MAT134 - Álgebra Linear – Lista 4

1. Uma transformação linear $T : V \to V$ é dita **idenpotente** se $T^2 = T$ onde $T^2 = T \circ T$. Seja $T : V \to V$ uma aplicação linear idenpotente.
   (a) Mostre que $V = N(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.
   (b) Escreva a matriz da transformação T em termos de uma base $B = (v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_n)$ onde $(v_1, \ldots, v_p)$ é uma base de $\mathrm{Im}(T)$ e $(v_{p+1}, \ldots, v_n)$ é uma base de $N(T)$.
   (c) Verifique que a aplicação do exercício anterior é idenpotente.
   (d) Mostre que a transformação linear
   $$F = I - T : V \to V, \quad F(v) = v - T(v)$$
   também é idenpotente.
   (e) Mostre que $N(F) = \mathrm{Im}(T)$ e $\mathrm{Im}(F) = N(T)$.

   OBS: Uma transformação linear idenpotente muitas vezes também é chamada de uma projeção.

2. Seja $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor não nulo e seja $T_v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a aplicação linear dada por
   $$T_v(w) = \frac{< v, w >}{||v||^2} v,$$
   onde $< v, w >$ denota o produto escalar de v com w.
   (a) Mostre que T_v é uma aplicação linear idenpotente.
   (b) Mostre que $N(T) = v^\perp$, onde $v^\perp$ é o plano que passa pela origem e que tem v como um vetor normal.
   (c) Conclua que $\mathbb{R}^3 = v^\perp \oplus [v]$.

3. Seja T_v a aplicação linear do exercício anterior. Seja $v = (-1, 1, 2)$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Escreva as matrizes das transformações T_v e $I - T_v$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$.

4. O produto escalar (ou produto interno) de $\mathbb{R}^n$ é a função
   $$< \cdot, \cdot >: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad < (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
   Seja $u \in \mathbb{R}^n$. Mostre que a função
   $$T_u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad T_u(v) =< u, v >$$
   é uma aplicação linear. Se $u = (x_1, \ldots, x_n)$, escreva a matriz da aplicação linear T_u com respeito as bases canônicas de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}$.

5. Sejam $e_1, \ldots, e_n$ os vetores que formam a base canônica de $\mathbb{R}^n$, ou seja
   $$e_i = (x_1, \ldots, x_n) \text{ com } x_i = 1 \text{ e } x_j = 0 \text{ para todo } j \neq i.$$
   Mostre que a função
   $$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad T(u) = (< e_1, u >, < e_2, u >, \ldots, < e_n, u >)$$
   é uma aplicação linear. Determine a sua matriz com respeito a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

6. Dado um subespaço vetorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$ definimos a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ em S como sendo a função
$$P_S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
definida pelas seguintes condições:
   - P_S é linear;
   - $P_S(u) \in S$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$;
   - $u - P_S(u) \in S^\perp$ para todo $u \in \mathbb{R}^n$,

   onde
$$S^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n :< u, v >= 0 \text{ para todo } v \in S\}.$$
   Mostre que
   (a) $P_S \circ P_S = P_S$.
   (b) A imagem de P_S é S.
   (c) O núcleo de P_S é $S^\perp$.
   (d) $P_{S^\perp} = \mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} - P_S$ onde $\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a função identidade (ou seja $\mathrm{I}_{\mathbb{R}^n}(u) = u$) e $P_{S^\perp}$ denota a projeção ortogonal no subespaço $S^\perp$.
   (e) $P_{S^\perp} \circ P_{S^\perp} = P_{S^\perp}$.
   (f) A imagem de $P_{S^\perp}$ é $S^\perp$.
   (g) O núcleo de $P_{S^\perp}$ é S.
   (h) $(S^\perp)^\perp = S$.

7. Dado um subespaço vetorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos o seu complemento ortogonal como sendo
$$S^\perp = \{u \in \mathbb{R}^n :< u, v >= 0 \text{ para todo } v \in S\}.$$
   Mostre que $S^\perp$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Mostre que $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$.

8. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ uma matriz com m linhas e n colunas. Denote por $u_1, \dots u_m \in \mathbb{R}^n$ os vetores formados pelas linhas de A e por $v_1, \dots v_n \in \mathbb{R}^m$ os vetores formados pelas colunas de A. Seja $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a transformação linear determinada pela matriz A, i.e., $T_A(X) = A \cdot X$ onde pensamos em vetores de R^n (respectivamente R^m) como matrizes com uma coluna e n linhas (respectivamente m linhas). Mostre que
   (a) $\mathrm{Im}(T_A) = [v_1, \dots, v_n]$.
   (b) $N(T_A)^\perp = [u_1, \dots u_m]$.
   (c) A quantidade de linhas linearmente independentes de A é igual a quantidade de colunas linearmente independentes de A.

