFORD, 2017b).

O conceito de *atividade* na perspectiva da Teoria da Objetivação é influenciado pelo materialismo dialético. O materialismo dialético oferece uma ontologia em que o ser humano é visto como parte da natureza, ou seja, o ser humano é um ser natural e de necessidades. A teoria elaborou um conceito de atividade em sala de aula coerente com uma visão histórico-cultural do ser humano (RADFORD, 2017a). A atividade é, portanto, o processo pelo qual o saber se materializa no conhecimento. Essa atividade atualiza o saber e o traz à vida.

Para Radford (2018a), o que torna possível a aprendizagem é a atividade humana e prática. Dessa forma, os processos de objetivação e subjetivação ocorrem simultaneamente, de forma contínua e entrelaçada durante a atividade considerada social, histórica e cultural.

Atividade na Teoria da Objetivação não significa simplesmente fazer algo. Atividade (*Tätigkeit* em alemão e *deyatel'nost'* em russo) refere-se a um sistema dinâmico destinado a satisfazer necessidades coletivas. Nesse sentido, a atividade é uma forma social de esforço

⁴⁷ Na Teoria da Objetivação, a *atualização* do saber tem um nome específico: conhecimento, ou seja, a atualização remete-se a algo que deixa de ser potencialidade e torna-se um ato, ou atual (RADFORD, 2019).

⁴⁸ *Materialização* é a forma desenvolvida que a atividade mediadora possibilita, coloca o saber em movimento e o atualiza ou materializa o modo como algo está sendo revelado a consciência durante o curso da atividade (RADFORD, 2019).

conjunto por meio do qual os indivíduos produzem seus meios de subsistência enquanto se produzem como seres humanos (RADFORD, 2018a).

Nesse sentido, a definição de atividade na Teoria da Objetivação “[...] é muito diferente das concepções usuais que entendem a atividade como uma série de ações executadas por um indivíduo na consecução de seu objetivo” (MOREY, 2020, p. 55). Segundo Radford (2019), a atividade em sala de aula como um *Labor conjunto* nos oferece uma alternativa para pensar em novas formas histórico-culturais que não estão alienando⁴⁹ o ensino-aprendizagem.

Conforme apontado por Radford (2014), o *labor*, em seu sentido ontológico, significa alteridade, troca, encontrar-se com o outro, e que nos transforma nesse encontro. Para a Teoria da Objetivação “[...] o princípio fundamental é o labor ou trabalho no sentido materialista dialético. É por meio do labor que encontramos o outro e o mundo em suas dimensões conceituais e materiais. É por meio do labor que encontramos formas culturais de ser” (RADFORD, 2014, p. 137-138, tradução nossa).

O *Labor conjunto* é a principal categoria ontológica e epistemológica da Teoria da Objetivação, considerando a atividade em sala de aula como sua unidade de análise. No entanto, o papel da linguagem, dos signos, dos artefatos e do corpo não é descartado nos processos de transformação de saber em conhecimento. Nesta teoria, a linguagem, os signos, os artefatos e o corpo são entendidos não como mediadores, mas como parte da atividade dos indivíduos (RADFORD, 2018a; 2018b).

Para Radford (2018b), à medida em que as interações ocorrem em sala de aula, o ensino e a aprendizagem não são duas atividades distintas, uma atividade realizada por um professor que orienta o aluno e a outra por um aluno que faz as tarefas⁵⁰ por conta própria, mas como a atividade única e inseparável, isto é, o mesmo *Labor conjunto* – professor-alunos.

Labor conjunto não é um conjunto de ações coordenadas. É a atividade conjunta (*deyatel'nost'*, em russo) realizada pelo professor e pelos alunos, uma forma de energia cuja textura inclui o fluxo de componentes emocionais,

⁴⁹ O termo *alienação* parte da visão materialista do ser humano como ser de necessidades e que encontra a satisfação fora de si. Para isto, o ser humano age e ao agir sobre a realidade a transforma e transforma a si mesmo (RADFORD, 2018a; 2018b; 2019; 2020).

⁵⁰ A *atividade* na TO, é o Labor conjunto de alunos e professores (RADFORD, 2018a; 2018b), e a *tarefa* é constituída por sequências de ações e problemas que os estudantes resolverão para atingir o objetivo proposto (RADFORD, 2015).

afetivos, éticos, intelectuais e materiais, dos quais a Matemática emerge e onde ocorrem os processos de objetivação e subjetivação (RADFORD, 2018b, p. 75, tradução nossa).

O Labor conjunto permite reconceitualizar o ensino e a aprendizagem como um trabalho conjunto no qual alunos e professores estão constantemente envolvidos, desenvolvendo e se transformando, formando suas capacidades intelectuais e humanas, aprendendo a estar com os outros, ouvindo outras vozes e outras consciências.

O conceito de Labor conjunto se refere às formas coletivas de produção de saber e de modos não alienantes de colaboração humana. Assim, o Labor conjunto permite revisitar o conceito de atividade de ensino-aprendizagem em sala de aula e o papel da linguagem, signos e artefatos (RADFORD, 2017b).

Dessa forma, os processos de objetivação e de subjetivação estão vinculados ao conceito de atividade que, central na Teoria da Objetivação, é teorizado como uma tarefa conjunta. Ou seja, o Labor conjunto é uma atividade realizada conjuntamente por professor e alunos.

Na perspectiva da Teoria da Objetivação, a possibilidade de pensar sobre o ensino-aprendizagem da Matemática incorporando a dimensão ética e a compreensão das relações didáticas e constituição de subjetividades é chamada, por Radford (2018b), de *Ética Comunitária*.

Para Radford (2020), a *Ética Comunitária* está centrada em três vetores: *responsabilidade*, *compromisso* e *no cuidado com o outro*. Esses três vetores são importantes para configurar a estrutura essencial da subjetividade e são apresentados da seguinte forma⁵¹:

La *responsabilidad* (*responsibility*) aparece aquí como unión, nexo, vinculación, conexión y enlace con el prójimo, que se expresa en la *respuesta* (*answerability*) que hacemos al *llamado* del otro, llamado que proviene no necesariamente de una formulación lingüística o semiótica, sino de la mera *presencia* de lo que no somos nosotros mismos (RADFORD, 2020, p. 35).

El *compromiso hacia los demás* es la promesa y su aplicación de hacer todo lo posible, en el transcurso de la labor conjunta, en la realización de la “obra común” – *eso* que profesores y estudiantes *producen* juntos en el aula, trabajando hombro con hombro [...] (RADFORD, 2020, p. 35-36).

El *cuidado del otro* es una relación de orden preconceptual o prerracional (Edwards, 2009). No es un acto de condescendencia, o un acto paternal que consistiría en simplemente ocuparse de alguien. Es una forma de estar-con-

⁵¹ Optamos por utilizar o texto original do autor.

otro. La práctica del cuidado del otro va a reposar en la constitución de las sensibilidades o capacidades humanas a las que Marx (1988) hace referencia, en particular la sensibilidad de la atención y del reconocimiento del otro y sus necesidades (RADFORD, 2020, p. 36).

Os três vetores da Ética Comunitária permeiam o *Labor conjunto* e seus processos de objetivação e subjetivação. Além disso, esses vetores se combinam para criar um espaço ético onde pode surgir novas formas de subjetividade consistentes com o projeto educacional e a abordagem histórico-cultural.

Na perspectiva de Radford (2018a, 2018b, 2020), o conceito de Ética Comunitária refere a uma ética de solidariedade, do respeito, *responsabilidade, compromisso e no cuidado com o outro*, diálogo, interação contínua e constante entre professor-alunos e alunos-alunos – uma ética de *Labor conjunto*.

A interação em sala de aula se baseia em uma Ética Comunitária que busca promover “[...] a participação de professores e alunos no espaço público, uma abertura para o outro, o exercício da solidariedade, a criação de um sentimento de pertença, o desenvolvimento de uma consciência crítica” (RADFORD, 2018b, p. 74). Esses elementos se manifestam por meio do comprometimento, da responsabilidade e do cuidado com o outro. A Ética Comunitária pode permitir formas de colaboração que sejam concedidas na medida em que haja um compromisso de *Labor conjunto*, cuidar do outro e assumir uma responsabilidade em relação aos outros.

Dessa forma, para a Teoria da Objetivação não basta que conteúdos de aprendizagem se tornem revelados à consciência do sujeito, é necessário que formas de vida – consciência crítica, cuidado com o outro, compromisso ético, responsabilidade e solidariedade – também sejam reveladas à consciência do indivíduo em atividade (RADFORD, 2017).

De acordo com a perspectiva da Teoria da Objetivação a análise de dados é baseada em uma concepção multimodal do pensamento (ARZARELLO, 2006; RADFORD; ARZARELLO; EDWARDS; SABENA, 2017). Então, para esta pesquisa torna-se fundamental refletir sobre a análise multimodal, conforme discorreremos na seção seguinte.

2.2. Análise Multimodal na Perspectiva da Teoria da Objetivação

De início, é importante esclarecer que na abordagem de Arzarello (2006), a multimodalidade ocorre por meio de relações entre conjuntos de signos (por exemplo, a

linguagem oral e escrita, os gestos e os símbolos), produzidos e transformados de acordo com sua natureza (formal ou informal) e constituindo um *feixe semiótico*⁵². Conforme apontado pela autora, um feixe semiótico é formado por: 1) uma coleção de conjuntos semióticos e; 2) um conjunto de relações entre os signos.

Os feixes semióticos consideram os recursos ou meios semióticos de forma unificada no processo de aprendizagem, permitindo a descrição da aprendizagem por meio da evolução dos signos à medida que são produzidos em sala de aula por alunos e o professor. A abordagem multimodal pode favorecer o entendimento de conceitos porque pode apoiar a ativação de diferentes formas de codificação e manipulação de informações (por exemplo, não apenas de forma analítica) dentro do feixe semiótico (ARZARELLO, 2006).

Na visão de Radford, Edwards e Arzarello (2009), o corpo é um elemento importante da consciência, em nossos atos de conhecer diferentes modalidades sensoriais – tátil, perceptivo e cinestésico – e tornam-se partes integrantes de nossos processos cognitivos. Isso é o que os autores, chamam de natureza multimodal.

De acordo com a Teoria da Objetivação “[...] os gestos, postura corporal, ações cinestésicas, artefatos, sinais em geral, são considerados uma série de recursos a serem levados em conta ao investigar como os estudantes aprendem e como os professores ensinam” (RADFORD; ARZARELLO; EDWARDS; SABENA, 2017, p. 1, tradução nossa). Para os autores, os gestos também são analisados como meios semióticos utilizados pelos estudantes e professores de uma forma multimodal no ensino-aprendizagem da Matemática. Nesse sentido, esses autores, defendem uma concepção multimodal de pensamento nas práticas ocorridas na atividade.

Na perspectiva da Teoria da Objetivação, o termo multimodalidade:

[...] é frequentemente utilizado para sublinhar a relevância e a coexistência mútua de uma gama de diferentes modalidades ou recursos cognitivos, físicos e sensoriais (por exemplo, perceptivo, auditivo, tátil) desempenhando um papel nos processos de ensino-aprendizagem e, mais, em termos gerais, na produção de significados matemáticos: “esses recursos ou modalidades incluem comunicação simbólica oral e escrita, bem como desenho, gesto, a manipulação física e artefatos eletrônicos e vários tipos de movimento corporal” (RADFORD; ARZARELLO; EDWARDS; SABENA, 2017, p. 10, tradução nossa, grifo do autor).

⁵² Conjunto de meios semióticos que são mobilizados durante o *Labor conjunto* e que atuam de forma coordenada e unificada (RADFORD; EDWARDS; ARZARELLO, 2009).

Entendemos que a multimodalidade leva em consideração a amplitude dos recursos cognitivos, físicos e perceptuais que os indivíduos utilizam ao trabalhar com ideias matemáticas. Esses recursos ou modalidades incluem comunicação simbólica oral e escrita, bem como, desenhos, gestos, olhares, movimentos corporais e artefatos.

No que se refere aos meios semióticos de objetivação, Radford (2003) os define como os meios utilizados pelos indivíduos que estão em processo de produção de significados, para alcançar uma forma estável de consciência, para tornar presentes suas intenções e organizar suas ações, e assim, adquirir os objetivos de suas ações. Segundo o autor, é por meio da mobilização dos meios semióticos de objetivação na atividade que os objetos matemáticos podem ser acessados, permitindo assim que eles estejam presentes, dando-lhe uma certa forma tangível e corporal de saber (RADFORD, 2003).

A importância dos meios semióticos de objetivação reside em reconhecer o papel que desempenham no desenvolvimento e na manifestação do pensamento matemático, pois, por meio deles pensamos, tornando-nos elementos constitutivos, e não periféricos, atividade reflexiva com formas culturais de pensar.

Conforme argumenta Arzarello (2006) os signos são como entidades mediadoras do pensamento, tanto quanto as ferramentas são concebidas como entidades mediadoras do labor. Nesse contexto, os gestos e outros recursos corporificados aos quais alunos e professores recorrem tornam-se signos, mesmo que não apresentem regras de produção relativamente formais como a linguagem e o simbolismo algébrico gráfico e cartesiano, por meio de regras gramaticais ou sintáticas explícitas.

Segundo a autora, os gestos são elementos importantes no processo de objetivação do saber dos estudantes. Pois, os gestos ajudam os estudantes a tornarem suas intenções visíveis, a perceberem as relações matemáticas abstratas e a tomarem consciência dos aspectos conceituais dos objetos matemáticos (ARZARELLO, 2006).

Na perspectiva da Teoria da Objetivação, a análise de dados é ancorada com base em uma concepção multimodal do pensamento (RADFORD, 2003; ARZARELLO, 2006; RADFORD; ARZARELLO; EDWARDS; SABENA, 2017). A abordagem multimodal sugere que a análise de dados deve levar em consideração a relação entre os diferentes meios semióticos mobilizados pelos estudantes durante a atividade matemática, a exemplo de ler, falar, escrever, desenhar, gestos, movimentos corporais, manipular artefatos, dentre outras ações (ARZARELLO, 2006).

Compreendemos que a análise multimodal consiste em considerar, na atividade (Labor conjunto) os diversos meios semióticos de objetivação que emergem e se manifestam por meio do corpo, movimentos, gestos, artefatos e uso de signos, além das produções que são registradas nas fichas de tarefas dos alunos e em seus atos discursivos. Por isso, as tarefas de Matemática Recreativa propostas nesta investigação, realizadas pelos participantes da pesquisa são analisadas a partir de uma concepção multimodal (ver quarto Capítulo).

Na análise multimodal, o que é escrito, falado e gesticulado pelos estudantes não podem ser analisados isoladamente, pois essas formas de reflexão, expressão e ação são estudadas como partes constitutivas dos processos de objetivação. Desta forma, não só será levado em consideração o que os estudantes expressam por meio do que falam ou escrevem, mas será acompanhado por recursos físicos e perceptuais, pela corporeidade de ações e gestos quando os alunos trabalham com ideias matemáticas, pois é importante incluir o corpo no ato de conhecer (ARZARELLO, 2006; RADFORD; ARZARELLO; EDWARDS; SABENA, 2017).

A unidade de análise, nesta pesquisa é constituída pelos meios semióticos que os estudantes mobilizam frente as tarefas propostas. É importante esclarecer que esses meios semióticos de objetivação e/ou subjetivação são investigados, com base nos segmentos relevantes dos fragmentos selecionados das gravações de vídeos realizadas durante a implementação das tarefas propostas, por meio do *Labor conjunto* de alunos e professores e norteada por uma *Ética Comunitária* caracterizada pelos vetores de responsabilidade, compromisso e cuidado com o outro (ver quarto Capítulo).

Conforme destaca Arzarello (2006), a análise de dados deve levar em consideração a relação dos meios semióticos de objetivação mobilizados pelos estudantes durante a atividade (gestos, signos, postura corporal, artefatos, entre outras ações). Portanto, a análise multimodal das produções matemáticas mobilizadas pelos participantes da pesquisa no decorrer das tarefas é apresentada no quarto Capítulo.

Os conceitos-chave da Teoria da Objetivação, mencionados anteriormente, oferecem as possibilidades para a análise desta pesquisa, pois consideramos como objeto de análise a atividade (Labor conjunto). Nesse sentido, a Teoria da Objetivação permite refletir sobre os aspectos epistemológicos de novas abordagens como a Matemática Recreativa em sala de aula, além de oferecer uma metodologia de ensino e pesquisa, de coleta, de análise e interpretação dos resultados. Neste sentido, reafirmamos nossa opção pela Teoria da Objetivação, para guiar

as etapas de elaboração e implementação das tarefas, na coleta e análise de dados (ver terceiro e quarto Capítulos).

Procuramos neste Capítulo, apresentar os conceitos-chaves da Teoria da Objetivação que julgamos relevantes para esta pesquisa, destacamos ainda, o conceito de análise multimodal, no âmbito da Teoria da Objetivação, pois, a análise do nosso trabalho surgiu da compreensão dos meios semióticos mobilizados no processo da atividade (Labor conjunto).

No Capítulo seguinte, iremos relatar sobre o processo de organização e construção da proposta Didático-Pedagógica à luz da Teoria da Objetivação que envolve as principais tarefas em Matemática Recreativa.

3 PROPOSTA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA: À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO

Neste capítulo, relatamos o processo de organização e construção da proposta Didático-Pedagógica que envolve as principais tarefas de Matemática Recreativa (MR) para apresentar aos professores de Matemática em formação inicial. Em sequência, destacamos algumas orientações e recomendações didáticas e pedagógicas na perspectiva da Teoria da Objetivação dirigidas ao professor de Matemática sobre a elaboração e o uso das tarefas que compõem a referida proposta didática.

3.1 Organização da Proposta Didático-Pedagógica

As proposições apresentadas para o ensino com Matemática Recreativa são coerentes com a teoria de aprendizagem que apoia ao nosso estudo. Trata-se da Teoria da Objetivação, uma teoria que concebe o ensino e a aprendizagem como um processo único que envolve *conhecer e tornar-se*.

Para a Teoria da Objetivação, a aprendizagem não pode limitar-se ao eixo do conhecimento, mas deve abordar também o eixo do ser e dos sujeitos. O fato da Teoria da Objetivação focar no eixo do conhecer e do tornar-se (isto é, na transformação do saber e na formação de subjetividades), faz com que seu olhar para a Educação Matemática se concentre também na formação do sujeito (RADFORD, 2018a; 2018b; 2020).

Ao contrário de algumas teorias construtivistas que definem o objetivo da Educação Matemática como sendo a produção de estruturas intelectuais cada vez mais complexas ou, simplesmente, a difusão do conhecimento matemático, a Teoria da Objetivação não perde o foco da dimensão humana e concebe a Educação Matemática como um esforço dinâmico, político, social, histórico e cultural que busca a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos posicionando-se criticamente em discursos e práticas matemáticas que se constituem cultural e historicamente, discursos e práticas, pois, elas, estão em permanente evolução (RADFORD, 2018a; 2018b; 2019).

A Teoria da Objetivação valoriza o Labor conjunto entre professores e alunos – favorecendo o conhecimento e a transformação do sujeito. Desta forma, encontramos na Teoria da Objetivação, os fundamentos teóricos, filosóficos e metodológicos que procurávamos para guiar a organização e construção da proposta Didático-Pedagógica, ou seja, a fundamentação

teórica que sustenta as tarefas de Matemática Recreativa ficou ao encargo da Teoria da Objetivação.

Partido do princípio das observações dos aspectos analisados a partir das Teses e Dissertações, incluindo as experiências de tarefas de Matemática Recreativa desenvolvidas nas aulas de Matemática, bem como, suas considerações a respeito do uso no ensino de Matemática (ver primeiro Capítulo), podemos afirmar que, encontramos nesses estudos (SEGANTINI, 2015; MENEZES, 2004; COSTA, 2014; BÁRTLOVÁ, 2016), elementos importantes para incluirmos em nossa investigação, a organização e construção da proposta Didático-Pedagógica com os tipos mais frequentes de tarefas de Matemática Recreativa, a saber: jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos, ancoradas no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação, com o propósito de apresentar a Matemática Recreativa aos professores de Matemática na formação inicial, objetivando o conhecimento dessa abordagem metodológica e sua aplicação em sala de aula.

Para a organização da proposta Didático-Pedagógica, inicialmente, fizemos o mapeamento de pesquisa nas Teses e Dissertações produzidas por pesquisadores brasileiros e estrangeiros que versam sobre Matemática Recreativa. Na sequência, foi feita a análise dos trabalhos de maior relevância ao nosso estudo; em seguida, procedemos a seleção das tarefas de Matemática Recreativa de caráter recreativo, pedagógico e histórico, selecionadas a partir dos trabalhos analisados, por último, a elaboração das tarefas de Matemática Recreativa com base nos princípios do Labor conjunto e da Ética Comunitária da Teoria da Objetivação.

É importante destacar que, depois da análise dos estudos de maior relevância ao nosso estudo, percebemos algumas lacunas relacionadas a nossa temática, conforme apresentado a seguir:

- Os estudos desenvolvidos por Góes, (2002) e Spada, (2009) tiveram intervenções com abordagens lúdicas, por exemplo, jogos;
- Os trabalhos de Segantini (2015) e Ribeiro (2018) concentram suas intervenções com foco em Problemas Recreativos tendo como suporte a metodologia de Resolução de Problemas;
- A pesquisa de Lipa (2016) teve como abordagem a MR, assim como, uma intervenção em sala de aula no Ensino Superior, com foco em Problemas Recreativos: algébricos e aritméticos, jogos e quebra-cabeças lógicos;

- As pesquisas de Menezes (2004), Costa (2014) e Bártlová (2016) não foram realizadas intervenções de MR em sala de aula, mas apresentam várias formas de tarefas de MR de caráter recreativo, pedagógico e histórico.

A nossa proposta Didático-Pedagógica, que envolve tarefas relacionadas à Matemática Recreativa, abrange alguns pontos identificados nos trabalhos mencionados anteriormente e, podemos afirmar que, a presente pesquisa se faz diferente das demais, pois, envolve estratégia didática de formas não individualistas de colaboração humana, ou seja, uma abordagem com base na Teoria da Objetivação (RADFORD, 2017a; 2017b; 2017c; 2018a; 2018b; 2019; 2020).

Após a conclusão das etapas mencionadas anteriormente, o nosso projeto de pesquisa com o planejamento das tarefas de Matemática Recreativa, foi submetido em agosto de 2019 e aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa (CEP) da UFRN em dezembro de 2019, com o Parecer número 3.765. 149 (Anexo 1) para ser desenvolvida com os licenciandos do Curso de Licenciatura em Matemática, do Centro de Ciências Exatas e da Terra, situado no Departamento de Matemática da UFRN/Campus Natal. É importante salientar que, o coordenador do Curso de Matemática aceitou a realização desta pesquisa.

Em seguida, entramos em contato com a Professora Doutora Marta Figueredo dos Anjos para explicarmos sobre a proposta pedagógica para ser aplicada no primeiro semestre de 2020. A referida professora aceitou a proposta de introduzir tarefas de Matemática Recreativa em sua sala de aula e nos concedeu 8 encontros na disciplina de Tópicos de História da Matemática⁵³.

Após, conhecermos um panorama das pesquisas em Matemática Recreativa a partir de Teses e Dissertações, por meio do mapeamento de pesquisa, foi possível, a organização e construção da proposta Didático-Pedagógica. A proposta mencionada é resultado do primeiro e segundo Capítulos.

A proposta Didático-Pedagógica contempla tarefas de Matemática Recreativa ancoradas na Teoria da Objetivação e destinadas aos professores de Matemática na formação inicial, dessa forma, reafirmamos a importância dessa teoria para nossa investigação, principalmente, como objeto de reflexões pedagógicas, para que os professores de Matemática possam conhecer a Matemática Recreativa e se posicionar sobre como e porque essa abordagem metodológica deve estar presente nas aulas de Matemática.

⁵³ A disciplina é do 5º semestre, cujo código é MAT1521.

Expomos a seguir a estrutura da atividade de sala de aula, as orientações para o desenvolvimento das tarefas, as recomendações e orientações didáticas e pedagógicas ao professor de Matemática, além das informações sobre a proposta Didático-Pedagógica e as tarefas que compõem a presente proposta.

3.2 Recomendações Didático-Pedagógicas ao Professor de Matemática

Nesta seção apresentamos a estrutura da atividade de sala de aula com base na Teoria da Objetivação (RADFORD, 2015; 2017b; 2018a; 2018b; 2020), além de tecer recomendações e orientações didáticas e pedagógicas ao professor de Matemática em relação à elaboração e ao uso das tarefas de Matemática Recreativa que compõem a proposta Didático-Pedagógica.

Destacamos agora a estrutura da atividade (RADFORD, 2015) que julgamos pertinentes para que o professor possa elaborar as tarefas e implementá-las na sala de aula. A atividade na TO “[...] aparece como a unidade mínima que reproduz a sociedade como um todo. Repousa sobre uma concepção específica de indivíduos como seres naturais de necessidades” (RADFORD, 2015, p.553, tradução nossa).

Neste contexto, a atividade permite aos alunos uma abordagem, crítica e reflexiva dos saberes da cultura, podendo proporcionar ocasiões para que os estudantes se emancipem, afirmando-se como sujeitos sociais, históricos e culturais. A atividade na TO é o Labor conjunto de alunos e professores (RADFORD, 2018a; 2018b; 2020).

Portanto, o Labor conjunto, é o trabalho pelo qual, professores e alunos se afirmam em sua produção e atuam como seres humanos no que fazem, por isso, o Labor conjunto é o tipo de atividade que não é alienante, pois sua característica é a prática de uma Ética Comunitária e é essa ética que norteia a ação didática nas aulas de Matemática.

Conforme Radford (2017b), a atividade que ocorre nas aulas de Matemática tem um objeto que pode ser identificado, a priori, pelo projeto didático do professor. Para este autor, o objeto pode ser, por exemplo, o encontro dos alunos com formas culturalmente codificadas de pensar algebricamente sobre sequências, sobre o movimento e as frações. Dessa forma, a atividade é um sistema em movimento e se move em direção ao seu objeto.

Para atingir os objetivos da atividade, o autor, enfatiza que o professor deve elaborar tarefas específicas. Tais tarefas podem acontecer como uma sequência de problemas relacionados de dificuldade conceitual crescente (RADFORD, 2015; 2017b).

Além disso, recomenda-se ao professor alguns momentos importantes para a realização da atividade na sala de aula, que se fundamentam na Teoria da Objetivação (RADFORD, 2017b), são os seguintes: 1) dividir a turma em pequenos grupos, de dois, três ou de quatro alunos; 2) apresentação da tarefa pelo professor para os estudantes; 3) o professor visita os pequenos grupos com discussões, perguntas e feedbacks; 4) discussão geral na qual os grupos podem apresentar suas ideias, receber críticas, e outros grupos podem questioná-las criticamente ou fazer sugestões de melhoria ou generalização. É importante destacar que, esses momentos podem variar de acordo com cada situação.

As atividades em sala de aula, de modo particular, são caracterizadas por seu objeto e este objeto possui uma intenção didática, não é necessariamente clara aos estudantes desde o início. O objeto da atividade é revelado aos alunos à medida que eles se envolvem na atividade em sala de aula.

Para que a atividade de sala de aula se mova em direção ao seu objeto, é necessário, pedagogicamente, introduzir alguns objetivos. Assim, para alcançar os objetivos da atividade, é importante traçar tarefas específicas de crescente complexidade conceitual (RADFORD, 2015).

Com base na Teoria da Objetivação, apresentamos a *estrutura da atividade* de sala de aula: *objeto-meta-tarefa*. Segundo Radford (2015), essa estrutura reflete a intenção pedagógica da atividade que ocorre na sala de aula. Diante disto, esta estrutura proposta por Radford (2015), na forma *objeto-meta-tarefa*, guiou o desenho das tarefas relacionadas à Matemática Recreativa. Nessa estrutura, o *objeto* é o saber matemático a ser atualizado, a *meta* é o objetivo da atividade e a *tarefa* é constituída por sequências de ações e problemas que os estudantes e professores mobilizam na atividade (RADFORD, 2015).

É importante mencionar que o processo de atualização do saber não é mecânico, e depende de como os estudantes e os professores se envolvem na atividade, por exemplo, como eles respondem uns aos outros, ou seja, como as coisas realmente acontecem na sala de aula (RADFORD, 2015).

A seguir, destacamos algumas recomendações e orientações didáticas e pedagógicas ao professor de Matemática em relação à elaboração das tarefas de Matemática Recreativa e o seu uso em sala de aula, tendo como aporte teórico-metodológico a Teoria da Objetivação.

Consideramos que a Matemática Recreativa pode trazer um pouco de leveza, entretenimento, entusiasmo e aprendizado de aspectos inesperados e não tradicionais da

Matemática. Assim, a Matemática Recreativa pode ser uma abordagem metodológica importante para promover o desenvolvimento dos estudantes. Dessa forma, são os professores de Matemática a chave para a introdução de Matemática Recreativa em sala de aula. Será que os professores estão dispostos a isto? Sendo assim, apresentamos indicações de caminhos possíveis para que o professor possa introduzir a Matemática Recreativa no ensino de Matemática.

As tarefas de Matemática Recreativa foram elaboradas com base nos princípios do Labor conjunto e da Ética Comunitária da Teoria da Objetivação, para apresentar aos licenciandos do Curso de Matemática, as possibilidades, as vantagens e desvantagens de introduzir a Matemática Recreativa em sala de aula. Quanto à implementação das tarefas na sala de aula, propomos que, a estratégia didática utilizada seja por meio de uma ética que fomenta modos de colaboração humana e interações, que promovam postura crítica, de solidariedade, de responsabilidade e cuidado com o outro.

O professor de Matemática pode elaborar várias tarefas de Matemática Recreativa com as quais é possível trabalhar diversos conceitos matemáticos. Elas devem proporcionar possibilidades didáticas para além dos aspectos lúdicos, recreativos e motivacionais, focando na investigação matemática, nas estratégias de resolução de problemas, além de induzir a busca de estratégias e a explorar conceitos matemáticos envolvidos nas tarefas. O professor deve se sentir preparado para elaborar as tarefas de Matemática Recreativa e explorá-las em sala de aula.

O docente necessita prever as tarefas e a intenção pedagógica da atividade na sala de aula, além disto, o professor deve planejar as tarefas e estruturá-las com base em determinados objetivos. O professor deve ter em mente os objetivos que pretende alcançar com as tarefas de Matemática Recreativa que elaborou ou reelaborou, respeitando o nível em que o estudante se encontra e o tempo de duração das tarefas.

No decorrer das tarefas, o professor deve convidar o público-alvo a imergir em tarefas de crescentes níveis de complexidade, para pensar, dialogar, refletir, debater e se posicionar sobre as possibilidades, as vantagens e desvantagens de introduzir a Matemática Recreativa em sala de aula. O propósito é fornecer condições para que os estudantes possam produzir autonomia e materializar formas de agir e refletir sobre a Matemática Recreativa e a posicionarem-se sobre o tema com segurança.

As tarefas de Matemática Recreativa devem ser inseridas em sala de aula como suporte pedagógico e não como mero passa tempo, ou seja, a importância do uso pedagógico da Matemática Recreativa no ensino de Matemática. Para isto, o professor pode utilizar várias abordagens metodológicas em Educação Matemática, que permitam ao discente maior aprendizado matemático, contribuindo também para melhorar o lado afetivo de aprender Matemática, neste sentido, enfatizamos o uso da Matemática Recreativa.

No âmbito da Teoria da Objetivação, o professor desempenha papel importante, tanto na seleção dos problemas, quanto na sua organização conceitual. Nesta ocasião, destacamos algumas orientações para a realização da atividade em sala de aula, seguindo a *metodologia* de Radford (2015), para isso, o autor destaca as seguintes etapas:

- *Considerações gerais* – levar em consideração o que os alunos sabem; - usar artefatos sempre que possível (material concreto, recursos tecnológicos, dentre outros).
- *Considerações sobre a escolha e organização dos problemas* – ser interessantes do ponto de vista dos estudantes; - tornar significativos os conceitos matemáticos alvo em níveis conceituais profundos; - oferecer aos estudantes a oportunidade de refletir matematicamente de maneiras diferentes (não apenas por meio das lentes da Matemática dominante) e; - ser organizadas de forma que haja um fio conceitual orientado para problemas de complexidade Matemática crescente.
- *A organização da sala de aula* – deve promover um espaço para reflexão crítica e interação entre alunos-alunos e entre professor-alunos.
- *Considerações para a execução em sala de aula* – organizar a turma em pequenos grupos de dois, três ou de quatro alunos; - trabalhar por meio do *Labor conjunto* e prezando pela *Ética Comunitária*; - o professor apresenta para os estudantes a tarefa ou determinado problema; - abrir um espaço de reflexão e interação crítica por meio de discussões em pequenos grupos, entre discussões em pequenos grupos e discussões gerais; - o professor deve trabalhar coletivamente, visitando os pequenos grupos, auxiliando-os e orientando-os, sempre que necessário.

Quanto ao uso da proposta Didático-Pedagógica, ela não é fechada. O que isso significa? A presente proposta não é rígida, diante disto, o professor que decida utilizar as tarefas de Matemática Recreativa em suas turmas com os estudantes de Licenciatura em Matemática ou em ações de formação continuada com professores de Matemática, é fundamental que o professor faça uma análise das tarefas, além disso, orientamos que o professor faça as adaptações e/ou modificações necessárias ao seu público-alvo.

