MAT134 - Álgebra Linear 1 – Lista 3

1. Verifique se os subespaços S_1 e S_2 do espaço vetorial V satisfazem $S_1 \subset S_2$, $S_2 \subset S_2$ $S_1 = S_2$ ou nenhuma das acima (nesse caso encontre uma base de $S_1 \cap S_2$).
   (a) $S_1 = [(1,0,0),(0,1,0)]$ e $S_2 = [(1,1,0),(1,-1,0)]$, quando $V = \mathbb{R}^3$.
   (b) $S_1 = [\text{sen}2t, \cos 2t, \text{sen}t\cos t]$ e $S_2 = [1, \text{sen}2t, \cos 2t]$, quando $V = C(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} :\ f$ é contínua $\}$.
   (c) $S_1 = [1, t, t^2, t^3]$ e $S_2 = [1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2]$, quando $V = P_3(\mathbb{R})$.

2. Sejam $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$, onde V é um espaço vetorial. Sejam $a_2, \ldots, a_n$ números reais não nulos. Mostre que se os vetores $v_1, \ldots v_n$ são linearmente independentes então os vetores
$$v_1, v_1 + a_2 v_2, v_1 + a_3 v_3, \ldots, v_n + a_n v_n$$
são linearmente independentes. Você consegue mostrar a recíproca?

3. Sejam V um espaço vetorial e $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ uma base de V. Seja $v \in V$. O conjunto $A = \{v, v-e_1, v-e_2, v-e_3\}$ é um conjunto de geradores de V? O conjunto A pode ser linearmente independente? Justifique.

4. Determine uma base e a dimensão de cada um dos seguintes subespaços vetoriais abaixo:
   (a) $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y = w \text{ e } x - 3y + w = 0\}$
   (b) $S = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : AB = BA\}$ onde B é a matriz
$$B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$
   (c) $S = \{p \in P_4(\mathbb{R}) : p(1) = p(-1) = 0\}$.
   (d) $S = \{\begin{pmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} : a, b \in \mathbb{R}\}$.

5. Seja $V = \mathcal{M}_{3\times 3}$ o espaço das matrizes 3×3 com entradas reais e considere
$$S = \{(a_{ij}) \in V : a_{11} + a_{12} + a_{13} = a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33}\}.$$
   (a) Mostre que S é um subespaço de V.
   (b) Encontre uma base de S e determine $\dim S$.
   (c) Encontre uma base de V que contém a base que você encontrou no item anterior.

6. Seja $B = (1, 2-x, x^2+1, 1+x+x^3)$. Verifique que B é uma base de $P_3(\mathbb{R})$. Encontre as coordenadas de x^3 na base B.

7. Seja $V = \mathcal{M}_{2\times 2}$ e considere os seguintes elementos de V:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ é uma base de V.

(b) Determine $m, n, r, s \in \mathbb{R}$ tais que $P = A$ onde

$$P = (m, n, n, m)_B, \quad A = \begin{pmatrix} r & 1 \\ 2 & s \end{pmatrix}$$

8. Considere os polinômios

$$p_1(x) = 1 + 2x + x^3, \quad p_2(x) = x + x^2 - x^3, \quad p_3(x) = a + x + bx^2 + 5x^3,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que p_1, p_2 são linearmente independentes.

(b) Mostre que p_1, p_3 são linearmente independentes para todo $a, b \in \mathbb{R}$.

(c) Existe algum valor de $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $p_2(x), p_3(x)$ são linearmente dependentes?

(d) Determine todos os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a dimensão do espaço gerado por p_1, p_2 e p_3 seja 2.

9. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $V = \mathcal{M}_{3\times 3}$:

$$S_1 = \{A \in V : A = A^t\}, \quad S_2 = \{A \in V : \mathrm{tr}A = 0\},$$

onde A^t denota a matriz transposta de A e $\mathrm{tr}A$ é o traço de A (a soma dos elementos da diagonal principal de A.

(a) Mostre que S_1 e S_2 são subespaços de V.

(b) Determine uma base e a dimensão de S_1.

(c) Determine uma base e a dimensão de S_2.

(d) Determine uma base e a dimensão de $S_1 \cap S_2$.

(e) Complete a base de $S_1 \cap S_2$ encontrada acima para uma base de V.

10. Considere os seguintes subespaços vetoriais de $V = \mathcal{M}_{3\times 3}$:

$$S_1 = \{A \in V : A = A^t\}, \quad S_2 = \{A \in V : A = -A^t\},$$

onde A^t denota a matriz transposta de A.

(a) Determine uma base e a dimensão de S_1.

(b) Determine uma base e a dimensão de S_2.

(c) Mostre que $S_1 \cap S_2 = \{0\}$.

(d) Mostre que qualquer matriz 3×3 pode ser escrita de maneira única como uma soma de uma matriz simétrica e uma anti-simétrica (ou seja, $A = A_1 + A_2$ onde $A_1 \in S_1$ e $A_2 \in S_2$).

DICA: Construa uma base B de V onde os primeiros elementos formam uma base de S_1 e os últimos formam uma base de S_2. Explique como isso resolve o problema.

(e) Escreva a matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

como uma soma de uma matriz em S_1 e uma em S_2.