9. Sejam V e W espaços vetoriais. O produto cartesiano de V com W é o espaço vetorial $V \times W = \{(v, w) : v \in V, w \in W\}$ com soma e produto por escalar dados por
$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad a(v, w) = (av, aw).$$

(a) Mostre que se $(v_1, \ldots v_n)$ é base de V e $(w_1, \ldots w_m)$ é base de W então uma base de $V \times W$ é dada por

$$B = ((v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots (0, w_m)).$$

Conclua que $\dim(V \times W) = \dim V + \dim W$.

(b) Seja S um subespaço de V. Mostre que

$$\Delta_S = \{(u, u) \in V \times V : u \in S\} \subset V \times V$$

é um subespaço de $V \times V$.

(c) Mostre que $\dim S = \dim \Delta_S$.

(d) Mostre que se S_1 e S_2 são subespaços de V então a aplicação

$$T : S_1 \times S_2 \to V, \quad T(u_1, u_2) = u_1 - u_2$$

é uma aplicação linear.

(e) Mostre que $\mathrm{Im}(T) = S_1 + S_2$

(f) Mostre que $N(T) = \{(u, u) \in S_1 \times S_2 : u \in S_1 \cap S_2\} = \Delta_{S_1 \cap S_2} \subset S_1 \times S_2$.

(g) Utilize o teorema do núcleo e da imagem para mostrar que

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2).$$

10. Seja $V = \mathbb{R}^n$ e $V^* = \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ o seu espaço dual. Considere a transformação linear $T : V \to V^*$ dada por

$$T(v)(w) = \langle v, w \rangle,$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ (veja o exercício 4).

(a) Mostre que T é um isomorfismo.

(b) Para cada subespaço $S \subset V$, denote por $\mathrm{An}(S) \subset V^*$ o subconjunto dado por

$$\mathrm{An}(S) = \{\xi \in V^* : \xi(v) = 0 \text{ para todo } v \in S\}.$$

Mostre que $\mathrm{An}(S)$ é um subespaço de V^*.

(c) Mostre que T induz um isomorfismo entre $S^\perp$ e $\mathrm{An}(S)$. Conclua que

$$\dim \mathrm{An}(S) = n - \dim S.$$

(d) Mostre que se $B = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ é base de $\mathrm{An}(S)$, então um vetor $v \in V$ pertence a S se e somente se $\xi_1(v) = \cdots = \xi_k(v) = 0$. Em outras palavras $S = \Cap_{i=1}^k N(\xi_i)$. Note que esse resultado pode ser Interpretado como dando um sistema de equações para descrever o subespaço S.

(e) Encontre uma equação planar para a reta $\ell = [(-1, 1, 2)] \subset \mathbb{R}^3$.

(f) Encontre um sistema de equações que descreve o subespaço

$$S = [(-1, 1, 1, 1, 2), (1, 1, -2, 1, -1)] \subset \mathbb{R}^5.$$

11. Seja $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ o espaço de todas as funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que admitem derivadas de todas as ordens e seja $S \subset \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o subespaço gerado por $S = [\text{sen}x, \cos x]$. Seja $D : S \to S$ a aplicação linear que associa a cada função a sua primeira derivada. Qual é a matriz da transformação D com respeito a base $B = (\text{sen}x, \cos x)$ de S?

12. Considere a aplicação linear $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ dada por

$$T(p(t)) = p'(t) + p'(1) - 2p(0) + p(t).$$

   (a) Determine a matriz de T com respeito a base $B = (1, t, t^2)$.

   (b) Determine a matriz de T com respeito a base $B = (1 + t, 1 - t, 1 - t^2)$.

13. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbb{R}^4$ dada por

$$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (2x + y + w, -x + y - 3z, 3x + 3z - w, x + z + w).$$

   Considere as seguintes bases de $\mathcal{M}_{2\times 2}$ e $\mathbb{R}^4$ respectivamente:

$$E = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$F = ((1, 0, 1, 0), (1, -1, 0, 0)(0, 1, 0, 1)(2, -2, 2, 2)).$$

   (a) Encontre a matriz de T com respeito às bases E e F.

   (b) Encontre uma base G de $\mathbb{R}^4$ tal que $[T]_{GE}$ esteja na forma escalonada reduzida.

   (c) Se $\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ é a transformação

$$\psi(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

   calcule o determinante da transformação linear $\psi \circ T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$.

14. Sejam A e B matrizes 4×4 invertíveis tais que

$$\text{Det}\left(3B^3\left(A^2B^2\right)^{-1}\right) = 162, \qquad \text{Det}B = 2\det A^t.$$

   Determine os valores de Det$A$ e Det$B$.

15. Considere a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ dada por

$$T(A) = A + A^t.$$

   (a) Encontre todos os autovalores de T.

   (b) Encontre uma base para cada autoespaço de T.