A seguir, apresentamos as principais informações sobre a proposta Didático-Pedagógica:

Título: Proposta Didático-Pedagógica: à luz da Teoria da Objetivação.

Objetivo: O objetivo da proposta Didático-Pedagógica é apresentar aos professores de Matemática, na formação inicial, as tarefas mais frequentes de Matemática Recreativa: jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos, alicerçadas sob à luz dos princípios do *Labor conjunto* e da *Ética Comunitária* da Teoria da Objetivação, podendo assim, contribuir para que os futuros professores de Matemática possam conhecer as possibilidades, as vantagens e desvantagens de introduzir essa abordagem metodológica em sala de aula.

Conteúdos: Teoria da Objetivação (TO), Labor conjunto e Ética Comunitária; antigos indícios de atividades com Matemática Recreativa e antigos problemas (clássicos) de natureza recreativa e históricos; obras relacionadas à Matemática Recreativa; matemáticos e autores que contribuíram para a divulgação da Matemática Recreativa; as concepções e os aspectos da Matemática Recreativa; as principais tarefas em Matemática Recreativa; as vantagens e desvantagens de introduzir a Matemática Recreativa em sala de aula de Matemática; a Matemática Recreativa e História da Matemática.

Fundamentação Teórica da Proposta Didático-Pedagógica: A fundamentação teórico-metodológica ficou a cargo da Teoria da Objetivação (TO), que é uma teoria de ensino-aprendizagem de corrente sociocultural, contemporânea, idealizada pelo pesquisador Luis Radford.

Estratégia Didática Utilizada: A estratégia didática utilizada para o desenvolvimento das tarefas é orientada pela Teoria da Objetivação, um trabalho de colaboração mútua entre alunos e professores, na forma de Labor conjunto e da Ética Comunitária, caracterizada pelos vetores de responsabilidade, compromisso e no cuidado com o outro.

Tarefas da Proposta Didático-Pedagógica: Um conjunto de cinco tarefas: a primeira tarefa contempla as posições fundamentais da Teoria da Objetivação e as outras quatro envolvem as principais tarefas em Matemática Recreativa.

Público-alvo: Estudantes de Licenciatura em Matemática.

Material Necessário: Para a realização das tarefas faz-se necessário cópias dos textos, dos problemas e das fichas das tarefas dos alunos, papel, lápis, tesoura, régua, material emborrachado (E.V.A), cartolina guache, notebook e/ou celulares conectados à internet.

Duração das Tarefas: De 4 a 5 semanas, sendo 4 horas semanais (2+2).

Considerando os elementos anteriormente apresentados, apresentamos no Quadro 9, as tarefas⁵⁴, intitulada *Tarefas Matemáticas Recreativas* que compõem a presente proposta Didático-Pedagógica.

Quadro 9. Tarefas da Proposta Didático-Pedagógica.

Tarefas	Descrição	Tempo
Tarefa 1	<i>Introdução à Teoria da Objetivação</i> – Leitura e discussão do Texto 1 – A Teoria da Objetivação (TO): uma teoria de ensino e aprendizagem; ouvir os posicionamentos dos participantes da pesquisa.	3 horas
Tarefa 2	<i>Introdução à Matemática Recreativa</i> – Leitura e discussão do Texto 2 – A Matemática Recreativa: algumas Contribuições Iniciais; apresentação oral do Texto 3 – As Principais Tarefas em Matemática Recreativa; ouvir os posicionamentos dos participantes da pesquisa.	3 horas
Tarefa 3	<i>O Problema dos 35 Camelos</i> – Leitura, discussão e resolução do Problema Recreativo; ouvir os posicionamentos dos participantes da pesquisa.	4 horas

⁵⁴ As tarefas da proposta Didático-Pedagógica, intitulada *Tarefas Matemáticas Recreativas*, também são expostas no quarto Capítulo.

Tarefa 4	<i>Jogo Matix e Senha</i> – Confecção do jogo, leitura da regra e explorar o jogo e seu manuseio; ouvir os posicionamentos dos participantes da pesquisa.	4 horas
Tarefa 5	<i>Lista de Problemas Recreativos, quebra-cabeças matemáticos e jogos matemáticos</i> – discussão e reflexões sobre as vantagens e desvantagens das tarefas; ouvir os posicionamentos dos participantes da pesquisa; e a avaliação das Tarefas Matemáticas Recreativas.	6 horas

Fonte. Produzido pelas pesquisadoras (2019).

No que diz respeito ao desenvolvimento das tarefas no Ensino Superior, as orientações é que o professor⁵⁵ reserve 4 horas semanais, no entanto, é possível fragmentar em sessões de duas horas, a depender das necessidades e disponibilidade de tempo do professor. Sugerimos que as tarefas sejam realizadas de modo sequencial, em várias disciplinas.

Apresentamos a seguir uma síntese do planejamento didático das tarefas, destacando os objetivos, as metas e as ações propostas.

A Tarefa 1 foi elaborada pelas autoras, com base nos referenciais teóricos da Teoria da Objetivação (RADFORD, 2017a; 2018a; 2018b; 2020). Esta tarefa não é caracterizada como uma tarefa de Matemática Recreativa, mas como uma *tarefa teórica* com a apresentação dos pressupostos básicos da Teoria da Objetivação. O objetivo da tarefa é exercitar a capacidade de leitura e interpretação de textos e oferecer aos licenciandos de Matemática uma noção do que é a Teoria da Objetivação com destaque para dois conceitos-chave: o Labor conjunto e a Ética Comunitária (ver Tarefa 1, Apêndice A).

Escolhemos iniciar as tarefas com um texto sobre a Teoria da Objetivação, para apresentar aos licenciandos do Curso de Matemática (UFRN/Natal) uma teoria de ensino-aprendizagem de corrente sociocultural, elaborada por Luis Radford no início do século XXI, além disso, essa teoria nos deu suporte na pesquisa como um todo, na elaboração das tarefas, na implementação, na didática de ensino, na coleta e análise de dados.

A Tarefa 1, teve como principal meta possibilitar aos licenciandos do Curso de Matemática trabalharem com os conceitos-chave da Teoria da Objetivação, por meio da leitura e discussão do Texto 1– *A Teoria da Objetivação: uma teoria de ensino e aprendizagem*. Para isto, a primeira ação da tarefa, deve ser iniciada com a apresentação de cada participante, pois é uma forma de conhecer melhor a turma e estabelecer uma relação de confiança; após este

⁵⁵ O/a Professor/a.

momento, é hora de o professor apresentar a proposta da tarefa e convite à formação de grupos de trabalho de dois, três ou de quatro participantes.

Quanto à segunda ação da Tarefa 1, recomendamos a distribuição de uma única cópia do texto para cada grupo, para que todos se concentrem na leitura compartilhada do Texto 1, a leitura deve ser realizada por meio de um trabalho coletivo de colaboração mútua entre os participantes, seguindo o Labor conjunto; em seguida, os participantes devem recorrer ao debate em seu grupo para interpretação, compreensão e reflexão das informações contidas no texto; após a leitura, os participantes devem registrar na Ficha de Tarefas dos alunos, palavras ou trechos não compreendidos, além da compreensão sobre Labor conjunto e Ética Comunitária; no decorrer da tarefa, o professor deve circular em cada pequeno grupo, levantando questões, estabelecendo discussões e reflexões; após os momentos anteriores, discussão geral com os grupos, para ouvir as considerações, questionamentos e reflexões dos participantes sobre os princípios de Labor conjunto e da Ética Comunitária .

Outras informações no que se refere a aplicação da Tarefa 1, com os licenciandos do Curso de Matemática (UFRN/Natal) estão disponíveis no Capítulo seguinte.

É importante destacar que o professor pode optar por começar a realização das tarefas a partir das tarefas relacionadas à Matemática Recreativa sob a forma de *Labor conjunto*, que é a proposta didática da *Teoria da Objetivação*. Portanto, em todos os momentos das tarefas, os participantes devem se respeitar, independentemente da ocorrência de divergências de ideias.

A Tarefa 2 foi elaborada por meio do viés teórico sobre a Matemática Recreativa, a partir dos estudos de Menezes (2004), Costa (2014), Segantini (2015), Melo (2013), Bártlová (2016), dentre outros. A referida tarefa tem como objetivo exercitar a capacidade de leitura e interpretação de textos e apresentação da Matemática Recreativa aos futuros professores de Matemática para tornar possíveis reflexões por meio de diálogo, sobre a importância da MR, para isto, destacamos: antigos indícios de atividades com MR, antigos problemas de natureza recreativa, definições e os aspectos da MR; as principais tarefas em MR; as vantagens e desvantagens dessa ferramenta em sala de aula; além de obras recreativas e autores que contribuíram para a divulgação da MR. A ideia é vivenciar uma tarefa baseada no diálogo por meio do Labor conjunto de cooperação humana e norteada pela Ética Comunitária (ver Tarefa 2, Apêndice A).

A Tarefa 2, teve como meta planejada, levar os estudantes de Matemática a compreender as definições e os aspectos da Matemática Recreativa por meio de leituras e identificar as

principais tarefas de Matemática Recreativa. Para isto, a primeira ação da Tarefa 2, teve como finalidade a leitura e discussão do Texto 2 – *A Matemática Recreativa: algumas Contribuições Iniciais*, nessa ação, recomendamos que o professor faça a apresentação da tarefa; em seguida, o professor distribuirá uma única cópia do texto, para que os estudantes façam uma leitura compartilhada em seu grupo, seguindo o Labor conjunto que se sustenta em uma Ética Comunitária; na sequência, os participantes devem recorrer ao debate em seu grupo para interpretação, compreensão e reflexão das informações contidas no Texto 2; após a discussão anterior, os participantes devem registrar suas ideias a respeito do texto, na Ficha de Tarefa dos alunos, durante esse processo o professor pode circular em cada pequeno grupo, estabelecendo discussões e reflexões e instigando a produção de registros na Ficha de Tarefa dos alunos; por fim, discussão geral com todos os grupos para ouvir os posicionamentos e questionamentos dos estudantes sobre a Matemática Recreativa.

A segunda ação da Tarefa 2, é sobre as principais tarefas em Matemática Recreativa. Para isto, recomendamos que o professor faça uma explanação com a projeção de slides do Texto 3 (ver Tarefa 2, Apêndice A) ou uma apresentação oral, explorando-se questões que fomentem o diálogo e a participação dos estudantes sobre as principais tarefas em MR; sugerimos que os estudantes utilizem os seus celulares com acesso à internet (artefatos) para pesquisarem termos desconhecidos, por exemplo, Cubo de Rubik, os anéis chineses e a Torre de Hanói, dentre outros; em seguida, solicite um debate geral com a turma com discussões e reflexões, bem como, a apresentação para a classe da opinião dos participantes sobre as principais tarefas em MR; após esse momento, proponha a seguinte pergunta: você já trabalhou com tarefas que enfatizam o uso de jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos, além de tarefas lúdicas? Você considera essas tarefas apresentadas na literatura vigente como Matemática Recreativa? Se sim, em que sentido? Em seguida, o professor deve ouvir os posicionamentos dos participantes, essa discussão pode ser ampliada com a participação do professor por meio da atividade (Labor conjunto) ombro a ombro estabelecida entre alunos-alunos e professor-alunos.

A Tarefa 3 foi elaborada sob a ótica da Teoria da Objetivação, assim, optamos por um Problema Recreativo que se insere nas principais tarefas em MR. O Problema dos 35 Camelos foi extraído da obra *O Homem que Calculava*, de Malba Tahan (2017). O problema foi dividido em duas partes e optamos em utilizar o texto original do autor. Este Problema Recreativo visa também aprimorar conhecimentos relacionados aos conteúdos matemáticos, por exemplo,

números racionais, frações, divisão, proporção e porcentagem – de forma recreativa e pedagógica – além de favorecer a tomada de decisão, bem como, serem exploradas as habilidades de cálculo mental e raciocínio lógico.

O objetivo da Tarefa 3 é familiarizar os licenciandos de Matemática com a leitura de enunciados de Problemas Recreativos e as soluções para os problemas. O interesse é dar condições para produção de novas subjetividades por meio de um trabalho coletivo de colaboração mútua entre os participantes da pesquisa (ver Tarefa 3, Apêndice A).

A Tarefa 3 teve como meta a leitura, a identificação e reconhecimento dos conceitos e propriedades matemáticas contidas no texto do Problema Recreativo – O Problema dos 35 Camelos.

Em relação à primeira ação, o professor distribuirá uma cópia da primeira parte do problema para cada grupo, para que façam uma leitura compartilhada, seguindo o Labor conjunto; em seguida, realizar coletivamente a tarefa dada, isto é, a compreensão do texto, com discussão com os grupos sobre a compreensão do problema; após a leitura, os participantes devem registrar em seus grupos, suas opiniões na Ficha de Tarefa dos alunos, durante esse processo, é essencial a interação do professor com cada pequeno grupo promovendo perguntas e instigando formas de agir, pensar e se posicionar; na sequência, debater e refletir em pequenos grupos estratégias iniciais e como solucionaram as questões; por fim, debate geral com os grupos, socialização e apresentação das soluções do problema.

A segunda ação da Tarefa 3, é sobre a análise da solução da segunda parte do problema apresentada por Beremiz. Para isto, sugerimos que o professor termine o diálogo com a turma do encontro anterior; em seguida, o professor distribuirá uma cópia da segunda parte do problema para cada grupo fazer uma leitura compartilhada da solução apresentada por Beremiz e a análise da solução em cada grupo, que permitam uma interação ética entre alunos e entre professor e alunos; debate e discussão em grupo sobre os conteúdos identificados do texto do problema; em seguida, os participantes devem registrar em seus grupos, suas opiniões na Ficha de Tarefa dos alunos; na sequência, debate sobre as perguntas contidas na ficha, por exemplo: o problema dos 35 camelos é recreativo? Se sim, que argumentos você utiliza para justificar sua resposta? Em que séries pode ser aplicado? Qual seria as vantagens pedagógicas? Qual aprendizado facilita? O problema pode ser modificado ou adaptado? Que contribuições esta tarefa poderia trazer para os alunos? E para o professor de Matemática? Finalmente, debate

geral com a turma com discussões, reflexões e a apresentação oral para a classe de sua opinião sobre a solução de Beremiz e as questões-problemas mencionadas.

A Tarefa 4 foi elaborada pelas autoras e adaptado do trabalho de Fanti e Suleiman (2012) e se insere nas principais tarefas em Matemática Recreativa. Esta tarefa, é importante para que os licenciandos de Matemática construam o próprio material e não o recebam pronto, pois, a construção do jogo favorece o desenvolvimento da coordenação motora, as habilidades artísticas e cognitivas de maneira recreativa, lúdica, cooperativa e criativa. Este jogo pode explorar conteúdos de cálculos de adição e subtração de números inteiros, além de matrizes. É um jogo de estratégia, portanto, não depende apenas de sorte, mas sim, das decisões de cada jogador, estimulando o raciocínio nas jogadas.

O objetivo da Tarefa 4 é explorar o jogo e seu manuseio e discutir alternativas para o ensino de Matemática por meio do uso de jogos como elemento da Matemática Recreativa. O trabalho deve promover a interação entre os licenciandos do Curso de Matemática e a comunicação no Labor conjunto por meio de diálogo (ver Tarefa 4, Apêndice A).

A meta da Tarefa 4 é levar os licenciandos a interpretar a regra do jogo e trabalhar os conceitos de adição e subtração de números inteiros; conceito de matriz, linha, coluna, diagonal da matriz e posição de elementos de matriz (posição das peças em linha i e colunas j).

Quanto à primeira ação, recomendamos que o professor faça uma exposição oral do jogo; em seguida, distribuir o texto com as informações do tabuleiro, as peças e a regra do jogo entre os grupos; fazer uma leitura compartilhada da regra do jogo; a confecção das fichas e do tabuleiro do jogo, podem ser construídas com o material emborrachado (E.V.A) ou em cartolina guache; após a confecção do jogo, os participantes devem jogar em grupos, interagir, discutir ideias, sugerir jogadas e defender os pontos de vista; por fim, debate geral e apresentação oral das interpretações produzidas pelos participantes sobre o jogo.

A segunda ação da Tarefa 4, é sobre a apreciação do jogo. Para isto, os participantes devem registrar em seus grupos, suas opiniões na Ficha de Tarefa dos alunos com as seguintes questões: quais as estratégias para ganhar o jogo? Que dificuldades você encontrou durante esse jogo? Qual seria as vantagens pedagógicas deste jogo? E as desvantagens? Qual aprendizado facilita? Que conteúdos matemáticos podem ser explorados? Em seguida, a apresentação oral das interpretações produzidas na ficha; por fim, debate geral com a turma com os posicionamentos/questionamentos dos participantes produzidos na Tarefa 4, além de discussões e reflexões sobre as possibilidades, as vantagens e desvantagens do referido jogo.

Por fim, a Tarefa 5 tem como objetivo apresentar aos licenciandos de Matemática uma lista ou um acervo contendo Problemas Recreativos, quebra-cabeças matemáticos e jogos matemáticos (ver Tarefa 5, Apêndice A) extraídos dos trabalhos de Menezes (2004), Costa (2014), Segantini (2015), Melo (2013), Bártlová (2016), Fanti e Suleiman (2012), dentre outros. A meta da tarefa é refletir sobre as principais tarefas em Matemática Recreativa, além de discutir sobre as possibilidades, as vantagens e desvantagens das tarefas de Matemática Recreativa, bem como, da avaliação sobre as referidas tarefas. O propósito da Tarefa 5 é trabalhar na forma de Labor conjunto e respeitando a Ética Comunitária. É importante destacar que a avaliação sobre as tarefas seja realizada no final da proposta didática.

Em relação à primeira ação da Tarefa 5, o professor fará inicialmente a apresentação da tarefa; distribuir uma cópia da lista para cada grupo; após esse momento, cada grupo examina o enunciado dos problemas, jogos e quebra-cabeças e escolhe o que mais lhe agrada; resolver em seu grupo com ou sem ajuda da bibliografia indicada; em seguida, fazer a apreciação do problema, jogo ou quebra-cabeça escolhido, conforme foi realizado nas tarefas dos encontros anteriores; por fim, debate geral, com apresentação oral das interpretações, posicionamentos e questionamentos produzidos na Tarefa 5.

A segunda ação é sobre a avaliação das Tarefas Matemáticas Recreativas, para esse momento, o professor fará um convite para os licenciandos pensarem em tarefas relacionadas à Matemática Recreativa para a sala de aula onde eles são ou serão professores; em seguida, o professor deve instigar os participantes a compartilhar suas impressões sobre as possibilidades, as vantagens e desvantagens de introduzir a Matemática Recreativa em sala de aula de Matemática.

Na sequência, cada grupo deve registrar, suas opiniões na Ficha de Avaliação, contendo questões do tipo: você acredita que a introdução de tarefas de Matemática Recreativa no cotidiano de sala de aula seria positiva para os estudantes? Justifique. A introdução de tarefas de Matemática Recreativa, na sua opinião iria desperdiçar tempo que seria dedicado a uma Matemática mais usual? Justifique. Na sua opinião, as tarefas relacionadas à Matemática Recreativa trouxeram contribuições para a sua formação como professor de Matemática? Em seguida, debate geral, com a turma com a apresentação de cada grupo com suas respostas, com as considerações e questionamentos dos participantes, uma avaliação coletiva das experiências vivenciadas, além de críticas e sugestões ao conjunto de tarefas.

Para uma melhor compreensão no que se refere a organização das tarefas, os procedimentos, os textos e as Ficha de Tarefas dos alunos, estão disponíveis no apêndice da pesquisa (Apêndice A).

Em relação à Educação Básica, enfatizamos o uso de tarefas relacionadas à Matemática Recreativa, mas, antes do seu uso em sala de aula, é importante refletir sobre algumas questões, por exemplo: em que série a tarefa deve ser desenvolvida? Em qual dia da semana deve ser aplicada? O que deve ser feito para não utilizar as tarefas de forma inadequada?

Para o ensino-aprendizagem da Matemática, na Educação Básica, sugerimos que as tarefas sejam realizadas ao longo do ano letivo, de modo contínuo, por exemplo, uma vez por semana. Assim, o professor pode explorar em sala de aula tarefas envolvendo jogos, enigmas, problemas históricos, Problemas Recreativos, quebra-cabeças matemáticos, curiosidades topológicas, adivinhações, desafios, charadas, anedotas, magia, arte, origami, dentre outras.

Das tarefas mencionadas no Quadro 9, consideramos o uso das tarefas 3, 4 e 5 na Educação Básica. Com relação ao uso da Tarefa 3 – *O Problema dos 35 Camelos*, sugerimos que o professor utilize a primeira parte do problema, o texto original do autor (ver Tarefa 3, Apêndice A) ou o professor pode modificar ou adaptar ao público do Ensino Fundamental (6º ao 9º Anos); em seguida, o professor distribuirá uma única cópia do problema para os pequenos grupos, para que todos leiam e discutam juntos; após a leitura, uma discussão com os grupos sobre a compreensão do problema; finalmente, debate geral com os grupos sobre as estratégias de como solucionaram o problema, pois é importante o aluno expor suas ideias e procedimentos oralmente, o que lhe ajuda a organizar o pensamento, bem como refletir sobre a solução dada.

No âmbito do Ensino Médio, as orientações é que o professor utilize as duas partes do Problema Recreativo (ver Tarefa 3, Apêndice A), seguindo as etapas mencionadas anteriormente, para a primeira parte do problema. Quanto à segunda parte do problema, após a leitura sobre a solução de Beremiz, cada grupo apresenta para a classe sua opinião, além de discussão geral com os grupos, para ouvir os posicionamentos dos participantes.

Na Tarefa 4, inicialmente, o professor faz a apresentação do jogo Matix e Senha; em seguida, distribuirá material para a confecção do tabuleiro e as peças do jogo (ver Tarefa 4, Apêndice A); na sequência, deve realizar uma leitura compartilhada da regra do jogo em pequenos grupos; após a leitura, os grupos devem jogar livremente, discutir ideias, sugerir jogadas e defender os pontos de vista. Com essa tarefa, objetivamos explorar a atenção, a agilidade de raciocínio, explorar conteúdos de cálculos de adição e subtração de números

inteiros e desenvolvam o cálculo mental. Este jogo é indicado para ser aplicado a partir do 7º Ano do Ensino Fundamental, já no Ensino Médio possibilita explorar os conceitos: de matriz como tabela, de linha, de coluna, de diagonal da matriz, dentre outros.

Por fim, a Tarefa 5 (ver Tarefa 5, Apêndice A), as orientações é que o professor escolha um quebra-cabeça, pois nas tarefas anteriores, já exploramos Problemas Recreativos e jogos matemáticos, e faça a apreciação da tarefa conforme foi feito nas anteriores.

O professor deve trabalhar os Problemas Recreativos, jogos e quebra-cabeças como elementos da Matemática Recreativa. Nesse sentido, tanto a exploração quanto a confecção dos jogos e quebra-cabeças são importantes para a construção do conhecimento matemático dos estudantes.

É importante ainda destacar que a estratégia didática utilizada para a realização das referidas tarefas, é orientada pela Teoria da Objetivação, um trabalho de cooperação humana, na forma de Labor conjunto e norteado por uma Ética Comunitária que gira em torno das ideias de responsabilidade, compromisso, solidariedade e a prática da empatia e cuidado com o outro (RADFORD, 2020).

Recomendamos que o professor visite todos os grupos, com comentários e explicações sobre as tarefas, para provocar questionamentos, ouvir as considerações e as interpretações produzidas pelos participantes, além de feedbacks, de modo que, propicie o Labor conjunto, sustentado por uma Ética Comunitária. Dessa forma, professor e alunos produzem saber na sala de aula em um contexto de cultura e história.

Em relação à formação dos grupos, recomendamos a formação de pequenos grupos, de dois, de três alunos e no máximo quatro participantes. Também sugerimos que o professor dialogue com os alunos para formar grupos com diferentes tipos de colegas, para que o aluno desenvolva a tolerância e respeito ao próximo.

É importante mencionar que as tarefas de Matemática Recreativa foram elaboradas para serem desenvolvidas com foco no Labor conjunto, seguindo as orientações propostas pela Teoria da Objetivação (RADFORD, 2015; 2017b; 2018a; 2018b; 2020), por exemplo: a elaboração de tarefas de crescente complexidade conceitual; apresentação aos estudantes a tarefa a ser realizada; organização da turma em pequenos grupos de dois, de três ou de quatro alunos; trabalhando na forma de Labor conjunto e prezando pela Ética Comunitária, que se baseiam na responsabilidade, compromisso e no cuidado com o outro; o professor deve entregar um único material para cada grupo realizar leituras coletivas; utilizar artefatos; gravações em

vídeos das atividades para o registro de dados e posterior análise; ouvir os posicionamentos dos estudantes; o professor deve visitar os pequenos grupos, estabelecendo discussões e instigando à produção de registros na ficha de tarefa dos alunos e orientando-os, sempre que possível, por fim, debate geral com os grupos.

Contudo, ressaltamos que, as tarefas de Matemática Recreativa foram elaboradas no ano de 2019 para serem desenvolvidas no primeiro semestre de 2020 com os licenciandos do Curso de Matemática da UFRN/Natal, ou seja, as tarefas foram planejadas para serem implementadas no ensino presencial, mas, no atual cenário⁵⁶ da educação, com a suspensão de aulas presenciais e sua conseqüente substituição por atividades não presenciais, estão sendo ancoradas nas tecnologias digitais e pautadas nas metodologias da educação *online* por meio do *ensino remoto* (BRASIL, 2020).

Diante do contexto atual, com o ensino remoto, é importante que o professor faça um novo planejamento e organização das tarefas de Matemática Recreativa que compõem a proposta Didático-Pedagógica, para que sejam condizentes com as demandas advindas dessa nova realidade.

Nesse contexto, enfatizamos que o professor siga algumas das orientações mencionadas anteriormente, além disso, destacamos outras: 1) o professor pode disponibilizar na disciplina virtual os textos das tarefas, para que os estudantes façam uma leitura; 2) fazer outra leitura na sala de aula virtual, em pequenos grupos, coletiva em voz alta, cada componente do grupo lê um parágrafo, e assim por diante; 3) ouvir os posicionamentos dos estudantes; 4) o professor pode confeccionar as tarefas, por exemplo, o jogo Matix e as fichas e disponibilizar em formato PDF para que os estudantes possam imprimir e jogar; 5) o professor pode gravar as aulas utilizando as plataformas digitais, por exemplo, o Google Meet e o Zoom.

Em relação ao ensino remoto por meio de plataformas digitais (Google Meet, Google Classroom, Zoom, dentre outras), destacamos uma *vantagem*: diz respeito às gravações das atividades, pois, algumas das plataformas digitais permitem ao professor as gravações das aulas ou reuniões caso o professor deseje o registro das atividades⁵⁷ para posterior análise. Quanto ao

⁵⁶ Desde março de 2020, as aulas presenciais foram suspensas com as medidas de distanciamento e isolamento social sugeridas pela Organização Mundial de Saúde (OMS), pelo combate à proliferação de Covid-19.

⁵⁷ Quanto as gravações das tarefas são importantes respeitar os princípios éticos com os participantes da pesquisa, para isso, devem coletar Termos de Consentimento e autorizações para uso de imagem e gravação de voz.

ensino presencial, o professor precisa adquirir os equipamentos, por exemplo, tripés, câmeras ou celulares (smartphones), gravadores, dentre outros.

Diante dos argumentos apresentados, a proposta Didático-Pedagógica pode contribuir para a introdução da Matemática Recreativa na formação de professores de Matemática, estejam eles em processo de formação inicial ou continuada e sua aplicação em sala de aula.

No Capítulo seguinte buscamos discorrer sobre a Metodologia de Análise.

4 METODOLOGIA DE ANÁLISE

Neste Capítulo, primeiro discutiremos a natureza do estudo, a metodologia da intervenção pedagógica e a coleta de dados, bem como, a caracterização do público-alvo, o espaço da intervenção. Por fim, apresentaremos a análise com um olhar multimodal da oficina e da Tarefa 1 realizada junto ao público-alvo da pesquisa.

4.1 Natureza do Estudo

O trabalho desenvolvido neste estudo é caracterizado por uma abordagem metodológica de pesquisa qualitativa. Bogdan e Biklen (1994), afirmam que quando este tipo de investigação ocorre em contextos educativos é, frequentemente, designada por naturalista porque “[...] o investigador frequenta os locais em que naturalmente se verificam os fenômenos nos quais está interessado, incidindo os dados recolhidos nos comportamentos naturais das pessoas: conversar, visitar, observar [...]” (BOGDAN, BIKLEN, 1994, p. 17).

A nossa investigação nos conduz para o paradigma da pesquisa exploratória. Esse tipo de pesquisa, de acordo com Gil (2002, p. 41) “[...] têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses”. Portanto, o estudo é exploratório quando há pouco conhecimento sobre o tema a ser abordado, que é o caso desta pesquisa.

Quanto à análise de dados, está ancorada em uma concepção multimodal do pensamento, fundamentada na Teoria da Objetivação (RADFORD, 2003; ARZARELLO, 2006; RADFORD; ARZARELLO; EDWARDS; SABENA, 2017) conforme já exposto no segundo Capítulo.

De acordo com as características atribuídas à pesquisa qualitativa, consideramos que esta é a abordagem mais adequada para a natureza do presente estudo, pois, o pesquisador atua como parte ativa do processo analisado e não apenas como observador.

Considerando os elementos anteriormente apresentados, desenvolvemos nossa investigação de acordo com as seguintes etapas:

- Realização de um mapeamento de pesquisa nas Teses e Dissertações em Matemática Recreativa;

- Análise dos trabalhos de maior relevância ao nosso estudo;
- Seleção de tarefas de Matemática Recreativa nas Teses e Dissertações analisadas, para constituir um *corpus* para apresentar aos professores de Matemática, na formação inicial;
- Organização e construção da proposta Didático-Pedagógica que envolve as tarefas mais frequentes de Matemática Recreativa (jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos) fundamentadas no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação – um material com potencialidades didáticas e pedagógicas aos professores de Matemática em formação inicial;
- Aplicação de uma tarefa intitulada *Introdução à Teoria da Objetivação*, alicerçadas no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação com os discentes matriculados na disciplina noturna de Tópicos de História da Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática (UFRN/Natal);
- Análise dos resultados produzidos durante a investigação à luz da Teoria da Objetivação.

A descrição detalhada da metodologia da intervenção pedagógica, estão expostas na seção seguinte.

4.2 Metodologia da Intervenção Pedagógica

A intervenção pedagógica tem como principal finalidade apresentar tarefas de Matemática Recreativa alicerçadas no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação. Este processo tem o propósito de estimular os licenciandos de Matemática a conhecerem a Matemática Recreativa e posicionarem-se sobre as possibilidades, as vantagens e desvantagens de introduzir a Matemática Recreativa em sala de aula.

A Teoria da Objetivação norteia o desenho das tarefas, a implementação e a análise de dados. Assim, para guiar o desenho metodológico de nossa pesquisa tomamos como base a estrutura metodológica de quatro fases proposta por Radford (2010, 2015), elencadas a seguir: 1) desenho das tarefas; 2) implementação das tarefas em sala de aula; 3) interpretação dos dados e; 4) geração da teoria.

Na Figura 4, representamos as fases que compõem nossa pesquisa, inspiradas nas fases mencionadas anteriormente e representada esquematicamente a seguir.

Figura 4. Estrutura Metodológica da Pesquisa.



Fonte. Adaptado de Radford (2010, 2015).

É importante destacar que a nossa proposta de abordagem difere da proposta original de Radford (2010, 2015) na terceira e na quarta fases (Figura 4), uma vez que, na versão proposta pelo autor, a terceira fase refere-se à *interpretação dos dados* e a quarta fase corresponde à *geração da teoria*.

A intervenção pedagógica tem como objetivo apresentar aos licenciandos de Matemática à Matemática Recreativa usando como estratégia didática formas não individualistas de colaboração humana, levando-os a participar das tarefas, refletir, debater e se posicionar sobre o papel pedagógico da Matemática Recreativa em sala de aula.

Assim, propomos apresentar a Matemática Recreativa como abordagem metodológica que pode estimular motivação, diversão, alegria e entretenimento. As Tarefas Matemáticas Recreativas foram ancoradas no Labor conjunto (professor-alunos e alunos-alunos) e na Ética Comunitária (responsabilidade, compromisso e cuidado com o outro).

Entre as tarefas de Matemática Recreativa focamos nossa atenção na resolução de Problemas Recreativos, jogos matemáticos e quebra-cabeças matemáticos e os aspectos pedagógicos a eles relacionados.

Planejamos realizar as tarefas (ver Quadro 9) em 08 encontros, totalizando 16 horas, sendo 4 horas semanais (segunda-feira, 2 horas; quarta-feira, 2 horas) no turno noturno. O início

das tarefas foi definido conjuntamente com a professora responsável pela disciplina. Para a realização das tarefas, os participantes da pesquisa foram agrupados em trios, receberam uma folha contendo orientações – a *Ficha de Tarefa dos alunos* – (ver Apêndice A), e os materiais necessários para cada tarefa.

Na perspectiva da Teoria da Objetivação, a atividade é a unidade de análise (RADFORD, 2018a; 2018b), dessa forma, as tarefas da atividade, intitulada *Tarefas Matemáticas Recreativas* (ver Quadro 9), foram organizadas em quatro sessões. A primeira sessão com duração de 04 horas destinada ao desenvolvimento das tarefas 1 e 2; a segunda sessão com duração de 04 horas para propor a tarefa 3; a terceira sessão com duração de 04 horas para proposição da Tarefa 4 e a quarta com duração de 04 horas para realização da Tarefa 5.