11. Seja $V = \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ o espaço vetorial das transformações lineares de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$. Denote por $< \cdot, \cdot >$ o produto interno Euclidiano de $\mathbb{R}^3$, i.e.,

$$< (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) >= \sum_{i=1}^{3} x_i y_i.$$

Considere os seguintes subconjuntos de V:

$$S_1 = \{T \in V :< T(u), v >=< u, T(v) > \text{ para todo } u, v \in \mathbb{R}^3\}$$

$$S_2 = \{T \in V :< T(u), v >= - < u, T(v) > \text{ para todo } u, v \in \mathbb{R}^3\}.$$

(a) Mostre que S_1 e S_2 são subespaços vetoriais de V.

(b) Mostre que $V = S_1 \oplus S_2$.

(c) Encontre uma decomposição da transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ abaixo

$$T(x, y, z) = (2x + y - z, x + y - z, -2y + 3z),$$

ou seja, encontre $T_1 \in S_1$ e $T_2 \in S_2$ tais que $T = T_1 + T_2$.

(**Dica:** Mostre que a função

$$\psi : \mathrm{Lin}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3) \to \mathcal{M}_{3\times 3}$$

que associa a cada $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a matriz que tem como entrada (i, j) o número

$$T_{ij} =< T(e_i), e_j >$$

é um isomorfismo linear e use o exercício 12. Aqui e_i denota o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^3$.)

12. Considere os seguintes subespaços de $P_3(\mathbb{R})$

$$S_1 = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : 2p(0) = p(-1) = p(1)\}$$

$$S_2 = [t^3 + t - 1, t^2 - t - 1, t^3 + t^2 - 2],$$

$$S_3 = \{p(t) \in P_3(\mathbb{R}) : p'''(t) = 0\}.$$

Seja

$$W = S_1 + (S_2 \cap S_3).$$

(a) Encontre uma base e a dimensão de W.

(b) Determine todos os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais

$$p(t) = at^3 - t^2 + \frac{a^2}{2}t + 2a \in W.$$

13. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear e sejam $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vetores linearmente independentes de W. Mostre que se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são vetores de V tais que $T(v_i) = w_i$, então $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. A recíproca é verdadeira? Ou seja, é verdade que se $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes então $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ são linearmente independentes? Prove ou dê um contra exemplo.

14. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear injetora. Mostre que se $v_1, \ldots, v_n \in V$ são linearmente independentes então $T(v_1), \ldots, T(v_n) \in W$ são linearmente independentes.

15. Sejam V e W espaços vetoriais tais que $\dim V > \dim W$. Mostre que se $T : V \to W$ é uma transformação linear então $N(T) \neq \{0\}$.

16. Sejam V e W espaços vetoriais tais que $\dim V < \dim W$. Mostre que se $T : V \to W$ é uma transformação linear então $\mathrm{Im}(T) \neq W$.

17. Sejam $F : V \to W$ e $G : W \to U$ aplicações lineares. Mostre que:

(a) $\dim(\mathrm{Im}(G \circ F)) \leq \dim(\mathrm{Im} G)$.

(b) $\dim(\mathrm{Im}(G \circ F)) \leq \dim(\mathrm{Im} F)$.

18. Seja V o espaço das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que admitem derivadas de todas as ordens.

(a) Seja $D : V \to V$ a transformação $D(f) = f'$ que associa a cada função a sua derivada. Mostre que D é uma aplicação linear.

(b) Mostre que o núcleo de D é o subespaço das funções constantes (que é isomorfo a $\mathbb{R}$)

(c) Seja $D^2 = D \circ D : V \to V$ a transformação que associa a cada função a sua segunda derivada. Mostre que o núcleo de D^2 é o subespaço das funções da forma $N(D^2) = \{f(x) = ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$.

(d) Determine o núcleo da transformação $D^n : V \to V$ que associa a cada função a sua n-ésima derivada.

19. Dado um subespaço vetorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$, definimos o seu complemento ortogonal como sendo

$$S^{\perp} = \{u \in \mathbb{R}^n : \angle u, v\rangle = 0 \text{ para todo } v \in S\},$$

onde,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \langle (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Mostre que $S^{\perp}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Mostre que $\mathbb{R}^n = S \oplus S^{\perp}$.

20. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ uma matriz com m linhas e n colunas. Denote por $u_1, \ldots u_m \in \mathbb{R}^n$ os vetores formados pelas linhas de A e por $v_1, \ldots v_n \in \mathbb{R}^m$ os vetores formados pelas colunas de A. Seja $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a transformação linear determinada pela matriz A, i.e., $T_A(X) = A \cdot X$ onde pensamos em vetores de R^n (respectivamente R^m) como matrizes com uma coluna e n linhas (respectivamente m linhas). Mostre que

(a) $\mathrm{Im}(T_A) = [v_1, \ldots, v_n]$.

(b) $N(T_A)^{\perp} = [u_1, \ldots u_m]$.

(c) A quantidade de linhas linearmente independentes de A é igual a quantidade de colunas linearmente independentes de A.

21. Seja $V = P_3(\mathbb{R})$ e considere a seguinte função:

$$< \ , \ >: V \times V \to \mathbb{R}, \quad < p(t), q(t) >= \int_0^1 p(t)q(t)dt.$$

(a) Mostre que $< \ , \ >$ é um produto interno.

(b) Encontre uma base ortonormal de $(V, < \ , \ >)$.

(c) Seja $S = \{p(t) \in V : p(1) = p(-1) = 0\}$. Determine uma base de $S^{\perp}$.

(d) Determine a projeção ortogonal de $p(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 4t^3$ em S.

[DICA: Para demonstrar o item (c) utilize o teorema do núcleo e da imagem que diz o seguinte: Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear então $\dim(N(T)) + \dim(Im(T)) = n$.]