   (c) Decida se T é diagonalizaável (JUSTIFIQUE!) e caso seja encontre a matriz de T na forma diagonal.

   DICA: Escreva uma decomposição $\mathcal{M}_{2\times 2} = S_1 \oplus S_2$ onde S_1 e S_2 são subespaços invariantes por T.

16. Considere a aplicação $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ dada por

$$T(A) = A - A^t.$$

   (a) Encontre todos os autovalores de T.

   (b) Encontre uma base para cada autoespaço de T.

   (c) Decida se T é diagonalizaável (JUSTIFIQUE!) e caso seja encontre a matriz de T na forma diagonal.

   DICA: Escreva uma decomposição $\mathcal{M}_{2\times 2} = S_1 \oplus S_2$ onde S_1 e S_2 são subespaços invariantes por T.

17. Em cada item abaixo é dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representada por uma matriz na base canônica de $\mathbb{R}^2$. Para cada uma dessas transformação faça o seguinte: (i) Encontre todos os autovalores; (ii) Encontre uma base de cada autoespaço; (iii) determine se a transformação linear é diagonalizável (JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUA RESPOSTA!); (iv) Caso seja diagonalizável, encontre uma base de autovetrores e escreva a matriz da transformação T nessa base.

   (a)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (b)
$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   (c)
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

   (d)
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

   (e)
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (f)
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (g)
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   (h)
$$\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 3 \end{pmatrix}$$

18. Em cada item abaixo é dada uma transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada por uma matriz na base canônica de $\mathbb{R}^3$. Para cada uma dessas transformação faça o seguinte: (i) Encontre todos os autovalores; (ii) Encontre uma base de cada autoespaço; (iii) determine se a transformação linear é diagonalizável (JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUA RESPOSTA!); (iv) Caso seja diagonalizável, encontre uma base de autovetrores e escreva a matriz da transformação T nessa base.

(a)
$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = -2$ é uma raíz do polinômio característico.

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = -2$ é uma raíz do polinômio característico.

(c)
$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = -2$ é uma raíz do polinômio característico.

(d)
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = 1$ é uma raíz do polinômio característico.

(e)
$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = 6$ é uma raíz do polinômio característico.

(f)
$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & -4 \\ 3 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = 6$ é uma raíz do polinômio característico.

(g)
$$\begin{pmatrix} 14 & 4 & 4 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

DICA: $t = 6$ é uma raíz do polinômio característico.

19. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Calcule (sem auxílio de calculadora ou computador) a matriz A^{2020}. Justifique claramente como o cálculo foi efetuado.

(b) Encontre (sem auxílio de calculadora ou computador) uma matriz C tal que $C^2 = A$. Justifique claramente como o cálculo foi efetuado.

DICA: Se B é uma matriz invertível e $n \in \mathbb{N}$, então $(BAB^{-1})^n = BA^nB^{-1}$ e portanto $A^n = B^{-1}(BAB^{-1})^n B$. Escolha uma base boa para fazer as contas!

20. Seja A uma matriz 2×2 tal que $A^t = A$. Mostre que A é diagonalizável.

OBS: O resultado vale mais geralmente para qualquer matriz $n \times n$ simétrica.

21. Para as seguintes transformações lineares $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$, (i) Encontre todos os autovalores; (ii) Encontre uma base de cada autoespaço; (iii) determine se a transformação linear é diagonalizável (JUSTIFIQUE CLARAMENTE SUA RESPOSTA!); (iv) Caso seja diagonalizável, encontre uma base de autovetrores e escreva a matriz da transformação T nessa base.

(a) $T(a + bt + ct^2) = (4b + 2c) + (-a + 5b - c)t + (3a - 3b + c)t^2$

(b) $T(a + bt + ct^2) = (a - 3b - 3c) - 2bt + (3a - 3b + c)t^2$

(c) $T(a + bt + ct^2) = (-a + b + c) + (-a + b - c)t + 2at^2$

(d) $T(a + bt + ct^2) = (a + b) + (a + c)t - at^2$

22. Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear. Seja $p_T(t)$ o polinmio caracterstico de T. Decida se as seguintes afirmações são verdadeiras ou falsas. Justifique sua resposta com uma demonstração para afirmações verdadeiras, ou um contra-exemplo para afirmações falsas.

(a) Se $p_T(t) = t^4 - 1$ então T ńecessariamente diagonalizável.

(b) Se $p_T(t) = t^3(t + 2)$ e a imagem de T tem dimensão 1 então T ńecessariamente diagonalizável.

(c) Se $p_T(t) = t^2(t^2 - 1)$ e o núcleo de T tem dimensão 2 então T ńecessariamente diagonalizável.

(d) Se $p_T(t) = t^2(t^2 - 2t + 1)$ e o núcleo de T tem dimensão 2 então T ńecessariamente diagonalizável.