É importante mencionarmos que as tarefas foram combinadas para serem realizadas nos meses de março e abril de 2020, o primeiro encontro foi realizado no dia 16/03/2020. Contudo, só foi aplicada a Tarefa 1 da intervenção proposta, e não foi possível a realização das demais que foram planejadas, em virtude da pandemia mundial de Covid-19 que, para conter à expansão do vírus, implicou no isolamento social e, conseqüentemente, a suspensão das aulas presenciais do Ensino Básico e do Ensino Superior.

Além da intervenção pedagógica descrita, durante a 29ª Semana de Matemática da UFRN foi realizada uma oficina (em 08 de novembro de 2019) intitulada *Matemática Recreativa*. Esta oficina contou com a participação de professores de Matemática de Educação Básica e estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRN/Natal que, para o registro de dados e posterior análise, a oficina foi gravada em vídeos.

É importante destacar que para a interpretação e análise dos dados construídos na oficina, serão narrados e/ou analisados alguns episódios conforme a metodologia proposta pela Teoria da Objetivação (RADFORD, 2015), portanto, a análise será apresentada mais adiante.

A oficina foi importante, pois contribuiu para um replanejamento das tarefas, por exemplo: repensar a questão de tempo destinado para que os participantes pudessem explicitar as estratégias utilizadas para resolver determinados itens; realizar cálculos matemáticos; e, para a Professora-Pesquisadora visitar os grupos, fazer perguntas e conhecer suas ideias, além disso, para programar a quantidade de câmeras (por exemplo, dois de cada) objetivando a captação das discussões gerais e dos pequenos grupos durante a realização das tarefas.

A seguir, expõem-se sobre a coleta de dados e o processo de organização dos dados coletados para análise.

4.3 Coleta de dados e Processo de Organização de dados Coletados para Análise

A coleta dos dados foi realizada conforme sugere a Teoria da Objetivação (RADFORD, 2015) com gravação de vídeos; ficha de tarefa dos alunos; documentos, anotações (por exemplo, textos) e, notas de campo (anotações de campo).

Os registros das atividades (Labor conjunto) foram gravados por meio de vídeos de todos os grupos participantes da pesquisa (câmeras e microfones condensadores); gravações focadas em discussões de pequenos grupos (escolhemos um grupo para a descrição e a análise dos segmentos relevantes) sobre as produções e as formas de soluções das tarefas; gravações focalizadas (em vídeo) no processo de resolução das tarefas, tipos de respostas dadas e suas justificativas, bem como, a visão, a avaliação das tarefas e as anotações das respostas.

As gravações em vídeos da Tarefa 1 foram feitas por meio de dois celulares (smartphones) e dois microfones condensadores. Um dos celulares estava com o microfone conectado (câmera 1) e foi colocado na sala de aula em um tripé em um ângulo captando toda a turma. Outro celular foi colocado em um tripé com o microfone conectado (câmera 2) e focado no grupo de análise. Tais equipamentos foram adquiridos pela Professora-Pesquisadora. É importante destacar que, os participantes da pesquisa ajudaram na instalação dos equipamentos.

As gravações em vídeos nos permitiram realizar a análise de dados em um aprofundamento para a identificação dos meios semióticos mobilizados pelos participantes da pesquisa, por exemplo: gestos, palavras, símbolos, movimentos corporais, produções escritas e artefatos. Sobre as notas de campo, a Professora-Pesquisadora registrou informações a partir de suas observações do que acontecia em cada um dos grupos, bem como, a interação entre eles.

Quanto à organização e análise de dados produzidos durante a tarefa, foi à luz da Teoria da Objetivação (RADFORD, 2003; 2014; 2015; 2017a; 2017b; 2017c; 2018a; 2018b; 2019; 2020) e, em relação à transcrição dos meios semióticos mobilizados no Labor conjunto e na Ética Comunitária, vivenciados no curso da tarefa, tomamos como foco analítico gestos, olhares, movimentos corporais, leitura, palavras, produções escritas, expressões não linguísticas, interações e posicionamentos mobilizados pelos estudantes participantes da pesquisa (RADFORD, 2003; ARZARELLO, 2006; RADFORD; ARZARELLO; EDWARDS;

SABENA, 2017). No processo de análise multimodal, os gestos são como um meio de ajudar os sujeitos a produzir ideias (ARZARELLO, 2006).

É importante destacar que, as transcrições dos vídeos, notas de campo e Ficha de Tarefa dos alunos foram transcritos pela Professora-Pesquisadora contendo apenas as descrições dos segmentos relevantes das tarefas para responder as questões de nossa pesquisa. De acordo com Radford (2015) seleciona-se os *segmentos relevantes*⁵⁸ – que são os momentos que apresentam evidências de objetivação e/ou subjetivação.

Dessa forma, para a descrição e análise dos segmentos relevantes escolhemos apenas um grupo, e, para preservar a identidade dos envolvidos na pesquisa utilizamos códigos de identificação para os participantes. Neste sentido, serão chamados com o acrônimo A, seguido de um número (A1, A2 ... A19), assim como para as mediadoras (PP – Professora-Pesquisadora; P – Professora da turma).

Diante do exposto, para apresentação da Teoria da Objetivação convidamos os licenciandos de Matemática (Quadro 10) a formar grupos de trabalho de 3 participantes para a realização das tarefas. É importante destacar que, a formação desses grupos resultou de escolhas feitas pelos próprios participantes. Contudo, recomendamos que o professor dialogue com os estudantes para formar grupos com diferentes tipos de colegas.

No primeiro encontro estavam presentes 20 alunos, cuja composição de grupos se deu da seguinte maneira:

Quadro 10. Identificação da Composição dos Grupos de Trabalho.

Grupo de trabalho	Participantes
Grupo 1	A1, A2 e A3
Grupo 2	A4, A5 e A6
Grupo 3	A7, A8 e A9
Grupo 4	A10, A11, A12 e A13
Grupo 5	A14, A15 e A16
Grupo 6	A17, A18 e A19

Fonte. Produzido pelas autoras (2020).

Como podemos observar pelo Quadro 10, formamos 06 grupos, e consta 19 alunos, pois um deles não aceitou assinar a documentação do CEP, e ficou participando do Grupo 5, porque a Professora atribuiu notas pela participação das tarefas realizadas. O aluno em questão solicitou

⁵⁸ Radford (2015) utiliza o termo *salient segments*.

que seus posicionamentos e respostas não fossem analisados, por este motivo, o aluno não consta no Grupo 5.

Para efeitos de análise das tarefas escolhemos o Grupo 4, composto por A10, A11, A12, e A13, para ser o nosso grupo de análise dos segmentos relevantes. Todos os participantes deste grupo, cursam o 5º período do Curso de Licenciatura em Matemática. A escolha desse grupo deve-se porque um aluno participou da oficina *Matemática Recreativa*, realizada na 29ª Semana de Matemática da UFRN/Natal e, por sugestão da Professora, pois, esses alunos frequentam a maioria das aulas. É importante destacar que este grupo tem quatro participantes, o motivo é que um aluno é do Curso de Matemática (UFRN/Natal) do período diurno, e assiste aula como ouvinte na turma, frequentando apenas o horário da segunda-feira.

Por conseguinte, apresentamos o espaço da intervenção e os participantes envolvidos na pesquisa.

4.3.1 Participantes da Pesquisa

Escolhemos como espaço para a intervenção uma turma do Curso de Licenciatura em Matemática do período noturno do Centro de Ciências Exatas e da Terra, situado no Departamento de Matemática da UFRN/Campus Natal.

Neste caso, os participantes da pesquisa foram os licenciandos matriculados na disciplina Tópicos de História da Matemática⁵⁹ que faz parte da Matriz Curricular do Curso e foi ofertada durante o primeiro semestre de 2020 e aconteceram nas últimas duas aulas do turno noturno, no setor de aula 3, do CCET/UFRN.

A professora responsável pela disciplina, Doutora Marta Figueredo dos Anjos, informou-nos que, a quantidade de estudantes matriculados na turma era 28, mas apenas 24 frequentavam as aulas.

No primeiro encontro (16/03/2020), lançamos questões (ver Tarefa 1, Apêndice A) para levantar informações pessoais e formação acadêmica dos licenciandos em Matemática (Público-alvo). Neste dia, estavam presentes 20 alunos na faixa etária entre 19 e 59 anos. Desses

⁵⁹ A disciplina é ofertada no 5º semestre do curso, cujo código é MAT1521, e como não há pré-requisitos podem frequentar alunos de períodos distintos do curso, até de outros cursos, por exemplo, do bacharelado em Matemática.

total, 05 se identificaram como sendo do sexo feminino e 15 do sexo masculino. Os alunos cursavam entre o 3º e 7º período, e a maioria se encontrava no 5º período.

Todos os participantes têm experiência em sala de aula na Educação Básica mesmo que em diferentes espaços: no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID); nas disciplinas de Estágio Supervisionado; em aulas particulares de reforço e no Cursinho Popular do Diretório Central dos Estudantes (Cursinho do DCE – UFRN) para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), e no Projeto Curso Preparatório para o ENEM do Instituto Federal do Rio Grande do Norte (IFRN). Do total de entrevistados, apenas dois estudantes lecionam a disciplina de Matemática há mais de um ano em escolas particulares em cursinhos preparatórios para o ENEM.

É importante destacar que três estudantes têm outra Graduação: dois são formados no curso de Ciências e Tecnologia, bacharelado da UFRN e o outro no curso de Engenharia da UFRN.

Ressaltamos que, a escolha dos participantes da pesquisa decorreu da experiência pessoal da Professora-Pesquisadora como docente da Educação Básica e docente do Ensino Superior, com experiência na formação inicial dos professores no curso de Licenciatura em Matemática, modalidade de Ensino à Distância (EAD), da Universidade Federal da Paraíba (UFPB Virtual) e do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN ofertado pelo Centro de Ensino Superior do Seridó (CERES), em Caicó/RN.

Os critérios para participar da pesquisa foram: ser licenciando matriculado na disciplina Tópicos de História da Matemática; aceitar e assinar os documentos do Comitê de Ética em Pesquisa – (CEP) como: o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – (TCLE) ([Anexo II](#)); o Termo de Autorização para Uso de Imagens (fotos e vídeos) ([Anexo III](#)) e o Termo de Autorização para Gravação de Voz ([Anexo IV](#)).

Na próxima seção, descrevemos a experiência da oficina *Matemática Recreativa*, o público-alvo e a análise dos segmentos relevantes.

4.4. Oficina Matemática Recreativa

A oficina exploratória intitulada *Matemática Recreativa* foi realizada na 29ª Semana de Matemática da UFRN/Natal, com carga horária de 2 horas e 30 minutos em 08 de novembro de

2019 – período 2019.2. Tal evento, acontece anualmente e é organizado pelo Departamento de Matemática (DM) da UFRN/Natal.

O público-alvo da oficina foram estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRN/Natal e professores de Matemática da Educação Básica de escolas de Natal/RN. A referida oficina foi realizada no setor de aula 3, do CCET/UFRN.

Por que optamos por analisar a oficina? No ano de 2019 não tínhamos a intenção de analisar os dados da oficina, entretanto, no mês de março de 2020, não conseguimos implementar as tarefas relacionadas à Matemática Recreativa, devido à suspensão das aulas presenciais, em virtude do contexto da pandemia mundial de Covid-19. Assim, optamos por analisar a vivência desta oficina, pois, tivemos a oportunidade de apresentar a Matemática Recreativa aos professores de Matemática e aos licenciandos do Curso de Matemática da UFRN/Natal.

A oficina teve como objetivo apresentar tarefas de Matemática Recreativa aos professores de Matemática da Educação Básica e aos estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática, além de promover uma observação de como os participantes da oficina reagiriam às tarefas.

Dentre as tarefas de Matemática Recreativa centramos nossa atenção na resolução de um Problema Recreativo – o Problema dos 35 Camelos – extraído da obra O Homem que Calculava de Mello e Souza (2017), o Malba Tahan, que será apresentado mais adiante.

A oficina foi ancorada no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação e foi elaborada pelas autoras e aplicada pela Professora-Pesquisadora, foram executadas gravações em vídeos da oficina por meio de dois celulares (smartphones) em comunhão com duas professoras colaboradoras, duas amigas do doutorado e estudantes da Teoria da Objetivação, foram elas: Valdenize Lopes do Nascimento e Rosângela Araújo da Silva, com a identificação, respectivamente por P1 e P2. As gravações, em alguns momentos, foram focadas nos gestos e interações de pequenos grupos.

As professoras gravaram com as câmeras em mãos, com duração de aproximadamente 2 horas, e esse fato, foi cansativo. Isto implicou em mudar as gravações na intervenção com os discentes da disciplina de Tópicos de História da Matemática, por essa razão, compramos alguns equipamentos, por exemplo, tripés (um pequeno e um grande), dois celulares e dois microfones condensadores (ver seção 4.3).

É importante destacar que, na referida oficina, não foi possível a aplicação de questões sobre informações pessoais e formação acadêmica dos participantes, conforme foi realizado na Tarefa 1, pois, o tempo programado para a realização da oficina era limitado em apenas um único encontro.

Para a apresentação da Matemática Recreativa, convidamos os participantes a formar grupos de dois, de três ou quatro componentes, de modo que, eles optaram em formar grupos de trabalho da seguinte forma: dois grupos com 4 participantes e quatro grupos com 3 participantes para a realização da tarefa. Optamos por não interferir nas escolhas dos membros dos grupos. Na oficina mencionada foram inscritas 35 pessoas e compareceram 20.

A seguir, apresentamos a composição dos grupos (Quadro 11) constituídos pelos professores de Matemática e estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática, assim, para preservar o anonimato dos participantes – os estudantes-professores serão chamados com o acrônimo EP, seguido de um número (EP1, EP2, EP3 ... EP20).

Quadro 11. Composição dos Grupos de Trabalho da Oficina.

Grupo de trabalho	Participantes
Grupo A	EP1, EP2, EP3, EP4
Grupo B	EP5, EP6, EP7, EP8
Grupo C	EP9, EP10, EP11
Grupo D	EP12, EP13, EP14
Grupo E	EP15, EP16, EP17
Grupo F	EP18, EP19, EP20

Fonte. Produzido pelas autoras (2020).

Formamos 06 grupos, como já informado e a formação resultou de escolhas feitas pelos próprios participantes. Em relação à análise de dados, procedeu de acordo com a Teoria da Objetivação, em uma análise multimodal com foco analítico – gestos, movimentos corporais, falas, leituras, além de outras ações (ARZARELLO, 2006; RADFORD; ARZARELLO; EDWARDS; SABENA, 2017) e a interpretação de dados à luz da Teoria da Objetivação (RADFORD, 2014; 2015; 2018a; 2018b; 2020).

A transcrição dos segmentos relevantes foi analisada conforme a *metodologia* de Radford (2015), mas, não escolhemos um grupo para análise, porque, a oficina não foi gravada do início ao final, ou seja, foram gravados apenas alguns momentos, por isso, analisamos os

vídeos de melhor qualidade, pois, a maioria deles foram gravados com a visão panorâmica de toda a sala, estão com barulhos e o som baixo, inviabilizando suas respectivas análises.

A seguir, descrevemos a oficina que constituiu seis partes. A 1ª. Parte – inicia-se com a Professora-Pesquisadora se apresentando e explicando sobre a pesquisa de doutorado, e pedindo aos participantes a autorização para gravar a vivência da oficina, de imediato, todos concordaram. Em seguida, apresentamos as professoras colaboradoras. Depois fizemos uma breve apresentação da proposta da oficina, conseqüentemente, orientamos os participantes para formar grupos, eles optaram por formar 6 grupos (ver Quadro 11). Para esta etapa, o tempo planejado foi de 15 minutos.

2ª. Parte – A Professora-Pesquisadora fez uma explanação por meio da utilização de slides⁶⁰ com as considerações iniciais de Matemática Recreativa, destacando, por exemplo, as concepções e os aspectos da MR; as principais tarefas em MR; obras recreativas; matemáticos e autores que contribuíram para a divulgação dessa ferramenta; quem foi Mello e Souza – o Malba Tahan e a sua obra mais popular *O Homem que Calculava* e seu famoso personagem Beremiz. Além disto, fizemos uma breve apresentação da Teoria da Objetivação e dos conceitos de Labor conjunto e Ética Comunitária, ao final, explicamos que a oficina estava ancorada na Teoria da Objetivação, com a proposta de realizar a tarefa por meio do *Labor conjunto*, um trabalho – ombro a ombro – respeitando a *Ética Comunitária* – que se apresenta em uma ética de responsabilidade, compromisso e cuidado com o outro (RADFORD, 2020). É importante destacar que, não foi feita gravação nessa parte da oficina. Nesta etapa, foram reservados 35 minutos.

No final da segunda parte, a Professora-Pesquisadora lançou duas perguntas para os participantes da oficina:

- 1) Vocês já ouviram a expressão *Matemática Recreativa*? Se sim, em que contexto?
- 2) Vocês sabiam que o dia Nacional da Matemática é comemorado em 06 de maio, em homenagem a Malba Tahan?

Em relação à primeira questão, as respostas foram resumidas com as seguintes frases: “Não”; “Nunca ouvimos falar sobre a *Matemática Recreativa*”; e “Só no ato da inscrição”. Quanto à segunda questão, apenas um participante sabia que o Dia Nacional da Matemática era

⁶⁰ Optamos por não disponibilizar os slides no apêndice desta pesquisa, pois as informações contidas sobre Matemática Recreativa e a Teoria da Objetivação estão disponíveis nos Textos (1, 2 e 3) (ver Apêndice A).

em homenagem a Mello e Souza – o Malba Tahan e obteve essa informação por meio de sites da área de Educação Matemática.

3ª. Parte – Distribuímos cópias da primeira parte do Problema dos 35 Camelos para os componentes dos grupos, especificamente, apenas uma cópia por grupo. Em seguida, orientamos a fazer uma leitura coletiva, seguindo o Labor conjunto. Os grupos se comprometeram de realizar coletivamente a tarefa dada, isto é, a compreensão do texto. Nesse momento de trabalho, visitamos cada um dos grupos para observar a ética do Labor conjunto: respeito, responsabilidade e cuidado com o outro e para esta etapa, foram reservados 20 minutos.

4ª. Parte – Após a leitura da primeira parte do problema, distribuímos aos participantes dos grupos uma ficha com duas questões-problemas objetivando o registro de uma solução para o problema e, em seguida, os grupos socializaram e apresentaram as soluções do problema com a classe toda, nesta etapa, foram reservados 30 minutos.

5ª. Parte – Distribuímos cópias da segunda parte do Problema dos 35 Camelos para os participantes dos grupos sobre a solução apresentada por Beremiz. Após a leitura, interpretação e reflexões, cada grupo apresentou à classe sua opinião sobre a solução de Beremiz. Continuamos na forma de uma conversa, fazendo duas perguntas, sendo assim, para esta etapa foram reservados 30 minutos.

6ª. Parte – Distribuímos cópias com a resolução original do Problema dos 35 Camelos, com o propósito dos integrantes grupais analisarem e refletirem sobre a resolução original do problema. Nesta etapa, foram reservados 20 minutos.

A análise dos segmentos relevantes dos participantes da oficina, com um olhar multimodal (ARZARELLO, 2006; RADFORD; ARZARELLO; EDWARDS; SABENA, 2017), fundamentada na Teoria da Objetivação (RADFORD, 2015; 2018a; 2018b; 2019; 2020) está exposta na subseção seguinte.

4.4.1 Análise da Oficina Matemática Recreativa

Nesta subseção, apresentamos a análise de alguns segmentos relevantes, de falas captadas dos fragmentos em vídeo das câmeras 1 e 2, em que apresentam interações, diálogos e reflexões ocorridos entre os licenciandos do curso de Matemática da UFRN/Natal e os

professores de Matemática da Educação Básica de escolas de Natal/RN durante a leitura e a socialização da resolução da primeira parte do problema com a sala em geral.

Engajados no processo de leitura da primeira parte do Problema dos 35 Camelos (Quadro 12), observamos que os grupos realizaram leituras colaborativas em voz alta. Nessa interação a Professora-Pesquisadora e as professoras colaborativas visitaram os pequenos grupos, trabalhando em conjunto com os participantes e chamando a atenção dos que não estavam trabalhando em Labor conjunto, pois, enquanto uns estavam lendo, outros já estavam respondendo o problema, então, perguntamos: e a proposta de trabalhar no Labor conjunto? Alguns nos responderam: “é o hábito de trabalhar em equipe, cada um fazendo uma parte da tarefa” e após nosso questionamento, os participantes começaram a trabalhar coletivamente. Aqui já podemos observar indícios da produção de novas subjetividades, nas atitudes dos professores e licenciandos ao aceitarem realizar a tarefa por meio do Labor conjunto.

Quadro 12. Primeira parte do Problema dos 35 Camelos.

Poucas horas havia que viajávamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista.

Encontramos, perto de um antigo caravançarâ meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.

Por entre pragas e impropérios gritavam, furiosos:

- Não pode ser!
- Isto é um roubo!
- Não aceito!

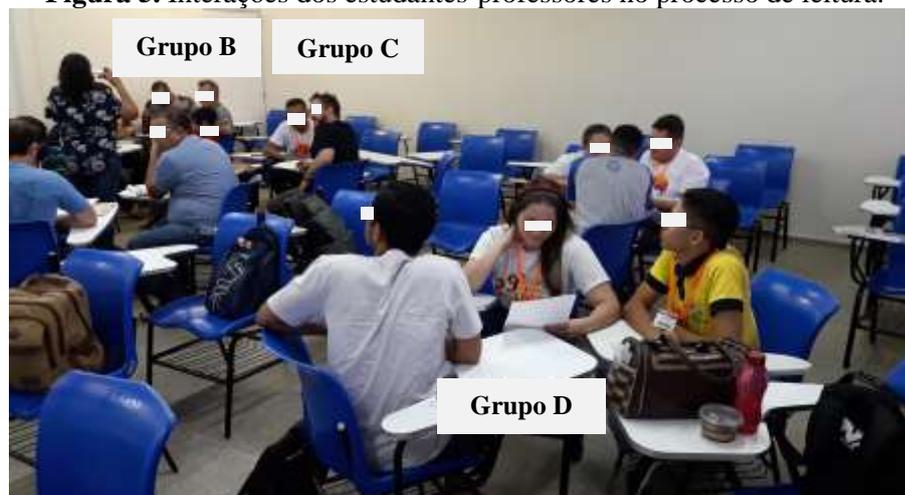
O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

– Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos, como herança, esses 35 camelos. Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça e a nona parte de 35 também não são exatas?

Fonte. (TAHAN, 2017, p. 21-22).

Na continuidade da leitura da primeira parte do problema (Quadro 12), o estudante-professor EP7 do Grupo B, nos perguntou o que significa “*caravançarâ*” (Figura 5).

Figura 5. Interações dos estudantes-professores no processo de leitura.



Fonte. Dados da Pesquisa (2019).

Assim, é possível visualizar na Figura 5, as interações dos componentes dos grupos sobre o que significa “*caravançar*”, indagamos à classe toda, quem poderia ajudar? Observamos que os estudantes-professores EP13 e EP14 do Grupo D, bem como, EP11 do Grupo C, realizaram um movimento no corpo, em que os estudantes-professores manifestam a intenção de aproximação, para poder visualizar EP7, em seguida, os participantes responderam: “*Na primeira parte do texto tem o glossário*”. As posturas expressas por EP11, EP13 e EP14 podem ser tomadas como evidências de *responsabilidade* dos participantes em relação ao colega EP7 no Labor conjunto para responder à pergunta.

Ainda, na Figura 5, no lado esquerdo, é possível visualizar a professora P1 filmando os componentes do grupo B, utilizando o celular nas mãos, nesta ocasião, a professora P2 estava gravando toda a turma com a câmera em mãos.

Após a leitura da primeira parte do problema (Quadro 12), no fragmento a seguir, captado em vídeo pela câmera 1, houve um diálogo com os componentes do Grupo B, composto por EP5, EP6, EP7 e EP8, sobre a obra *O Homem que Calculava*, conforme transcrito nas falas que se seguem.

- L1. EP5: Eu tenho esse livro, é muito bom! (Risos).
- L2. EP8: Também tenho, mas nunca usei esse problema na sala de aula. Gostei da ideia.
- L3. EP7: Ah! Eu não conhecia esse problema.
- L4. EP6: Tenho o livro, já li várias vezes, mas ainda não usei os problemas, na minha sala de aula.

Nas falas (L2 e L4) podemos observar que esses participantes já são professores. A fala de EP8 revela a intencionalidade do professor quando ele afirma “(...) gostei da ideia” (L2). Consideramos que, ele está pensando na possibilidade de utilização desse problema em sala de aula, caracterizando assim, um *compromisso* do professor com o exercício docente, uma vez que, ele ao realizar essa tarefa, já pensa em sua turma discente, assim, como, também revela o professor EP6 (L4). O professor EP7 revela que não conhecia o problema (L3).

Neste diálogo, indagamos para os componentes do Grupo B, se eles são professores da Educação Básica e todos responderam que já são professores de Matemática e lecionam há mais de 05 anos.

Após a leitura, entregamos uma Ficha de Tarefa⁶¹, cujas perguntas relativas a essa primeira parte foram:

- 1) Apresente uma solução para o problema, utilizando a estratégia que desejar.
- 2) Que conteúdos matemáticos você utilizou em sua solução?

Foi disponibilizado um tempo, para que os participantes lessem as questões e executassem uma nova leitura do problema para registrar a solução. Nesse momento, os participantes de cada grupo tiveram a oportunidade de compartilhar suas ideias entre os pequenos grupos e, posteriormente, com os demais, inferindo suas reflexões e quais foram os caminhos que escolheram para resolver o problema.

Optamos por não transcrever as respostas de todos os grupos referentes à primeira pergunta da ficha de tarefa, pois, eram parecidas, para isto, escolhemos a solução do Grupo B, formado por EP5, EP6, EP7 e EP8.

O mais velho receberá $\frac{1}{2}$ de 35 = 17,5 camelos. Arredondando, irá receber 18 camelos.
 Hamed receberá $\frac{1}{3}$ de 35 = 11,66... camelos. Arredondando, irá receber 12 camelos.
 Harim receberá $\frac{1}{9}$ de 35 = 3,88... camelos. Arredondando, irá receber 4 camelos.
 Totalizando 34 camelos, sobrando um camelo. O camelo que sobrou, optamos por ficar com o nosso grupo.

De acordo com o enunciado da história (Quadro 12), podemos observar que a soma das três partes não é igual a 35. Há, portanto, uma sobra. Vejamos: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$, para

⁶¹ Utilizamos a primeira ficha da Tarefa 3 (ver Tarefa 3, Apêndice A).

completar o todo, faltam, ainda, $1/18$ desse todo. O total, no caso, é a herança de 35 camelos. Dessa forma, $1/18$ de 35, é igual a $35/18$. A fração $35/18$ é igual a 1 e $17/18$. Assim, a partilha foi feita de acordo com o testador, ainda haveria uma sobra de 1 e $17/18$. Beremiz com o artifício empregado, distribuiu os $17/18$ pelos três herdeiros, aumentando a parte de cada um, e ficou com a parte inteira da fração excedente.

Depois dos registros das questões, foi realizado o momento de socialização. Assim, os grupos optaram por nomear um representante para responder as questões, seguem as repostas dos grupos, exemplificadas nas falas adiante.

L5. EP5: A gente gostou da forma como você (PP) lançou o problema, dividindo em duas partes. E nos deixou livre para responder usando a estratégia que a gente desejar. (coloca a mão direita na cabeça). Na solução do livro, Beremiz fica com o camelo da sobra (Faz gestos com os dedos das duas mãos fazendo aspas). Na nossa solução, optamos por ficar com o camelo (Grupo B).

L6. EP4: Nós pensamos em matar o camelo que sobrou (Risos), para não doar a ninguém. Ah! (fica em silêncio) mas achamos muito cruel, então, decidimos deixar com Beremiz (Grupo A).

L7. EP14: Com o camelo que sobrou, decidimos doar para Beremiz, para ele seguir a viagem com o seu amigo, cada um em seu camelo (Grupo D).

L8. EP19: O camelo que sobrou, decidimos doar para Beremiz (Grupo F).

Conforme especificado na fala da professora EP5, na qual valoriza a nossa proposta de trabalhar com tarefas de Matemática Recreativa ao afirmar: “A gente gostou da forma como você (PP) lançou o problema, dividindo em duas partes (...)” (L5). Neste contexto, a professora admite o valor do nosso trabalho, com respeito, compromisso e responsabilidade. Assim, a *responsabilidade* faz parte de um processo de subjetivação, um processo pelo qual a pessoa se torna uma presença no mundo (RADFORD, 2020).

Já na linha 6, é marcante perceber a atitude de EP4 em matar o camelo; em seguida, denota uma reflexão, quando o participante verbaliza: “Ah! (fica em silêncio), mas achamos muito cruel (...)”, aqui expressa uma atitude de *respeito e cuidado com o outro* (com o animal – Camelo), elemento importante que permeia a Ética Comunitária. Engajado nesse processo de solidariedade, o estudante-professor EP14 falou “(...) decidimos doar para Beremiz, para ele seguir a viagem com o seu amigo, cada um em seu camelo” (L7). Na linha 8, EP19 respondeu: “O camelo que sobrou, decidimos doar para Beremiz. Os estudantes-professores foram solidários, doando o camelo para Beremiz seguir a viagem com o seu amigo Bagdali.

É importante destacar que esses diálogos foram captados de vídeos das câmeras 1 e 2 e não foi possível colocar as respostas dos integrantes dos demais grupos, pois estão com barulhos, inviabilizando assim, suas respectivas análises.

Nesse momento de socialização, a Professora-Pesquisadora e as professoras colaboradoras (P1 e P2) também contribuíram com explicações a respeito do problema, mas, esta discussão não foi gravada.

Assim, à luz da Teoria da Objetivação, os participantes da oficina realizaram um trabalho de cooperação humana, com um esforço coletivo, nutrido por uma ética de responsabilidade, compromisso e no cuidado com o outro (RADFORD, 2018a; 2018b, 2020).

Na resposta da segunda questão, os participantes dos grupos destacaram os conteúdos matemáticos, por exemplo, *fração, divisão, números racionais, proporção e porcentagem*. Neste sentido, o Problema Recreativo pode contribuir para introduzir conceitos matemáticos, como também, para revisar os conteúdos.

Nesta etapa da tarefa, observamos que alguns licenciandos e professores de Matemática utilizaram artefatos, a exemplo do uso do celular para realizar os cálculos das operações, outros optaram por fazer os cálculos com lápis e papel.

Após a finalização da primeira parte do problema, os participantes iniciaram a leitura da segunda parte do Problema dos 35 Camelos (Quadro 13). Eles leram o texto em voz alta e pudemos perceber potencialidades que a Matemática Recreativa promove, a saber: alegria, prazer, motivação, entretenimento, entusiasmo e a diversão (Figura 6). Uma diversão que pode proporcionar uma vivência de cooperação entre os estudantes de Licenciatura em Matemática e os professores de Matemática, facilitando assim, a tomada de consciência dos elementos matemáticos mobilizados no Labor conjunto.

Figura 6. Labor conjunto entre os estudantes-professores no processo de leitura.



Fonte. Dados da Pesquisa (2019).

Na Figura 6, é possível perceber o Labor conjunto dos estudantes-professores realizando a leitura coletiva da segunda parte do Problema dos 35 Camelos, em voz alta. Também, observamos que os componentes dos seis grupos leram o texto com envolvimento, emoção, ritmo, intensidade e naturalidade, juntos os estudantes-professores compartilharam uma leitura prazerosa e divertida. É importante destacar que a leitura foi acompanhada por uma gestualidade – movimentos corporais, olhar nos olhos e de risos.

Com o processo de leitura coletiva, os participantes realizaram a interpretação da segunda parte do problema e a diversão aqui é descobrir como foi possível a Beremiz Samir, resolver a partilha dos camelos. Dessa forma, como contribuição acerca da Matemática Recreativa, destacamos a importância de o professor propor aos licenciandos do Curso de Matemática e professores de Matemática tarefas de caráter recreativo e histórico. Portanto, a atividade em sala de aula é vista como Labor conjunto de alunos-alunos e professor-alunos e sustentado por uma Ética Comunitária (RADFORD, 2014; 2018a; 2018b; 2020).

Quadro 13. Segunda parte do Problema dos 35 Camelos.

– É muito simples – atalhou o Homem que Calculava. – Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se me permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe.

Neste ponto, procurei intervir na questão:

– Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem, se ficássemos sem o camelo?

– Não te preocupes com o resultado, ó Bagdali! – replicou-me em voz baixa Beremiz. – Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.

Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal¹, que, imediatamente, foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.

– Vou, meus amigos – disse ele, dirigindo-se aos três irmãos –, fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como veem, em número de 36.

E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

– Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão!

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

– E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.

E disse, por fim, ao mais novo:

– E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. Teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado”

E concluiu com a maior segurança e serenidade:

– Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir – partilha em que todos três saíram lucrando – couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao Bagdali, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

– Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos irmãos. – Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!

E o astucioso Beremiz – o Homem que Calculava – tomou logo posse de um dos mais belos “jamales” do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

– Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim!

E continuamos nossa a jornada para Bagdá.

Fonte. (TAHAN, 2017, p. 22-23).

