Um pouco da topologia em $\mathbb{R}^2$

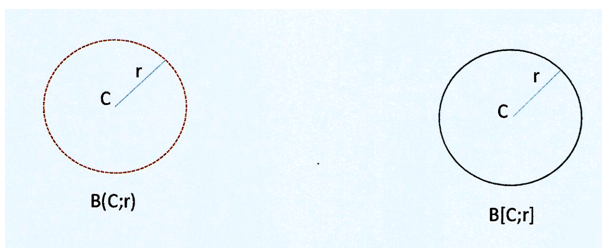
Dado dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ em $\mathbb{R}^2$, a distância entre eles é a norma do vetor $\vec{P_1P_2} = \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Definições:

(1) Considere $C = (a, b)$ e $r > 0$.

(i) A bola aberta de centro C e raio r é definida como
$B(C; r) = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|PX\| < r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - a, y - b)\| < r\}$

(ii) A bola fechada de centro C e raio r é definida como
$B[C; r] = \{X = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|PX\| \leq r\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x - a, y - b)\| \leq r\}$



(2) Seja $A \subseteq \mathbb{R}^2$, e $P \in \mathbb{R}^2$.

(i) Dizemos que P é ponto interior de A se existe $r > 0$ tal que $B(P; r) \subseteq A$.

(ii) Dizemos que P é ponto de fronteira de A se, para todo $r > 0$, existem pontos $P_1, P_2 \in B(P; r)$ tais que $P_1 \in A$ e $P_2 \notin A$.
Designamos por ∂A o conjunto de todos os pontos de fronteira de A.

(iii) Dizemos que P é ponto aderente de A se toda bola aberta com centro em P contém pontos de A, isto é: para todo $r > 0$, tem-se que $B(P; r) \cap A \neq \emptyset$. Em particular, todo ponto de A é ponto aderente de A.

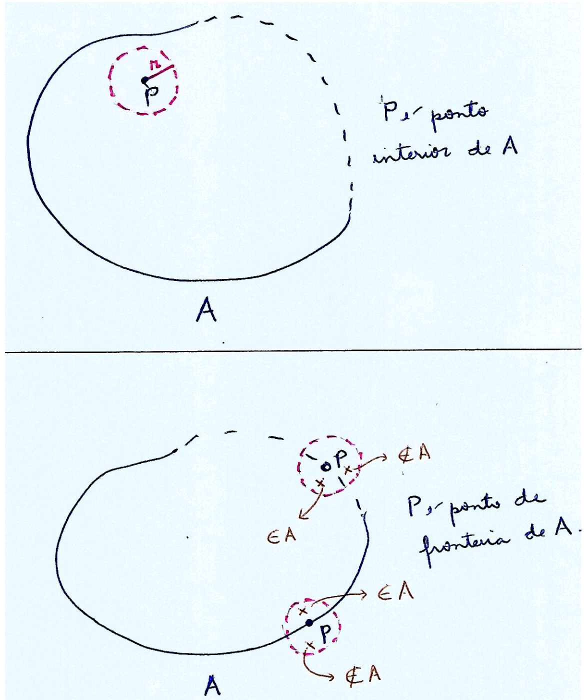
(iv) Dizemos que P é ponto de acumulação de A se toda bola aberta de centro em P contém pontos de A diferentes de P, isto é: para todo $r > 0$, existe $Q \in B(P; r)$ com $Q \neq P$.

(3) Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é dito aberto se todos os seus pontos são interiores.

(4) Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é fechado se não é aberto.

(5) Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é limitado se está contido em alguma bola (aberta ou fechada).

(6) Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ é compacto se é fechado e limitado.



Algumas propriedades importantes:

Teorema: Seja $A \subseteq \mathbb{R}^2$. São equivalentes as seguintes propriedades:

(i) A é fechado.

(ii) A contém todos os seus pontos de fronteira ($\partial A \subseteq A$).

(iii) A contém todos os seus pontos de acumulação.