Engajados no processo de leitura (Quadro 13), o grupo de trabalho – Grupo D – formado por EP12, EP13 e EP14 – discuti em detalhes a leitura da solução apresentada por Beremiz. As falas foram captadas do fragmento em vídeo da câmera 2, conforme apresentado, a seguir.

L9. EP12: Oh! Melhor parte do texto (fez um gesto com o dedo indicador da mão direita).

L10. EP14: Qual?

L11. EP12: Essa! Oh! Vou ler (fez um gesto apontando com os dedos dobrados da mão direita para o texto). Dos 36 camelos, sobraram, portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao Bagdali, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por

ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança (Ler essa parte do texto em voz alta).

L12. EP14: Ah! Beremiz é muito esperto! (Risos).

L13. EP13: Hum, Hum! (expressão com sentido de afirmação positiva).

L14. EP14: Eu morrendo de ri com Bagdali que não queria emprestar seu camelo para ajudar na divisão, com medo de ficar sem seu camelo (Risos).

L15. PP: E aí, vocês já conheciam o problema?

L16. EP12, EP13 e EP14: Não! (Todos fazem um gesto balançando a cabeça negativamente).

L17. EP12: Um dos problemas mais legais que já li.

L18. EP12: Adorei participar desta oficina. Me diverti lendo o problema (Risos).

L19. EP13: Nós alunos nos identificamos com esse tipo de tarefa.

L20. EP14. Muito legal essa tarefa.

No momento de discussão sobre a leitura (Figura 7) da solução apresentada por Beremiz, a licencianda EP12, fez um gesto com o dedo indicador da mão direita, em seguida, afirma: “Oh! Melhor parte do texto” (L9); EP14 indagou: “Qual?” (L10), e EP12 fez um gesto apontando com os dedos dobrados da mão direita para o texto, e, em seguida verbalizou: “Essa! Oh! Vou ler. Um pertence, como sabem, ao Bagdali, meu amigo e companheiro (...)” (L11). Neste momento, todos riram com a leitura do parágrafo mencionado do texto.

É importante destacar que, os participantes desse grupo são estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática, cursando o 4º período. Essas informações foram obtidas pela Professora-Pesquisadora.

Figura 7. Labor conjunto estudantes-professor.



Fonte. Dados da Pesquisa (2019).

Nesses diálogos (L9 à L20), podemos perceber o Labor conjunto entre os licenciandos, com a leitura e o *compromisso* em relação ao cumprimento da tarefa e o *cuidado com o outro* (Figura 7). Neste sentido, os alunos destacaram a inteligência e habilidade de Beremiz para

repartir a herança e a sua esperteza para convencer cada herdeiro de que eles estavam levando vantagem.

O destaque dos apontamentos citados anteriormente, deram-se por meio de gestos, falas, leitura e expressões dos estudantes. Assim, na linha 15, a Professora-Pesquisadora faz uma indagação para o grupo: “E aí, vocês já conheciam o problema?” Todos responderam verbalmente, “Não”, em seguida, utilizam gestos balançando a cabeça negativamente (L16). Por conseguinte, a licencianda EP12 acrescenta “*Um dos problemas mais legais que já li*” (L17) e ainda destaca “*Adorei participar desta oficina (...)*” (L18). Nesse processo de discussão, o aluno EP13 afirmou “*Nós alunos nos identificamos com esse tipo de tarefa*” (L19), enquanto, o estudante EP14 verbalizou: “*Muito legal essa tarefa*” (L20).

O referido problema despertou a curiosidade, além de animar as conversas entre os estudantes-professores (ver Figuras 6 e 7). Diante disto, foi importante utilizar o texto original do autor (TAHAN, 2017) pois, a leitura fluiu com naturalidade e despertou o interesse e a imaginação dos participantes ao lerem o texto do Problema Recreativo.

No decorrer dessa etapa, visitamos os grupos e observamos o trabalho realizado na forma de Labor conjunto, que se consolida em uma ética de compromisso, diálogo, responsabilidade e no cuidado com o outro. Dessa forma, observamos que o Problema Recreativo, pode despertar o interesse dos participantes, ao criar suas próprias estratégias, desenvolvendo formas de raciocínio e o trabalho coletivo, além de proporcionar discussão, diálogo e reflexão.

Conforme argumenta Segantini (2015), os Problemas Recreativos são como um suporte ao “[...] trabalho pedagógico em sala de aula, pois consideramos tais problemas viáveis para os professores trabalharem em suas aulas de Matemática, tanto para introduzir conceitos matemáticos quanto para revisar os conteúdos” (2015, p. 123). Dessa maneira, o uso de Problemas Recreativos em sala de aula pode ajudar os estudantes a verem a Matemática como um desafio ao desenvolvimento do raciocínio lógico.

Após a leitura, foi realizada a socialização e apresentação dos grupos expondo suas opiniões a respeito da solução de Beremiz. Para este momento, não entregamos a ficha de tarefa, pois estávamos com pouco tempo, assim, optamos em fazer a leitura de duas perguntas⁶² direcionadas aos participantes:

⁶² Essas perguntas estão presentes na segunda ficha da Tarefa 3 (ver Tarefa 3, Apêndice A).

- 1) Explique que artifícios Beremiz utilizou para repartir a herança. Foi justa ou não? Foi correta matematicamente?
- 2) O problema dos 35 camelos é recreativo? Se sim, que argumentos você utiliza para justificar sua resposta?

Em sequência, apresentamos as respostas dadas pelos representantes de cada grupo.

- L21. EP3: Foi correto matematicamente (Grupo A).
- L22. EP15: Eu achei justo! (Grupo D).
- L23. EP18: Beremiz resolveu corretamente, saiu lucrando um camelo (Grupo E).
- L24. EP17: Eu não achei justo, isso foi uma mágica (Falou bruscamente) (Grupo E).
- L25. EP7: Foi correto o artifício utilizado por Beremiz (Grupo B).
- L26. EP9: Foi correta matematicamente (Grupo C).
- L27. EP20: Foi correta matematicamente (Grupo F).

Nesse momento, pode-se observar (L23 e L24) um conflito na opinião entre os participantes do Grupo E sobre a partilha da herança, se foi justa e correta matematicamente. A participante EP17 achou que não foi justa e foi uma mágica (L24), não concordando com a opinião do grupo. Os participantes do Grupo E, dialogaram com respeito e cuidado com o outro, para chegar a um consenso. Segundo Radford (2018a; 2018b) esses conflitos fazem parte do processo de subjetivação e de novas subjetividades, como algo natural da manifestação do ser.

Observamos que a participante EP17, não compreendeu o problema, achou que era uma mágica e que esse tipo de problema não era ético utilizá-lo na sala de aula. Neste momento, tentamos explicar à participante que o problema não era uma mágica, mas, essa discussão deixou *um pouco a desejar*, até porque, não tínhamos mais tempo. Em seguida, informamos sobre a distribuição da resolução original do problema.

As respostas dadas pelos grupos quanto à segunda questão foram as seguintes: *o problema é instigante; não é chato; é divertido; entretém; é uma mágica; causa emoção e provoca reflexões*. Neste sentido, tarefas que se inserem na Matemática Recreativa, podem contribuir para motivar e surpreender os estudantes mediante a inserção de tarefas de caráter recreativo, pedagógico e histórico.

Por fim, distribuímos cópias com a resolução original do problema, mas, não foi possível analisar, pois, a oficina teve a duração de aproximadamente 2 horas, e a maioria dos participantes chegou atrasado uns 25 minutos. Então, incentivamos os estudantes-professores a continuarem com a leitura em outros momentos.

Finalizamos a oficina, agradecendo à participação e interação por meio dos posicionamentos dos participantes e, principalmente, pelo *Labor conjunto entre alunos-alunos e professores-alunos*, prezando pela *Ética Comunitária*.

Na próxima subseção, apresentamos a discussão dos resultados da oficina.

4.4.2 Discussão dos Resultados da Oficina

Pelos relatos dos participantes da oficina, pudemos afirmar que a Matemática Recreativa é desconhecida pela maior parte dos professores de Matemática (professores em formação inicial e continuada) e a vivência da tarefa de Matemática Recreativa despertou interesse em alguns dos participantes para a introdução da Matemática Recreativa em sala de aula. É importante destacar que alguns estudantes-professores não conheciam o Problema dos 35 Camelos.

Observamos que os licenciandos de Matemática e os professores de Matemática trabalharam por meio da atividade ombro a ombro (*Labor conjunto*), com *compromisso, responsabilidade e cuidado com o outro*. Compromisso em relação ao cumprimento da tarefa, ao respeito, ao cuidado com outro e a responsabilidade (resposta) para com o outro, na qual Radford (2020), chama de *Ética Comunitária*.

Durante o processo de leitura do Problema Recreativo, observamos que tal ação foi feita por toda a turma, realizando leituras coletivas em pequenos grupos, executando uma leitura silenciosa, ou em voz alta. Os estudantes-professores mostraram-se interessados na leitura do problema, promovendo o diálogo, interação, discussão e reflexão.

Destacamos que, para o trabalho com problemas ser mais produtivo, é necessária uma leitura compartilhada com professores e alunos, razão por que a escola precisa realizar um trabalho contínuo de leitura, compreensão e interpretação de textos e não apenas nas aulas de Português.

Quanto à resolução do problema, alguns componentes dos grupos utilizaram a calculadora dos seus próprios celulares para a realização dos cálculos, outros optaram por fazer os cálculos com papel e lápis (artefatos). Alguns participantes tiveram dificuldades ao registrar as repostas por escrito na Ficha de Tarefas.

No que diz respeito aos meios semióticos mobilizados pelos licenciandos de Matemática e dos professores de Matemática da Educação Básica vivenciados no curso da oficina,

observamos gestos, movimentos corporais, palavras, expressões, dentre outras ações, que foram importantes para a realização da atividade.

Quanto aos gestos mobilizados pelos participantes da oficina, destacamos os seguintes: apontar com os dedos para o texto; fazer gestos balançando a cabeça negativamente, olhar nos olhos e risos. Também foram observadas expressões, por exemplo, *né; hum, hum; ah; oh; e aí.*

Em relação às gravações, tivemos dificuldades, pois não traçamos todos os momentos da oficina, foram gravadas pelos celulares das professoras colaboradas (P1 e P2). Também não focamos em um ângulo específico da sala de aula para captar os meios semióticos mobilizados pelos participantes (gestos, movimentos corporais, leitura, fala, artefatos, dentre outros). Isto, contribuiu para a Professora-Pesquisadora, executar um planejamento sobre as gravações, portanto, para solucionar essas dificuldades compramos tripés, celulares e microfones condensadores para utilizarmos nas gravações da Tarefa 1.

Como exposto, essa proposta de tarefa relacionada à Matemática Recreativa seria vivenciada com os estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática na disciplina Tópicos de História de Matemática. Neste sentido, a oficina foi importante, para a reelaboração de algumas etapas da Tarefa 3 (ver Tarefa 3, Apêndice A), portanto, a vivência desta oficina nos influenciou na escolha da proposta Didático-Pedagógica (ver Terceiro Capítulo) para apresentar a Matemática Recreativa aos professores de Matemática em formação inicial.

No decorrer do desenvolvimento da oficina, foi possível destacar algumas *vantagens* e *desvantagens* do uso da Matemática Recreativa. Vejamos a seguir (Quadro 14).

Quadro 14. Vantagens e Desvantagens do uso da Matemática Recreativa.

Vantagens	Desvantagens
<ul style="list-style-type: none"> - Possibilidades e propostas de inserção de tarefas de Matemática Recreativa na formação inicial e/ou continuada de professores de Matemática; - Possibilidade de usar tarefas de Matemática Recreativa para estudar História da Matemática; - Tarefas de Matemática Recreativa alicerçadas no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação é uma das alternativas que os professores possuem para dinamizar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática; - Leituras coletivas em pequenos grupos; - Uso de artefatos; 	<ul style="list-style-type: none"> - Dificuldades com a questão do tempo de duração da oficina, pois, aulas com Problemas Recreativos o tempo gasto é maior, porque, os participantes precisam de tempo para a leitura coletiva e interpretação do problema e para explicitar as estratégias utilizadas para resolver o problema, além de, mais tempo para discussão e reflexão, bem como, para a realização dos cálculos matemáticos; - Os estudantes-professores tiveram dificuldades para escrever no papel suas ideias sobre as questões-problemas na ficha de tarefa dos alunos.

<ul style="list-style-type: none"> - Trabalho coletivo de colaboração mútua entre os estudantes-professores; - Interação por meio do Labor conjunto e da ética entre alunos e entre professor e alunos. 	
---	--

Fonte. Produzido pelas autoras (2020).

Diante do exposto, consideramos que a utilização de tarefas relacionadas à Matemática Recreativa nas aulas de Matemática têm-se mostrado bastante útil para a compreensão de alguns conteúdos matemáticos. Neste sentido, tarefas de caráter recreativo e histórico podem constituir um elemento de grande valor pedagógico em sala de aula.

Assim, as tarefas relacionadas à Matemática Recreativa constituem um elemento educativo importante, que pode afetar a visão que os alunos possuem sobre a Matemática, ajudando, os estudantes a perceberem a Matemática como uma ciência, cuja prática pode promover prazer, alegria, entretenimento, diversão, além de outras emoções positivas.

Apresentamos a seguir, a vivência da Tarefa 1, e os fragmentos das discussões dos licenciandos de Matemática frente aos desafios da atividade proposta discutidos à luz dos referenciais teóricos da Teoria da Objetivação (RADFORD, 2014; 2015; 2017a; 2018a; 2018b; 2020).

4.5 Tarefa 1 – Introdução à Teoria da Objetivação

A Tarefa 1, intitulada *Introdução à Teoria da Objetivação* (ver Tarefa 1, Apêndice A), foi realizada no primeiro semestre de 2020 (primeiro encontro – 16/03/2020) e teve como principal objetivo exercitar a capacidade de leitura e interpretação de textos e oferecer aos licenciandos de Matemática uma noção do que é a Teoria da Objetivação, com destaque para os conceitos de Labor conjunto e Ética Comunitária, por isso, escolhemos iniciar as tarefas com um texto sobre a Teoria da Objetivação.

A Tarefa 1 foi planejada e dirigida pela Professora-Pesquisadora e com a colaboração da Professora Marta, de forma a estimular ações por meio do Labor conjunto, baseadas na responsabilidade com o grupo, no compromisso e no cuidado à opinião do outro, o que caracteriza a Ética Comunitária definida por Radford (2018a; 2018b; 2020).

A referida tarefa compreendeu duas ações e três questões-problemas. Em sequência, descrevemos de forma sucinta os momentos vivenciados no desenvolvimento da tarefa pelos

licenciandos de Matemática, a Professora-Pesquisadora e a Professora, de maneira, a subsidiar a análise dos segmentos relevantes desta pesquisa.

A Ação A – intitulada *Documentação e Perfil dos participantes* – foi organizada em cinco momentos: o *primeiro momento*, iniciou-se com a Professora fazendo uma breve apresentação da Professora-Pesquisadora, em seguida, a Professora-Pesquisadora se apresentou à turma, além da apresentação de cada estudante da turma. O *segundo momento*, foi a apresentação da proposta da nossa pesquisa e do cronograma das tarefas aos estudantes informando que, tomamos como objeto de estudo a Matemática Recreativa; também falamos da proposta de intervenção pedagógica intitulada Tarefas Matemáticas Recreativas, alicerçadas na metodologia do Labor conjunto e da Ética Comunitária da Teoria da Objetivação (TO), em sequência, informamos que a Teoria da Objetivação é uma teoria sociocultural de ensino-aprendizagem contemporânea, idealizada por Luis Radford.

Quanto à intervenção pedagógica, informamos que foi planejada para ocorrer durante os meses de março e abril de 2020, com carga horária de 16 horas, totalizando 08 encontros com a realização de 05 tarefas. Nesse momento, foi ressaltada a importância da interação entre todos (alunos-alunos e professor-alunos), bem como a participação efetiva nas discussões a serem propostas.

O *terceiro momento* seguiu-se com a explicação sobre a assinatura dos documentos legais do CEP, mesmo havendo um aluno que não queria participar da pesquisa e não iria assinar a documentação. É importante ressaltar que, a Professora-Pesquisadora e a Professora não interferiram na decisão do aluno, pois foi respeitada sua escolha. É importante destacar que, esse momento, levou muito tempo, pois, tivemos que respeitar e esperar o tempo de cada aluno, até porque, alguns leram a documentação completa e outros fizeram uma leitura rápida.

O *quarto momento*, foi o convite à formação de grupos de trabalho de 3 participantes em geral para a realização das ações das tarefas, que formamos 06 grupos (ver Quadro 11) e não interferimos na escolha dos membros.

Por fim, no *quinto momento* da Ação A, visitamos cada grupo e participamos ativamente lançando algumas questões (ver Tarefa 1, Apêndice A) que desencadearam informações sobre cada estudante – idade, experiência em sala de aula, dentre outras, objetivando traçar um perfil dos licenciandos de Matemática (ver subseção 4.3.1). Só assim, pudemos observar a timidez dos participantes diante das câmeras, mas, destacamos o interesse dos alunos em responder as

perguntas. Foi um momento importante para a Professora-Pesquisadora se aproximar do público-alvo.

A Ação B – nomeada *Leitura e discussão do texto A Teoria da Objetivação: uma teoria de ensino e aprendizagem* – foi organizada em seis momentos interligados: o *primeiro momento*, inicia-se com a Professora-Pesquisadora apresentando o objetivo da tarefa de leitura, discussão e reflexão do Texto 1 (ver Tarefa 1, Apêndice A), com as posições fundamentais da Teoria da Objetivação, para a classe toda. No *segundo momento*, os participantes foram orientados a permanecerem divididos nos mesmos trios para a realização das ações da Tarefa 1.

No *terceiro momento*, é importante destacar que a Professora-Pesquisadora explicou sobre a leitura do texto, mas também explicamos que seria entregue um único material ao grupo, e eles deveriam trabalhar em Labor conjunto, prezando pela Ética Comunitária para a realização da tarefa. Em sequência, distribuímos uma única cópia do texto para cada grupo, objetivando a proposição de leitura.

Os grupos iniciaram a leitura e, em seguida, os participantes do Grupo 3 (A7, A8 e A9) sugeriram distribuir um texto para cada aluno, pois, na opinião deles facilitava o trabalho de leitura. Foi necessário explicar mais uma vez, que esse tipo de tarefa se distancia da perspectiva da Teoria da Objetivação, pois, esse tipo de ação, de um único material, prepara os estudantes a trabalharem melhor coletivamente, um trabalho de colaboração mútua, todos concentrados em um único texto ou tabuleiro de jogo.

Após nossa explicação, o Grupo 3, optou por nomear um representante – A8 – para fazer as perguntas, exemplificadas nas falas que se segue.

L1. A8: Podemos usar o celular e tirar uma foto do texto? (segura o celular com as mãos).

L2. PP: Como você vai realizar um trabalho junto com os demais colegas do grupo, um trabalho conjunto *ombro a ombro*?

L3. A8: Ah! Eu pensei que era em grupo, e cada um fazendo um pouco da tarefa sozinho, e depois juntava as respostas.

L4. PP: Tem que ser um trabalho coletivo, com a ajuda mútua para a realização da tarefa.

L5. A8: Agora sim! Comecei a entender (coloca a mão direita na cabeça). Tem que realizar toda a tarefa coletivamente no grupo.

Observando a proposta dos participantes do Grupo 3, eles demonstraram inicialmente, discordar da proposta de realizar a tarefa por meio do Labor conjunto. Após nossas explicações

por meio de diálogo com os estudantes do grupo, verificam-se indícios da produção de novas subjetividades, quando o aluno A8 afirma “Agora sim! Comecei a entender (...)” (L5). Assim, evidenciamos novas atitudes dos participantes do referido grupo, que passaram a agir de maneira diferente para realizar a tarefa, concordando com a nossa proposta de realizá-la por meio do Labor conjunto (Essas falas foram captadas de fragmentos dos vídeos da câmera 1).

Depois desse diálogo, todos os grupos continuaram com a leitura. A Professora-Pesquisadora e a Professora continuaram visitando os pequenos grupos, trabalhando também em conjunto com os licenciandos, auxiliando-os e orientando-os, sempre que necessário. Nessa ação, já foi possível perceber que, os alunos não estavam mais preocupados em ficar olhando para as câmeras, pois estavam focados na realização da leitura.

Quanto ao *quarto momento*, os participantes de cada grupo foram orientados à interpretação, discussão e reflexão das informações contidas no Texto 1, seguindo o Labor conjunto e mantendo um debate em seus grupos (discussões alunos-professor e alunos-alunos). Nesta dinâmica, visitamos todos os grupos com comentários e explicações sobre o texto, dirigidas aos pequenos grupos para provocar questionamentos e *feedbacks*, o objetivo foi promover o exercício de Labor conjunto. Outrossim, observamos o esforço empenhado pelos licenciandos de Matemática para a realização da tarefa.

No *quinto momento*, distribuímos para cada grupo uma ficha nomeada *Ficha de Tarefa dos alunos* (ver Tarefa 1, Apêndice A). Essa ficha foi utilizada para o registro de três questões-problemas, sendo recolhida ao final do primeiro encontro.

Dando prosseguimento da tarefa, os licenciandos foram orientados a permanecer em seus pequenos grupos e explicamos sobre a importância do Labor conjunto entre os grupos, a comunicação para o trabalho conjunto por meio de diálogo e interação com o grupo, de modo que, cada componente do grupo possa apresentar suas ideias, receber críticas e posicionar-se criticamente, caracterizando-se assim, uma ética de Labor conjunto.

Após a leitura e interpretação do Texto 1, os participantes sistematizaram em uma folha as respostas das três questões-problemas (ver Tarefa 1, Apêndice A). A questão-problema 1 solicitava que os estudantes registrassem no quadro palavras ou trechos não compreendidos no Texto 1. A questão-problema 2 solicitava se os estudantes já ouviram falar sobre a Teoria da Objetivação.

Para concluir, a questão-problema 3 buscou levar os estudantes a refletirem sobre o que entenderam acerca da Teoria da Objetivação e os conceitos-chave de Labor conjunto e da Ética

Comunitária. No momento do trabalho dos pequenos grupos entre si, ficamos visitando cada um deles para fazer perguntas, conhecer suas ideias e estimular a discussão sobre as questões e, nesse momento, percebemos um envolvimento dos estudantes com a tarefa.

Quanto ao *sexto momento*, em virtude do tempo, pois, a Tarefa 1 teve duração, aproximada de 1 hora e 30 minutos (aulas dos dois últimos horários no turno noturno), em que seria realizada uma discussão geral com todos os grupos, objetivando apresentar para a turma a resposta de cada uma das questões de maneira oralizada (as questões-problemas da Ficha de Tarefa dos alunos), mas também, as considerações, os questionamentos e as reflexões sobre o que é a Teoria da Objetivação e os conceitos-chave da referida teoria, foi prorrogado para apresentação no início do segundo encontro.

Na próxima subseção, apresentamos a análise com um olhar multimodal, fundamentada na Teoria da Objetivação, destacando os segmentos relevantes dos alunos do Grupo 4, bem como, os segmentos relevantes dos participantes de outros grupos de interesse para a pesquisa.

4.5.1. Análise da Ação B – Leitura e discussão do texto A Teoria da Objetivação: uma teoria de ensino e aprendizagem

A análise dos segmentos relevantes e dos meios semióticos mobilizados no Labor conjunto da Tarefa 1, especificamente, do nosso grupo de análise (Grupo 4) e de outros grupos estão expostas nesta subseção, transcritos com base nos vídeos gravados (as expressões de gestos, movimentos corporais, dentre outras ações, foram obtidos a partir da captura (prints) de imagens dos vídeos), dentre outros instrumentos mencionados anteriormente.

As interações analisadas dos segmentos relevantes ocorreram nos momentos de leitura, interpretação e reflexões acerca do Texto 1, com as posições fundamentais da Teoria da Objetivação e durante a discussão para a elaboração e o registro por escrito de três questões-problemas.

Para a organização das transcrições das interações dos estudantes do Grupo 4 e facilitar o processo de análise dos segmentos relevantes, seguimos a *metodologia* de Radford (2015), com a transcrição dos *segmentos relevantes* (falas dos fragmentos de vídeos) e apresentamos um comentário analítico com uma breve interpretação na discussão dos dados.

Na sequência, é possível identificar falas captadas de fragmento em vídeo da câmera 2 que apresenta interações, diálogos e reflexões acontecidos entre os participantes do Grupo 4 –

formado por A10, A11, A12, e A13 no decorrer do processo de leitura do Texto 1 – *A Teoria da Objetivação (TO): uma teoria de ensino e aprendizagem*. Em sequência, detalhamos alguns segmentos relevantes.

Primeiro segmento relevante – tomada coletiva de decisão – os alunos passaram a discutir uma forma de iniciar a leitura do Texto 1, conforme transcrito a seguir.

- L1. A11: E aí, como vamos ler isso aqui (Folheia as páginas do texto e conta a quantidade de páginas).
- L2. A12: Vamos ler por parágrafo.
- L3. A11: Cada um ler um parágrafo.
- L4. A13: Então, eu começo! (Coloca a mão direita no queixo).

No momento sobre o critério para a escolha de como iniciar a leitura do texto, os estudantes dialogaram utilizando falas e gestos (meios semióticos), por exemplo: o estudante A11 afirma: “E aí, como vamos ler isso aqui” (L1), e A12: “Vamos ler por parágrafo” (L2) e A11 acrescenta: “Cada um ler um parágrafo” (L3), em seguida, A13 coloca a mão no queixo e verbaliza “Então, eu começo!” (L4). O aluno A10, fica em silêncio, demonstrando concordar em realizar a leitura coletiva e cada um lendo um parágrafo.

Segundo segmento relevante – leitura coletiva e reflexão sobre teorias de ensino e aprendizagem – Os alunos do Grupo 4 iniciaram a leitura refletindo juntos as ideias do texto, conforme destacado nas falas que se seguem.

- L5. A13: Você já ouviu falar de teorias de ensino e aprendizagem? (Ler em voz alta a primeira linha do texto).
- L6. A10, A11 e A12: Sim! (todos fazem um gesto balançando a cabeça positivamente).
- L7. A13: Sim ou não! (coloca a mão direita no queixo)
- L8. A12: E com o professor Fabian.
- L9. A13: E em Psicologia também né!
- L10. A13 Entre as teorias ... (retorna a leitura).
- L11. A13: Me lembro desse nome construtivismo (aponta com o dedo indicador da mão direita para a palavra construtivismo).
- L12. A11: Em Psicologia Educacional.
- L13. A13: Né!
- L14. A13: A função de professor ... (Retorna a leitura e finaliza).
- L15. A13: No construtivismo o professor vai preparar o terreno para que o aluno construa o conhecimento (Faz gestos com a mão direita fazendo círculos).
- L16. A12: Ele vai ser o mediador.
- L17. A13: Exatamente!

As Linhas (L5 à L17), são segmentos que mostram as interações e diálogos acontecidos entre os participantes no início do processo de leitura do texto. Observamos que os alunos responderam ao questionamento do texto (L5), assim, percebemos que os estudantes já têm leituras sobre teorias de ensino e aprendizagem (L6 à L9). Após esse diálogo, o estudante A13 (Figura 8) apontou com o dedo indicador da mão direita para a palavra construtivismo, em seguida verbaliza: “Me lembro desse nome construtivismo” (L11). O aluno A13 já tinha no seu repertório o termo construtivismo. Após finalizar a leitura do primeiro parágrafo, A13 faz uma reflexão sobre o construtivismo e acrescenta: “No construtivismo o professor vai preparar o terreno para que o aluno construa o conhecimento” (L15) e A12 contribui nessa interação destacando o papel do professor: “Ele vai ser o mediador” (L16).

Figura 8. Interações dos alunos do Grupo 4 com reflexão sobre Construtivismo.



Fonte. Dados da Pesquisa (2020).

Neste momento, estávamos presentes e instigamos para que os alunos refletissem juntos sobre o construtivismo, assim, surgiram indícios de atualização do saber acerca do construtivismo como evidência do processo de objetivação. Esses fragmentos mostram evidências de um trabalho coletivo por meio do Labor conjunto empreendido pelos participantes no curso da tarefa.

É importante mencionar que, na Teoria da Objetivação *o professor deixa de ter o papel de professor mediador, motivador e incentivador*, na perspectiva da TO os professores e alunos são seres humanos em fluxo, como projetos inacabados em busca de si mesmos, empenhados em um mesmo esforço em que sofrem, lutam e encontram satisfação juntos (RADFORD, 2017c).

Na continuidade o licenciando A12 fez a leitura do segundo parágrafo, e não percebeu que o texto tinha notas de rodapé com algumas informações sobre Vygotsky e as teorias socioculturais; o estudante A11, atento à leitura, pode colaborar, enfatizando: “E aqui tem referências”. Em seguida, inicia a leitura em voz alta para o grupo, depois A12 e A11 leram simultaneamente e A12 finaliza a leitura das notas de rodapé.

O estudante A11 demonstrou seu engajamento na leitura, pois esse comprometimento pode ser entendido como um indício de *responsabilidade* e relação de *solidariedade* com o grupo. Para Radford (2018a, p. 74) “[...] a responsabilidade é um ato ético cuja característica fundamental é ser dialógica”.

Terceiro segmento relevante – características da Teoria da Objetivação – os participantes do Grupo 4 identificaram elementos importantes no quadro do texto sobre algumas características da TO. Tais segmentos selecionados estão transcritos nas falas adiante.

- L18. A10: Aqui tem uma tabelinha com as características da TO (Aponta com o dedo indicador para o quadro do texto).
 L19. A10: O que significa essa palavra consubstancialidade? (Faz cara de espanto).
 L20. A13: Consubstancialidade (Faz um gesto balançando a cabeça negativamente).
 L21. A12: Não é aquela coisa que tem aqui embaixo (Volta para a primeira página e ler a segunda nota de rodapé).
 L22. A10: Pesquisa aí no celular.
 L23. A13: É para pesquisar na internet é? (segura o celular com as mãos).
 L24. A13: Já achei a resposta, concretiza, consolidar, corporificar ... (Ler em voz alta).
 L25. A10: Concebe o ensino e a aprendizagem ... (Faz uma nova leitura).
 L26. A12: Pera aí, deixa eu ver se entendi tudo, no início tinha as teorias construtivistas, aí no final do século XX eles estavam insatisfeitos, e começaram a discutir os trabalhos de Vygotsky, e foram criadas teorias voltadas mais para o sociocultural, como a TO.
 L27. A10: A TO é uma teoria sociocultural.
 L28. PP: A TO é uma teoria de ensino e aprendizagem, de corrente sociocultural, contemporânea com objetivos de proporcionar o conhecimento e o pensamento crítico e reflexivo.

Podemos observar (L18 à L28) que os licenciandos se mostraram envolvidos na leitura e interpretação do texto com relação as características da Teoria da Objetivação. Durante a interação, destacamos o esforço realizado por A12 (L21) para encontrar no texto informações sobre consubstancialidade. Posterior esse momento, o aluno A13 (L23 e L24), atendeu ao apelo de A10 e utilizou como artefato, o seu próprio celular com acesso à internet para pesquisar informações sobre o termo consubstancialidade. Nesta ocasião, a Professora-Pesquisadora estava presente em outro grupo e não pode colaborar para o entendimento de consubstancialidade, pois ao aproximarmos os alunos não pediram nossa ajuda.

Na continuidade do diálogo sobre as características da Teoria da Objetivação, o aluno A12 fez uma reflexão e verbalizou para o grupo: “Pera aí, deixa eu ver se entendi tudo, no início tinha as teorias construtivistas, aí no final do século XX eles estavam insatisfeitos, e começaram a discutir os trabalhos de Vygotsky, e foram criadas teorias voltadas mais para o sociocultural, como a TO” (L26), e o aluno A10 acrescentou: “A TO é uma teoria sociocultural” (L27).

Ainda no seguimento do Labor conjunto, a Professora-Pesquisadora chegou ao final deste diálogo contribuindo com explicações sobre a Teoria da Objetivação e acrescentou aos alunos que é uma teoria de ensino-aprendizagem de corrente sociocultural, contemporânea e com objetivo de proporcionar o conhecimento, o pensamento crítico e reflexivo (L28). Logo após a fala da Professora-Pesquisadora, os participantes do grupo ouviram-na com atenção, mas, não fizeram perguntas e continuaram com a leitura do texto.

Quarto segmento relevante – conceito de Labor conjunto – Na sequência, apresentamos os segmentos relevantes dos estudantes do Grupo 4 quando começaram o trabalho de leitura interpretação e reflexões sobre o conceito de Labor conjunto, conforme destacado nas falas a seguir.

L29. A12: No Labor conjunto a atividade é realizada coletivamente (Olhando para os colegas).

L30. A10: Não é um trabalho individual.

L31. A11: Uhum! (expressão com sentido de afirmação positiva).

L32. A13: Professor e alunos trabalham juntos.

L33: A12: Ó no texto tem, o Labor conjunto aparece quando se trabalha no espírito da Ética Comunitária (Ler em voz alta essa parte do texto).

Neste diálogo, temos os segmentos que os licenciandos do Grupo 4, produziram novas subjetividades sobre o que é Labor conjunto, por meio do trabalho coletivo, com diálogo e reflexões. Conforme destaca-se nas falas de A12, “No Labor conjunto a atividade é realizada coletivamente” (L29), e A10 acrescenta: “Não é um trabalho individual” (L30).

Os alunos trabalharam atuando de acordo com a Teoria da Objetivação, dialogaram e refletiram coletivamente na forma de Labor conjunto. Neste diálogo, estávamos presente no grupo, e optamos não por intervir na discussão.

Quinto segmento relevante – conceito de Ética Comunitária – Na continuidade de diálogo e reflexão do texto podemos observar os meios semióticos (gestos, falas, leituras e atitudes) mobilizados nesse momento de Labor conjunto, refletindo sobre a Ética Comunitária, exemplificada nas falas que se seguem.

L34: A11: Ah! A Ética Comunitária e Labor conjunto eu já discuti na oficina da Semana da Matemática (faz um gesto colocando um dedo na sobrancelha).

L35: PP: Assim, você (A11) pode continuar nessa discussão coletiva, socializando suas ideias com o grupo.

Nesse processo de discussão A11 (Figura 9), acabou fazendo um gesto colocando um dedo na sobrancelha, para manifestar que já discutiu sobre Labor conjunto e Ética Comunitária (L34) na oficina da Semana da Matemática da UFRN/Natal, e A10 faz um olhar sério, enquanto A12 fez um gesto com um lápis na mão e coloca no queixo; já A13, coloca a mão esquerda no queixo.

Figura 9. Interações dos alunos do Grupo 4 com reflexão sobre Ética Comunitária.



Fonte. Dados da Pesquisa (2020).

Neste momento a Professora-Pesquisadora (L35) estava envolvida junto com os alunos, observando o diálogo e enfatizou ao aluno A11 continuar contribuindo no grupo, socializando suas ideias e o licenciando teve a atitude de continuar interagindo com o grupo.

Continuando o diálogo sobre a Ética Comunitária, os estudantes prosseguiram envolvidos com a proposta de realizar a tarefa, conforme as exposições verbais que seguem.

L36: A11: A Ética Comunitária tem três vetores.

L37: A13: Quais são os três vetores? (aponta com o dedo indicador da mão esquerda para o texto)

L38: A10: (faz gestos com os três dedos da mão esquerda para expressar os três vetores) Responsabilidade, compromisso e cuidado com o outro.

L39: A13: A Ética Comunitária é o compromisso com o outro, responsabilidade e cuidado com o próximo (Faz círculos com a mão direita).

L40: A12: Uma ética com compromisso e respeito.

Na continuidade do diálogo, o licenciando A13 (Figura 10), fez um gesto apontando com o dedo indicador da mão esquerda para o texto e pergunta: “Quais são os três vetores?” (L37); já o aluno A10, olha para A13, e responde utilizando gestos com os seus três dedos da mão esquerda para expressar que são três vetores, em seguida, verbalizando, responde: “responsabilidade, compromisso e cuidado com o outro” (L38). Já os alunos A11 e A12 ficaram olhando atentos para o estudante A13.

Figura 10. Sequência de gestos para explicar os vetores da Ética Comunitária.



Fonte. Dados da Pesquisa (2020).

Os licenciandos movidos pelo Labor conjunto (Figura 10), trabalharam coletivamente promovendo a participação, discussão e reflexão sobre os vetores da Ética Comunitária, produzindo novas subjetividades e, para essas discussões nós trabalhamos juntos com os alunos.

No final da discussão sobre os princípios de Labor Conjunto e da Ética Comunitária, a PP estava envolvida com os alunos do Grupo 4, e fez uma intervenção, com o intuito de ampliar uma reflexão teórica sobre Labor conjunto, conforme mostra os fragmentos de posicionamentos expostos pelos participantes do grupo.

L41. PP: Vocês entenderam o Labor conjunto como elemento importante?

L42. A10, A13 e A11: Sim!

L43. A12: Uhum! (expressão com sentido de afirmação positiva).

L44. A13: Oh! O Labor conjunto é a atividade que se faz na sala de aula, professor e alunos trabalham juntos (Coloca a mão no queixo).

L45. A11: O Labor conjunto é a atividade realizada coletivamente por professor e alunos (Fica em silêncio e pensativo).

A Professora-Pesquisadora (Figura 11) fez um gesto com o dedo indicador da mão direita apontando para o texto e fez a seguinte pergunta: “Vocês entenderam o Labor conjunto

como elemento importante?” Assim, identifica-se nas respostas dos alunos (L42 e L43) que todos compreenderam o Labor conjunto como elemento importante. Na sequência, para responder à questão proposta, A13 fez um gesto colocando a mão no queixo e, em seguida verbalizou: “Oh! O Labor conjunto é a atividade que se faz na sala de aula, professor e alunos trabalham juntos” (L44); A11 ficou em silêncio e pensativo, mas depois verbaliza: “O Labor conjunto é a atividade realizada coletivamente por professor e alunos” (L45). Quanto ao aluno A12, este fez gestos segurando o lápis com uma mão e A10 ficou sorrindo.

Figura 11. Labor Conjunto professor-alunos.



Fonte. Dados da Pesquisa (2020).

Essas interpretações produzidas pelos alunos (L4 à L45), por meio das falas, dos gestos e interações no decorrer da tarefa, constituem evidências de que os participantes perceberam o Labor conjunto como um conceito-chave da TO. Consideramos que essas interpretações tenham surgido no *Labor conjunto* que estabelecemos com os alunos, mas também, nas discussões desenvolvidas em sala de aula, que foram importantes para promover o trabalho coletivo – professor e alunos trabalham juntos para a produção de formas coletivas do ensino e aprendizagem (RADFORD, 2018a).

Pelos diálogos mencionados anteriormente (L41 à L45), os licenciandos realizaram um trabalho coletivo (Figura 11), no qual, alunos-alunos e professor-alunos estejam *ombro a ombro* – Labor conjunto (RADFORD, 2018a; 2018b). Dessa forma, a Teoria da Objetivação possibilitou que os estudantes percebessem a importância do trabalho na forma de Labor conjunto entre os colegas.

Nas interações desenvolvidas pelos alunos do Grupo 4, observamos que a ética foi muito além da promoção do trabalho colaborativo, pois os participantes trabalharam com

responsabilidade, compromisso e no cuidado com o outro (RADFORD, 2020), não como uma imposição proposta pela PP, mas sim, como elementos fundamentais para o relacionamento com os outros.

Em relação aos alunos dos outros grupos (1, 2, 3, 5 e 6) é importante destacar que, a tarefa de leitura do Texto 1, foi uma tarefa desafiadora que proporcionou a participação de todos. Os alunos realizaram leituras coletivas; alguns optaram por uma leitura silenciosa (todos lendo ao mesmo tempo); e outros realizaram a leitura coletiva em voz alta, discutindo as ideias do texto – os posicionamentos similares aos apresentados pelos alunos do Grupo 4.

Além disso, pudemos verificar que os estudantes já têm leituras sobre teorias de ensino e aprendizagem, que foram trabalhadas na disciplina de Fundamentos de Psicologia Educacional, e usaram como ferramenta de pesquisa seus próprios celulares (acesso à internet) visando pesquisar algumas palavras para a compreensão do texto (Essas interpretações foram transcritas de vídeos da câmera 1). É importante destacar que, os alunos dos grupos que optaram por uma leitura silenciosa, foram orientados que fizessem uma nova leitura, discutindo os pontos importantes do texto.

Após a finalização do processo de leitura, reflexão e discussão do Texto 1 pelos licenciandos de Matemática, pudemos destacar *três pontos importantes*, de acordo com a nossa análise nos vídeos gravados das câmeras (1 e 2), são eles: 1) os alunos já têm familiarização em leitura sobre teorias de ensino e aprendizagem; 2) leituras coletivas em pequenos grupos; e 3) o uso de artefatos e signos – o uso do celular para a interpretação do texto, além dos gestos.

Todos os licenciandos têm familiarização em leitura de textos sobre teorias de ensino e aprendizagem, mais especificamente, na disciplina de Fundamentos de Psicologia Educacional. Outro ponto importante, foi com relação à leitura do texto – leituras coletivas pelos alunos –, por exemplo, no posicionamento dos alunos do Grupo 6 composto por A17, A18 e A19. Em A17, “É legal ler em grupo, a gente se aproxima mais, um ajudando o outro”, e em A19, “Foi agradável ler em grupo, pois a gente lia e dialogava” (fragmentos captados em vídeos da câmera 1). Esses fragmentos mostram que surgiram formas de interação e colaboração humana produzidas pelos estudantes entre si no decorrer do Labor conjunto (RADFORD, 2018a; 2018b).

Outro ponto é referente ao uso de artefatos e signos. Em relação ao uso do celular (artefatos), conforme os relatos mencionados anteriormente, e de nossa análise nos vídeos das câmeras (1 e 2), também percebemos que os alunos pesquisavam na internet algumas palavras

do texto e depois discutiam coletivamente. É importante destacar que Radford (2015) enfatiza o uso de artefatos sempre que possível. Assim, observamos que *o uso ético do celular em sala de aula*, gera discussões interessantes e proveitosas, contribuindo para o aprendizado.

No que se refere aos gestos, é importante destacar que, durante o curso da tarefa, os alunos usaram gestos, a exemplo de apontar com os dedos para o texto; fazer círculos com as mãos e gestos balançando a cabeça, com o propósito de comunicar uma ideia ou intenção. Esse trabalho foi possível, porque a tarefa foi desempenhada na perspectiva da Teoria da Objetivação, na forma de Labor conjunto e sustentado por uma Ética Comunitária.

Sexto segmento relevante – questões-problemas – os segmentos relevantes no processo coletivo dos alunos do Grupo 4, no que diz respeito à resposta de três questões-problemas da *ficha de tarefa dos alunos* (ver Tarefa 1, Apêndice A). É importante destacar que, nesse momento, o Grupo 4 ficou formado por A10, A11 e A12, pois, o aluno A13, teve que se ausentar da sala de aula. Por conseguinte, apresentamos as falas de tomada de decisão para responder as questões.

L46: A12: E aí, como vamos escrever?

L47: A10: Vamos ler as questões, assim fica mais fácil responder.

L48: A11: Então, eu começo! (Ler em voz alta a primeira questão).

L49: A10: Nós já destacamos no texto os processos de objetivação e subjetivação (folheia as páginas do texto procurando as palavras).

L50: A12: Vou escrever! (faz o registro escrito na ficha de tarefa).

Um olhar detalhado para o diálogo anterior (L46 e L47), observamos a tomada coletiva de decisões para realizar a leitura das questões e pesquisar coletivamente as respostas no texto, com a delegação do aluno A12 para registrar por escrito as respostas das questões-problemas na ficha de tarefa.

A questão-problema 1, solicitava que o grupo registrasse no quadro, palavras ou trechos não compreendidos. As palavras destacadas pelo Grupo 4 foram (L49): *“processos de objetivação e subjetivação”*. Após o registro da resposta, a Professora-Pesquisadora estava presente e acrescentou aos alunos que, os processos de objetivação e subjetivação, são respectivamente, a atualização do saber e do ser por meio da atividade. Além disso, esses processos ocorrem de forma simultânea na realização da atividade. Após a explanação da Professora-Pesquisadora, nenhum aluno perguntou sobre as palavras destacadas. Em seguida, a Professora-Pesquisadora questionou: vocês entenderam? Todos responderam fazendo um

gesto balançando a cabeça positivamente. O diálogo com a Professora-Pesquisadora foi encerrado pelos alunos, que iniciaram com a leitura da questão-problema 2.

A questão-problema 2 solicitava o seguinte: antes dessa tarefa, você já ouviu falar sobre a Teoria da Objetivação? Se sim, em que contexto? A resposta dada pelos alunos: “*Não*”. Vejamos as exposições verbais a seguir.

L51. A11: Segunda questão: antes dessa tarefa ... (ler em voz alta a questão).

L52. A10, A11 e A12: Não! (todos fazem um gesto balançando a cabeça negativamente).

L53. A12: Vou escrever na folha isso? Não!

L54. A10: É!

Pela resposta dada pelos alunos (L52), podemos perceber que é a primeira vez que eles têm contato com a TO. O aluno A11 participou da oficina de Matemática Recreativa, mas, em sua resposta, expressa que não lembra da TO. Acreditamos que esse fato se deve porque, na primeira etapa da oficina realizada na Semana de Matemática da UFRN, fizemos uma explanação por meio de slides e focamos mais a atenção sobre a Matemática Recreativa.

Em relação à Teoria da Objetivação foi uma breve apresentação. Já na segunda etapa da oficina houve a vivência de um Problema Recreativo – o Problema dos 35 Camelos. Nesta etapa de resolução do problema, enfatizamos que os participantes realizassem a tarefa por meio do Labor conjunto e da Ética Comunitária. Dessa forma, consideramos que o aluno A11 se apropriou dos termos Labor conjunto e Ética Comunitária.

A última questão (Questão-problema 3) foi a seguinte: após a leitura e discussão do Texto 1, explique com suas palavras o que você entendeu sobre a Teoria da Objetivação e os princípios do Labor conjunto e da Ética Comunitária. A seguir, apresentamos o posicionamento dos estudantes.

L54. A11: Terceira questão: após a leitura ... (ler em voz alta a questão).

L55. A10: A TO é uma teoria educacional ... (folheia o texto e ler em voz alta).

L56. A11: Aqui ó! É uma teoria sociocultural ... (aponta com o dedo para o quadro do texto e ler em voz alta).

L57. A11: É uma teoria de ensino e aprendizagem sociocultural.

L15. A12: Repete aí! (A11 repete mais uma vez).

L58. A10: Labor conjunto aqui ó! É a atividade que se faz na sala de aula (ler em voz alta esta parte do texto).

L59. A12: Labor conjunto é a atividade em sala de aula realizada coletivamente pelo professor e alunos (faz o registro).

L60. A11: A Ética Comunitária tem três vetores.

L61: A12: Ética Comunitária tem três principais vetores: compromisso, responsabilidade e cuidado com o próximo (A12 faz o registro).

L62: PP: A Ética Comunitária é representada pelo compromisso ético com o ser e a responsabilidade com o outro.

A questão permitiu uma interação entre os alunos e foi necessário recorrer ao texto (L55, L56 e L58) com o objetivo de encontrar informações para a resposta. Para isso, fizeram citações diretas do texto. No decorrer do diálogo (L60 à L62), os alunos e a Professora-Pesquisadora trabalharam em um ambiente colaborativo por meio do Labor conjunto e no espírito de uma Ética Comunitária.

Em sequência, trazemos a transcrição da resposta dada pelos estudantes com relação à questão-problema 3.

A TO é uma teoria de ensino e aprendizagem sociocultural. Labor conjunto é a atividade em sala de aula realizada coletivamente pelo professor e alunos. A Ética Comunitária tem 3 principais vetores: compromisso, responsabilidade e cuidado com o próximo (Grupo 4).

A meta das três questões-problemas foi identificar o posicionamento dos alunos sobre o entendimento do que é a Teoria da Objetivação e dos conceitos de Labor conjunto e Ética Comunitária. Pelos relatos mencionados anteriormente, podemos observar que foi necessário que os alunos lessem juntos para, em seguida, pudessem pensar coletivamente sobre as três questões-problemas, discutindo, argumentando e decidindo como iriam registrar as suas respostas.

Ao refletirem juntos, os alunos aprendem a ouvir o outro e a defender seu ponto de vista. Verificamos que os alunos trabalharam dentro de uma Ética Comunitária, respeitando a opinião dos outros e sendo solidários. Assim, a atividade (Labor conjunto), contém elementos emocionais, corporais, afetivos e intelectuais, porque, é no Labor conjunto que os sujeitos aprendem (RADFORD, 2018a).

A seguir, apresentamos uma discussão sucinta sobre alguns segmentos relevantes dos alunos dos outros grupos, por meio das falas captadas de fragmento em vídeos da câmera 1, especificamente, na etapa da resolução das três questões-problemas (ficha de tarefa dos alunos), por exemplo, os alunos do Grupo 1 (A1, A2 e A3), distanciaram-se da atividade (Labor conjunto), eles dividiram as questões. Nesse momento, a PP fez uma intervenção, conforme o diálogo que segue.

- L1: PP: Assim é um trabalho na forma de Labor conjunto?
 L2: A1, A2 e A3: Não! (todos fazem um gesto balançando a cabeça negativamente).
 L3: A2: Foi o hábito da gente trabalhar dividindo as questões, aí cada um ficou com uma questão. Mas a leitura nós fizemos coletivamente.
 L4: PP: Eu observei o trabalho coletivo de vocês nos outros momentos.
 L5: A1: Foi automático, nem pensamos (coloca a mão direita na cabeça).
 L6: A3: Valeu! professora.

Após nossa intervenção, os alunos A1, A2 e A3, concordaram em continuar a proposta de trabalhar na forma de Labor conjunto. Na fala de A3 (Linha 6), o aluno agradeceu com a seguinte expressão: “Valeu! professora” e neste momento, verificam-se indícios da produção de novas subjetividades, evidenciados nas atitudes dos alunos que continuaram fazendo um trabalho coletivo, abandonando o hábito de trabalhar dividindo as questões.

Destacamos a seguir, as respostas dos demais grupos em relação à questão-problema 1, Grupo 1 – *conceito de atividade*; Grupo 2 – *Labor conjunto e processo de objetivação*; Grupo 3 – *conceito de labor*; Grupo 5 – *cultura*; e o Grupo 6 – não destacaram nenhuma palavra.

No trabalho coletivo com os pequenos grupos, algumas das palavras destacadas por seus componentes, estávamos presentes e pudemos (por exemplo, Grupo 1 e Grupo 2), contribuir com algumas explicações sobre o Labor conjunto, mas também, explicamos que, de acordo com a Teoria da Objetivação, o Labor conjunto é a forma como se dá a didática em sala de aula. É a atividade ombro a ombro estabelecida entre professor-alunos e alunos-alunos.

Também informamos para os licenciandos do Grupo 2 que a atividade na Teoria da Objetivação se refere a um sistema que contribui para a satisfação das necessidades coletivas – a atividade que se faz em sala de aula é o Labor conjunto. Em seguida, o aluno A1 do Grupo 1, fez interação e falou algo interessante: “*A atividade é social*”. Os demais alunos não interagiram nesse aspecto, mas, ficaram atentos ouvindo nossos diálogos.

Por fim, é importante destacar que, não foi possível dialogar sobre todas as palavras destacadas pelos grupos, pois, no momento a Professora-Pesquisadora não estava presente em cada um deles.

Quanto à questão-problema 2, as respostas dos grupos (1, 2, 3, 5 e 6) foram resumidas nas frases: “*Não*” e “*Nunca ouvimos falar*”. Podemos concluir que era a primeira vez que os licenciandos em Matemática tinham contato com a TO.

Com relação à última questão, segue a transcrição da resposta dada pelos grupos (1, 2, 3, 5 e 6).

Teoria de ensino e aprendizagem. Labor conjunto é a atividade em sala de aula realizada coletivamente por professor e alunos. Ética Comunitária envolve o trabalho com responsabilidade, compromisso e cuidado com o próximo (Grupo 1).

Teoria de ensino e aprendizagem. Labor conjunto é o trabalho realizado coletivamente entre o professor e os alunos. Ética Comunitária envolve a ética no ensino de Matemática (Grupo 2).

É uma teoria sociocultural (Grupo 3). (Não escreveram sobre Labor conjunto e Ética Comunitária).

É uma teoria sociocultural. Labor conjunto é atividade de sala de aula, com cooperação entre professor e alunos. Ética Comunitária com responsabilidade, compromisso e cuidado com o próximo (Grupo 5).

Teoria de ensino e aprendizagem. Labor conjunto é um trabalho coletivo entre professor e alunos. Ética Comunitária é o trabalho para o desenvolvimento de um bom indivíduo (Grupo 6).

De acordo com nossa análise (baseadas nos vídeos das câmeras 1 e 2), percebemos que alguns participantes dos grupos tiveram dificuldades de escrever no papel suas ideias, por exemplo, o Grupo 3, pois, na exposição oral, eles dialogaram e refletiram sobre as ideias do texto com respostas mais detalhadas. É importante destacar que, os estudantes-professores da oficina, também tiveram essa dificuldade.

Outro segmento relevante foi com os licenciandos A4, A5 e A6 (Grupo 2), em relação à última questão (Questão-problema 3), conforme expresso nas falas dos participantes.

L7: A6: PP a TO é uma teoria que encanta (Risos e tom de voz de admiração).

L8: PP: Por que a TO encanta?

L9: A6: Além de ser uma teoria de ensino e aprendizagem, a teoria também contribui para a formação de pessoas, tipo assim, pessoas críticas, reflexivas e éticas.

L10: PP: Sim! Você está certo.

L11: A1: A TO contribui para formar pessoas mais humanas (A1 é do Grupo 1, e participou da discussão com o Grupo 2).

L12. PP: A TO é uma teoria de ensino-aprendizagem contemporânea em uma perspectiva não-individualista, como um processo social, cultural e histórico.

L13. A1: Eu gostei da teoria.

Neste diálogo, o aluno A6 explicou seu encantamento pela Teoria da Objetivação ao afirmar: “Além de ser uma teoria de ensino e aprendizagem, a teoria também contribui para a formação de pessoas, tipo assim, pessoas críticas, reflexivas e éticas” (L9). Além disso, teve a interação de um aluno de outro grupo, além da colaboração de A1 que é do Grupo 1, dando sua contribuição no Labor conjunto, chamou-nos a atenção o seu entendimento do que é a Teoria da Objetivação, quando ele afirmou: “A TO contribui para formar pessoas mais humanas”

(L11). Nesse momento, a Professora-Pesquisadora interagiu com os grupos e enfatizou que, a Teoria da Objetivação é uma teoria de ensino-aprendizagem contemporânea em uma perspectiva não-individualista, como um processo social, cultural e histórico (L12).

Na presente tarefa, as interações em sala de aula ocorreram em uma Ética Comunitária, que permitiu formas de colaboração mútua entre professor-alunos e alunos-alunos – *uma ética de Labor conjunto*.

Finalizamos a tarefa, informando aos alunos que uma discussão geral com a classe toda, a respeito das respostas das questões-problemas, de forma oralizada, além das reflexões sobre a Teoria da Objetivação, foram prorrogadas para apresentação no início do segundo encontro (18/03/20).

É importante destacar que, não foi possível a conclusão da Tarefa 1, tampouco foi possível a realização das outras quatro tarefas (ver Quadro 9) planejadas em decorrência da pandemia mundial de Covid-19, pois, esta, imputou-nos medidas de distanciamento e isolamento social e da suspensão das aulas presenciais no âmbito da Educação Básica e do Ensino Superior. Diante disto, apresentaremos no apêndice da pesquisa (ver Apêndice A) algumas recomendações e orientações ao professor de Matemática em relação ao uso das tarefas de Matemática Recreativa. Assim, na subseção seguinte, apresentamos os resultados e discussões da Tarefa 1.

4.5.2. Resultados e Discussões da Tarefa 1

O objetivo da tarefa desenvolvida foi promover a leitura e interpretação de um texto e oferecer uma noção para os licenciandos de Matemática do que é a Teoria da Objetivação e dos conceitos de Labor conjunto e da Ética Comunitária, além disso, buscamos verificar como a atividade (Labor conjunto) foi desenvolvida por meio da responsabilidade, compromisso e no cuidado com o outro, entre os alunos e a Professora-Pesquisadora.

No início do *quarto momento* da Ação B, os licenciandos em Matemática receberam para leitura, uma única folha por grupo do texto trabalhado com as posições fundamentais da Teoria da Objetivação, e os alunos do Grupo 3 queriam uma cópia para cada um, pois, para eles facilitava o processo de leitura. Consideramos que os alunos estavam acostumados a realizar trabalhos em equipe, em que cada aluno recebe uma folha, e nesse sentido, sentiram-se inseguros de trabalhar por meio do Labor conjunto. No entanto, na vivência da tarefa, eles leram

juntos, passaram a pensar coletivamente, mudaram a forma de agir a partir do diálogo e da interação com os colegas de grupo e passaram a trabalhar na forma de Labor conjunto.

Durante o processo de leitura do Texto 1, percebemos que a tarefa de leitura foi feita por toda a sala, foram leituras coletivas em pequenos grupos, alguns deles realizaram uma leitura silenciosa, outros em voz alta, haja visto que, os alunos mostraram-se interessados na leitura do texto, promovendo a participação, discussão e reflexão.

Ainda na realização da leitura, todos os grupos utilizaram os seus próprios celulares com acesso à internet (artefatos) para pesquisarem termos desconhecidos. Neste íterim, destacamos a importância da inserção da tecnologia, especificamente, no uso de celular de forma ética em sala de aula, logo, observamos que esse recurso tecnológico facilitou a compreensão do texto.

No que diz respeito aos meios semióticos mobilizados pelos licenciandos em Matemática no Labor conjunto e sustentado por uma Ética Comunitária, vivenciados no decorrer da Tarefa 1, observamos um repertório de movimentos corporais, gestos, olhares, palavras, expressões, dentre outras ações, que contribuíram para a realização da atividade (Labor conjunto).

Quanto aos gestos mobilizados pelos alunos durante o curso da tarefa, destacamos os seguintes: apontar com os dedos para o texto; fazer círculos com as mãos; fazer gestos balançando a cabeça negativamente e positivamente e risos. Foram gestos e movimentos espontâneos. Também observamos algumas expressões, por exemplo, *né; uhum; ah; ó; oh; valeu; aí; e pera aí*. Na visão de Radford (2003) ação, gestos e palavras trabalham juntos para alcançar a objetivação do conhecimento.

É importante destacar que alguns dos gestos e expressões, também foram identificados tanto na realização da oficina, quanto na Tarefa 1.

Quanto ao uso dos instrumentos de gravação, destacamos como positivo, o uso do celular, microfone (condensador) e tripé, colocado na sala de aula em um ângulo captando toda a turma e outro celular fixo focado no grupo de análise (ver seção 4.3). O microfone condensador valoriza o áudio capturado no momento da gravação, com uma qualidade sonora maior.

Para futuras gravações, deixamos como sugestão, o uso de outro celular fixo focando outro ângulo, para captar os alunos que ficam no final da sala de aula, pois, facilita a visualização dos meios semióticos mobilizados no Labor conjunto pelos alunos (gestos, movimentos corporais, leitura, fala, artefatos, dentre outros). Além disto, destacamos o fato de

usar tripés com câmeras fixas no lugar de pessoas gravando com as câmeras em mãos, além de ser cansativo, também inibe um pouco os alunos.

Em relação ao processo de discussão e reflexão do Texto 1 e da Ficha de Tarefa dos alunos, os participantes da pesquisa trabalharam com diálogo, resolvendo a tarefa coletivamente, compartilhando suas ideias com os colegas de grupo em sala de aula, com compromisso relacionado aos grupos, responsabilidade por meio de atenção aos outros que estão falando, e no cuidado com o outro, mas também, mostrando-se solidários ao outros, com empatia.

Nessa perspectiva, os licenciandos em pequenos grupos trabalharam a partir da Ética Comunitária, isto mostra os indícios de produção de novas subjetividades no contexto da tarefa realizada. A Professora-Pesquisadora participou do trabalho dos alunos, ouvindo com atenção o que eles falavam, dialogando e respeitando, ou seja, um trabalho *ombro a ombro* (Labor conjunto), portanto, a Tarefa 1 foi desafiadora e proporcionou a participação de todos (professor-alunos e alunos-alunos).

Podemos destacar também que o professor precisa criar um ambiente de sala de aula que sirva de exemplo para as possibilidades de relações humanas, por meio do respeito, da solidariedade, do diálogo e da colaboração.

De acordo com a análise dos segmentos relevantes, conforme apresentado anteriormente, observamos que a Teoria da Objetivação trouxe contribuições no sentido de valorizar o trabalho na forma de Labor conjunto e sustentando por uma Ética Comunitária. Quanto à análise das interações evidenciou que os licenciandos em Matemática se posicionaram criticamente em relação às posições fundamentais da Teoria da Objetivação e afloraram nos estudantes pensamentos éticos e reflexivos.

A seguir, apresentaremos as conclusões gerais e nossas considerações finais.

5 Considerações Finais

A presente pesquisa nos proporcionou conhecer melhor sobre a Matemática Recreativa (MR), pois, foi um trabalho prazeroso e divertido, então, por que não dizer que foi recreativo? Sim, foi recreativo, proporcionou-nos recreação focada nos campos terapêutico, psicológico e educacional, que também são atribuídos à Matemática Recreativa. Porém, é importante destacar que, o termo *recreativo* é controverso, porque, as pessoas podem ter opiniões diferentes sobre o que é recreativo.

Assim, nesta pesquisa tivemos como enfoque a seguinte questão investigativa: *quais características da Matemática Recreativa podem ser evidenciadas por meio dos princípios da Teoria da Objetivação, potencializando seu uso em sala de aula?*

Para responder a essa questão, traçamos o objetivo geral da pesquisa que foi *investigar contribuições teórico-metodológicas da Teoria da Objetivação para a proposição de tarefas de Matemática Recreativa em sala de aula*, contudo, na perspectiva de atingirmos o objetivo geral, estabelecemos como objetivos específicos de pesquisa:

- Traçar o perfil da Matemática Recreativa, apoiado em Teses e Dissertações, destacando os aspectos mais relevantes para um conhecimento significativo e multilateral dessa ferramenta;
- Construir uma proposta Didático-Pedagógica com os tipos mais frequentes de tarefas de Matemática Recreativa (jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos), ancorada no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação;
- Aplicar e analisar elementos da proposta Didático-Pedagógica, a um grupo de licenciandos em Matemática, avaliando as contribuições da Teoria da Objetivação no processo.

Para alcançar o primeiro objetivo específico, realizamos um mapeamento de pesquisa nas Teses e Dissertações produzidas por pesquisadores brasileiros e estrangeiros que versam sobre MR publicadas durante o período de 24 anos (1994 a 2018), disponíveis no acervo do Banco de Teses da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), na base nacional da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD), e com relação ao levantamento bibliográfico internacional, tomamos como base a relação do Portal de Periódicos Capes.

Após o mapeamento de pesquisa das Teses e Dissertações em Matemática Recreativa e da análise dos estudos de maior relevância para esta pesquisa, pudemos conhecer um panorama sobre a Matemática Recreativa, deste modo, obtivemos informações acerca da antiguidade da

Matemática Recreativa como atividade humana de entretenimento, antigos problemas (clássicos) de natureza recreativa; as obras relacionadas à MR; os matemáticos e autores que contribuíram para a divulgação dessa ferramenta; as concepções e os aspectos da MR; outras expressões sobre MR; as vantagens e desvantagens de introduzir essa ferramenta em sala de aula; além das principais tarefas em Matemática Recreativa.

Além disto, pudemos verificar que no Brasil, existe um pequeno número de Teses e Dissertações no âmbito da Educação Matemática que versam sobre a Matemática Recreativa e uma maior produção delas no exterior.

Este mapeamento foi de suma importância, porque, possibilitou também contribuições para a compreensão da Matemática Recreativa como uma abordagem metodológica que pode proporcionar motivação, prazer, alegria, diversão, entretenimento, entusiasmo, além de outras dimensões positivas em sala de aula e, com isto, o desenvolvimento dos estudantes.

A Matemática Recreativa fornece uma variedade de tarefas de caráter recreativo, pedagógico e histórico que podem ser utilizadas em diferentes níveis de ensino. Dessa forma, a Matemática Recreativa é uma abordagem metodológica importante para mostrar aos estudantes que a Matemática pode ser divertida e prazerosa.

Assim, destacamos o viés teórico sobre a Matemática Recreativa como uma das contribuições desta pesquisa. Diante do exposto, o primeiro objetivo específico em nossa investigação foi alcançado.

Para alcançar o segundo objetivo específico, optamos por utilizar a Teoria da Objetivação, que é uma teoria sociocultural de ensino-aprendizagem, que visa também a transformação do sujeito (Ser) (RADFORD, 2014; 2018a; 2018b), como um referencial teórico-metodológico para orientar nossa investigação, para isto, julgamos os conceitos⁶³ de *saber*, *conhecimento* e *Labor conjunto* da Teoria da Objetivação (RADFORD, 2018a; 2018b; 2020), pertinentes para a elaboração e implementação das tarefas, da coleta e da análise de dados.

Após, a seleção das tarefas de Matemática Recreativa extraídas das Teses e Dissertações analisadas, foi possível a organização e construção da proposta Didático-Pedagógica que envolve as principais tarefas em Matemática Recreativa (jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos) ancorada no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação, com o intuito de apresentar a Matemática Recreativa aos professores de

⁶³ Ver segundo Capítulo.

Matemática em formação inicial, objetivando o conhecimento dessa abordagem metodológica e sua aplicação em sala de aula.

É importante mencionarmos que não foi nossa intenção com a proposta Didático-Pedagógica promover um curso de formação de professores com o uso das Tarefas Matemáticas Recreativas, pois, esse processo é longo e requer mais tempo de pesquisa.

Consideramos que a proposta Didático-Pedagógica traz contribuições importantes à área de Educação Matemática, particularmente, no tocante à introdução de tarefas de Matemática Recreativa ancoradas na Teoria da Objetivação tendo implicações diretas nas concepções atuais de ensino e aprendizagem de Matemática.

Outra contribuição desta pesquisa é a proposta Didático-Pedagógica à luz da Teoria da Objetivação, para a formação inicial do professor de Matemática, portanto, cumprimos o segundo objetivo específico.

Para alcançar o terceiro objetivo específico, foi realizada a Tarefa 1, com carga horária de aproximadamente 2 horas, em 16 de março de 2020 – período 2020.1, com os discentes matriculados na disciplina noturna de Tópicos de História da Matemática do Curso de Licenciatura em Matemática (UFRN/Natal). Após a análise da tarefa, destacamos algumas contribuições da Teoria da Objetivação no processo: 1) o compromisso e o empreendimento dos participantes no decorrer da tarefa; 2) posturas éticas de responsabilidade, solidariedade e de compromisso dos participantes em relação aos colegas de grupo no Labor conjunto e; 3) os alunos-alunos e professores-alunos trabalharam na forma de Labor conjunto, um trabalho de interação e colaboração humana norteada por uma Ética Comunitária. Desse modo, cumprimos o terceiro objetivo específico.

Em relação à vivência da oficina Matemática Recreativa à luz da Teoria da Objetivação, os licenciandos do Curso de Matemática da UFRN/Natal e os professores de Matemática da Educação Básica de escolas de Natal/RN realizaram um trabalho de cooperação humana por meio de diálogo, além disto, a referida oficina proporcionou leituras coletivas em pequenos grupos e pode despertar o interesse dos estudantes-professores, na leitura e na resolução do Problema Recreativo, de forma divertida e prazerosa, ao criar suas próprias estratégias, desenvolvendo formas de raciocínio e interação por meio dos posicionamentos dos participantes e pelo Labor conjunto entre alunos-alunos e professores-alunos prezando pela Ética Comunitária.

Quanto à análise dos segmentos relevantes e dos meios semióticos (gestos, movimentos corporais, leitura, produção escrita, expressões não linguísticas, interações e artefatos), mobilizados pelos licenciandos do Curso de Matemática da UFRN/Natal no Labor conjunto da Tarefa 1, pudemos observar que, os estudantes realizaram um trabalho coletivo, com responsabilidade, compromisso e no cuidado com o outro. Desta forma, a Teoria da Objetivação possibilitou aos estudantes perceberem a importância do trabalho na forma de Labor conjunto, ou seja, a Teoria da Objetivação trouxe contribuições no sentido de valorizar o Labor conjunto, sustentado por uma Ética Comunitária, portanto, a Tarefa 1 foi desafiadora e proporcionou a participação entre professor-alunos e alunos-alunos.

Durante o decorrer da oficina e da Tarefa 1, percebemos que o público-alvo não teve dificuldade em expressar oralmente suas ideias, mas, alguns tiveram restrições ao registrar as respostas por escrito na ficha de tarefas. Mesmo assim, no decorrer do curso, foi possível verificar autonomia e segurança nas discussões entre os participantes da pesquisa e interações por meio do Labor conjunto e da Ética Comunitária entre alunos-alunos e entre professor-alunos.

Quanto aos meios semióticos mobilizados pelos participantes da investigação durante o curso da oficina e da Tarefa 1, por meio das leituras, das produções escritas, dos posicionamentos e posturas apresentados como respostas às tarefas propostas, destacamos os seguintes gestos: apontar com os dedos para o texto; fazer círculos com as mãos; fazer gestos balançando a cabeça negativamente e positivamente; olhar nos olhos e risos. Também observamos algumas expressões, por exemplo, *né; uhum; ah; ó; oh; hum, hum; valeu; aí; e pera aí*. É importante destacar que, alguns dos gestos e expressões, também foram identificados tanto na realização da oficina, quanto na Tarefa 1.

Destacamos algumas vantagens do uso da Matemática Recreativa no ensino de Matemática: 1) possibilidades e propostas de inserção de tarefas de Matemática Recreativa na formação inicial e/ou continuada de professores de Matemática; 2) possibilidade de usar tarefas de Matemática Recreativa para estudar História da Matemática; tarefas envolvendo a Matemática Recreativa alicerçadas no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação é uma das alternativas que os professores possuem para dinamizar o processo de ensino e aprendizagem de Matemática; 3) os jogos, os quebra-cabeças matemáticos e os Problemas Recreativos podem ser usados e explorados em sala de aula, em diferentes níveis de ensino, contribuindo para o desenvolvimento de tópicos matemáticos, de competências como

raciocínio e cálculo mental e de atitudes como persistência e o prazer em aprender e; 4) a proposta Didático-Pedagógica também pode servir de apoio aos professores de Matemática, podendo propiciar discussão, reflexão e a participação.

É importante destacar que, ao longo da pesquisa tivemos algumas limitações, elencadas a seguir:

- Dificuldades da pesquisadora com a leitura de textos em Francês e em Italiano;
- Dificuldades no que diz respeito à conclusão da Tarefa 1, com as posições e fundamentações da Teoria da Objetivação;

Quanto ao desenvolvimento das demais tarefas (ver Quadro 9), na formação inicial de professores de Matemática, consideramos que as tarefas relacionadas à Matemática Recreativa promoveriam um aprofundamento do conceito de Matemática Recreativa, além, dos futuros professores se posicionarem sobre as possibilidades, as vantagens e desvantagens de introduzir a Matemática Recreativa em sala de aula.

- Outra limitação é referente às perguntas elencadas a seguir, pois, era nosso objetivo levar tais perguntas ao público-alvo de nossa pesquisa, que são os licenciandos da disciplina de Tópicos de História da Matemática do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN/Natal, são elas:

- Os licenciandos em Matemática estão familiarizados com a ideia de uma Matemática Recreativa? Quais as oportunidades que eles já tiveram para tal familiarização?

- Os licenciandos em Matemática consideram o que é apresentado na literatura vigente como Matemática Recreativa? Se sim, em que sentido?

- Os licenciandos de Matemática acreditam que a introdução de tarefas de Matemática Recreativa no cotidiano de sala de aula seria positiva para os estudantes? Este processo iria desperdiçar o tempo que seria dedicado a uma Matemática mais usual?

- Os licenciandos de Matemática se sentem preparados para a introdução de tarefas com Matemática Recreativa nas aulas de Matemática? Se não, o que falta?

Entretanto, não foi possível, a realização de tais indagações, tampouco obter as respostas, mas, pudemos verificar no desenvolvimento da oficina *Matemática Recreativa*, que era a primeira vez que o público-alvo da oficina tinha contato com a Matemática Recreativa, ou seja, o termo Matemática Recreativa era pouco familiar entre os licenciandos do Curso de Matemática e dos professores de Matemática. Verificamos também que, o Problema dos 35

Camelos é desconhecido por parte de alguns dos licenciandos e de professores de Matemática da Educação Básica mesmo sendo um problema antigo.

Assim, pudemos destacar outra contribuição da nossa investigação, a viabilidade de elaborar tarefas relacionadas à Matemática Recreativa, tendo como aporte teórico-metodológico a Teoria da Objetivação para serem utilizadas na formação inicial e/ou continuada de professores de Matemática.

A partir do processo de elaboração das tarefas e de sua implementação e análise dos dados, foi possível concluir a tese de pesquisa colocada: *tarefas de Matemática Recreativa, elaboradas com base no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação, contribuem a formação matemática do estudante como cidadão em uma coletividade histórico-cultural.*

Desta forma, concluímos que a Teoria da Objetivação pode oferecer aos professores de Matemática em formação inicial e/ou continuada oportunidades para pensar, dialogar e produzir reflexões sobre tarefas relacionadas à Matemática Recreativa a partir dos princípios fundamentais do Labor conjunto e da Ética Comunitária, noções estas desenvolvidas por Radford (2018a; 2018b). Nessa perspectiva, a Teoria da Objetivação oferece modos de colaboração humana, de responsabilidade, compromisso e cuidado com o outro (RADFORD, 2018a; 2018b; 2020).

Como sugestão de outras investigações em relação à Matemática Recreativa na perspectiva da Teoria da Objetivação, apontamos:

- Investigar as contribuições do processo de elaboração de tarefas de Matemática Recreativa, na perspectiva da Teoria da Objetivação, para a formação de professores de Matemática;
- Investigar o posicionamento dos professores de Matemática em formação inicial sobre as possibilidades, as vantagens e desvantagens da introdução da Matemática Recreativa em sala de aula de Matemática;
- Analisar a possibilidade de elaboração e aplicação de tarefas de Matemática Recreativa alicerçadas no Labor conjunto e na Ética Comunitária da Teoria da Objetivação, na sala de aula da Educação Básica.

Para finalizar, destacamos a importância do trabalho realizado, sendo está de natureza pessoal em razão do avanço teórico e metodológico que a experiência nos proporcionou, fazendo-nos compreender a ação do professor como pesquisador em seu espaço de atuação

profissional, portanto, recomendamos a divulgação, o debate e a reflexão sobre a Matemática Recreativa na formação de professores de Matemática.

REFERÊNCIAS

ALBERTI, L. B. **Matemática Lúdica**. Edição apresentada e comentada por Pierre Souffrin. Tradução, André Telles. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2006.

ANTUNES, C. L. B; JÚNIOR, J. C. B; BRUNHARA, R (Org.). **Cadernos de Tradução**. Flores da Antologia Grega. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, n. 44, jan./jul. 2019.

ARZARELLO, F. Semiosis as multimodais process. **Revista Latino-americana de Investigación en Matemática Educativa**, n. Número Especial sobre Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, p. 267–300, 2006.

BÁRTLOVÁ, T. **History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics**. Doctoral thesis. Charles University in Prague. Faculty of Mathematics and Physics – Department of Mathematical Analysis. Prague, 2016.

BRASIL. Ministério da Educação. Portaria nº 343, de 17 de março de 2020 **que dispõe sobre a substituição das aulas presenciais por aulas em meios digitais enquanto durar a situação de pandemia do Novo Coronavírus – COVID-19**. MEC, 2020. Disponível em: <https://www.mec.gov.br/>. Acesso em: 12 de fevereiro de 2021.

BIGODE, A. J. L. A Perspectiva Didática da Matemática Recreativa de Malba Tahan. **Revista de Educação Matemática**. Uma publicação da Regional São Paulo da Sociedade Brasileira de Educação Matemática. São Paulo, v. 15, n. 19, p. 223-234, 2018.

BOGDAN, R; BIKLEN, S. **Investigação Qualificação em Educação**: uma introdução de teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora, 1994.

BUENO, S. **Minidicionário da língua portuguesa**. São Paulo: FTD, 2007.

CESANA, A. **Textos e contextos dos problemas de medição de alturas em livros do Renascimento**. Tese (Doutorado em Educação) – Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2013.

COSTA, O. **A matemática recreativa no ensino básico**. Dissertação (Mestrado em Ciências – Formação Continuada de Professores), Área de especialização em Matemática, Universidade do Minho, 2014.

EZQUERRA, P. A. Entre la matemática y la magia: la leyenda de Josefo y lamezcla australiana. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*. Universidad de Cádiz. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14868. 9 (3), 410-421, 2012.

FANTI, E. L. C; SULEIMAN, A. R. Jogos Matix e Senha: motivando conteúdos da 2ª série do Ensino Médio. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, XXXIV, 2012, São Paulo. **Anais...**p. 321-327.

FIorentini, D; PASSOS, C. L. B; LIMA, R. C. R. (Org.). **Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001 – 2012.** Campinas, SP: FE/UNICAMP. Campinas/SP, 2016.

GALVÃO, M. E. E. L. **História da Matemática: dos números à geometria.** Osasco: Edifício, 2008.

GARDNER, M. **Divertimentos matemáticos.** São Paulo: IBRASA, 1998.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa.** São Paulo: Atlas, 2002.

GÓES, D. C. **O jogo de xadrez e a formação do professor de Matemática.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção/UFSC, Florianópolis, 2002.

GONÇALVES, I. M. F. L. **Os Problemas da Matemática: o seu Papel na Matemática e nas aulas de Matemática.** Doutorado em Matemática – Ensino da Matemática, Universidade da Madeira, Portugal, 2011.

GOSSO, Y. **Pexe oxemoarai: brincadeiras infantis entre os índios Parakanã.** Tese de Doutorado do Instituto de Psicologia da Universidade de São Paulo, 2004.

HIRTH, T. W. N. S. **Luca Pacioli and his 1500 book De Viribus Quantitatis.** Dissertação de Mestrado em História e Filosofia das Ciências. Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências – Secção Autónoma de História e Filosofia da Ciência. Lisboa, 2015.

KISHIMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação.** São Paulo: Cortez, 2002.

LOPES, A. J. **Dia da Matemática e a obra didática de Malba Tahan, para além do homem que calculava.** Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM): Boletim n. 13. Brasília, 2012.

LOPES, F. J. A. Propositiones Ad Acuendos Juvenes, de Alcuíno de York – Tradução. **Revista Brasileira de História da Matemática – RBHM**, vol. 17, nº 33, p. 73-90, 2017.

LOPES, F. J. A; TÁBOAS, P. Z. Euler e as Pontes de Königsberg. **Revista Brasileira de História da Matemática/RBHM**, Vol. 15, nº 30, p. 23-32, 2015.

MARTINS, J. **O livro que divulgou o papiro Rhind no Brasil.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015.

MENEZES, J. E. **Travessias Difíceis, Divisões Divertidas e Quadrados Mágicos: evolução Histórica de três Recreações Matemáticas.** Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2004.

MELO, J. J. A. R. C. **Probabilidades e Magia Matemática**. Dissertação de mestrado do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, Portugal, 2013.

MOREY, B. Abordagem Semiótica na Teoria da Objetivação. In: GOBARA, S, T; RADFORD, L. (Org). **Teoria da Objetivação: fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática**. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

NUNES, E. M. A. **Estudo sobre a Matemática Recreativa e sua Inserção no Ensino de Matemática**. Dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

O'CONNOR, J. J; ROBERTSON, E. F. **The MacTutor History of Mathematics archives: Indexes of Biographies: Samuel Loyd**. 2003. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Loyd.html>. Acesso em: fevereiro de 2018.

_____. **The MacTutor History of Mathematics archives: Indexes of Biographies: Martin Gardner**. 2010. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gardner.html>. Acesso em: fevereiro de 2018.

_____. **The MacTutor History of Mathematics archives: Indexes of Biographies: Yakov Perelman**, 2011. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Perelman.html>. Acesso em: fevereiro de 2018.

PELAY, P. **Jeu et apprentissages mathématiques: élaboration du concept de contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique**. Université Claude Bernard Lyon 1, France, 2011.

RADFORD, L. Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. **Mathematical thinking and learning**, 5(1), 37-70, 2003.

_____. Elementos de una teoría cultural de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, p. 103-129. 2006.

_____. **Layers of generality and types of generalization in pattern activities**. PNA, 4(2), 37-62. 2010.

_____. De la teoría de la objetivación. **Revista Latinoamericana de Etnomatemática**, 7(2), 132-150. 2014.

_____. Methodological Aspects of the Theory of Objectification. **Revista Perspectivas da Educação Matemática/UFMS**, v. 8, número temático, 547-567 – 2015.

_____. Saber y conocimiento desde la perspectiva de la Teoría de La Objetivación. IN: D'AMORE, B.; RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas**

semióticos, epistemológicos y prácticos – Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017a.

_____. Aprendizaje desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. IN: D'AMORE, B.; RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos** – Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017b.

_____. Ser, subjetividad y alienación. IN: D'AMORE, B.; RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos** – Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017c.

_____. **Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación.** PNA, 12(2), 61-80, 2018a.

_____. **Saber, aprendizaje y subjetivación en la Teoría de la Objetivación.** 5º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 27 a 29 de junho de 2018, Belém/PA – Brasil, 2018b.

_____. So, you say that doing math is like playing music? The mathematics classroom as a concert hall. **La matematica e la sua didattica**, 27(1), 69-87, 2019.

_____. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In: GOBARA, S, T; RADFORD, L. (Org). **Teoria da Objetivação: fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática.** – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

RADFORD, L; EDWARDS, L; ARZARELLO, F. **Introduction:** beyond words. Educ Stud Math 70:91– 95 DOI 10.1007/s10649-008-9172-y. Springer Science + Business Media B.V. 2009.

RADFORD, L; ARZARELLO, F. EDWARDS, L; SABENA, C. **The Multimodal Material Mind:** Embodiment in mathematics education. [In J. Cai (Ed.), First compendium for research in mathematics education (pp. 700-721). Reston, VA: NCTM.], 2017.

RIBEIRO, B, S. **Matemática Recreativa:** uma experiência baseada em clubes. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/Rio de Janeiro, 2018.

SANTOS, J. C. Martin Gardner e a Matemática Recreativa. IN: PICADO, J; MARTINS, P. M. **Cinco tributos a Martin Gardner.** Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática – SPM 71, p. 97-111, dezembro, 2014.

SEGANTINI, C. **Problemas Recreativos na Obra o Homem que Calculava, de Malba Tahan, e a Resolução de Problemas.** Dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica. Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo, 2015.

SEGANTINI, C; SIQUEIRA FILHO, M. G. **O problema dos 21 vasos, extraído da obra O homem que Calculava, de Malba Tahan.** Educação Matemática na Contemporaneidade:

desafios e possibilidades. XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo – SP, 13 a 16 de julho de 2016.

SIQUEIRA FILHO, M. G. **Ali Iezid Izz-Edim Ibn Salim Hank Malba Tahan: episódios do nascimento e manutenção de um autor-personagem**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas, 2008.

SINGMASTER, D. De Viribus Quantitatis by Luca Pacioli: The First Recreational Mathematics Book. In DEMAINE, E. D. et al (Eds.): **A lifetime of puzzles: a collection of puzzles in honor of Martin Gardner's 90th birthday**, p. 77-122, Editora A. K. Peters, 2008.

SINGMASTER, D. **The Utility of Recreational Mathematics**. London, 1992.

SILVA, L. R. **Contribuições do xadrez para o ensino-aprendizagem de Matemática**. Dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação da Universidade de Brasília. Brasília, 2010.

SOUZA, F. F. **A Lenda de Dido como Motivação para o Estudo de Figuras Isoperímetro na Educação Matemática: explorando a Dedução-Lógica**. Dissertação de Mestrado do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT. Rio de Janeiro, 2014.

SPADA, A. B. D. **A construção de jogos de regras na formação dos professores de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Brasília/Brasília, 2009.

SUMPTER, L. Recreational Mathematics – Only For Fun? **Journal of Humanistic Mathematics**. v. 5, n. 1, p. 121-138, 2015. Doi: 10.5642/jhummath.201501.07.

TAHAN, M. **O Homem que calculava**. Rio de Janeiro: Record, 2017.

TRIGG, C. W. What Is Recreational Mathematics? **Mathematics Magazine**. San Diego, v. 5, n. 1, p. 18-21, jan. 1978.

VARIZO, Z.C. M. O ensino da Matemática e a resolução de problemas. **Inter-ação**, Revista da Faculdade de Educação, Universidade Federal de Goiás, Goiás, n. 17, p. 1-20, 1993.

Apêndices

Apêndice A – Tarefas Matemáticas Recreativas

Apresentação: As Tarefas Matemáticas Recreativas foram organizadas como parte da proposta Didático-Pedagógica (ver terceiro Capítulo) que envolve as principais tarefas relacionadas à Matemática Recreativa (jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos) que é fruto da investigação de doutorado intitulada *A Matemática Recreativa e suas potencialidades didático-pedagógicas à luz da Teoria da Objetivação*, de Maria da Conceição Alves Bezerra desenvolvida junto ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática (PPGECNM/CCET/UFRN) na linha de pesquisa Cultura, Epistemologia e Educação em Ciências e Matemática, sob a orientação da Professora Doutora Bernadete Morey.

Objetivos: Introduzir os estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática nas questões da Matemática Recreativa usando como estratégia didática formas não individualistas de colaboração humana (Labor conjunto e a Ética comunitária), levando os licenciandos a conhecer as tarefas de Matemática Recreativa propostas, a debater e posicionar-se sobre o papel pedagógico da Matemática Recreativa, e motivar os futuros professores de Matemática a introduzir a Matemática Recreativa em sala de aula.

Conteúdos: - Teoria da Objetivação (TO), Labor conjunto e Ética Comunitária; - Antigos indícios de atividades com MR e antigos problemas (clássicos) de natureza recreativa e históricos; - Obras relacionadas à MR, matemáticos e autores que contribuíram para a divulgação da MR; - As concepções e aspectos da MR; - As principais tarefas em MR; - As vantagens e desvantagens de introduzir a MR em sala de aula de Matemática; - A MR e História da Matemática.

Fundamentação Teórica da Proposta Didático-Pedagógica: A fundamentação teórico-metodológica ficou a cargo da Teoria da Objetivação (TO), que é uma teoria de ensino-aprendizagem de corrente sociocultural, contemporânea, idealizada pelo pesquisador Luis Radford.

Estratégia Didática Utilizada: A estratégia didática utilizada para o desenvolvimento das tarefas⁶⁴ é orientada pela Teoria Objetivação, um trabalho de colaboração mútua entre alunos e professores, por meio do Labor conjunto e da Ética Comunitária, caracterizada pelos vetores de responsabilidade, compromisso e no cuidado com o outro.

Orientações para Implementar as Tarefas em Sala de Aula: - Organizar a turma em pequenos grupos de dois, de três ou quatro alunos para realização da tarefa; - o professor⁶⁵ deve apresentar a tarefa a ser realizada para toda a classe; - durante a tarefa, recomendamos que o professor visite todos os grupos, com comentários e explicações sobre as tarefas, para provocar questionamentos e feedbacks, e promover o Labor conjunto; - para a implementação das tarefas propostas, a Teoria da Objetivação exige que o trabalho na sala de aula seja resultado de um esforço coletivo de colaboração humana. Neste sentido, o professor deve valorizar o Labor conjunto (alunos-alunos e professor-alunos) e prezando por uma Ética Comunitária que favoreçam a solidariedade, o diálogo, a responsabilidade, o compromisso e o cuidado com o outro.

Público-alvo: - Estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática.

Material Necessário: - Para a realização das tarefas faz-se necessário cópias dos textos, dos problemas e das fichas das tarefas dos estudantes, papel, lápis, tesoura, cartolina guache, material emborrachado (E.V.A), notebook e/ou celulares conectados à internet.

Duração das Tarefas: De 4 a 5 semanas, sendo 4 horas semanais (2+2).

⁶⁴ As tarefas foram planejadas pela Professora-Pesquisadora para serem desenvolvidas com os estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática. Caso, o professor tenha interesse em utilizar as tarefas em suas turmas nos Cursos de Matemática ou em ações de formação continuada com professores de Matemática, devem fazer as modificações e adaptações necessárias.

⁶⁵ O/a professor/a.

Tarefa 1: Introdução à Teoria da Objetivação

Objetivos: Exercitar a capacidade de leitura e interpretação de textos e oferecer ao público-alvo uma noção do que é a Teoria da Objetivação com destaque para dois conceitos-chave: o Labor conjunto e Ética Comunitária. Esta tarefa não é caracterizada como uma tarefa de MR, mas, como uma *tarefa teórica* com a apresentação dos pressupostos básicos da TO, para apresentar aos licenciandos de Matemática uma teoria sociocultural contemporânea elaborada por Luis Radford no início do século XXI.

Conteúdos: Teoria da Objetivação, Labor conjunto e Ética Comunitária.

Material necessário: Para a realização desta tarefa faz-se necessário uma cópia do Texto 1, uma ficha da tarefa dos alunos, papel, lápis, notebook e/ou celulares com acesso à internet.

Ação A – Documentação e perfil dos participantes

Objetivos: Tratar de assinar os documentos do CEP e traçar um perfil dos licenciandos matriculados na disciplina Tópicos de História de Matemática do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN/Natal.

Desenvolvimento:

- A primeira ação da Tarefa 1 deve ser iniciada com a apresentação da Professora-Pesquisadora⁶⁶, da Professora da turma e de cada aluno participante da turma; - após esse momento, é hora de apresentar a proposta e explicar os objetivos da pesquisa; - em seguida, conversar sobre a comissão de ética na pesquisa da UFRN e assinar os documentos; - orientação e convite à formação de grupos de trabalho de dois, de três e no máximo quatro participantes

⁶⁶ A Professora-Pesquisadora foi responsável pela elaboração da Tarefa 1, e a referida tarefa foi desenvolvida junto com os estudantes da disciplina de Tópicos de História da Matemática (com carga horária de aproximadamente 2 horas em 16 de março de 2020 – período 2020.1) do curso de Licenciatura em Matemática da UFRN/Natal.

para a realização da tarefa; - esclarecidos os aspectos da pesquisa, é hora de identificação de dados do perfil dos estudantes, conforme, demonstrado no Quadro 01.

Quadro 01. Identificação de dados do perfil dos licenciandos.

Nome:
Idade:
Está em que período do curso de Licenciatura em Matemática?
Tem experiência em sala de aula de Matemática?
Quais turmas está lecionando este ano (2020)? Ou em outros anos?
Possui outra Graduação?

Fonte. Produzido pela pesquisadora (2019).

Ação B – Leitura e discussão do Texto 1 – A Teoria da Objetivação (TO): uma teoria de ensino e aprendizagem

Objetivos: Exercitar a capacidade de leitura e interpretação de textos e oferecer uma noção para os licenciandos de Matemática do que é a Teoria da Objetivação destacando dois conceitos-chave: o Labor conjunto e Ética Comunitária.

Desenvolvimento:

- A Professora-Pesquisadora fará inicialmente a apresentação do objetivo da tarefa a ser realizada; - os estudantes permanecem divididos nos mesmos grupos; - distribuir uma única cópia do texto para cada grupo; faça uma leitura compartilhada em seu grupo do Texto 1, seguindo o Labor conjunto que se sustenta em uma Ética Comunitária; - em seguida, os participantes devem recorrer ao debate em seu grupo para interpretação, compreensão e reflexão das informações contidas no Texto 1; - após a leitura, os participantes devem registrar em uma folha de trabalho palavras ou trechos não compreendidos – a tarefa deve ser realizada por meio de um trabalho coletivo de colaboração mútua entre os participantes; - após os

momentos anteriores, discussão geral com os grupos, para ouvir as considerações, questionamentos e reflexões dos estudantes participantes sobre a Teoria da Objetivação⁶⁷ e os princípios do Labor conjunto e da Ética Comunitária; - apresentamos a seguir o Texto 1.

⁶⁷ Mais informações sobre a Teoria da Objetivação, acesse a página de Luis Radford, <<http://luisradford.ca/publications/>>.

Texto 1 – A Teoria da Objetivação (TO): uma teoria de ensino e aprendizagem

Você já ouviu falar de teorias de ensino e aprendizagem? Entre as teorias mais difundidas estão aquelas chamadas de construtivistas. As teorias de ensino e aprendizagem diferem entre si, mas, de modo geral, uma posição central do construtivismo diz que é o aluno que constrói o próprio saber ou conhecimento. A função de professor é descrita de diferentes modos que de uma maneira ou de outra indica que o professor é aquele que prepara as condições para que o aluno trabalhe e aprenda como resultado de seu próprio trabalho.

Em finais do século XX, alguns pesquisadores da Educação Matemática estavam insatisfeitos com abordagem construtivista e se puseram a buscar alternativas. Puseram-se ler as obras de Vygotsky⁶⁸, dos seguidores e dos predecessores desse psicólogo soviético. Após alguns anos, começaram a surgir teorias de cunho vygotskyano que acabaram por caracterizar o campo das teorias socioculturais⁶⁹. Entre elas está a Teoria da Objetivação.

A Teoria da Objetivação (TO) é uma teoria educacional contemporânea inspirada nos *trabalhos filosóficos* de Hegel (1770 - 1831), Marx (1818 - 1883), em *filósofos contemporâneos* como Ilyenkov (1924-1979) e na *escola histórico-cultural* de Vygotsky (1896 - 1934). A teoria foi idealizada pelo pesquisador e educador matemático Luis Radford da Laurentian University, Canadá.

A TO concebe o ensino e a aprendizagem como um processo único que envolve o *conhecer* e o *tornar-se*, nesse sentido, a aprendizagem não pode limitar-se ao eixo do saber, mas deve abordar também o eixo do ser, ou seja, o eixo do sujeito. Como a TO tem foco no eixo do saber e na subjetividade, seu olhar para a Educação Matemática concentra-se também na formação do sujeito.

Nesse sentido, a TO vê a Educação Matemática como um esforço dinâmico, político, social, histórico e cultural que busca a criação dialética de sujeitos reflexivos e éticos que se

⁶⁸ Liev Semiónovitch Vygotsky (1896 – 1934) foi um psicólogo soviético que lançou as bases da psicologia soviética e que desenvolveu os fundamentos psicológicos das correntes educacionais histórico-cultural.

⁶⁹ As teorias socioculturais defendem a posição de que os indivíduos são *consubstanciais* à cultura em que eles vivem suas vidas. Isto quer dizer que tudo o que o indivíduo faz, pensa, sente, sonha, tudo mediado pela cultura.

posicionam criticamente em discursos e práticas matemáticas que se constituem cultural e historicamente, discursos e práticas estas que estão em permanente evolução.

O Quadro 1, lista algumas das principais características da TO.

Quadro 1. Caracterizações da Teoria da Objetivação.

Teoria da Objetivação
Concebe o ensino e a aprendizagem como conhecer e tornar-se
Bases filosóficas: autores como Hegel (1770 – 1831), Marx (1818 – 1883), Vygotsky (1896 – 1934) e Ilyenkov (1924 – 1979)
É uma teoria sociocultural: defende a consubstancialidade entre o indivíduo e sua cultura
Vê a Educação Matemática como um esforço dinâmico, político, social, histórico e cultural que busca a criação dialética de sujeitos reflexivos

Fonte. Produzido pela autora (2019).

Na TO, o conceito central é o conceito de *atividade* que decorre da visão antropológica de humano como um ser natural e de necessidades. Além disso, para atender as necessidades do humano, o sujeito labora, age, penetra numa teia de relações no decorrer da qual o ser humano produz os meios de satisfazer as suas necessidades e se produz a si mesmo como espécie.

A atividade que se faz na sala de aula a TO chama de *Labor conjunto*. O conceito de Labor conjunto se refere às formas coletivas de produção de saber e de modos não alienantes de colaboração humana. Assim, o Labor conjunto permite revisitar o conceito de atividade de ensino e aprendizagem em sala de aula e o papel da linguagem, signos e artefatos (RADFORD, 2017).

As recomendações didáticas para o trabalho de sala de aula consistem em fazer o máximo para que apareça o Labor conjunto. E ele surge quando se trabalha no espírito de uma *Ética Comunitária*.

Na perspectiva da TO, existe a possibilidade de pensar sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática incorporando a dimensão ética, com a compreensão de relações didáticas e constituição de subjetividades, a qual Radford (2018b) chama de *Ética Comunitária*.

A *Ética Comunitária* está centrada em três vetores: *responsabilidade*, *compromisso* e no *cuidado com o outro*. Esses três vetores são importantes para configurar a estrutura essencial

da subjetividade. Os três vetores da Ética Comunitária permeiam o Labor conjunto e seus processos de objetivação e subjetivação. Assim, esses vetores se combinam para criar um espaço ético onde podem surgir novas formas de subjetividade consistentes com o projeto educacional e a abordagem histórico-cultural.

A interação em sala de aula se baseia em uma Ética Comunitária, que busca promover “[...] a participação de professores e alunos no espaço público, uma abertura para o outro, o exercício da solidariedade, a criação de um sentimento de pertença, o desenvolvimento de uma consciência crítica” (RADFORD, 2018b, p. 74). A Ética Comunitária pode permitir formas de colaboração, que sejam concedidas na medida em que haja um compromisso de Labor conjunto, cuidar do outro e assumir uma responsabilidade em relação aos outros.

Dessa forma, na TO, não basta que conteúdos de aprendizagem se tornem revelados à consciência do sujeito, é necessário que formas de vida – consciência crítica, cuidado com o outro, compromisso ético, responsabilidade e solidariedade – também sejam reveladas à consciência do indivíduo em atividade.

REFERÊNCIAS

RADFORD, L. **Algunos desafíos encontrados en la elaboración de la teoría de la objetivación**. PNA, 12(2), 61-80, 2018a.

RADFORD, L. **Saber, aprendizaje y subjetivación en la Teoría de la Objetivación**. 5º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – 27 a 29 de junho de 2018 – Belém - Pará - Brasil, 2018b.

RADFORD, L. Aprendizaje desde la perspectiva de la Teoría de la Objetivación. IN: D'AMORE, B.; RADFORD, L. **Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos** – Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 2017a.

RADFORD, L. Un recorrido a través de la teoría de la objetivación. In: GOBARA, S, T; RADFORD, L. (Org). **Teoria da Objetivação: fundamentos e Aplicações para o Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática**. – São Paulo: Editora Livraria da Física, 2020.

Ficha de Tarefa dos Alunos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

Professora Pesquisadora: Maria da Conceição Alves Bezerra

Nomes dos participantes:

Curso: _____ Data: _____

Questão-problema 1 – Registrar no quadro palavras ou trechos não compreendidos.

Questão-problema 2 – Antes dessa tarefa, você já ouviu falar sobre a Teoria da Objetivação?
Se sim, em que contexto?

Questão-problema 3 – Após a leitura e discussão do Texto 1, explique com suas palavras o que você entendeu sobre a Teoria da Objetivação e os princípios do Labor conjunto e da Ética Comunitária?

Tarefa 2: Introdução à Matemática Recreativa

Objetivos: Exercitar a capacidade de leitura e interpretação de textos e apresentar a Matemática Recreativa (MR) aos futuros professores de Matemática para tornar possíveis reflexões, por meio de diálogo, sobre a importância da MR, as vantagens e desvantagens de introduzir essa ferramenta em sala de aula de Matemática. A ideia é vivenciar uma tarefa baseada no diálogo, de cooperação humana, por meio do Labor conjunto e norteada pela Ética Comunitária.

Conteúdos: - Antigos indícios de atividades com MR e antigos problemas (clássicos) de natureza recreativa e históricos; - obras relacionadas à MR, matemáticos e autores que contribuíram para a divulgação da MR; - as concepções e aspectos da MR; - as principais tarefas em MR; as vantagens e desvantagens de introduzir a MR em sala de aula; - a MR e História da Matemática.

Material necessário: Para a realização desta tarefa faz-se necessário uma cópia do Texto 2, uma ficha da tarefa dos alunos, papel, lápis, notebook e/ou celulares com acesso à internet.

Ação A – Leitura e discussão do Texto 2 – A Matemática Recreativa: algumas Contribuições Iniciais

Objetivos: Exercitar a capacidade de leitura e interpretação de textos e apresentar a MR aos licenciandos de Matemática para tornar possíveis reflexões, por meio de diálogo, sobre a importância da MR, as vantagens e desvantagens de introduzir essa ferramenta em sala de aula de Matemática.

Desenvolvimento: - O professor deve fazer a apresentação do objetivo da tarefa a ser realizada; - os estudantes devem ser divididos em duplas ou trios para realização da tarefa; - o professor distribuirá uma única cópia do texto para cada grupo; - os estudantes devem fazer uma leitura compartilhada em seu grupo do Texto 2, seguindo o Labor conjunto que se sustenta em uma

Ética Comunitária; - em seguida, os participantes devem recorrer ao debate em seu grupo para interpretação, compreensão e reflexão das informações contidas no Texto 2; - após a leitura, uma discussão entre os pequenos grupos, sobre as definições e os aspectos da MR, bem como, as vantagens e desvantagens de introduzir a MR em sala de aula, além de autores que contribuíram para a divulgação dessa ferramenta; - após a discussão anterior, os participantes devem registrar suas ideias a respeito do texto, na Ficha de Tarefa dos alunos, durante esse processo o professor deve circular em cada pequeno grupo, levantando questões, estabelecendo discussões e reflexões, e instigando a produção de registros na Ficha de Tarefa dos alunos; - em seguida, discussão geral com todos os grupos para ouvir as considerações, questionamentos e reflexões dos estudantes sobre a Matemática Recreativa – a tarefa deve ser realizada por meio de um trabalho coletivo de colaboração mútua e respeitando a Ética Comunitárias; - apresentamos a seguir o Texto 2.

Texto 2 – A Matemática Recreativa: algumas Contribuições Iniciais

De início, apresentamos uma discussão sobre a Matemática Recreativa (MR), uma vez que, consideramos importante essa exposição inicial para situar os professores de Matemática em formação inicial e/ou continuada sobre a antiguidade da MR como uma atividade humana de entretenimento. Para isso, Bártlová (2016), destaca antigos indícios de atividades com MR, mas também, alguns antigos problemas de natureza recreativa e históricos do campo da MR.

Para a autora, os indícios mais antigos de atividades relacionadas à Matemática Recreativa são representados pelas *Bolas⁷⁰ de Pedra Esculpidas da Escócia*. Estas formam uma classe enigmática de objetos projetados para manipulação e parecem datar do período neolítico tardio (3000 – 2500 a.C.).

Outra atividade antiga que pertence a Matemática Recreativa, segundo Menezes (2004) e Bártlová (2016), são os *Quadrados Mágicos*. Segundo as autoras, o exemplo mais antigo que se conhece de um problema computacional seja o Quadrado Mágico (*Lo-Shu*). Supõe-se que o Quadrado Mágico tenha sido construído durante o reinado do imperador Yu que era conhecido pelos matemáticos chineses por volta de 2200 a.C.

Algumas recreações ainda hoje propostas, em geral, foram escritas há milhares de anos. No papiro de Rhind (1650 a.C), encontramos problemas de diversão (nº 28) conhecidos como *pense em um número*, mas também, de um tipo diferente como *canção de ninar*, a exemplo do problema 79. De acordo com Bártlová (2016), esses problemas não tinham aplicação na vida cotidiana, porque, seu objetivo principal fosse talvez proporcionar prazer intelectual.

Menezes (2004) e Bártlová (2016) destacam também os *Problemas de travessia – o lobo, a cabra e a couve* – da obra *Propositiones Ad Acuendos Juvenes* de Alcuíno de York (735 – 804). Para Menezes (2004) é um famoso problema de lógica que pertence a uma classe de problemas conhecidos como problemas de travessia – *O problema do lobo, a cabra e a couve* – (problema número 18 de Alcuíno).

⁷⁰ Para saber mais informações sobre as Bolas de Pedra Esculpidas visite o site do Museu Nacional da Escócia – National Museum of Scotland. Disponível em: <https://www.nms.ac.uk/>. Acesso em: janeiro de 2020. Explore e observe com mais detalhes usando o modelo 3D. Disponível em: <https://www.nms.ac.uk/explore-our-collections/stories/scottish-history-and-archaeology/towie-ball/>. Acesso em: janeiro de 2020.

Outro exemplo que merece destaque é um problema proposto por Leonhard Euler (1707 – 1783) sobre a possibilidade de percorrer as sete pontes da cidade de Königsberg (atual Kalinigrado, Rússia) sem passar pela mesma ponte duas vezes.

Os Problemas Recreativos e históricos, mencionados anteriormente, ilustram um tipo de tarefa normalmente usada na Matemática Recreativa. De uma forma ou de outra, os problemas carregam historicidade e foram criados com finalidade de entretenimento, espontaneamente ou não. Além disso, os Problemas Recreativos têm potencialidade para divulgação científica ou para uso pedagógico. Se, a este tipo de problema, acrescentarmos jogos matemáticos e quebra-cabeças matemáticos, temos o que se costuma chamar de *Matemática Recreativa*.

Apresentamos a seguir, algumas obras que foram selecionadas com base em seu valor pedagógico para o ensino de Matemática, a saber: a obra *Antologia Grega* (em latim, *Anthologia Graeca*). A obra está organizada em 16 livros, reunindo poemas de todos os períodos da história grega. O livro XIV é uma coleção de epigramas e contém 45 problemas (aritméticos, oráculos e enigmas) – problemas de caráter lúdico e pedagógico (GONÇALVES, 2011).

A obra em latim – *Propositiones ad Acuendos Juvenes* (Problemas para estimular os jovens) de Alcuíno de York (735 – 804). A ele é creditada a primeira coleção de problemas de Matemática Recreativa (MENEZES, 2004). O italiano Leon Battista Alberti (1404 – 1472), escreveu a obra *Matemática Lúdica*, em latim, *Ludi rerum mathematicarum*, por volta de 1452. O italiano Luca Pacioli (1445 – 1517), foi um frei e matemático renascentista do século XV, é autor do primeiro manuscrito inteiramente dedicado à Matemática Recreativa, *De Viribus Quantitatis*. Para Hirth (2015), a obra é certamente um marco no que hoje podemos chamar de Ciência Popular, por isso, na visão de Singmaster (2008), a obra *De Viribus Quantitatis* é o primeiro trabalho inteiramente dedicado à Matemática Recreativa.

Agora vamos apresentar outros matemáticos e autores dos séculos XIX e XX que contribuíram para a divulgação da Matemática Recreativa. O matemático inglês Henry Ernest Dudeney (1857 – 1930); o matemático americano Samuel Loyd (1841 – 1911), mais conhecido como Sam Loyd; o autor russo Yakov Perelman (1882 – 1942); o americano Martin Gardner⁷¹

⁷¹ Para conhecer o legado do escritor Martin Gardner, visite o site da Fundação Gathering 4 Gardner (G4G), que tem como objetivo estimular a curiosidade e o intercâmbio lúdico de ideias e pensamento crítico da Matemática, magia, ciência, literatura e quebra-cabeças recreativos. Para conhecer essa fundação e seus propósitos acesse: <<http://www.gathering4gardner.org/>>. Outro evento global – Celebration of Mind – celebra a vida de Martin

(1914 – 2010), licenciado em filosofia, foi escritor e pesquisador que muito contribuiu para a disseminação da MR no século XX. Durante 25 anos o autor escreveu para a revista *Scientific American* na coluna intitulada *Mathematical Games*, cujos conteúdos foram editados em livros posteriormente.

Para o contexto da Matemática Recreativa no Brasil, destacamos Júlio César de Mello e Souza⁷² (1895 – 1974) nascido na cidade do Rio de Janeiro no século XIX. Sob o pseudônimo Malba Tahan, foi um escritor, matemático e educador brasileiro e publicou várias obras de divulgação para a popularização da Matemática.

A obra *O Homem que Calculava* foi traduzida em vários idiomas. É a obra mais popular de Malba Tahan que reúne matemática, ficção e literatura, além de usar elementos da MR como Problemas Recreativos inseridos em contos árabes, quebra-cabeças, curiosidades, desafios e histórias. Em 2015 foi lançada uma edição especial dessa obra em capa dura, uma homenagem aos 120 anos do nascimento do autor.

Outra informação importante que merece destaque é o *Dia Nacional da Matemática*, foi instituído em julho de 2013 (Lei Federal nº 12.835, de 26 julho 2013), e é comemorado, anualmente, em todo o território nacional no dia 6 de maio, data do nascimento de Mello e Souza. Dessa forma, o estudo da Matemática Recreativa nos levou a conhecer os escritos de Mello e Souza – o Malba Tahan – de forma a enxergar neste imaginativo brasileiro um produtivo autor de Matemática Recreativa.

Agora vamos dialogar sobre as definições e os aspectos da Matemática Recreativa. Costa (2014) nos apresenta a seguinte definição de MR “[...] é aquela matemática que nos desafia a pensar, nos entretém e nos diverte quando pensamos nela” (2014, p. 6).

Com base em Bártlová (2016), Nunes (2019) elaborou a seguinte definição de Matemática Recreativa.

Matemática Recreativa (MR) é uma parte da matemática de sempre, a matemática “séria”, que carrega um traço de diversão. Nela se entrelaçam

Gardner acontece anualmente no dia 21 de outubro (data do seu aniversário). Para conhecer mais sobre o evento acesse o site: <<https://www.celebrationofmind.org/>>.

⁷² Conheça mais sobre Malba Tahan acessando o link: <www.malbatahan.com.br>.

quatro aspectos de fronteiras indefinidas que podem ser assim nomeados: aspecto científico-popular; aspecto de entretenimento, diversão; aspecto pedagógico e aspecto histórico (NUNES, 2019, p. 23).

Desse modo, a Matemática Recreativa pode servir de ponte para a elaboração de conceitos matemáticos e sua abrangência vai além de jogos, quebra-cabeças, problemas, desafios, e competições, pois a MR é muito ampla no campo da Matemática.

Conforme Bártlová (2016), a Matemática é considerada recreativa se tiver um aspecto lúdico⁷³ que pode ser entendido e apreciado por pessoas que não são da área de Matemática. Para a autora, essa definição é muito geral, pois abrangeria quase toda a Matemática.

Compreendemos a definição de Matemática Recreativa na perspectiva de Bártlová (2016), a qual se configura em quatro aspectos – científico-popular; divertido (entretenimento); pedagógico e histórico – que estão interligados e influenciam uns aos outros. Os quatro aspectos se sobrepõem consideravelmente, de forma que não há limites claros entre eles e a *Matemática séria*. Para nós, o novo na definição de Bártlová (2016) reside no fato de considerar-se que a Matemática Recreativa está em algum lugar na fronteira indefinida entre os quatro aspectos descritos.

Para além das definições descritas, também encontramos outros termos utilizados para tratar da Matemática Recreativa, a exemplo de Recreações Matemáticas, Problemas Recreativos e Magia Matemática.

Então, o que determina se um problema ou uma tarefa é recreativa ou não? Para responder a essa pergunta, Bártlová (2016) destaca quatro aspectos que cobrem a maioria dos tópicos relacionados à Matemática Recreativa, os quais estão interligados e influenciam uns aos outros: o aspecto científico-popular, o aspecto divertido (entretenimento), o aspecto pedagógico e o aspecto histórico. Sobre isso, apresentamos a seguir (Quadro 1), resumidamente, o que entendemos por cada um desses aspectos da Matemática Recreativa.

⁷³ Kishimoto (2002, p. 21) denomina “[...] lúdico em ação, a atividade mais ampla em que as crianças e adultos se envolvem com brinquedos, brincadeiras e jogos”.

Quadro 1. Aspectos da Matemática Recreativa.

Aspectos da Matemática Recreativa	
O aspecto científico-popular	A MR é aquela parte da Matemática que é divertida e popular, isto é, uma Matemática que pode atrair a atenção do não matemático profissional.
O aspecto divertido (entretenimento)	A MR é entendida como uma Matemática que é usada como um desvio de <i>Matemática séria</i> , ou seja, para diversão.
O aspecto pedagógico	Destaca que a MR pode ser usada para fins de ensino. Essa ferramenta é vista como uma grande utilidade pedagógica em sala de aula.
O aspecto histórico	A MR sempre desempenhou papel importante na História da Matemática e foi responsável pela origem de teorias e conceitos matemáticos que não existiriam sem a MR (BÁRTLOVÁ, 2016).

Fonte. Produzido pelas autoras (2019).

De modo geral, os aspectos popular-científico e o divertido (entretenimento) implicam que a MR tem potencialidades para ser usada em tarefas de divulgação científica, pois, podem apresentar a Matemática de modo divertido e compreensível para um público amplo. O aspecto pedagógico indica que tarefas envolvendo MR podem ser um meio de se aprender Matemática.

O aspecto histórico refere-se ao fato de que a MR é antiga e existem indícios que essa ferramenta se originou há milhares de anos. Outro sentido que podemos atribuir ao aspecto histórico é a possibilidade de podermos usar tarefas de MR para estudar História da Matemática.

No Quadro 2, apresentamos uma síntese das atividades e as vantagens apontadas pelos pesquisadores a favor do uso da Matemática Recreativa.

Quadro 2. Vantagens do uso da Matemática Recreativa.

Atividades relacionadas à Matemática Recreativa	Vantagens a favor da Matemática Recreativa
Jogos matemáticos e quebra-cabeças	Desenvolvimento de tópicos matemáticos; o raciocínio e cálculo mental; atitudes de persistência e de motivação; caráter lúdico (GÓES, 2002; SPADA, 2009; COSTA, 2014).
Recreações matemáticas da antiguidade	Compreensão de conceitos; motivação para a busca do conhecimento matemático; caráter histórico e recreativo (MENEZES, 2004).
Problemas Recreativos	Introdução de conceitos; uso de estratégias para a resolução de problemas; despertar a criatividade e a imaginação; caráter recreativo (SEGANTINI, 2015).
Antigos indícios de atividades com MR e antigos problemas (clássicos) de natureza recreativa	Trabalhar aspectos recreativos, históricos e pedagógicos da MR (BÁRTLOVÁ, 2016).

Truques de Magia Matemática	Aprendizado de conceitos como o de cálculo de probabilidades; caráter pedagógico e recreativo (MELO, 2013).
Problemas recreativos extraídos das Olimpíadas de Matemática	Aprender matemática de maneira recreativa, lúdica e com o uso de materiais concretos (RIBEIRO, 2018).

Fonte. Produzido pelas autoras (2019).

Segantini (2015), evidenciou algumas *desvantagens* do uso da MR elencadas a seguir: 1) dificuldades dos estudantes na leitura e interpretação dos enunciados dos problemas e; 2) dificuldades diante de conceitos matemáticos e cálculos matemáticos. Ribeiro (2018), por sua vez, também destacou uma *desvantagem* relacionada com o tempo, pois aulas com materiais concretos o tempo gasto é maior.

Observamos que os estudos e pesquisas mencionados anteriormente, destacam as vantagens, desvantagens e a importância dos aspectos da Matemática Recreativa, e alguns dos estudos já trazem experiências de tarefas aplicadas em sala de aula nos diferentes níveis de ensino. Com base nessas ideias defendemos a importância didática desse tipo de tarefa para o ensino de Matemática.

Portanto, queremos destacar algumas potencialidades que a Matemática Recreativa pode promover mais especificamente: o prazer, a alegria, a diversão e outras dimensões positivas em sala de aula e, com isto, o desenvolvimento dos estudantes (SUMPTER, 2015). Assim, a Matemática Recreativa é uma abordagem metodológica capaz de transmitir emoções que colocam à prova a capacidade de raciocinar e uma ferramenta que pode motivar o indivíduo a aprender mais, não importa quão difícil for.

REFERÊNCIAS

BÁRTLOVÁ, T. **History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics.** Doctoral thesis. Charles University in Prague. Faculty of Mathematics and Physics – Department of Mathematical Analysis. Prague, 2016.

COSTA, O. **A matemática recreativa no ensino básico.** Dissertação (Mestrado em Ciências – Formação Continuada de Professores), Área de especialização em Matemática, Universidade do Minho, 2014.

GÓES, D. C. **O jogo de xadrez e a formação do professor de Matemática**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção/UFSC, Florianópolis, 2002.

GONÇALVES, I. M. F. L. **Os Problemas da Matemática: o seu Papel na Matemática e nas aulas de Matemática**. Doutorado em Matemática – Ensino da Matemática, Universidade da Madeira, Portugal, 2011.

HIRTH, T. W. N. S. **Luca Pacioli and his 1500 book De Viribus Quantitatis**. Dissertação de Mestrado em História e Filosofia das Ciências. Universidade de Lisboa Faculdade de Ciências – Secção Autónoma de História e Filosofia da Ciência. Lisboa, 2015.

KISHIMOTO, T. M. **Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação**. São Paulo: Cortez, 2002.

MENEZES, J. E. **Travessias Difíceis, Divisões Divertidas e Quadrados Mágicos: evolução Histórica de três Recreações Matemáticas**. Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2004.

MELO, J. J. A. R. C. **Probabilidades e Magia Matemática**. Dissertação de mestrado do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro, Portugal, 2013.

NUNES, E. M. A. **Estudo sobre a Matemática Recreativa e sua Inserção no Ensino de Matemática**. Dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

RIBEIRO, B. S. **Matemática Recreativa: uma experiência baseada em clubes**. Dissertação (Mestrado) – Colégio Pedro II, Pró-Reitoria de Pós-Graduação, Pesquisa, Extensão e Cultura, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/Rio de Janeiro, 2018.

SEGANTINI, C. **Problemas Recreativos na Obra o Homem que Calculava, de Malba Tahan, e a Resolução de Problemas**. Dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica. Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo, 2015.

SINGMASTER, D. De Viribus Quantitatis by Luca Pacioli: The First Recreational Mathematics Book. In DEMAINÉ, E. D. et al (Eds.): **A lifetime of puzzles: a collection of puzzles in honor of Martin Gardner's 90th birthday**, p. 77-122, Editora A. K. Peters, 2008.

SPADA, A. B. D. **A construção de jogos de regras na formação dos professores de matemática**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Brasília/Brasília, 2009.

SUMPTER, L. Recreational Mathematics – Only For Fun? **Journal of Humanistic Mathematics**. v. 5, n. 1, p. 121-138, 2015. Doi: 10.5642/jhummath.201501.07.

Ficha de Tarefa dos Alunos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

Professora Pesquisadora: Maria da Conceição Alves Bezerra

Nomes dos participantes:

Curso: _____ Data: _____

Questão-problema 1 – Antes dessa tarefa, você já ouviu a expressão *Matemática Recreativa*?

Se sim, em que contexto?

Questão-problema 2 – Após a leitura do texto, como você definiria Matemática Recreativa?

Ação B – As Principais Tarefas em Matemática Recreativa

Objetivos: Discutir e refletir sobre as principais tarefas em MR.

Conteúdos: As principais tarefas em MR, a saber: quebra-cabeças matemáticos, jogos matemáticos e Problemas Recreativos.

Desenvolvimento: - Rever e terminar o diálogo com a turma do encontro anterior sobre a MR; - mais uma vez, os participantes devem ser divididos em duplas ou trios; - sugerimos que o professor faça uma explanação com a projeção de slides do Texto 3, ou uma apresentação oral, explorando-se questões que fomentem o diálogo e a participação dos estudantes sobre as principais tarefas em MR; - sugerimos que os estudantes utilizem os seus celulares com acesso à internet (artefatos) para pesquisarem termos desconhecidos, por exemplo, Cubo de Rubik, os anéis chineses e a Torre de Hanói, dentre outras; - solicite um debate geral com a turma com discussões e reflexões, bem como, a apresentação para a classe da opinião dos participantes sobre as principais tarefas em MR; - após esse momento, proponha a seguinte pergunta: *você já trabalhou com tarefas que enfatizam o uso de jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos, além de tarefas lúdicas? Você considera essas tarefas apresentadas na literatura vigente como Matemática Recreativa? Se sim, em que sentido?* – em seguida, o professor deve ouvir os posicionamentos do público-alvo, essa discussão pode ser ampliada com a participação do professor por meio da atividade (Labor conjunto) ombro a ombro estabelecida entre alunos-alunos e professor-alunos; - apresentamos a seguir, o Texto 3.

Texto 3 – As Principais Tarefas em Matemática Recreativa

A Matemática Recreativa envolve um conjunto de tarefas: jogos, enigmas, problemas históricos, Problemas Recreativos, quebra-cabeças matemáticos, curiosidades topológicas, adivinhações, desafios, charadas, anedotas, magia, arte, origami, cartas de jogar, além de outras tarefas de caráter lúdico e pedagógico. Ou seja, a MR está na fronteira entre esses quatro importantes aspectos: o científico-popular, o divertido (entretenimento), o pedagógico e o histórico.

Segundo Bártlová (2016), a História da Matemática está repleta de exemplos de quebra-cabeças matemáticos, jogos matemáticos e Problemas Recreativos, sendo que a maioria dessas propostas foram basicamente destinadas à diversão. Nesse sentido, os jogos, quebra-cabeças e Problemas Recreativos são tarefas tão antigas quanto às civilizações.

Certos jogos existem há milhares de anos e, hoje em dia, aprendemos sobre jogos antigos, principalmente, quando eles estão relacionados com a MR, por exemplo, a Mancala que usa uma placa que lembra um ábaco, um velho dispositivo de cálculo.

As tarefas mais frequentes relacionadas à MR podem ser divididas em três campos independentes: jogos matemáticos, quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos. Vejamos mais detalhadamente a seguir sobre os aspectos dessas tarefas com Matemática Recreativa.

Jogos Matemáticos

Costa (2014, p. 5) afirma que “[...] os jogos matemáticos aliam: raciocínio, estratégia e reflexão com desafio e competição, de uma forma lúdica”. De forma que, a “[...] a sua prática contribui para o desenvolvimento da capacidade de formalização de estratégias, memorização e para o desenvolvimento pessoal e social” (COSTA, 2014, p. 5).

Na visão de Fanti e Suleiman (2012, p. 321), o jogo alia “[...] o desenvolvimento cognitivo a uma dimensão lúdica e relacional”. Nesse sentido, o jogo traz o prazer de brincar, permitindo a leitura e a compreensão de regras, oportunizando a organização de ideias, as

estratégias e a interação dos alunos, de forma que, o uso de jogos nas aulas de Matemática, pode favorecer o desenvolvimento dos estudantes.

Para Bártlová (2016), um jogo matemático é um jogo, cujas regras, estratégias e resultados são definidos por parâmetros matemáticos claros. Além disso, os jogos matemáticos não precisam ser conceitualmente intrincados para envolver fundamentos computacionais mais profundos. Um exemplo disso é o jogo Mancala, pois, mesmo que suas regras sejam relativamente básicas, o jogo pode ser rigorosamente analisado por meio da teoria combinatória dos jogos.

Como nos indica Bártlová (2016), os jogos matemáticos diferem nitidamente dos enigmas matemáticos, pois os enigmas exigem perícia matemática específica para completar, ao passo que, os jogos matemáticos não exigem conhecimento profundo da Matemática para jogar.

Quebra-cabeças matemáticos

Existe um grande número de quebra-cabeças matemáticos que podem, de alguma forma, estar ligados à Matemática Recreativa. Como indica Bártlová (2016), alguns quebra-cabeças matemáticos requerem apenas uma certa dose de destreza, enquanto, em alguns deles, existe a necessidade de engenhosidade e pensamento lógico. Há ainda aqueles que exigem a aplicação sistemática de ideias ou padrões matemáticos como o Cubo de Rubik, os anéis chineses e a Torre de Hanói. Dessa forma, os problemas, os quebra-cabeças, os enigmas matemáticos e jogos formam um grande ramo de atividades intelectuais.

Costa (2014) destaca também alguns puzzles que podem ser trabalhados na sala de aula: o puzzle 14 – 15; puzzle numérico (Sudoku); puzzle geométrico (Tangram); além de outras tarefas matemáticas que, segundo o autor, tem caráter recreativo e potencialidades pedagógicas, por exemplo, tarefas com números, com o Geogebra e o jogo de isometrias.

Na perspectiva de Bártlová (2016), os jogos e quebra-cabeças matemáticos satisfazem a necessidade de diversão, alegria e prazer, além do desejo de alcançar domínio sobre assuntos desafiadores, ou simplesmente, testar nossas capacidades intelectuais.

Os quebra-cabeças matemáticos podem ser resolvidos tanto por crianças, quanto por adultos. É fundamental que as diversões matemáticas também ofereçam um amplo campo de jogo, tanto para o matemático amador, quanto para o matemático profissional.

De acordo com nossa experiência em sala de aula na Educação Básica e no Ensino Superior, muitos alunos gostam de trabalhar com jogos e quebra-cabeças matemáticos, sendo assim, serem facilmente motivados a adotar estratégias de aprendizagem que melhorem suas habilidades de resolução de jogos e quebra-cabeças.

Os quebra-cabeças e jogos fornecem motivação intrínseca para resolvê-los, porque, como muitos problemas matemáticos têm uma forma semelhante, os alunos que gostam de resolver quebra-cabeças, também podem desenvolver atitudes positivas em relação a outras formas de aprender matemática em contextos que não envolvam quebra-cabeças e jogos.

Problemas Recreativos

Os quebra-cabeças matemáticos e Problemas Recreativos ou jogos formam um grande ramo de atividade intelectual que reflete um espírito jovem, indiferente e indagador. Lidando com um quebra-cabeça, resolvendo um problema ou jogando um jogo, cada vez que a paciência e a persistência são necessárias, é uma forma de estimular a aprendizagem de matemática onde essas qualidades também são necessárias.

No que diz respeito aos Problemas Recreativos, Bártlová (2016) afirma que eles são frequentemente a base de algumas matemáticas sérias. Para a autora, “[...] seu grande benefício é que eles usam uma mistura de pensamento abstrato e do mundo real para motivar várias ideias matemáticas” (2016, p. 18).

A Matemática Recreativa fornece alguns problemas de natureza recreativa, e quase todos os problemas podem ser estendidos ou corrigidos, de forma que, a MR também é um tesouro de problemas para investigações dos estudantes. Nesse sentido, a MR pode ser uma abordagem metodológica para o trabalho com a Matemática na sala de aula dos diferentes níveis de ensino.

Diante do exposto, as principais tarefas de Matemática Recreativa podem ser usadas em sala de aula para introduzir um conceito ou consolidá-lo, de modo a praticar uma técnica ou

para desenvolver estratégias de resolução de problemas. A grande aposta pedagógica da Matemática Recreativa é que as tarefas relacionadas à Matemática Recreativa atraem a curiosidade de não matemáticos e nos inspirem para o seu estudo. Dessa forma, o valor pedagógico da Matemática Recreativa reside na sua eficácia em desenvolver a mente e seus potenciais intelectuais, sensíveis, afetivos, criativos e de concentração.

REFERÊNCIAS

BÁRTLOVÁ, T. **History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics**. Doctoral thesis. Charles University in Prague. Faculty of Mathematics and Physics – Department of Mathematical Analysis. Prague, 2016.

COSTA, O. **A matemática recreativa no ensino básico**. Dissertação (Mestrado em Ciências – Formação Continuada de Professores), Área de especialização em Matemática, Universidade do Minho, 2014.

FANTI, E. L. C; SULEIMAN, A. R. Jogos Matix e Senha: motivando conteúdos da 2ª série do Ensino Médio. In: Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, XXXIV, 2012, São Paulo. **Anais...**p. 321-327.

Tarefa 3: O Problema dos 35 Camelos

Objetivos: Familiarizar os estudantes do Curso de Licenciatura em Matemática com a leitura de textos de enunciados de Matemática Recreativa, bem como discutir alternativas para o ensino e a aprendizagem de Matemática, por meio do uso de livros, numa narrativa diferenciada do contexto de um livro didático. Esse Problema Recreativo visa também favorecer a tomada de decisão, bem como, serem exploradas as habilidades de cálculo mental e raciocínio lógico, portanto, familiarizar os licenciandos de Matemática com Problemas Recreativos.

Conteúdos: - Números Racionais, fração, divisão, proporção e porcentagem.

Desenvolvimento: - Rever e terminar o diálogo com a turma da Tarefa 2; - o professor fará inicialmente a apresentação do objetivo da tarefa a ser realizada; - os participantes devem divididos em duplas ou trios; - leitura compartilhada do Problema dos 35 Camelos, extraído da obra O Homem que Calculava de Malba Tahan (2017); - solicitação de identificação e reconhecimento dos conceitos e propriedades matemáticas contidas no texto do problema; - Debate e discussão em grupo sobre os conteúdos identificados do texto do problema; - Socialização e apresentação das soluções do problema.

Material Necessário: Para a realização desta tarefa faz-se necessário uma cópia do problema, uma ficha da tarefa dos alunos, papel, lápis, calculadora e/ou celular.

Ação A – Leitura e Solução da Primeira parte do Problema

Objetivos: Exercitar a leitura, interpretação e a resolução de um Problema Recreativo.

Desenvolvimento: - O professor distribuirá uma cópia da primeira parte do problema para cada grupo; - fazer uma leitura compartilhada em grupos seguindo o Labor conjunto – realizar coletivamente a tarefa dada, isto é, a compreensão do texto; - discussão com os grupos sobre a

compreensão do problema; - após a leitura, os participantes devem registrar em seus grupos, suas opiniões na ficha de tarefa dos alunos, durante esse processo, é essencial a interação do professor com cada pequeno grupo promovendo perguntas e instigando formas de agir, pensar e se posicionar – uma forma de trabalhar por meio do Labor conjunto e prezando pela Ética Comunitária ; - debater e refletir em pequenos grupos estratégias iniciais e como solucionaram as questões; - debate geral com os grupos – socialização e apresentação das soluções do problema; - apresentamos a seguir, a primeira parte do Problema⁷⁴ dos 35 Camelos.

⁷⁴ Utilizamos o texto original da obra O Homem que Calculava (TAHAN, 2017, p. 21-23).

Primeira parte do Problema dos 35 Camelos

Poucas horas havia que viajavamos sem interrupção, quando nos ocorreu uma aventura digna de registro, na qual meu companheiro Beremiz, com grande talento, pôs em prática as suas habilidades de exímio algebrista.

Encontramos, perto de um antigo caravançará meio abandonado, três homens que discutiam acaloradamente ao pé de um lote de camelos.

Por entre pragas e impropérios gritavam, furiosos:

– Não pode ser!

– Isto é um roubo!

– Não aceito!

O inteligente Beremiz procurou informar-se do que se tratava.

– Somos irmãos – esclareceu o mais velho – e recebemos, como herança, esses 35 camelos.

Segundo a vontade expressa de meu pai, devo receber a metade, o meu irmão Hamed Namir uma terça parte e ao Harim, o mais moço, deve tocar apenas a nona parte. Não sabemos, porém, como dividir dessa forma 35 camelos e a cada partilha proposta segue-se a recusa dos outros dois, pois a metade de 35 é 17 e meio. Como fazer a partilha se a terça e a nona parte de 35 também não são exatas?

Glossário

Caravançará – Refúgio construído pelo governo ou por pessoas piedosas à beira do caminho, para servir de abrigo aos peregrinos. Espécie de rancho de grandes dimensões em que se acolhiam as caravanas.

Jamal – Uma das muitas denominações que os árabes dão aos camelos.

Bagdali – Indivíduo natural de Bagdá.

Bagdá – Capital do Iraque, situada à margem do Rio Tigre. Foi a capital dos califas abássidas.

Ficha de Tarefas dos Alunos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

Professora -Pesquisadora: Maria da Conceição Alves Bezerra

Nomes dos participantes:

Curso: _____ Data: _____

Questão-problema 1 – Apresente uma solução para o problema utilizando a estratégia que desejar.

Questão-problema 2 – Que conteúdos matemáticos você utilizou em sua solução?

Ação B – Leitura e Análise da Solução Apresentada por Beremiz
--

Objetivos: Exercitar a leitura e análise da solução apresentada por Beremiz.

Desenvolvimento: - Rever e terminar o diálogo com a turma do encontro anterior sobre a primeira parte do problema; - o professor distribuirá uma cópia da segunda parte do problema para cada grupo; - fazer uma leitura compartilhada da solução apresentada por Beremiz e análise da solução em cada grupo, que permitam uma interação ética entre alunos, e entre professor e alunos – Labor conjunto; - debate e discussão em grupo sobre os conteúdos identificados do texto do problema; - os participantes devem registrar em seus grupos, suas opiniões na ficha de tarefa dos alunos; - debate geral com a turma com discussões e reflexões e a apresentação para a classe de sua opinião sobre a solução de Beremiz; - reflexão e discussão sobre os aspectos pedagógicos do Problema Recreativo; - apresentamos a seguir, a segunda parte do Problema dos 35 Camelos.

Segunda parte do Problema dos 35 Camelos

– É muito simples – atalhou o Homem que Calculava. – Encarrego-me de fazer, com justiça, essa divisão, se me permitirem que eu junte aos 35 camelos da herança este belo animal que, em boa hora, aqui nos trouxe.

Neste ponto, procurei intervir na questão:

– Não posso consentir em semelhante loucura! Como poderíamos concluir a viagem, se ficássemos sem o camelo?

– Não te preocupes com o resultado, ó Bagdali! – replicou-me em voz baixa Beremiz. – Sei muito bem o que estou fazendo. Cede-me o teu camelo e verás no fim a que conclusão quero chegar.

Tal foi o tom de segurança com que ele falou, que não tive dúvida em entregar-lhe o meu belo jamal¹, que, imediatamente, foi reunido aos 35 ali presentes, para serem repartidos pelos três herdeiros.

– Vou, meus amigos – disse ele, dirigindo-se aos três irmãos –, fazer a divisão justa e exata dos camelos que são agora, como veem, em número de 36.

E, voltando-se para o mais velho dos irmãos, assim falou:

– Deverias receber, meu amigo, a metade de 35, isto é, 17 e meio. Receberás a metade de 36 e, portanto, 18. Nada tens a reclamar, pois é claro que saíste lucrando com esta divisão!

E, dirigindo-se ao segundo herdeiro, continuou:

– E tu, Hamed Namir, deverias receber um terço de 35, isto é, 11 e pouco. Vais receber um terço de 36, isto é, 12. Não poderás protestar, pois tu também saíste com visível lucro na transação.

E disse, por fim, ao mais novo:

– E tu, jovem Harim Namir, segundo a vontade de teu pai, deverias receber a nona parte de 35, isto é, 3 e tanto. Vais receber uma nona parte de 36, isto é, 4. Teu lucro foi igualmente notável. Só tens a agradecer-me pelo resultado”

E concluiu com a maior segurança e serenidade:

– Pela vantajosa divisão feita entre os irmãos Namir – partilha em que todos três saíram lucrando — couberam 18 camelos ao primeiro, 12 ao segundo e 4 ao terceiro, o que dá um resultado (18+12+4) de 34 camelos. Dos 36 camelos, sobraram, portanto, dois. Um pertence, como sabem, ao Bagdali, meu amigo e companheiro, outro toca por direito a mim, por ter resolvido, a contento de todos, o complicado problema da herança!

– Sois inteligente, ó Estrangeiro! – exclamou o mais velho dos irmãos. – Aceitamos a vossa partilha na certeza de que foi feita com justiça e equidade!

E o astucioso Beremiz – o Homem que Calculava – tomou logo posse de um dos mais belos “jamales” do grupo e disse-me, entregando-me pela rédea o animal que me pertencia:

– Poderás agora, meu amigo, continuar a viagem no teu camelo manso e seguro! Tenho outro, especialmente para mim!

E continuamos nossa a jornada para Bagdá.

Ficha de Tarefa dos Alunos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

Professora-Pesquisadora: Maria da Conceição Alves Bezerra

Nomes dos participantes:

Curso: _____ Data: _____

Questão-problema 1 – Explique que artifícios Beremiz utilizou para repartir a herança. Foi justa ou não? Foi correta matematicamente?

Questão-problema 2 – Como foi possível cada irmão receber mais do que foi destinado pela herança, e ainda sobrar camelos?

Questão-problema 3 – O problema dos 35 camelos é recreativo? Se sim, que argumentos você utiliza para justificar sua resposta?

Questão-problema 4 – Em que séries pode ser aplicado? Qual seria as vantagens pedagógicas? Qual aprendizado facilita? O problema pode ser modificado ou adaptado?

Questão-problema 5 – Que contribuições esta tarefa poderia trazer para os alunos? E para o professor de Matemática?

Tarefa 4: Jogo Matix e Senha

Objetivo: Explorar o jogo e seu manuseio e discutir sobre a importância das estratégias para o Jogo Matix e Senha⁷⁵ e alternativas para o ensino de Matemática por meio do uso de jogos – interagir com os grupos e comunicar-se para o Labor conjunto por meio de diálogo.

Regra do Jogo: Distribuir aleatoriamente as peças sobre o tabuleiro, viradas para cima. Depois deve-se decidir quem irá começar o jogo⁷⁶. O iniciante (Jogador 1) deve escolher entre linha ou coluna (sentido horizontal ou vertical). Em seguida ele tira o coringa e começa a jogar. Se, por exemplo, o Jogador 1 começar o jogo sendo *coluna*, ele deverá tirar a sua primeira peça da *coluna* onde estava o coringa. O outro jogador (que será *linha*) deve tirar sua primeira peça da *linha* onde estava a peça retirada pelo primeiro jogador. Termina o jogo quando não houver mais peças a serem retiradas na *coluna* ou *linha*. Ganha o jogo aquele que acumular mais pontos.

Material Necessário: Para a realização desta tarefa faz-se necessário um tabuleiro quadrado 6 x 6 (pode ser também um tabuleiro quadrado com 64 casas), 35 peças contendo números inteiros relativos, 1 peça contendo coringa (smile), uma ficha da tarefa dos alunos, papel e lápis.

⁷⁵ O jogo Matix foi criado na Alemanha e possui duas versões: uma com 36 casas e outra com 64 casas. Neste trabalho utilizamos o jogo formado 36 casas.

⁷⁶ O jogo foi adaptado do trabalho de Fanti e Suleiman (2012).

O Quadro 1, lista as quantidades das fichas do Jogo Matix e Senha.

Quadro 1. Fichas do Jogo Matix e Senha.

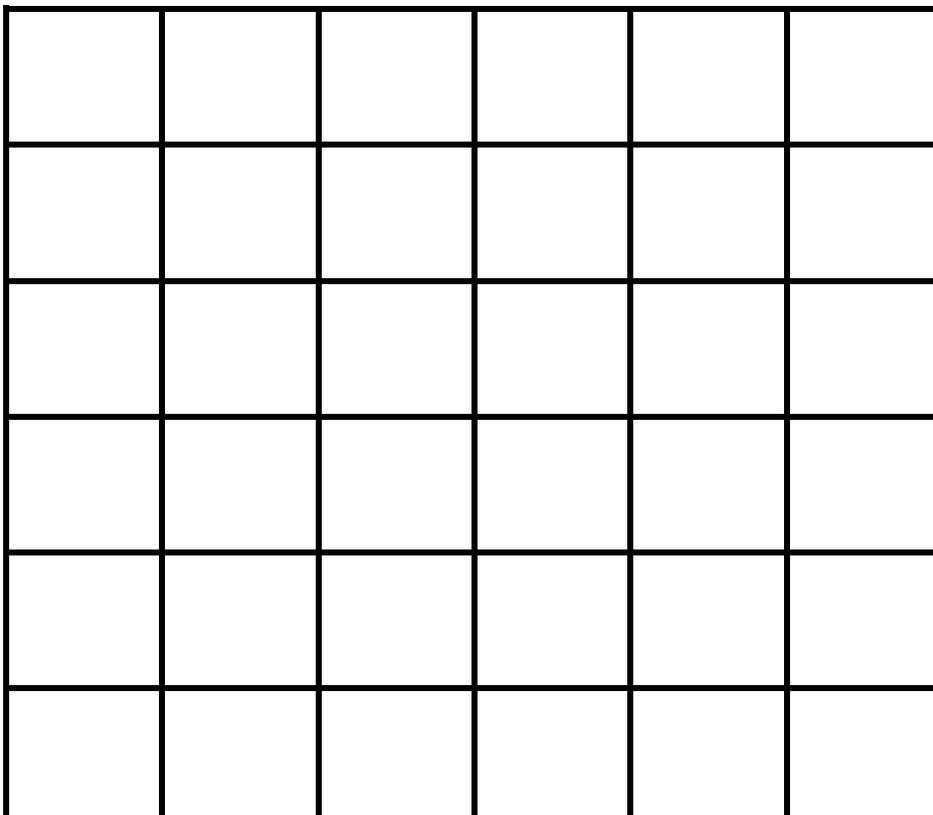
Fichas	Quantidade
0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6	Repetem-se 3 vezes
7, 8, 10	Repetem-se por duas vezes
15, -1, -2, -3, -4, -5	Uma única peça para cada
- 10	Repete-se em duas peças
	1 peça

Fonte. Produzido pela autora (2019).

Observação: a escolha dos números inteiros, fica a critério do professor.

Na Figura 1, apresentamos o modelo do tabuleiro do jogo Matix e Senha.

Figura 1: Tabuleiro do Jogo Matix e Senha.



Fonte. Produzido pela autora (2019).

Observação: É importante que os licenciandos de Matemática construam o próprio material e não o recebam pronto, pois, a construção do jogo favorece o desenvolvimento da coordenação motora, as habilidades artísticas e cognitivas de maneira recreativa, lúdica, cooperativa e criativa. É um jogo de estratégia, portanto, não depende apenas de sorte, mas sim, das decisões de cada jogador, estimulando o raciocínio nas jogadas.

Ação A – Leitura e Interpretação da Regra do Jogo

Objetivo: Explorar o Jogo Matix e Senha e seu manuseio.

Conteúdos: Adição e subtração de Números Inteiros; conceito de matriz, linha, coluna, diagonal da matriz e posição de elementos de matriz (posição das peças em linha i e colunas j).

Desenvolvimento: - Rever e terminar o diálogo com a turma sobre o encontro anterior (Tarefa 3); - os estudantes devem ser divididos em duplas ou trios; - o professor irá fazer uma exposição oral do jogo; - distribuir o texto com as informações do tabuleiro, as peças e a regra do jogo entre os grupos; - fazer uma leitura compartilhada da regra do jogo, por meio do Labor conjunto; - as fichas e o tabuleiro do jogo, podem ser construídas com o material emborrachado (E.V.A) ou em cartolina guache; - após a confecção do jogo, os participantes devem jogar em grupos, interagir, discutir ideias, sugerir jogadas e defender os pontos de vista; - registrar as pontuações em uma tabela; - debate e discussão em grupo sobre os conteúdos identificados do jogo; - debate geral com a turma com discussões e reflexões sobre as estratégias para o jogo e suas potencialidades pedagógicas.

Ação B – Apreciação do Jogo

Objetivo: Discutir sobre a importância das estratégias para o Jogo Matix e Senha.

Desenvolvimento: - Rever e terminar o diálogo com a turma do encontro anterior; - os participantes devem registrar em seus grupos, suas opiniões na ficha de tarefa dos alunos; - em seguida, a apresentação oral das interpretações produzidas na ficha de tarefa dos alunos; - o professor deve ouvir os posicionamentos do público-alvo; - debate geral com a turma com discussões e reflexões sobre as possibilidades, as vantagens, desvantagens do referido jogo.

Ficha de Tarefa dos Alunos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

Professora -Pesquisadora: Maria da Conceição Alves Bezerra

Nomes dos participantes:

Curso: _____ Data: _____

Questão-problema 1 – Quais as estratégias para ganhar o jogo?

Questão-problema 2 – Que dificuldades você encontrou durante esse jogo?

Questão-problema 3 – Qual seria as vantagens pedagógicas deste jogo? E as desvantagens?
Qual aprendizado facilita? Que conteúdos matemáticos podem ser explorados?

Questão-problema 4 – Que contribuições este jogo pode trazer para os alunos? E para o professor de Matemática?

Tarefa 5: Lista de Problemas Recreativos, Quebra-cabeças Matemáticos e Jogos Matemáticos

Objetivo: Apresentar uma lista ou um acervo (Quadro) contendo alguns Problemas Recreativos, quebra-cabeças e jogos matemáticos e discutir sobre as possibilidades, as vantagens e desvantagens de tarefas relacionadas à MR – vivenciar uma atividade com base no Labor conjunto e na Ética Comunitária.

Material Necessário: Para a realização desta tarefa faz-se necessário uma cópia da lista contendo os Problemas Recreativos, jogos e quebra-cabeças matemáticos, uma ficha da tarefa dos alunos, papel e lápis, notebook e/ou celular com a acesso à internet.

Ação A – Lista de Problemas Recreativos, Quebra-cabeças matemáticos e Jogos matemáticos

Objetivos: Apresentar e discutir sobre a lista de Problemas Recreativos, jogos matemáticos e quebra-cabeças matemáticos.

Desenvolvimento: - Rever e terminar o diálogo com a turma sobre o encontro anterior (Tarefa 4), - os estudantes devem ser divididos em duplas ou trios para a realização da tarefa; - o professor fará inicialmente a apresentação e o objetivo da Tarefa 5; - distribuir uma cópia da lista para cada grupo; - após esse momento, cada grupo examina o enunciado dos problemas, jogos e quebra-cabeças e escolhe o que mais lhe agrada; - resolver em seu grupo com ou sem ajuda da bibliografia indicada; - fazer a apreciação do problema, jogo ou quebra-cabeça escolhido, conforme foi realizado nas tarefas dos encontros anteriores; - discussão entre os pequenos grupos sobre as percepções dos grupos em relação a realização da tarefa e destacar as possibilidades, as vantagens e desvantagens das tarefas escolhidas; - apresentação dos grupos

e debate geral com a turma; - Apresentamos a seguir, o quadro com os Problemas Recreativos, jogos e quebra-cabeças matemáticos.

Quadro 1. Lista de Problemas Recreativos, quebra-cabeças matemáticos e jogos matemáticos.

Problemas Recreativos			
Número	Por qual nome é conhecido	Enunciado	Referências
1.	Problema do tipo “canção de ninar”	Há 7 casas, em cada casa temos 7 gatos, cada gato mata 7 ratos, cada rato comeu 7 grãos de cevada, cada grão teria produzido 7 hekats de cevada. Qual a soma das coisas enumeradas?	Para uma melhor compreensão acerca do problema 79 do Papiro de Rhind (1650 a.C), consultar a Dissertação de Martins (2015), o artigo de Galvão (2008) e a Tese de Gonçalves (2011).
2.	O Problema de Josefo	Josefo e seus companheiros (40 soldados) foram presos em uma caverna, cuja saída foi bloqueada pelos romanos. Eles preferiram suicidar-se a serem capturados, e decidiram que iriam formar um círculo e começar a matar-se pulando de três em três. Existe a possibilidade de alguém ocupar uma posição em que seja possível escapar da morte?	O problema, as versões da lenda e as soluções históricas encontram-se na Tese de Bártlová (2016) e no artigo de Ezquerria (2012).
3.	O Problema de travessia – o lobo, a cabra e a couve	Um homem se encontra na margem de um rio com um lobo, uma cabra e uma couve. Para atravessar o rio existe apenas um barco pequeno, que cabe apenas o homem e um de seus pertences. Como pode atravessar em segurança o homem junto com seus pertences?	O problema, as variações dos enunciados e as soluções encontram-se na Tese de Menezes, (2004, p. 15-23) e no artigo de Lopes (2017, p. 73-90).
4.	O Problema dos Coelho	Quantos pares de coelhos serão produzidos ao fim de um ano, começando com um só par, se em cada mês, cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?	O problema aparece na obra Liber Abaci proposto por Leonardo de Pisa (Fibonacci) e as soluções encontram-se na Tese de Gonçalves (2011, p. 430-437).
5.	O Problema dos 35 Camelos	Um problema de herança de 35 camelos deve ser repartido, pelos três herdeiros, da seguinte forma: o mais velho deveria receber a metade da herança; o segundo deveria receber um terço da herança; e o terceiro um nono da herança. Como fazer a partilha?	O problema foi extraído da obra O Homem que Calculava de Malba Tahan (2017, p. 21-22) – edição comemorativa de 120 anos do nascimento do autor. Mais informações ver a Tarefa 3.
Quebra-cabeças Matemáticos			
Número	Por qual nome é conhecido	Descrição	Referências

1.	Torre de Hanói	O quebra-cabeça Torre de Hanói foi inventado pelo matemático francês Édouard Lucas em 1883. Constitui-se de uma torre com alguns discos, inicialmente empilhados por tamanhos decrescentes em três pinos verticais colocados em uma placa. O objetivo é transferir a torre inteira para um dos outros pinos, movendo apenas um disco de cada vez e nunca colocando um disco maior em cima de um menor.	Uma discussão detalhada do quebra-cabeça pode ser encontrada em Bártlová (2016, p. 49-51) e nos estudos de Gonçalves (2011).
2.	Tangram	O Tangram é um quebra-cabeça geométrico formado por 7 peças – um quadrado, cinco triângulos e um paralelogramo.	Sobre a história e as regras do Tangram, bem como, as tarefas com o Tangram, ver o trabalho desenvolvido por Costa (2014, p. 46-53).
3.	Quadrado Mágico	Um quadrado mágico é uma tabela quadrada de lado n , onde a soma dos números das linhas, colunas e das diagonais é constante, sendo que nenhum destes números se repete.	Sobre a origem, construção e classificação dos Quadrados Mágicos, ver os estudos desenvolvidos por Costa (2014, p. 33-42) e Menezes (2004, p. 97-114).
4.	Quebra-cabeça 14-15	O objetivo do quebra-cabeça 14-15, de blocos deslizantes, é ordenar a numeração dos quadrados de 1 a 15, da esquerda para a direita e de cima para baixo, e assim, obter a disposição original dos contadores depois de terem sido aleatoriamente deslocados.	Sobre a história e as regras do quebra-cabeça 14-15, consultar o trabalho de Costa (2014, p. 23-26).
5.	Sudoku	O Sudoku é um quebra-cabeça baseado na colocação lógica de números, cujo desafio é completar um quadrado com 9 quadrantes e 81 espaços no total com números de 1 a 9, porém o mesmo valor não pode ser repetido nos quadrantes, nas linhas, nem nas colunas do quadrado (COSTA, 2014).	Sobre a história, as regras e classificação do Sudoku, e as estratégias para resolver o quebra-cabeça, consultar o trabalho de Costa (2014, p. 26-32).
Jogos Matemáticos			
Número	Por qual nome é conhecido	Descrição	Referências
1.	O jogo de xadrez	O jogo de xadrez é um jogo geralmente disputado entre duas pessoas que movem peças (16 brancas e 16 pretas) alternadamente	Sobre a história, as regras do jogo de xadrez, ver o estudo desenvolvido por Góes (2002, p. 22-32). Recomendamos também o

		sobre um tabuleiro quadrado dividido em 64 casas (32 brancas e 32 pretas) denominado tabuleiro de xadrez (GÓES, 2002).	Centro de Excelência de Xadrez (http://www.cex.org.br .)
2.	O jogo do Ouri	O jogo Ouri é um jogo pertencente à família dos jogos de Mancala, é um dos jogos mais antigos do mundo com mais de 7000 anos de existência (COSTA, 2014).	Sobre a história do jogo, as regras e estratégias, consultar o trabalho de Costa (2014, p. 14-22).
3.	O jogo Pontos e Linhas	O jogo Pontos e Linhas “é um jogo clássico de grafos que se joga com papel e lápis e cuja estratégia assenta na topologia do plano” (COSTA, 2014, p. 23).	Sobre a história do jogo, as regras e estratégias, consultar o trabalho de Costa (2014, p. 11-14).
4.	O jogo Semáforo	O jogo semáforo joga-se, geralmente, em um tabuleiro formado por um retângulo com 4 x 3 quadrados, aos quais chamamos casas, mas o tamanho deste pode variar (COSTA, 2014).	Sobre a história do jogo, as regras e estratégias, consultar o trabalho de Costa (2014, p. 7-11).
5.	Jogo Matix e Senha	O jogo Matix foi criado na Alemanha e possui duas versões: uma com 36 casas e outra com 64 casas. É um jogo de tabuleiro.	Mais informações sobre a regra do jogo, o tabuleiro, as fichas e os conteúdos explorados, consultar o trabalho de Fanti e Suleiman (2012). Outras informações ver a Tarefa 4.

Fonte. Produzido pela autora (2019).

REFERÊNCIAS

BÁRTLOVÁ, T. **History and current state of recreational mathematics and its relation to serious mathematics.** Doctoral thesis. Charles University in Prague. Faculty of Mathematics and Physics – Department of Mathematical Analysis. Prague, 2016.

COSTA, O. **A matemática recreativa no ensino básico.** Dissertação (Mestrado em Ciências – Formação Continuada de Professores) - Área de especialização em Matemática, Universidade do Minho, 2014.

EZQUERRA, P. A. Entre la matemática y la magia: la leyenda de Josefo y lamezcla australiana. **Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias.** Universidad de Cádiz. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14868. 9 (3), 410-421, 2012.

GALVÃO, M. E. E. L. **História da Matemática: dos números à geometria.** Osasco: Edifício, 2008.

GÓES, D. C. **O jogo de xadrez e a formação do professor de Matemática.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção, UFSC, Florianópolis, 2002.

GONÇALVES, I. M. F. L. **Os Problemas da Matemática: o seu Papel na Matemática e nas aulas de Matemática.** Doutorado em Matemática – Ensino da Matemática, Universidade da Madeira, Portugal, 2011.

GONÇALVES, A. O; GONÇALVES, C. C. S. A. **A Torre de Hanói: um trabalho com investigações matemáticas, resolução de problemas e a calculadora.** X Congresso Nacional de Educação – EDUCERE, Curitiba, 2011.

LOPES, F. J. A. Propositiones Ad Acuendos Juvenes, de Alcuíno de York – Tradução. Revista Brasileira de História da Matemática. RBHM, Vol. 17, nº 33, p. 73-90, 2017.

MARTINS, J. **O livro que divulgou o papiro Rhind no Brasil.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015.

MENEZES, J. E. **Travessias Difíceis, Divisões Divertidas e Quadrados Mágicos: evolução Histórica de três Recreações Matemáticas.** Tese de Doutorado no Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2004.

SEGANTINI, C. **Problemas Recreativos na Obra o Homem que Calculava, de Malba Tahan, e a Resolução de Problemas.** Dissertação de mestrado no Programa de Pós-Graduação em Ensino na Educação Básica. - Universidade Federal do Espírito Santo, Centro Universitário Norte do Espírito Santo, 2015.

Ação B – Avaliação das Tarefas Matemáticas Recreativas

Objetivos: Avaliar as Tarefas Matemáticas Recreativas desenvolvidas no decorrer da intervenção pedagógica.

Desenvolvimento: - Terminar a apresentação dos grupos da Tarefa 5; - convite para os alunos pensarem em problemas, jogos e quebra-cabeças para a sala de aula onde eles são ou serão professores; - Discussão de todos os participantes sobre as possibilidades, as vantagens e desvantagens de introduzir a Matemática Recreativa em sala de aula de Matemática;- em seguida, cada grupo deve registrar, suas opiniões na Ficha de Avaliação; - debate geral, com a turma com a apresentação de cada grupo com suas respostas; - apresentamos a seguir, a Ficha de avaliação das Tarefas Matemáticas Recreativas.

Ficha de Avaliação dos Alunos

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE

Centro de Ciências Exatas e da Terra

Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática

Professora -Pesquisadora: Maria da Conceição Alves Bezerra

Nomes dos participantes:

Curso: _____ Data: _____

- 1 – Qual a sua compreensão sobre a Matemática Recreativa e seu significado pedagógico?

- 2 – Você acredita que a introdução de tarefas de Matemática Recreativa no cotidiano de sala de aula seria positiva para os estudantes? Justifique.

- 3 – A introdução de tarefas de Matemática Recreativa, na sua opinião iria desperdiçar tempo que seria dedicado a uma Matemática mais usual? Justifique.

- 4 – Depois dessas tarefas, você se sente preparado para a introdução da Matemática Recreativa na sua sala de aula? Se não, o que está faltando?

- 5 – Na sua opinião, as tarefas relacionadas à Matemática Recreativa trouxeram contribuições para a sua formação como professor de Matemática?

- 6 – Quais as suas sugestões e/ou críticas ao conjunto de tarefas realizadas?

Anexos

Anexo I – Parecer do Projeto de Pesquisa – CEP**PARECER CONSUBSTANCIADO DO CEP****DADOS DO PROJETO DE PESQUISA**

Título da Pesquisa: Matemática Recreativa e suas contribuições para a formação de professores à luz da Teoria da Objetivação

Pesquisador: MARIA DA CONCEICAO ALVES BEZERRA

Área Temática:

Versão: 2

CAAE: 25685119.2.0000.5537

Instituição Proponente: Centro de Ciências Exatas e da Terra

Patrocinador Principal: Financiamento Próprio

DADOS DO PARECER

Número do Parecer: 3.765.149

Comentários e Considerações sobre a Pesquisa:

Pesquisa bem delineada, com o seu desenvolvimento contribuirá para o conhecimento científico da área.

Considerações sobre os Termos de apresentação obrigatória:

Adequados na versão em tela.

Recomendações:

Constitui obrigação ética do pesquisador enviar os relatórios da pesquisa.

Situação do Parecer:

Aprovado

Necessita Apreciação da CONEP:

Não

NATAL, 12 de Dezembro de 2019

Assinado por:
LÉLIA MARIA GUEDES QUEIROZ
(Coordenador(a))

Anexo II – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido – TCLE

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/UFRN

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO – TCLE

a) (Para Maiores de 18 anos)

Esclarecimentos

Este é um convite para você participar da pesquisa: *A MATEMÁTICA RECREATIVA E SUAS POTENCIALIDADES DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO*, que tem como pesquisadora responsável Maria da Conceição Alves Bezerra.

Esta pesquisa pretende *investigar algumas das contribuições teórico-metodológicas da Teoria da Objetivação para a proposição das várias formas de tarefas de Matemática Recreativa em sala de aula.*

O motivo que nos leva a fazer este estudo é a opção pela continuidade da realização de pesquisa na área de Educação Matemática e decorreu de demandas advindas de nossas experiências, focando a atenção, no presente projeto, na Matemática Recreativa na perspectiva da Teoria da Objetivação, e considerando dificuldades relativas à falta de Teses e Dissertações na área de Educação Matemática sobre o tema.

Nossa pesquisa se justifica pelo caráter inovador, que une Matemática Recreativa, História da Matemática e a Teoria da Objetivação, pois essa junção pode trazer contribuições para a Educação Matemática.

Caso os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Rio Grande do Norte – Campus de Natal – RN, decidam participar da pesquisa, realizaremos uma intervenção pedagógica com 05 encontros, com carga horária de aproximadamente 20 horas, com gravação de vídeos (será necessário a assinatura de um formulário específico para a gravação de vídeos).

Para a realização da intervenção pedagógica, a pesquisadora garantirá um ambiente adequado e reservado para garantir a privacidade dos participantes.

Durante a realização da pesquisa poderão ocorrer eventuais desconfortos e possíveis riscos como desconforto em algum questionamento, ao recordar algum acontecimento ou até mesmo o risco de quebra de sigilo dos dados. Esses riscos poderão ser minimizados com o feedback, caso haja algum tema proibido e, com relação ao último risco, o compromisso ético firmado nesse termo para que sua identidade seja mantida em sigilo.

Como benefícios da pesquisa apontam-se a colaboração direta com um estudo sobre o processo de produção de Tarefas Matemáticas Recreativas, alicerçada no Labor conjunto da Teoria da Objetivação, que certamente trará à formação inicial de professores de Matemática.

Em caso de algum problema que você possa ter relacionado com a pesquisa, você terá direito à assistência gratuita que será prestada pela pesquisadora doutoranda Maria da Conceição Alves Bezerra.

Durante todo o período da pesquisa você poderá tirar suas dúvidas ligando para Maria da Conceição Alves Bezerra, residente na Rua José Firmino Ferreira, 873, apartamento 301, edifício Monte Tabor, Jardim São Paulo, CEP 58053-022, João Pessoa/PB, e-mail mcabst@hotmail.com, telefone (83) [REDACTED].

Você tem o direito de se recusar a participar ou retirar seu consentimento, em qualquer fase da pesquisa, sem nenhum prejuízo para você.

Os dados que você irá nos fornecer serão confidenciais e serão divulgados apenas em congressos ou publicações científicas, sempre de forma anônima, não havendo divulgação de nenhum dado que possa lhe identificar. Esses dados serão guardados pelo pesquisador responsável por essa pesquisa em local seguro e por um período de 5 anos.

Alguns gastos pela sua participação nessa pesquisa, eles serão assumidos pelo pesquisador e reembolsado para vocês.

Se você sofrer qualquer dano decorrente desta pesquisa, sendo ele imediato ou tardio, previsto ou não, você será indenizado.

Qualquer dúvida sobre a ética dessa pesquisa você deverá ligar para o Comitê de Ética em Pesquisa – instituição que avalia a ética das pesquisas antes que elas comecem e fornece proteção aos participantes das mesmas – da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, nos telefones (84) 3215-3135 / (84) 9.9193.6266, através do e-mail cepufrn@reitoria.ufrn.br Você ainda pode ir pessoalmente à sede do CEP, de segunda a sexta, das 08:00h às 12:00h e das 14:00h às 18:00h, na Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Av. Senador Salgado Filho, s/n. Campus Central, Lagoa Nova. Natal/RN.

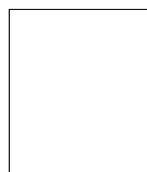
Este documento foi impresso em duas vias. Uma ficará com você e a outra com a pesquisadora responsável Maria da Conceição Alves Bezerra.

Consentimento Livre e Esclarecido

Após ter sido esclarecido sobre os objetivos, importância e o modo como os dados serão coletados nessa pesquisa, além de conhecer os riscos, desconfortos e benefícios que ela trará para mim e ter ficado ciente de todos os meus direitos, concordo em participar da pesquisa *A MATEMÁTICA RECREATIVA E SUAS POTENCIALIDADES DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO*, e autorizo a divulgação das informações por mim fornecidas em congressos e/ou publicações científicas desde que nenhum dado possa me identificar.

Natal (RN), _____

Assinatura do participante da pesquisa



Impressão
datiloscópica do
participante

Declaração do pesquisador responsável

Como pesquisador responsável pelo estudo *A MATEMÁTICA RECREATIVA E SUAS POTENCIALIDADES DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO*, declaro que assumo a inteira responsabilidade de cumprir fielmente os procedimentos metodologicamente e direitos que foram esclarecidos e assegurados ao participante desse estudo, assim como manter sigilo e confidencialidade sobre a identidade do mesmo.

Declaro ainda estar ciente que na inobservância do compromisso ora assumido estarei infringindo as normas e diretrizes propostas pela Resolução 466/12 do Conselho Nacional de Saúde – CNS, que regulamenta as pesquisas envolvendo o ser humano.

Natal (RN), _____

Assinatura da pesquisadora responsável

María da Conceição Alves Bezerra

Anexo III – Termo de Autorização para Uso de Imagens (fotos e vídeos)

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
Centro de Ciências Exatas e da Terra
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/UFRN

Termo de Autorização para Uso de Imagens (fotos e vídeos)

Eu, _____,

AUTORIZO o(a) Prof(a) Maria da Conceição Alves Bezerra, coordenador(a) da pesquisa intitulada: *A MATEMÁTICA RECREATIVA E SUAS POTENCIALIDADES DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO* a fixar, armazenar e exibir a minha imagem por meio de fotos e vídeos com o fim específico de inseri-la nas informações que serão geradas na pesquisa, aqui citada, e em outras publicações dela decorrentes, quais sejam: revistas científicas, congressos e jornais.

A presente autorização abrange, exclusivamente, o uso de minha imagem para os fins aqui estabelecidos e deverá sempre preservar o meu anonimato. Qualquer outra forma de utilização e/ou reprodução deverá ser por mim autorizada.

A pesquisadora responsável Maria da Conceição Alves Bezerra, assegurou-me que os dados serão armazenados em meio de um arquivo, sob sua responsabilidade, por 5 anos, e após esse período, serão destruídas.

Assegurou-me, também, que serei livre para interromper minha participação na pesquisa a qualquer momento e/ou solicitar a posse de minhas imagens.

Natal, _____

Assinatura do participante da pesquisa

Assinatura e carimbo do pesquisador responsável

Maria da Conceição Alves Bezerra

Anexo IV – Termo de Autorização para Gravação de Voz

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO NORTE
 Centro de Ciências Exatas e da Terra
 Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática
 Comitê de Ética em Pesquisa – CEP/UFRN

Termo de Autorização para Gravação de Voz

Eu _____,
 depois de entender os riscos e benefícios que a pesquisa *A MATEMÁTICA RECREATIVA E SUAS POTENCIALIDADES DIDÁTICO-PEDAGÓGICAS À LUZ DA TEORIA DA OBJETIVAÇÃO*, poderá trazer e, entender especialmente os métodos que serão usados para a coleta de dados, assim como, estar ciente da necessidade da gravação de minha entrevista, **AUTORIZO**, por meio deste termo, os pesquisadores Maria da Conceição Alves Bezerra a realizar a gravação de minha entrevista sem custos financeiros a nenhuma parte.

Esta **AUTORIZAÇÃO** foi concedida mediante o compromisso dos pesquisadores acima citados em garantir-me os seguintes direitos:

1. poderei ler a transcrição de minha gravação;
2. os dados coletados serão usados exclusivamente para gerar informações para a pesquisa aqui relatada e outras publicações dela decorrentes, quais sejam: revistas científicas, congressos e jornais;
3. minha identificação não será revelada em nenhuma das vias de publicação das informações geradas;
4. qualquer outra forma de utilização dessas informações somente poderá ser feita mediante minha autorização;
5. os dados coletados serão guardados por 5 anos, sob a responsabilidade do(a) pesquisador(a) coordenador(a) da pesquisa Maria da Conceição Alves Bezerra e Bernadete Morey e após esse período, serão destruídos e,
6. serei livre para interromper minha participação na pesquisa a qualquer momento e/ou solicitar a posse da gravação e transcrição de minha entrevista.

Natal, _____

Assinatura do participante da pesquisa

Assinatura e carimbo do pesquisador responsável

Maria da Conceição Alves Bezerra
